ECUACIÓN DEL M.A.S.

Una partícula tiene un desplazamiento x dado por: $x(t) = 0.3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ en donde x se mide en metros y t en segundos. a) ¿Cuáles son la frecuencia, el periodo, la amplitud, la frecuencia angular y la constante de fase del movimiento? b) ¿En dónde se encuentra la partícula para $t =$ 1s? c) Calcular la velocidad y la aceleración en un instante cualquiera. d) Hallar la posición y velocidad inicial de la partícula.

Solución: **I.T.I. 96, 98, 00, 03, I.T.T. 03**

a) Por comparación con la expresión $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ tenemos que:

$$\boxed{A = 0.3\text{ m}} \quad \boxed{\omega = 2\text{ rad/s}} \quad \boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}\text{ rad}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{3.14\text{ s}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \boxed{0.32\text{ Hz}}$$

b) Sustituyendo en la ecuación tenemos: $x(1\text{ s}) = \boxed{-0.245\text{ m}}$

c) Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \boxed{-0.6\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \boxed{-1.2\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

d) Si tomamos como instante inicial $t = 0$, tenemos que:

$$\boxed{x(0) = 0.26\text{ m}} \quad \boxed{v(0) = -0.3\text{ m/s}}$$

Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación: $x = 4\,\mathrm{sen}(0.1t + 0.5)$ donde todas las cantidades se expresan en unidades del S.I. Encontrar:

a) La amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento
b) La velocidad y la aceleración.
c) Las condiciones iniciales (en $t = 0$).
d) La posición, velocidad y aceleración para $t = 5$ s.

Dibujar un gráfico representando la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Solución: I.T.I. 94, 95, 98, I.T.T. 99, 02, 05

a) Comparando con la expresión general del M.A.S.:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) \\[2ex] x(t) = 4\cos\left(0.1\,t + 0.5 - \dfrac{\pi}{2}\right) = 4\,\mathrm{sen}(0.1\,t + 0.5) \end{array}\right\}$$

Amplitud del movimiento: $A = 4$ m.

Frecuencia angular: $\omega = 0.1$ rad/s

Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 20\pi\,\mathrm{s}$

Frecuencia: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{20\pi}$ Hz

Fase inicial: $\varphi = \left(0.5 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ rad (si utilizamos la función coseno para el M.A.S.)

$\theta = 0.5$ rad (si utilizamos la función seno para el M.A.S.)

b) Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0.4\cos(0.1t + 0.5) \quad , \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -0.04\,\mathrm{sen}(0.1\,t + 0.5)$$

c) Para el instante inicial $t = 0$ tenemos que:

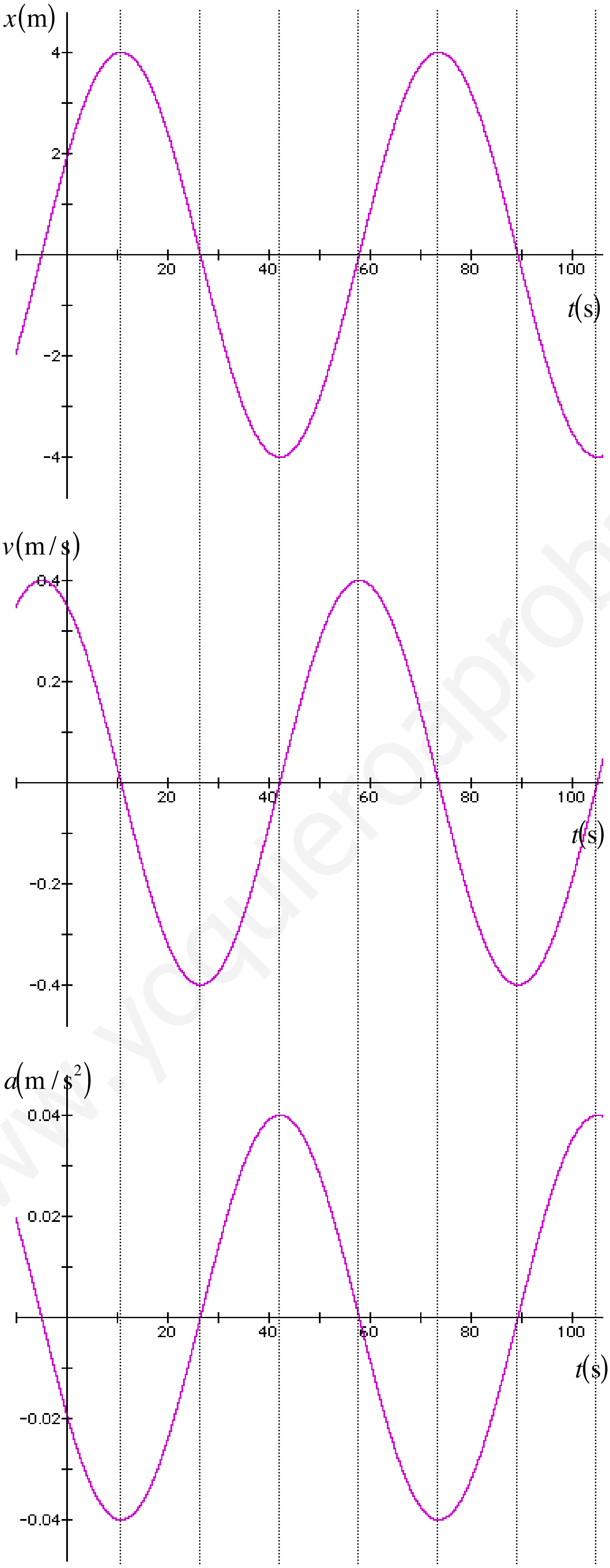
$$x_0 = x(t = 0) = 4\,\mathrm{sen}(0.5) = 1.92 \text{ m} \quad , \quad v_0 = v(t = 0) = 0.4\cos(0.5) = 0.351 \text{ m/s}$$

d) Sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$x(t = 5) = 4\,\mathrm{sen}(1) = 3.37 \text{ m} \quad , \quad v(t = 5) = 0.4\cos(1) = 0.216 \text{ m/s}$$

$$a(t = 5) = -0.04\,\mathrm{sen}(1) = -3.37\cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

La representación gráfica de la posición, velocidad y aceleración será:


x(m)
4
2
-2
-4
20
40
60
80
100
t(s)
v(m/s)
0.4
0.2
-0.2
-0.4
20
40
60
80
100
t(s)
a(m/s²)
0.04
0.02
-0.02
-0.04
20
40
60
80
100
t(s)

La ecuación del movimiento de un cuerpo, suspendido de un resorte y que oscila verticalmente es $y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$, siendo A y ω constantes. Calcular: $v(t)$, $a(t)$, $v(y)$, $a(y)$, amplitud, velocidad máxima, aceleración máxima, dibujar gráficas de y, v y a en función del tiempo.

Solución: I.T.I. 97, 01, 04, I.T.T. 04

Derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \boxed{A\omega\cos(\omega t)} \qquad\qquad \boxed{-A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)}$$

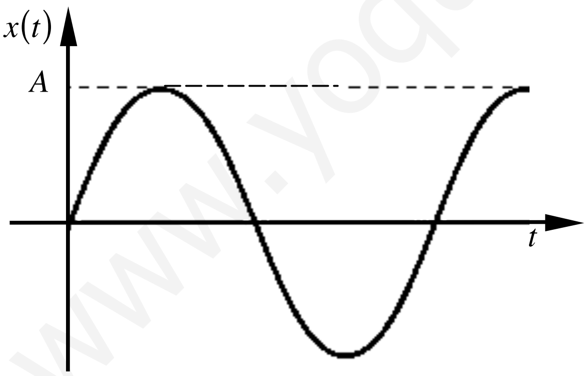
Teniendo en cuenta la expresión $y(t)$ y sustituyéndola en $v(t)$ y $a(t)$ para eliminar el tiempo:

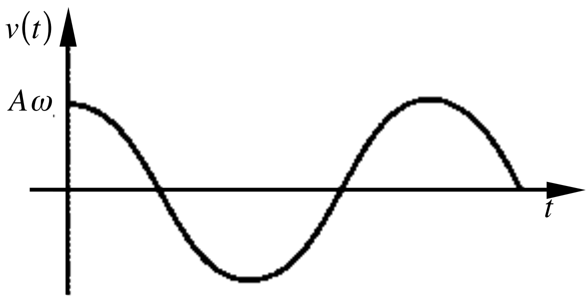
$$\cos(\omega t) = \pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\omega t)} \quad\Rightarrow\quad v(y) = \boxed{\pm\omega\sqrt{A^2-y^2}}\,, \quad a(y) = \boxed{-\omega^2 y}$$

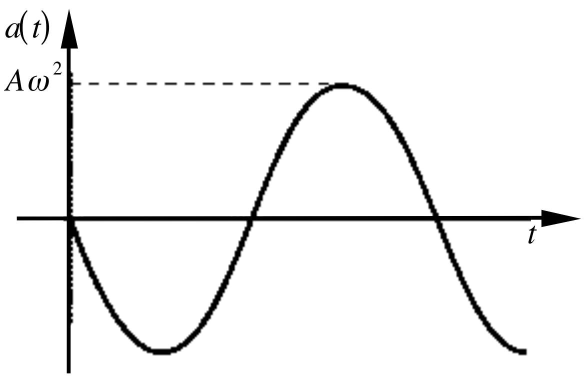
Se trata de un Movimiento Armónico Simple centrado en el origen. La amplitud se corresponde con el valor máximo de y: $\boxed{A}$

El valor máximo de la velocidad será: $\boxed{v_{máx.} = A\omega}$

El valor máximo de la aceleración será: $\boxed{a_{máx.} = A\omega^2}$







Una partícula de masa *m* realiza un M.A.S. de periodo 1.5 s y se encuentra inicialmente en x_0 = 25 cm y con una velocidad v_0 = 50 cm/s. Escribir las ecuaciones de su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Solución: I.T.T. 00, 03

La frecuencia angular del M.A.S. será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$.

La ecuación del M.A.S. es: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, las ecuaciones para la velocidad y la aceleración se obtienen derivando sucesivamente:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Las constantes A y φ las determinaremos a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Para $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = A\cos(\varphi) \\ v_0 = -A\omega\,\text{sen}(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 27.7\ \text{cm} \\ \varphi = -0.445\ \text{rad} = -25.5^\circ \end{array}\right.$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = (27.7\ \text{cm})\cos\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \\ v(t) = -(116\ \text{cm/s})\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \\ a(t) = -\left(486\ \text{cm/s}^2\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}t - 0.445\right) \end{array}}$$

Una partícula de 4 kg se mueve a lo largo del eje *X* bajo la acción de la fuerza: $F_x = -k\,x$, con $k = \left(\frac{\pi^2}{16}\right)\text{N/m}$. Cuando t = 2 s, la partícula pasa por el origen, y cuando t = 4 s su velocidad es de 4 m/s. Encontrar la ecuación del movimiento.

Solución: I.T.T. 97, 01, 04

Como la fuerza es de tipo elástico va a realizar un Movimiento Armónico Simple con frecuencia angular: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{8}\ \text{rad/s}$. Para calcular la amplitud A y la fase inicial del movimiento φ aplicaremos la condiciones iniciales del movimiento:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega\ \mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x(2\mathrm{s}) = 0 \\ v(4\,\mathrm{s}) = 4\mathrm{m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0 \\ -A\,\omega\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = 4\mathrm{m/s} \end{array}\right\}$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las cuales obtenemos:

$$\boxed{A = \frac{32\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{m}} \qquad \boxed{\varphi = -\frac{3\pi}{4}}$$

Determinar la frecuencia angular y la amplitud de las oscilaciones de una partícula si a las distancias x_1 y x_2 de la posición de equilibrio su velocidad era v_1 y v_2 respectivamente.

Solución: I.T.T. 99, 02, 05

Teniendo en cuenta la expresión para la posición y velocidad en un M.A.S.:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \\ v(t) = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1$$

Aplicándolo a los datos que nos dan:

$$\left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{v_1}{\omega A}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{v_2}{\omega A}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} A = \sqrt{\dfrac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} \end{array}} \right.$$