Unidad I. Movimiento Oscilatorio.

1.1 Aspectos generales del movimiento periódico.

En el estudio de la naturaleza, uno de los movimientos más interesantes es el movimiento periódico. En él existe un comportamiento repetitivo lo cual permite construir modelos matemáticos que lo representen y realizar con ellos su análisis. Su presencia en la naturaleza es muy alta, de ahí su importancia y como ejemplo de ellos se pueden mencionar los siguientes:

- El movimiento de una rueda con rapidez constante.
- El movimiento de un péndulo.
- Una masa sujeta a un resorte.
- La vibración de los átomos en un sólido.
- El movimiento de los átomos de una molécula.
- El movimiento de los electrones en una antena.
- El movimiento de los electrones en un circuito con bobina y capacitor.
- La tierra alrededor del sol.
- Un objeto sujeto a la acción de las ondas en el agua.

En todos los movimientos periódicos se define como periodo T al tiempo en que se repite el movimiento y a la frecuencia del mismo f como el número de movimientos por unidad de tiempo relacionando ambas variables a partir de:

$$T = \frac{1}{f}$$

en donde se usa como unidad para la frecuencia los Hertz (Hz) equivalentes a un ciclo por segundo.

Dentro de los movimientos periódicos es posible distinguir dos tipos; unos donde, al existir una fuerza que disminuya el movimiento (campo de fuerzas no conservativo), el cuerpo o partícula se detendría en cualquier posición, dependiendo del valor de la fuerza. Este es el caso del movimiento de una rueda. Otros son los que, independiente del valor de la fuerza y mientras siga siendo repetitivo, siempre se detendrán en el mismo punto, denominado punto de equilibrio. Tal es el caso de un péndulo o de un sistema masa-resorte.

Estos últimos son los que se estudiarán en este capítulo y, respecto al punto de equilibrio, éste tendrá como característica que la fuerza neta sobre el cuerpo o partícula es cero. A partir de esta característica se pueden distinguir dos tipos de puntos de equilibrio; aquel al cual siempre tenderá a ubicarse al detenerse o aquel que, aunque la fuerza neta sea cero, al moverse ligeramente de él, el cuerpo o partícula se sale del punto. Tal es el caso de un péndulo compuesto que, al girar 360°, en el punto más alto la suma de fuerzas es cero y puede detenerse y mantenerse ahí, pero fácilmente perdería su posición, mientras que en la parte más baja, siempre estaría en equilibrio (ver figura 1.1).

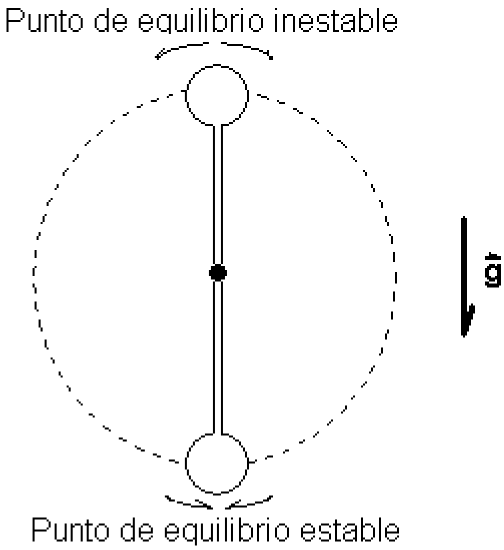


Figura 1.1 Tipos de equilibrio de un cuerpo

Los movimientos periódicos con punto de equilibrio estable se denominan movimientos oscilatorios o vibratorios y cualquier desplazamiento de dicho punto generará una fuerza restauradora, contraria al desplazamiento, que tiende a llevar al cuerpo nuevamente al equilibrio. Tal es el caso de la fuerza de un resorte sobre una masa cuando se estira o comprime tal y como se puede observar en la figura 1.2.

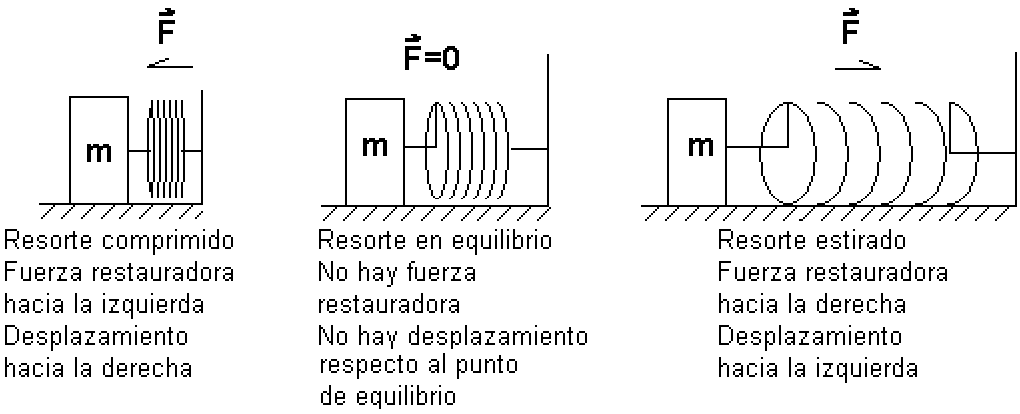


Figura 1.2 Sistema masa-resorte

Si se añade una fuerza que se opone al movimiento, como la fuerza de fricción entre la masa y la superficie sobre la que se apoya en la figura anterior, dicha fuerza provocará que la masa llegue al punto de equilibrio. A este tipo de fuerzas se le denomina fuerza amortiguante y al movimiento como oscilatorio amortiguado.

Finalmente, si se añade una fuerza externa, ya sea para tratar de compensar a la fuerza amortiguadora o para hacer que el sistema oscile a cierta frecuencia, el movimiento se denomina oscilatorio forzado.

1.2 Movimiento Armónico Simple.

Dentro de los movimientos oscilatorios, el que resulta más sencillo para su estudio es el Movimiento Armónico Simple (MAS) cuya característica fundamental es que la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. Esta condición es a la que se aproximan muchos sistemas reales, por lo que su estudio es fundamental en los movimientos oscilatorios.

1.2.1 Ecuación diferencial y soluciones.

Definiendo matemáticamente la característica del MAS se tendrá

$$F = -kx$$

en donde el signo menos indica que la fuerza es opuesta al desplazamiento según se había mencionado anteriormente y *k* es la constante de proporcionalidad.

De la segunda Ley de Newton expresando a la aceleración como la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo, e igualando ambas ecuaciones se llega a:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Dividiendo entre *m* e igualando a cero el segundo miembro se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

haciendo $k/m = \omega^2$ se llega a la ecuación diferencial del MAS.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Algunas soluciones para esta ecuación diferencial son:

$$x = A\,sen\,(\omega t + \delta)$$

$$x = A\cos\,(\omega t + \delta)$$

$$x = A sen\,(\omega t + \delta) + B\cos\,(\omega t + \delta)$$

donde *A* es la amplitud del movimiento (máximo desplazamiento), ω es la frecuencia angular (constante que define la repetitividad del movimiento) y δ es el ángulo de fase inicial (valor del ángulo que nos indica la posición inicial. Para que la función sea periódica, debe cumplir

$$x(t) = x(t+T)$$

sustituyendo valores tomando la segunda solución mostrada anteriormente se tiene:

$$A\,sen\,(\omega t + \delta) = A\,sen\,(\omega[t+T] + \delta) =$$
$$= A\,sen\,(\omega t + \omega T + \delta) = A\,sen\,([\omega t + \delta] + \omega T) =$$
$$= A\{sen\,(\omega t + \delta)\cos\omega T + \cos\,(\omega t + \delta)\,sen\omega T\}$$

Para que la igualdad se cumpla, ωT debe ser igual a 2π ya que $cos\ 2\pi = 1$ y $sen\ 2\pi = 0$ por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

denominándose a ω frecuencia angular. Dimensionalmente se expresa en radianes sobre segundo.

Por otro lado, usando la misma solución, para cuando *t = 0*, se tiene

$$x(t=0) = A\cos(\omega[0]+\delta) = A\cos\delta = x_0$$

por tanto, δ es el ángulo que define la posición inicial por lo que se llama ángulo de fase inicial o constante de fase. Diferentes valores de δ se muestran en la figura 1.3.

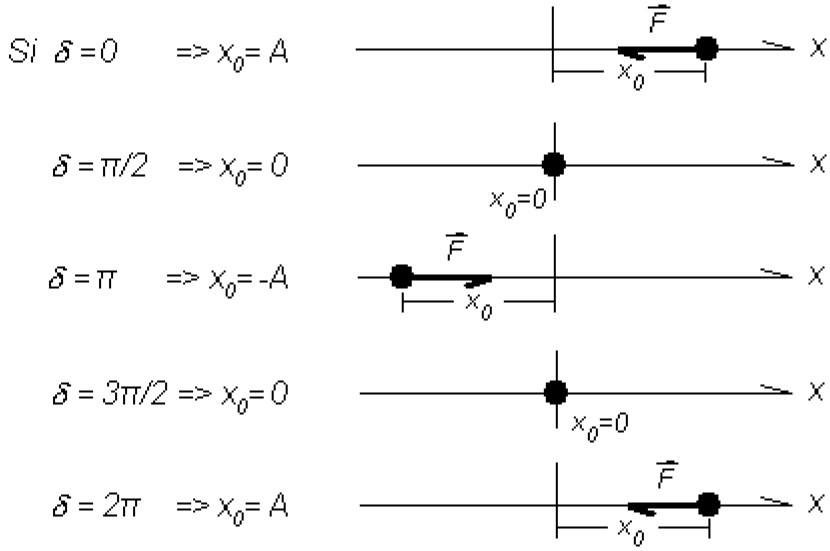


Figura1.3 Posición inicial para diferentes valores de δ

Ejemplo 1.2.1.1

Verificar que las expresiones que se muestran a continuación son soluciones para un movimiento armónico simple. (a) $x = A\,sen(\omega t+\delta)$. (b) $x = A\cos(\omega t+\delta)$. (c) $x = A\,sen(\omega t+\delta)+B\cos(\omega t+\delta)$. (d) $x = Ae^{j\omega t}+Be^{-j\omega t}$.

Solución. Verificar que es una solución de un MAS significa que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$, por lo que:

(a) $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\,sen(\omega t+\delta)] = A\cos(\omega t+\delta)\frac{d}{dt}(\omega t+\delta) = A\omega\cos(\omega t+\delta)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t+\delta)] = A\omega[-sen(\omega t+\delta)]\frac{d}{dt}(\omega t+\delta) = -A\omega^2\,sen(\omega t+\delta)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencia tanto *x* como su segunda derivada se tiene:

$$-A\omega^2\,sen(\omega t+\delta)+\omega^2 A\,sen(\omega t+\delta) = 0$$

observando que la igualdad se cumple y por tanto $x = A\,sen(\omega t+\delta)$ es solución de un MAS.

(b) $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t+\delta)] = -A\,sen(\omega t+\delta)\frac{d}{dt}(\omega t+\delta) = -A\omega\,sen(\omega t+\delta)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}[-A\omega\, sen\,(\omega t+\delta)]=-A\omega[\cos(\omega t+\delta)\frac{d}{dt}(\omega t+\delta)=-A\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencia tanto *x* como su segunda derivada se tiene:

$$-A\omega^2\cos(\omega t+\delta)+\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)=0$$

por lo que también será solución de un MAS.

(c) $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}[A\,sen\,(\omega t+\delta)+B\cos(\omega t+\delta)]=A\omega\cos(\omega t+\delta)-B\omega\, sen\,(\omega t+\delta)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t+\delta)-B\omega\, sen\,(\omega t+\delta)]=-A\omega^2\, sen\,(\omega t+\delta)--B\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencia tanto *x* como su segunda derivada se tiene:

$$-A\omega^2\, sen\,(\omega t+\delta)-B\omega^2\cos(\omega t+\delta)+\omega^2[A\,sen\,(\omega t+\delta)+B\cos(\omega t+\delta)]=0$$

cumpliéndose nuevamente la igualdad por lo que sí es solución del MAS.

(d) $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}[Ae^{j\omega t}+Be^{-j\omega t}]=jA\omega e^{j\omega t}-jB\omega e^{-j\omega t}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}[jA\omega e^{j\omega t}-jB\omega e^{-j\omega t}]=j^2A\omega^2e^{j\omega t}+j^2B\omega^2e^{-j\omega t}$ pero $j=\sqrt{-1}\Rightarrow j^2=-1$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2e^{j\omega t}-B\omega^2e^{-j\omega t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-A\omega^2e^{j\omega t}-B\omega^2e^{-j\omega t}+\omega^2[Ae^{j\omega t}+Be^{-j\omega t}]=0$$

satisfaciendo también la ecuación diferencial.

1.2.2 Cinemática de un MAS.

Partiendo de la solución $x=A\cos(\omega t+\delta)$ y usando las ecuaciones generales del movimiento $v=\frac{dx}{dt}$ y $a=\frac{dv}{dt}$ ya que la trayectoria es lineal en x, se llega a:

$$v=-A\omega\, sen\,(\omega t+\delta)$$

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

que con la primer ecuación nos describen el comportamiento, desde el punto de vista cinemático, de un Movimiento Armónico Simple. De las ecuaciones anteriores se puede observar, a partir de los valores máximos de las funciones cosenoidal y senoidal que, cuando hay un máximo desplazamiento positivo, la velocidad es cero y la aceleración es máxima negativa, mientras que si el desplazamiento es máximo negativo, la velocidad también es cero pero la aceleración es máxima positiva. En el caso de que el desplazamiento sea cero, la aceleración también lo será y la velocidad es máxima positiva o negativa según la dirección en que se mueva. Esto se puede observar con mayor claridad en la figura 1.4.

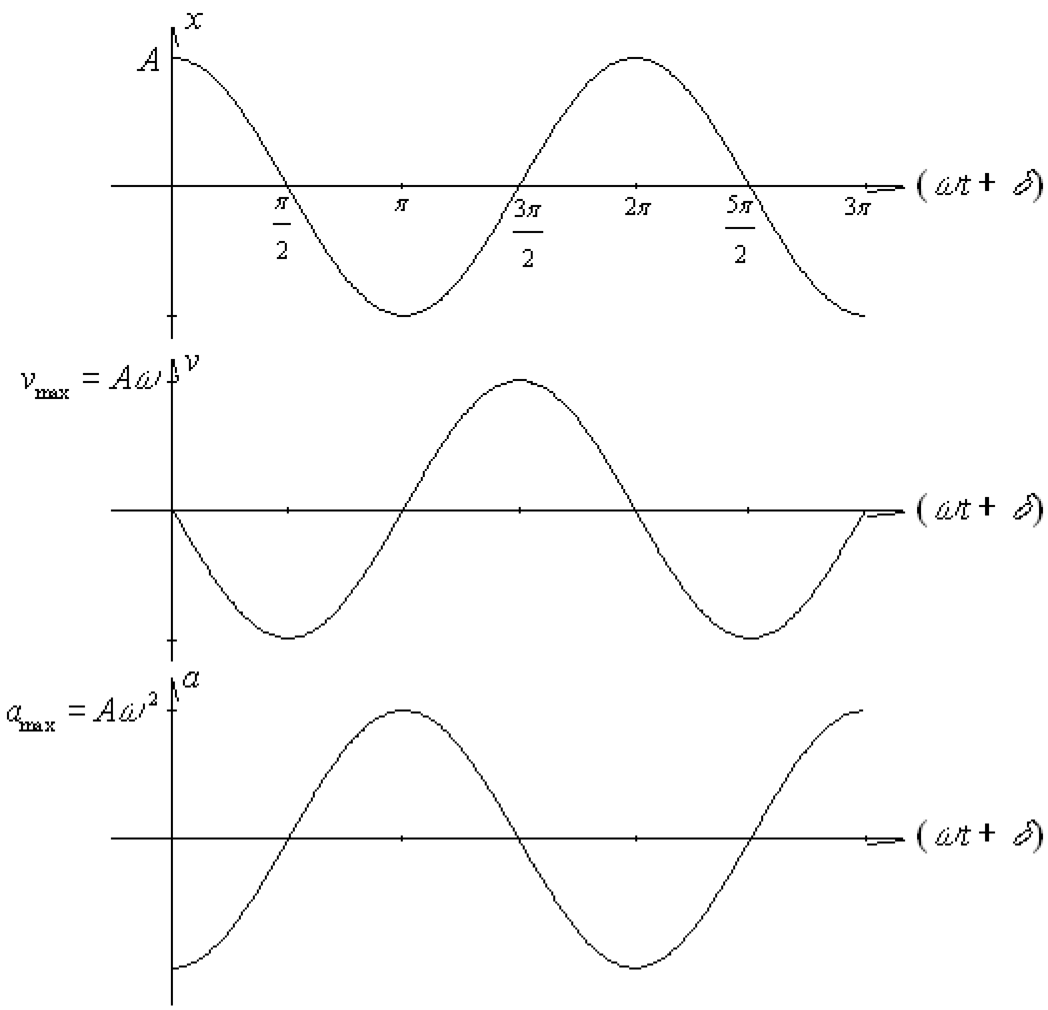


Figura 1.4 Comportamiento de *x*, *v* y *a* en el MAS

Si se graficara exclusivamente respecto al tiempo, las curvas anteriores se desplazarían de acuerdo al valor de δ quedando como se observa en la figura 1.5. En el caso de que el argumento de la función $(\omega t+\delta)$ el signo sea positivo, las curvas se desplazan hacia la izquierda y si es negativo $(\omega t-\delta)$ el desplazamiento de las curvas es hacia la derecha. Las condiciones iniciales de la partícula (posición, velocidad y aceleración cuando t = 0) serán:

$$x(0) = A\cos\delta$$

$$v(0) = -A\omega\, sen\,\delta$$

$$a(0) = -A\omega^2\cos\delta$$

Finalmente, los valores máximos de estas variables se tendrán cuando las funciones seno y coseno sean máximas, esto es, cuando alcancen el valor de 1, por lo que, tomando el valor absoluto de las funciones evaluadas el coseno en cero y el seno en $\pi/2$ se tiene

$$x_{\max} = \left|A\cos(0)\right| = A$$

$$v_{\max} = \left|-A\omega\, sen(\pi/2)\right| = A\omega$$

$$a_{\max} = \left|-A\omega^2\cos(0)\right| = A\omega^2$$

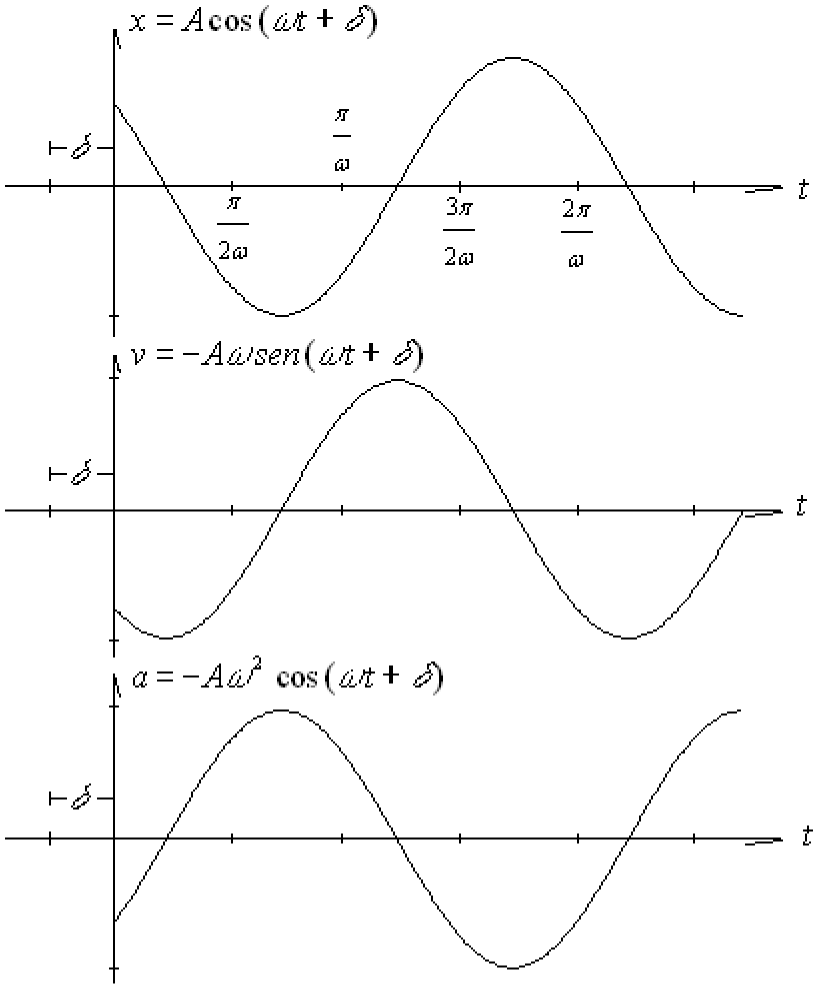


Figura 1.5 Comportamiento de *x*, *v* y *a* en el MAS con fase inicial

Ejemplo 1.2.2.1

(14.23 T-M) La posición de una partícula viene dada por $x = (7cm)\cos 6\pi t$, en donde t viene dado en segundos. Determinar (a) la frecuencia, (b) el periodo y (c) la amplitud del movimiento de la partícula. (d) ¿Cuál es el primer instante después de t = 0 en que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?

Dato.

$x = (7cm)\cos 6\pi t$

Incógnitas.

(a) *f*

(b) *t*

(c) *A*

(d) *primer t para x=0 y dirección de $\vec{v}$ en ese mismo instante.*

Solución.

(a) Comparando la ecuación que nos proporcionan como dato con la ecuación del desplazamiento de un MAS se tiene

$$x = (7cm)\cos 6\pi t$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

se puede deducir que $\omega = 6\pi \, {}^{rad}\!/\!_{s}$ y $\delta = 0$. Y como

$$\omega = 2\pi \ f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3.00 \ Hz$$

(b) De la fórmula $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{3.00} = 0.333 \ s$

(c) También por comparación entre las ecuaciones $A = 7 \ cm$

(d) Si el periodo es de 0.33 s y su posición inicial $x(0) = (7 \ cm) \cos 6\pi \, [0] = 7 \ cm$, en un cuarto del periodo llegará a la posición x = 0, en un medio del período estará en x = -A = -7 cm, en tres cuartos del periodo volverá a x = 0 y en el periodo completo volverá a x = A = 7 cm. Por ello, el resultado para este inciso es

$$t = \frac{0.333}{4} = 0.0833 \ s$$

y sustituyendo este tiempo en la ecuación de velocidad para conocer su sentido se tiene:

$$v = -A\omega \ sen(\omega \, t + \delta) = -(7.00 \ cm)(6\pi \, {}^{rad}\!/\!_{s}) \ sen \, (6\pi \, [0.0833 \ s] + 0) = -3.61 \, {}^{cm}\!/\!_{s}$$

de donde se deduce que la partícula se mueve hacia la izquierda por tener la velocidad signo negativo.

Ejemplo 1.2.2.2

(17.5 R) En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve hacia delante y hacia atrás una distancia de 2.00 mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120 Hz. Determine (a) la amplitud, (b) la rapidez máxima de la hoja, y (c) la aceleración máxima de la hoja.

Datos.

$D = 2.00 \ mm = 2.00 \times 10^{-3} \ m$

$f = 120 \ Hz$

Incógnitas.

(a) A

(b) $v_{\max}$

(c) $a_{\max}$

Solución.

(a) D corresponde al desplazamiento total de la hoja por lo que

$$A = \frac{D}{2} = \frac{2.00 \times 10^{-3} \ m}{2} = 1.00 \times 10^{-3} \ m$$

(b) Para determinar la velocidad máxima se necesita conocer ω a partir de

$$\omega = 2\pi \ f = 2\pi \, (120 \ Hz) = 754 \, {}^{rad}\!/\!_{s}$$

el valor de la velocidad máxima será

$$v_{\max} = A\omega = (1.00 \times 10^{-3} \ m)(754 \, {}^{rad}\!/\!_{s}) = 0.754 \ m$$

(c) La aceleración máxima es

$$a_{\max} = A\omega^2 = (1.00 \times 10^{-3} \ m)(754 \, {}^{rad}\!/\!_{s})^2 = 568 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

1.2.3 Fuerza y energía en un MAS.

Por definición del MAS se tiene: $F=-kx$ y de lo visto en la cinemática del movimiento $x=A\cos(\omega t+\delta)$ de tal forma que $F=-kA\cos(\omega t+\delta)$, pero $k=m\omega^2$, sustituyendo se tiene

$$F=-m\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)$$

este último resultado también se pudo obtener de la 2ª Ley de Newton,

$$F=ma=-m\omega^2 A\cos(\omega t+\delta)$$

Para la Energía Cinética del MAS, se determina a partir de la energía de la partícula, o sea

$$K=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m[-A\omega sen(\omega t+\delta)]^2=\tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2\,sen^2(\omega t+\delta)$$

pero, de la forma trigonométrica del Teorema de Pitágoras, $sen^2\theta=1-\cos^2\theta$, de manera que:

$$K=\tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2\,sen^2(\omega t+\delta)=K=\tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2\,[1-\cos^2(\omega t+\delta)]=$$

$$=\tfrac{1}{2}m\omega^2[A^2-A^2\cos^2(\omega t+\delta)]=\tfrac{1}{2}m\omega^2[A^2-x^2]=\tfrac{1}{2}k\,[A^2-x^2]$$

La Energía Potencial del MAS se puede determinar de la relación de ella con la fuerza en la expresión

$$F=-\nabla U=-[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}]$$

Al tener solo desplazamiento en una dirección (por ejemplo x), la expresión vectorial y la derivada parcial se transforma en:

$$F=-\frac{dU}{dx}$$

La diferencial de la energía potencial sería

$$dU=-\frac{dU}{dx}dx=-Fdx=-(-kx)dx$$

Integrando

$$U=\int_0^x k\,x\,d\,x=\left[\tfrac{1}{2}k\,x^2\right]_0^x=\tfrac{1}{2}k\,x^2=\tfrac{1}{2}m\,\omega^2 x^2$$

La Energía Mecánica Total en campos conservativos (aquellos donde el trabajo es independiente de la trayectoria), corresponde a la suma de las energías cinética y potencial, esto es:

$$E=K+U=\tfrac{1}{2}m\omega^2[A^2-x^2]+\tfrac{1}{2}m\,\omega^2 x^2=\tfrac{1}{2}m\,\omega^2 A^2=\tfrac{1}{2}k\,A^2$$

Graficando las tres energías se tiene

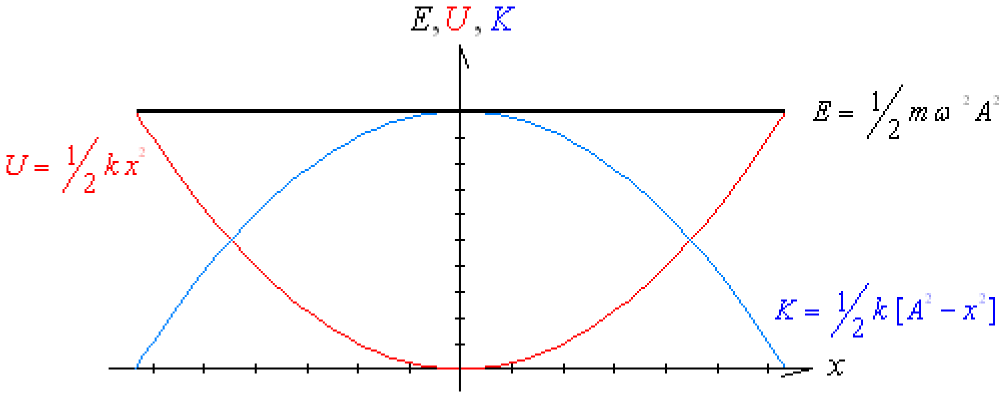


Figura 1.6 Energía en un MAS

Conviene observar que, como en todo sistema conservativo, la energía mecánica total permanece constante y que, cuando la energía potencial es máxima (igual al valor de la energía total), la energía cinética es cero y viceversa.

Ejemplo 1.2.3.1
(14.40 T-M) Un objeto de 3 kg oscila con una amplitud de 8 cm. Su aceleración máxima es de 3.50 m/s^2. Determinar (a) la energía total, (b) la energía cinética y potencial cuando x = 4 cm y, (c) el punto donde la energía cinética se reduce a una tercera parte la su valor máximo.

Datos.
$m = 3\,kg$
$A = 8\,cm = 0.08\,m$
$a_{\max} = 3.50\,{}^{m}/_{s^2}$

Incógnitas.
(a) E
(b) *K* y *U* en *x = 4 cm = 0.04 m*
(c) *x* cuando $K = {}^{1}/_{3}E$

Solución.

(a) $a_{\max} = \omega^2 A \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}} = \sqrt{\dfrac{3.50\,{}^{m}/_{s^2}}{0.08\,m}} = 6.61\,{}^{rad}/_{s}$

$E = {}^{1}/_{2}m\omega^2 A^2 = {}^{1}/_{2}(3\,kg)(6.61\,{}^{rad}/_{s})^2(0.08\,m)^2 = 0.419\,J$

(b) $K = {}^{1}/_{2}m\omega^2[A^2 - x^2] = {}^{1}/_{2}(3\,kg)(6.61\,{}^{rad}/_{s})^2[(0.08\,m)^2 - (0.04\,m)^2] = 0.314\,J$

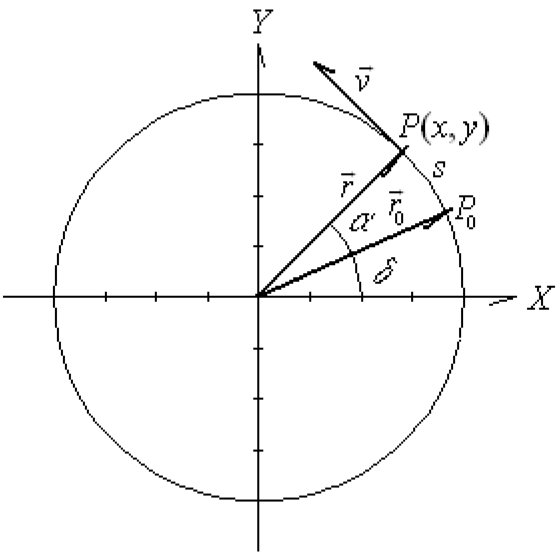
$U = {}^{1}/_{2}m\omega^2 x^2 = {}^{1}/_{2}(3\,kg)(6.61\,{}^{rad}/_{s})^2(0.04\,m)^2 = 0.105\,J$

(c) $K = {}^{1}/_{3}E = {}^{1}/_{3}(0.419\,J) = 0.140\,J \;\Rightarrow\; U = E - K = {}^{1}/_{2}m\omega^2 x^2$

$x = \sqrt{\dfrac{2(E-K)}{m\omega^2}} = \sqrt{\dfrac{2([0.419\,J - 0.140\,J)}{(3\,kg)(6.61\,{}^{rad}/_{s})^2}} = 0.065\,m$

1.2.4 Relación entre un MAS y un movimiento circular uniforme. Vectores de rotación o fasores.

Para encontrar la relación entre el MAS y el movimiento circular uniforme, se parte de este último suponiendo que la partícula, de masa m, se mueve en una circunferencia de radio R, a velocidad angular ω partiendo del punto P_0 ubicado aun ángulo δ tal y como se muestra en la figura 1.7



$$s = R\,\alpha \quad y \quad \theta = \alpha + \delta$$

$$x = A\cos\theta = A\cos(\alpha + \delta)$$

$$y = A\,sen\,\theta = A\,sen(\alpha + \delta)$$

$$pero \quad \omega = \frac{\alpha}{t} = cte \Rightarrow \alpha = \omega t$$

Figura 1.7 Relación entre un MAS y un movimiento circular uniforme

Tomando a x como la posición de una partícula que se mueve sobre el mismo eje X, desde –R hasta R, es decir, x es la proyección del punto P sobre el eje X y de igual forma y sobre el eje Y, se tienen dos partículas moviéndose en una sola dirección con movimiento armónico simple pues sus ecuaciones corresponden a las de la solución de dicho movimiento, esto es:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{MAS en el eje X}$$

$$y = A\,sen\,(\omega t + \delta) \quad \text{MAS en el eje Y}$$

La velocidad y aceleración de cada partícula en su respectivo eje será:

$$v_x = -A\omega\,sen\,(\omega t + \delta)$$

$$v_y = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a_x = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

$$a_y = -A\omega^2\,sen\,(\omega t + \delta)$$

Lo que en forma vectorial representa a tres vectores, $\vec{r}$ para el desplazamiento, $\vec{v}$ para la velocidad y $\vec{a}$ para la aceleración, todos ellos girando con una velocidad angular constante ω y donde $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{a}$ de acuerdo a la figura 1.8.

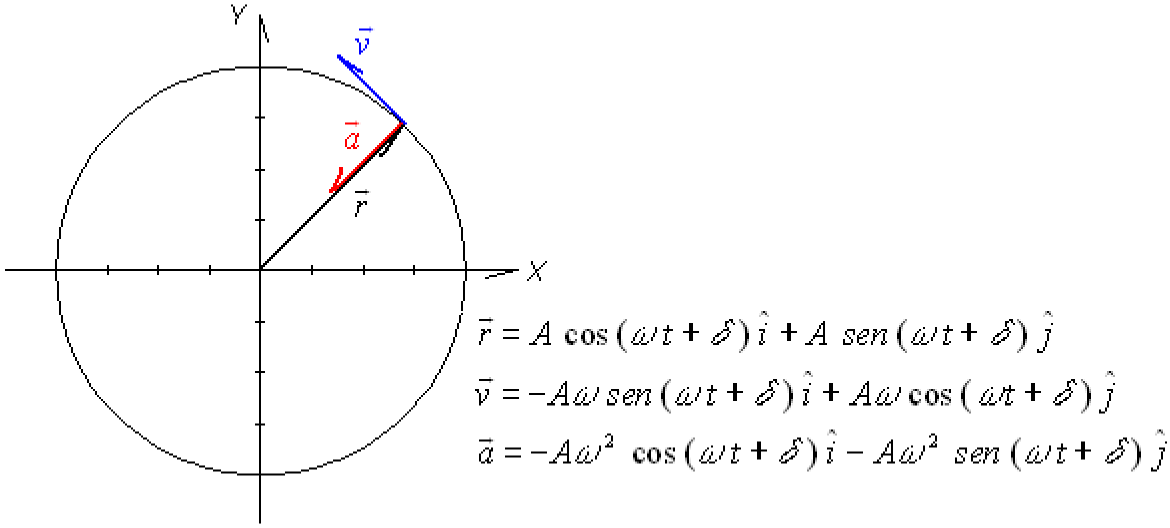


Figura 1.8 Fasores en un MAS

A los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ se les define como vectores de rotación o fasores y de sus componentes rectangulares se pueden representar movimientos armónicos simples siempre que la magnitud del vector de rotación desplazamiento sea igual a la amplitud del MAS, que la velocidad angular del mismo corresponda a la frecuencia angular del MAS y que el ángulo en el que inicia el movimiento dicho vector sea igual a la constante de fase inicial δ.

Ejemplo 1.2.4.1
(17.42 R) Una partícula de masa *m* se desplaza en un plano fijo a lo largo de la trayectoria $\vec{r} = A\cos\omega t\,\hat{i} + A\cos 3\omega t\,\hat{j}$. (a) Dibuje la trayectoria de la partícula. (b) Calcule la fuerza que actúa sobre ella. Encuentre además (c) su energía potencial y (d) su energía total en función del tiempo. (e) ¿Es periódico el movimiento? De ser así, determine el periodo.

Datos.
$\vec{r} = A\cos\omega t\,\hat{i} + A\cos 3\omega t\,\hat{j}$
m

Incógnitas.
(a) Trayectoria de la partícula
(b) $\vec{F}$
(c) *U*
(d) *E*
(e) *T* si el movimiento es periódico

Solución.
(a) Para poder graficar la trayectoria, es necesario encontrar su ecuación a partir de las componentes del a posición, esto es:

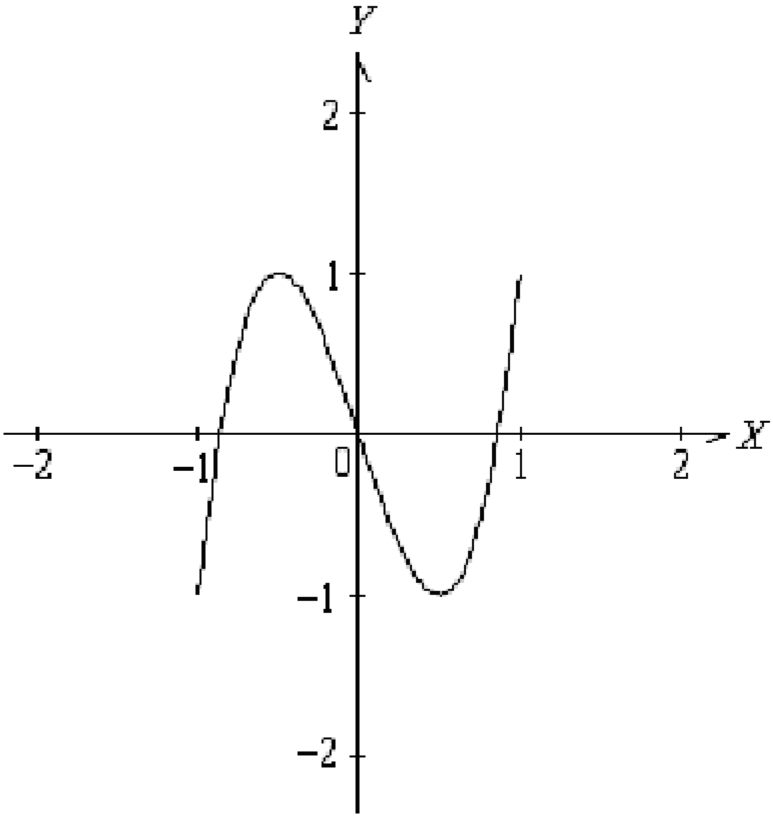
$$x = A\cos\omega t \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y = A\cos 3\omega t \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

De estas ecuaciones, expresadas en forma paramétrica, se requiere reducir a una sola donde las variables sean sólo *x* y *y*. Para ello, de la identidad trigonométrica $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ y despejando de (1) a $\cos\omega t = \frac{x}{A}$ se tiene

$$y = A[4\cos^3\omega t - 3\cos\omega t] = A\left[4\left(\frac{x^3}{A^3}\right) - 3\left(\frac{x}{A}\right)\right] = \frac{4}{A^2}x^3 - 3x$$

Tomando el valor de $A=1$y graficando en el intervalo de $-1 \le x \le 1$ puesto que son los valores mínimo y máximo que puede tomar x para ese valor de A, se tiene



(b) De la 2ª Ley de Newton y de las ecuaciones generales de movimiento se llega a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cos\omega t\,\hat{i} + A\cos 3\omega t\,\hat{j}\right] = -A\omega\,sen\,\omega t\,\hat{i} - 3A\omega\,sen\,3\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-A\omega\,sen\,\omega t\,\hat{i} - 3A\omega\,sen\,3\omega t\,\hat{j}\right] = -A\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - 9A\omega^2\cos 3\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -Am\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - 9Am\omega^2\cos 3\omega t\,\hat{j}$$

(c) La energía potencial es el trabajo desarrollado por la fuerza al cambiar de posición, $U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

y como $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt = \left[-A\omega\,sen\,\omega t\,\hat{i} - 3A\omega\,sen\,3\omega t\,\hat{j}\right]dt$ se tiene

$$U=-\int\left[-Am\omega^2\cos\omega t\,\hat{\imath}-9Am\omega^2\cos 3\omega t\,\hat{\jmath}\right]\cdot\left[\left[-A\omega\,sen\,\omega t\,\hat{\imath}-3A\omega\,sen\,3\omega t\,\hat{\jmath}\right]dt\right]=$$

$$=\int -A^2m\omega^3\cos\omega t\,sen\,\omega t\,dt-27A^2m\omega^3\cos 3\omega t\,sen\,3\omega t\,dt=$$

$$=\int A^2m\omega^2\cos\omega t\left[sen\,\omega t\left(-\omega\,dt\right)\right]-9A^2m\omega^2\cos 3\omega t\left[sen\,3\omega t\left(-3\omega\,dt\right)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\cos^2\omega t+\tfrac{9}{2}A^2m\omega^2\cos 3\omega t+C=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[\cos^2\omega t+\cos^2 3\omega t\right]+C$$

para $\vec{r}=0$ esto es $x=0$ y $y=0$ a la vez, se requiere que $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ y entonces $U=0$. Sustituyendo en la ecuación anterior para obtener *C* se tiene

$$0=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[\cos^2\omega\frac{\pi}{2\omega}+9\cos^2 3\omega\frac{\pi}{2\omega}\right]+C\quad\Rightarrow\quad C=0$$

quedando como solución final

$$U=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[\cos\omega t+9\cos 3\omega t\right]$$

(d) La energía mecánica total es $E=K+U$ y $K=\tfrac{1}{2}mv^2$ por lo que

$$v^2=\left[-A\omega\,sen\,\omega t\right]^2+\left[-3A\omega\,sen\,3\omega t\right]^2=A^2\omega^2\,sen^2\,\omega t+9A^2\omega^2\,sen^2\,3\omega t$$

$$K=\tfrac{1}{2}m\left[A^2\omega^2\,sen^2\,\omega t+9A^2\omega^2\cos^2 3\omega t\right]=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[sen^2\,\omega t+9\,sen^2\,3\omega t\right]$$

$$E=K+U=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[sen^2\,\omega t+9\,sen^2\,3\omega t\right]+\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[\cos^2\omega t+\cos^2 3\omega t\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[sen^2\,\omega t+9\,sen^2\,3\omega t+\cos^2\omega t+9\cos^2 3\omega t\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[sen^2\,\omega t+\cos^2\omega t+9\left(sen^2\,3\omega t+\cos^2 3\omega t\right)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[1+9\,(1)\right]=\tfrac{1}{2}A^2m\omega^2\left[10\right]=5A^2m\omega^2$$

(e) Si lo es, ya que cada determinado valor de t la posición de la partícula es la misma. El periodo será $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

1.2.5 Sistemas oscilantes. Péndulo simple, péndulo de torsión, sistema masa resorte y circuito L-C.

Péndulo Simple. Este sistema oscilante está formado por una cuerda o varilla cuya masa es despreciable y que está sujeta en uno de sus extremos a un soporte fijo y en el otro tiene un cuerpo cuya masa se puede considerar concentrada en su centro geométrico que está sobre el eje del a cuerda o varilla. Bajo estas consideraciones las variables que definen a un péndulo simple serán la masa del cuerpo *m* y la longitud de la cuerda o varilla *L.* Un diagrama de fuerzas se muestra en la figura 1.9. En dicha figura se observa que el desplazamiento angular máximo de la masa es ϕ_0 y que lo realiza en ambos sentidos. Además, el peso del cuerpo $\vec{w}$ se descompone en dos fuerzas, una tangente a la trayectoria $\vec{F}_t$ y otra normal a la misma $\vec{F}_n$. Esta última fuerza va a ser anulada por la tensión de la cuerda $\vec{T}$, por lo que el movimiento de la masa en el péndulo simple será responsabilidad exclusivamente por la fuerza $\vec{F}_t$, siendo su sentido opuesto al desplazamiento.

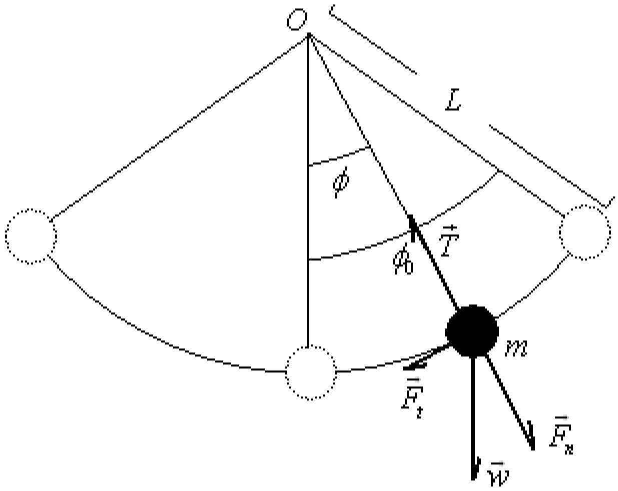


Figura 1.9 Péndulo simple

Matemáticamente

$$F_t = -w\ sen\ \phi = -mg\ sen\ \phi = ma_t$$

pero $a_t = L\alpha = L\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ sustituyendo en la ecuación anterior se llega a

$$-mg\ sen\ \phi = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Dividiendo entre *mL* y pasando todo al primer miembro y multiplicando por -1 se llega a la ecuación diferencial que representa el movimiento del péndulo simple, esto es

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\,sen\ \phi = 0$$

La ecuación anterior presenta como variable el desplazamiento angular ϕ y no corresponde al modelo de un MAS ya que el segundo término está expresado a partir de la función senoidal. Sin embargo, si se restringe el movimiento del péndulo a un desplazamiento máximo de 15º (0.2618 radianes), es posible aproximar la función $sen\ \phi = \phi$ con un error que no sería mayor de 1.2 % lo cual permite tener la misma ecuación diferencial del MAS y será:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0 \quad \text{para} \quad \phi_0 \le 15^\circ\ (0.2618\ rad)$$

Una solución sería

$\phi = \phi_0 \cos(\omega\, t + \delta)$ donde $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ será la frecuencia angular del movimiento y δ la fase inicial. La velocidad y aceleración angular estarán dadas por:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\phi_0\omega\ sen(\omega\, t + \delta)$$

$$\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\phi_0\omega^2 \cos(\omega\, t + \delta)$$

Es importante hacer notar que la velocidad angular no se representa por ω puesto que se confundiría con la frecuencia angular del movimiento.

Respecto a las variables lineales (desplazamiento lineal, velocidad y aceleración tangencial) se tiene

$$s = L\phi = L\phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$v = L\frac{d\phi}{dt} = -L\phi_0\omega \, sen(\omega t + \delta)$$

$$a_t = L\alpha = -L\phi_0\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -L\omega^2\phi$$

No olvidar que tanto el argumento de las funciones seno y coseno como el desplazamiento angular deben expresarse en radianes para evitar la confusión en el manejo de las unidades.

Finalmente, si el desplazamiento angular máximo es mayor de 15º, todavía es posible considerar las mismas ecuaciones del movimiento, solo que es necesario calcular una nueva frecuencia para este péndulo a partir de la expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ donde } T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2} sen^2 \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 sen^4 \frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\cdots\right] \text{ y } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ejemplo 1.2.5.1

(17.26 R) Un péndulo simple de 1.53 m de longitud realiza 72.0 oscilaciones en 180 s en cierto lugar. Encuentre la aceleración debida a la gravedad en ese punto.

Datos.

$L = 1.53\, m$

$N^o\ Oscilaciones = 72.0 \quad en \quad t = 180\, s$

Incógnitas.

g

Solución.

Se parte del número de oscilaciones y el tiempo empleado para calcular la frecuencia, es decir

$$f = \frac{N^o\ de\ oscilaciones}{t} = \frac{72.0}{180} = 0.400\, Hz$$

La frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(0.400\, Hz) = 2.51\, {}^{rad}/_{s}$$

Finalmente, despejando g de la fórmula $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ se llega a

$$g = L\omega^2 = (1.53\, m)(2.51\, {}^{rad}/_{s})^2 = 9.66\, {}^{m}/_{s^2}$$

Ejemplo 1.2.5.2

(15.31 S-J) Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Es desplazado un ángulo de 15.0º y luego se suelta. ¿Cuáles son (a) la máxima rapidez, (b) La máxima aceleración angular y (c) la máxima fuerza restauradora?

Datos.

$m = 0.250\ kg$

$L = 1.00\ m$

$\phi_0 = 15.0^\circ = (15.0^\circ)\left(\dfrac{2\pi\ rad}{360^\circ}\right) = 0.262\ rad$

Incógnitas.

(a) $v_{\max}$

(b) $\alpha_{\max}$

(c) $(F_t)_{\max}$

Solución.

(a) Directamente de la fórmula $v = -L\phi_0\omega\, sen(\omega t + \delta)$ el valor máximo es

$$v_{\max} = L\phi_0\omega = L\phi_0\sqrt{\frac{g}{L}} = (1.00\ m)(0.262\ rad)\sqrt{\frac{9.80\ m/s^2}{1.00\ m}} = 0.820\ m/s$$

(b) La aceleración angular es $\alpha = -\phi_0\omega^2\cos(\omega t + \delta)$ y su valor máximo es

$$\alpha_{\max} = \phi_0\omega^2 = \phi_0\frac{g}{L} = (0.262\ rad)\left(\frac{9.80\ m/s^2}{1.00\ m}\right) = 2.57\ rad/s^2$$

(c) De la 2ª Ley de Newton

$$(F_t)_{\max} = ma_{\max} = mL\alpha_{\max} = (0.250\ kg)(1.00\ m)\left(2.57\ rad/s^2\right) = 0.642\ N$$

Péndulo de Torsión. Es un sistema formado por una barra, alambre o fibra que se sujeta por un extremo a un punto fijo y el otro soporta un cuerpo pero la prolongación del alambre pasa por el centro de gravedad. La característica de este péndulo es que las propiedades elásticas del alambre al evitar la torsión del mismo dan lugar a la fuerza restauradora proporcional al desplazamiento. Como conclusión a lo indicado anteriormente, el desplazamiento es angular como se muestra en la figura 1.10

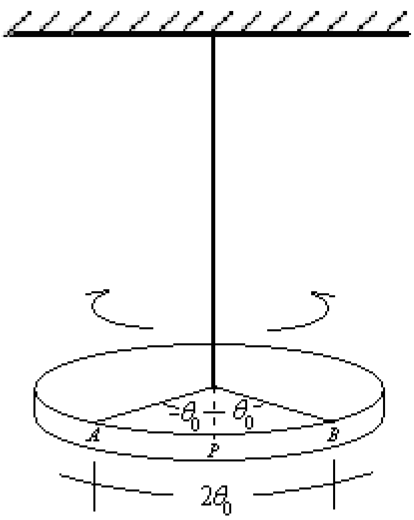


Figura 1.10 Péndulo de torsión

Al desplazar el disco en movimiento circular desde el punto *P* hacia el punto *A* o *B* se produce un momento de torsión τ cuyo valor es proporcional al ángulo desplazado θ cuyo rango de acción estará entre $-\theta_0$ y θ_0. Matemáticamente se tiene $\tau = -\kappa\theta$ donde κ se le conoce como constante de restitución torsional o simplemente constante torsional o coeficiente de torsión. El signo menos indica que el torque es opuesto al desplazamiento y es equivalente a la propiedad de un MAS.

Por otro lado, el momento angular del disco se puede calcular a partir de $L = I\omega$ donde ω es la velocidad angular e I es el momento de inercia. Pero de la relación entre el torque y el momento angular tenemos que

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

pero $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ por lo que $\tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ que al sustituir en la expresión característica del péndulo se llega a $\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ que al dividir entre *I* y expresar como ecuación diferencial se tiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

cuya solución es

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta) \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Para la velocidad y aceleración angular del péndulo se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega\, sen(\omega t + \delta)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

expresando nuevamente a la velocidad angular como la primera derivada para no confundirla con la frecuencia angular.

Ejemplo 1.2.5.3

(17.34 R) Un ingeniero quiere calcular la inercia rotacional de un objeto de forma extraña de 11.3 kg que gira alrededor de un eje a través de su centro de masa. El objeto está sostenido por un alambre en su centro de masa y sobre el eje deseado. El alambre tiene una constante torsional $\kappa = 0.513\, Nm$. El ingeniero observa que este péndulo oscila 20 ciclos durante 48.7 s. ¿Qué valor se calcula para la inercia rotacional?

Datos.

$m = 11.3\, kg$

$\kappa = 0.513\, N$

Nº oscilaciones = 20.0 ciclos en t = 48.7 s

Incógnitas.

I

Solución.

La frecuencia esta dada por $f = \frac{N^{\circ}\, oscilaciones}{t} = \frac{20\, ciclos}{48.7\, s} = 0.411\, Hz$

La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f = 2\pi(0.411\,Hz) = 2.58\,{}^{rad}\!/_{s}$

Finalmente, de la fórmula para la frecuencia angular en el péndulo de torsión

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\kappa}{\omega^2} = \frac{0.513\,N\,m}{\left(2.58\,{}^{rad}\!/_{s}\right)^2} = 0.0771\,kg\,m^2$$

Sistema masa-resorte. Este sistema puede presentarse en dos formas, cuando la masa y el resorte están sobre una superficie sin fricción en posición horizontal y cuando la masa y el resorte están en posición vertical según se muestra en la figura.

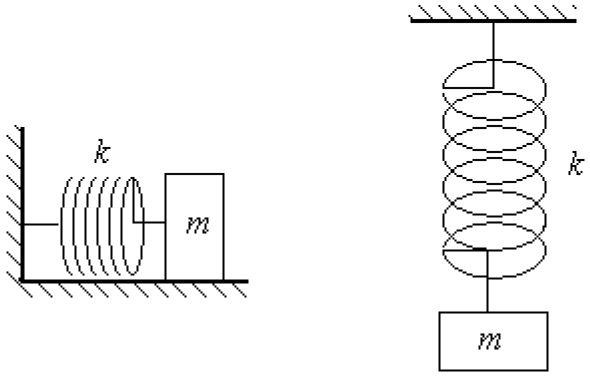


Figura 1.11 Sistema masa-resorte

En ambos casos *k* representa la constante del resorte dada a partir de la Ley de Hooke como

$$F = -kx$$

y que describe que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es proporcional al desplazamiento. El signo menos indica que la fuerza siempre tiene sentido opuesto al desplazamiento. De lo anterior se observa que el comportamiento de un resorte sobre una masa (sistema masa–resorte) es idéntico al de un MAS en cuanto a la acción de la fuerza y que la constante del resorte corresponde a la constante de proporcionalidad del MAS.

Analizando el primer caso tendremos las mismas consideraciones que la figura 1.2 y su desarrollo matemático corresponde al de la sección 1.2.1 por lo que, la ecuación diferencial del sistema masa-resorte horizontal sin fricción es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

cuya solución propuesta y las ecuaciones para la velocidad y la aceleración son

$$x = A\cos(\omega\,t + \delta)$$

$$v = -A\omega\,sen(\omega\,t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega\,t + \delta)$$

Ejemplo 1.2.5.4

(13.16 F) Una masa $m = 1.5\,kg$ está fija a un resorte ideal, cuya constante $k = 18\,{}^{N}\!/_{m}$. Todo el movimiento se efectúa en la dirección *x* (horizontal), y se define la posición del punto de equilibrio de la masa como $x = 0\,m$. A continuación se desplaza la masa a $x = 0.25\,m$, y se suelta partiendo del reposo. (a) Deduzca una función $x(t)$ que describa el movimiento que se produce. (b) ¿En qué posición x se presenta la aceleración máxima positiva de la masa? (c) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima? (d) ¿Cuál es la rapidez máxima de la masa?

Datos.
$m = 1.5\,kg$
$k = 18\,{}^{N}\!/_{m}$
$A = 0.25\,m$

Incógnitas.
(a) $x(t)$
(b) x cuando $a_{\max} > 0$
(c) $a_{\max}$
(d) $v_{\max}$

Solución.
(a) Por ser un sistema masa-resorte horizontal, la solución es $x = A\cos(\omega\, t + \delta)$ y se requiere determinar ω y δ. La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{18\,{}^{N}\!/_{m}}{1.5\,kg}} = 3.5\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Para $t = 0$ la posición es $x = 0.25\,m$, sustituyendo en la ecuación se tiene

$$0.25\,m = (0.25\,m)\cos([3.5\,{}^{rad}\!/_{s}][0] + \delta) = (0.25\,m)\cos\delta$$

$$\delta = \cos^{-1}\frac{0.25\,m}{0.25\,m} = \cos^{-1}1 = 0 \text{ por tanto } x = (0.25\,m)\cos(3.5\,{}^{rad}\!/_{s}\; t)$$

(b) La aceleración está dada por $a = -A\omega^2\cos(\omega\, t + \delta)$ y su valor máximo sería cuando la función coseno es máxima positiva o negativa. Dado que la aceleración siempre es contraria al desplazamiento, si la aceleración es máxima positiva, el desplazamiento es máximo negativo, es decir, cuando

$$\cos(\omega\, t + \delta) = -1 \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = +A\omega^2 \text{ y } x = A\cos(\omega\, t + \delta) = -A = -0.25\,m$$

(c) La aceleración máxima es

$$a_{\max} = A\omega^2 = (0.25\,m)(3.5\,{}^{rad}\!/_{s})^2 = 3.0\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

(d) La velocidad máxima estará dada por

$$v_{\max} = A\omega = (0.25\,m)(3.5\,{}^{rad}\!/_{s}) = 0.87\,{}^{m}\!/_{s}$$

En el caso del sistema masa-resorte vertical en donde, aún cuando se desprecia la fricción del aire o medio en donde se encuentra. La acción de la gravedad se deja sentir generando una elongación inicial del resorte, representada por y_0 según se muestra en la figura 1.12 sección b) respecto al resorte sin masa y sin elongación. El valor de este desplazamiento inicial se puede determinar al igualar el peso de la masa con la fuerza inicial del resorte, esto es

$$ky_0 = mg \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k}$$

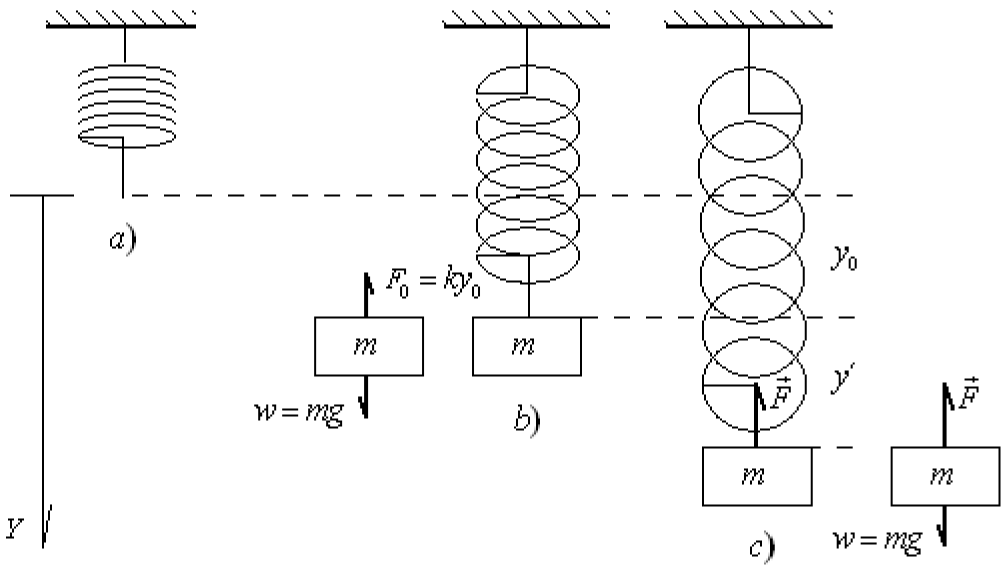


Figura 1.12 Sistema masa-resorte vertical

Al desplazar la masa una distancia y', el resorte ejerce una fuerza $\vec{F}$ cuyo valor está determinado por ambos desplazamientos, esto es, el desplazamiento total $y = y_0 + y'$. La fuerza total sobre la masa será la diferencia entre la fuerza del resorte y el peso. Considerando el eje Y positivo hacia abajo como se muestra en la figura, la fuerza total en la masa es

$$-F + w = -ky + mg = -k(y_0 + y') + mg = -ky_0 - ky' + mg = -ky' \text{ ya que } ky_0 = mg$$

De la 2ª Ley de Newton

$$-ky' = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = 0$$

y como $y_0 = cte$, al obtener la segunda derivada de $y = y_0 + y'$ se llega a $\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ que al sustituir en la ecuación anterior se obtiene la misma ecuación diferencial del MAS en el sistema masa-resorte vertical, esto es

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \omega^2 y' = 0 \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como y' es el desplazamiento desde la posición de equilibrio una vez que se movió y_0, el sistema se mueve en forma semejante al horizontal a partir de su nuevo punto de equilibrio y_0. Las ecuaciones cinemáticas serán

$$y' = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v = -A\omega\, sen(\omega t + \delta)$$
$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

La energía potencial total del resorte dependerá de la elongación del mismo, por lo que $U = \frac{1}{2}ky^2$ y como $y = y' + y_0$ sustituyendo se tiene

$$U = \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}k(y' + y_0)^2 = \tfrac{1}{2}k\left([y']^2 + 2y'y_0 + [y_0]^2\right) = \tfrac{1}{2}k[y']^2 + k\,y'y_0 + \tfrac{1}{2}k[y_0]^2$$

pero $ky_0 = mg$ por lo que

$$U = \tfrac{1}{2}k\left[y'\right]^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}k\left[y_0\right]^2$$

de donde se puede observar que los dos primeros términos dependen de y' y el tercero de y_0 de manera que $U = U' + U_0$ siendo $U' = \tfrac{1}{2}k\left[y'\right]^2 + mgy'$ la energía que gana la masa por el resorte al moverse del nuevo punto de equilibrio y $U_0 = \tfrac{1}{2}k\left[y_0\right]^2$ la energía almacenada en la posición del nuevo punto de equilibrio.

La energía potencial debido la gravedad se determina a partir del desplazamiento del punto de equilibrio quedando

$$U_g = -mgy'$$

El signo menos es debido a que se ha considerado al eje Y hacia abajo y si el desplazamiento es positivo, la energía potencial de la gravedad disminuye pues la altura es menor.

La energía cinética es la misma al igual que la energía mecánica total, esto es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Ejemplo 1.2.5.5

(14.58 T-M) Un cuerpo de 1.50 kg, que alarga un muelle (resorte) de 2.80 cm respecto a su longitud natural cuando cuelga de él en reposo, oscila con una amplitud de 2.20 cm. Hallar (a) la energía total de sistema, (b) la energía potencial gravitatoria en el máximo desplazamiento hacia abajo, (c) la energía potencial del muelle en su máximo desplazamiento hacia abajo y (d) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo?

Datos.

$m = 1.50\ kg$

$y_0 = 2.80\ cm = 0.0280\ m$

$A = 2.20\ cm = 0.0220\ m$

Incógnitas.

(a) E

(b) U_g cuando $y' = 0.0220\ m$

(c) U' cuando $y' = 0.0220\ m$

(d) $K_{\max}$

Solución.

(a) A partir del desplazamiento inicial para el nuevo punto de equilibrio $ky_0 = mg$

de manera que $k = \dfrac{mg}{y_0} = \dfrac{(1.50\ kg)\left(9.80\ m/s^2\right)}{0.0280\ m} = 525\ N/m$

Directamente de la fórmula

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}\left(525\ N/m\right)(.0220\ m)^2 = 0.127\ J$$

(b) La energía potencial debido a la gravedad es

$$U_g = -mgy' = -(1.50\ kg)\left(9.80\ m/s^2\right)(0.0220\ m) = -0.323\ J$$

(c) La energía del resorte en función del desplazamiento de su punto de equilibrio para un desplazamiento máximo es

$$U'_{\max} = \frac{1}{2}kA^2 + mgA = \frac{1}{2}\left(525\ \frac{N}{m}\right)(0.0220\ m)^2 + (1.50\ kg)\left(9.80\ \frac{m}{s^2}\right)(0.0220\ m) =$$
$$= 0.450\ J$$

(d) La energía cinética máxima es

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = 0.127\ J$$

Circuito L-C. En el caso de un circuito compuesto por un capacitor cargado y una bobina, el comportamiento de la carga en el capacitor es semejante al de un MAS aunque en este caso la variable no es el desplazamiento, sino la carga. Para comprender mejor esto se parte del siguiente circuito.

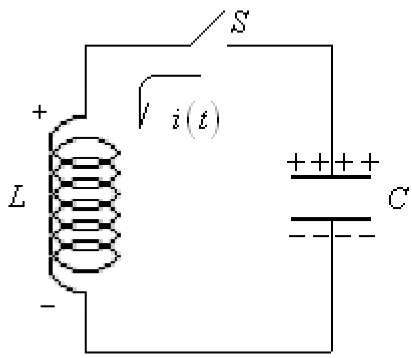


Figura 1.13 Circuito LC

Al cerrar el interruptor en un tiempo *t = 0* la corriente circula en sentido contrario a las manecillas del reloj como se indica en la figura 1.13 y, por estar conectados en paralelo, el voltaje es el mismo, esto es

$$V_L = V_C$$

pero el capacitor se descarga sobre la bobina y esta se opone al paso de la corriente de tal forma que sus voltajes individuales son

$$V_C = \frac{q}{C} \quad y \quad V_L = -L\frac{di}{dt}$$

sustituyendo en la ecuación anterior y transformándola a una ecuación diferencial queda

$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

pero

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2}$$

sustituyendo y dividiendo entre *L* se llega a

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

que es una ecuación diferencial del mismo tipo que la de un MAS y cuya solución se puede proponer como

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Q_0 corresponde a la carga inicial del capacitor cuando se cierra el interruptor *S*, ω es la frecuencia angular en que oscila el circuito y δ es la fase inicial. La corriente en el circuito se determina a partir de

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Q_0 \cos(\omega t + \delta)\right] = -Q_0\omega\, sen(\omega t + \delta) = -I_{\max}\, sen(\omega t + \delta)$$

El comportamiento de la carga y la corriente se puede observar en la figura 1.14, en donde, para facilitar el proceso se considera $\delta = 0$.

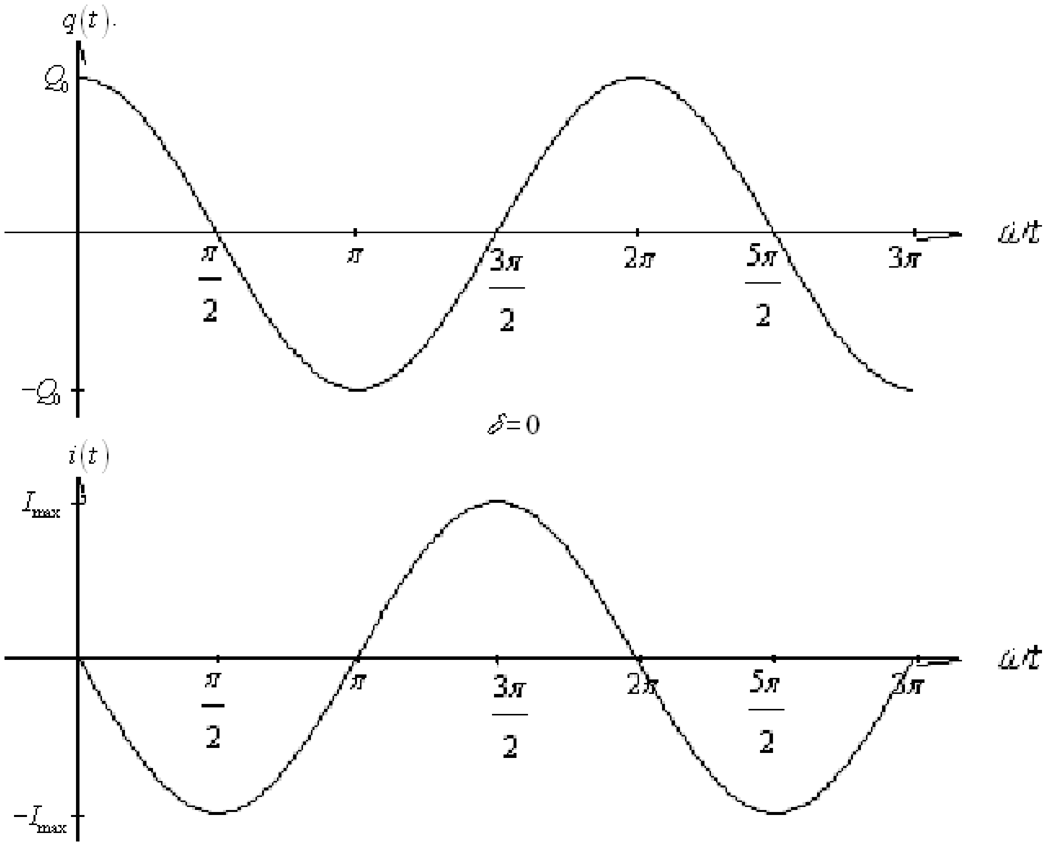


Figura 1.14 Carga y corriente en el circuito LC

Es importante observar a partir de la siguiente tabla la analogía entre los sistemas mecánicos y los eléctricos en sus variables y la energía.

Sistema mecánico Masa-resorte	Sistema eléctrico Bobina-capacitor (LC)
Masa (m)	Inductancia (L)
Constante del resorte (k)	Inverso de la capacitancia $\left(\frac{1}{C}\right)$
Desplazamiento (x)	Carga eléctrica (q)
Velocidad (v)	Corriente eléctrica (i)
Energía mecánica $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$	Energía electromagnética $E = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$

Tabla 1.1 Equivalencias entre sistemas mecánicos y sistemas eléctricos

Ejemplo 1.2.5.6

(31.9 G) En un circuito LC, la carga del condensador viene dada por la expresión $q(t)=(71\,\mu C)\cos\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)$. (a) Escribir la expresión de la corriente del circuito. (b) Suponiendo que $L=17\,mH$, determinar C. (c) Escribir las expresiones de E, E_L y E_C.

Datos.

$q(t)=(71\,\mu C)\cos\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)$

Incógnitas.

(a) $i(t)$

(b) C si $L=17\,mH$

(c) E

E_L

E_C

Solución.

(a)

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[(71\,\mu C)\cos\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=-(71\,\mu C)\left(54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right)sen\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)=-(3.8\,A)\,sen\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)$$

(b)

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{L\omega^2}=\frac{1}{(17\,mH)\left(54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right)^2}=20\,nF$$

(c) La Energía electromagnética total es

$$E=\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2+\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2C}\left[Q_0\cos(\omega t+\delta)\right]^2+\frac{1}{2}L\left[-Q_0\omega\,sen(\omega t+\delta)\right]^2=$$

$$=\frac{Q_0^{\,2}}{2C}\cos^2(\omega t+\delta)+\frac{LQ_0^{\,2}}{2}\omega^2\,sen^2(\omega t+\delta)\quad\text{pero}\quad\omega^2=\frac{1}{LC}$$

$$E=\frac{Q_0^{\,2}}{2C}\left[\cos^2(\omega t+\delta)+sen^2(\omega t+\delta)\right]=\frac{Q_0^{\,2}}{2C}=\frac{(71\,\mu C)^2}{2(20\,nF)}=0.125\,J$$

La energía en la bobina es

$$E_L=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}(17\,mH)\left(-(3.8\,A)\,sen\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=$$

$$=(0.125\,J)\,sen^2\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Finalmente, la energía en el condensador es

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\left((71\,\mu C)\cos\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{20\,nF} =$$

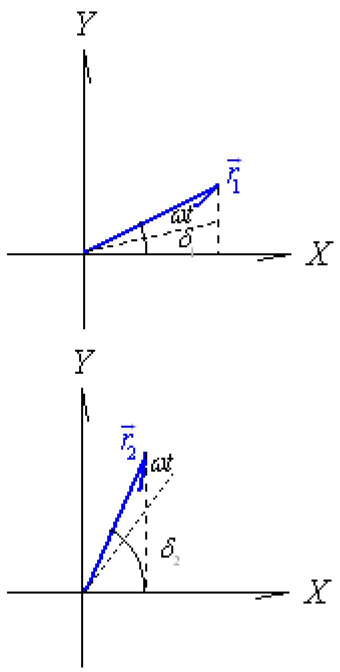
$$= (0.125\,J)\cos^2\left(\left[54\,k\,{}^{rad}\!/_{s}\right]t - \frac{\pi}{4}\right)$$

1.3 Superposición de dos MAS.

La superposición o interferencia de dos MAS es el resultado de la coincidencia de ellos en el espacio y en el tiempo. Por ello, al superponer dos MAS, en realidad estamos sumando sus efectos para obtener otro movimiento. Físicamente se puede ejemplificar como la acción de las fuerzas de dos resortes orientados en la misma dirección, que actúan sobre una masa y que las características de dichos elementos pueden o no ser las mismas. A partir de esto último se obtiene un nuevo movimiento de la masa que puede o no ser un MAS, como se verá a continuación. Para el estudio de esta superposición, se tomarán en cuenta las características de cada MAS individual y la forma en que coinciden en el espacio.

1.3.1 Superposición de dos MAS en la misma dirección y con igual frecuencia.

Al estar en la misma dirección, ésta puede tomarse como *X* y siendo la misma frecuencia, ambos movimientos se pueden representar mediante su vector de rotación correspondiente, como sigue

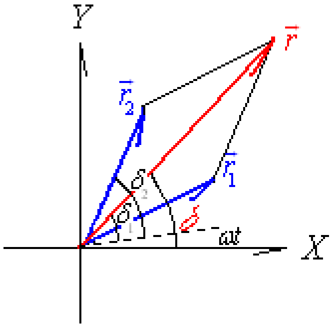


$$\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} =$$
$$= A_1\cos(\omega t + \delta_1)\,\hat{i} + A_1\,sen(\omega t + \delta_1)\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} =$$
$$= A_2\cos(\omega t + \delta_2)\,\hat{i} + A_2\,sen(\omega t + \delta_2)\,\hat{j}$$

Figura 1.15 Fasores en la superposición de dos MAS en la misma dirección y con igual frecuencia

Se observa que el ángulo ωt es el mismo en ambas figuras puesto que la frecuencia ω es la misma, y que la magnitud del vector de rotación corresponderá a la amplitud del MAS en cada dirección. Como se trata de la superposición en x, la suma corresponderá sólo a la suma de las componentes de los vectores de rotación, es decir



$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} =$$
$$= A\cos(\omega t + \delta)\,\hat{i} + A\,sen\,(\omega t + \delta)\,\hat{j}$$

Figura 1.16 Fasor resultante en la superposición de los MAS

donde *A* es la magnitud del vector suma y δ es su fase inicial. Matemáticamente es necesario determinar estos valores y, por ser exclusivamente en el eje *X* la solución es

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

Para verificar si esta nueva solución corresponde a un MAS, se calcula la segunda derivada para comprobar en la ecuación diferencial, o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

por lo que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)\right] = -A_1\omega\,sen\,(\omega t + \delta_1) - A_2\omega\,sen\,(\omega t + \delta_2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-A_1\omega\,sen\,(\omega t + \delta_1) - A_2\omega\,sen\,(\omega t + \delta_2)\right] = -A_1\omega^2 \cos(\omega t + \delta_1) - A_2\omega^2 \cos(\omega t + \delta_2) =$$
$$= -\omega^2\left[A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)\right] = -\omega^2 x$$

que al sustituir se comprueba, por lo que la solución también corresponde a un MAS.

Tomado nuevamente la figura 1.16, en donde se indica en primer lugar el ángulo ωt y considerando que, al tener la misma frecuencia angular, los vectores giran con la misma velocidad y por tanto mantienen la misma distancia angular entre ellos, esto es $(\delta_2 - \delta_1)$, la magnitud del vector suma es

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)}$$

Para encontrar el valor de δ se toma *t = 0* y a partir de la figura 1.18 se encuentra la función tangente de δ como sigue

$$\tan\delta = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1\,sen\,\delta_1 + A_2\,sen\,\delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2}$$

Las dos expresiones anteriores nos permiten calcular la amplitud y fase inicial del nuevo movimiento armónico simple que resulta de la superposición de dos MAS en la misma dirección y con igual frecuencia.

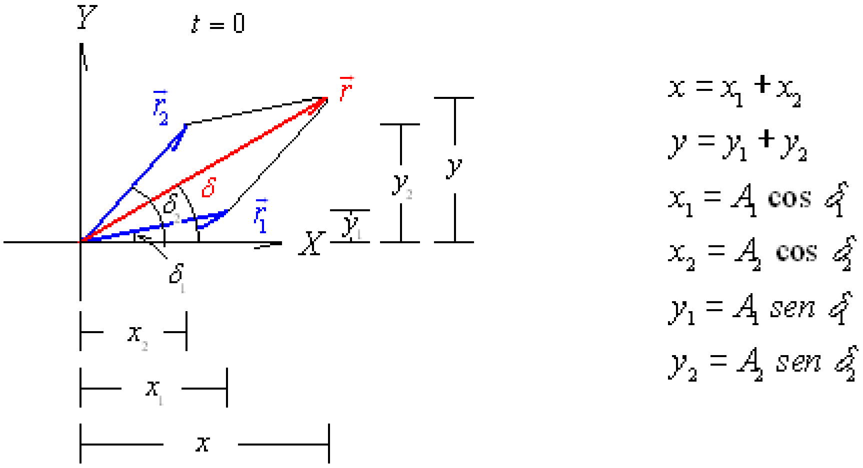


Figura 1.17 Fasores cuando el tiempo es $t = 0$

Además, es posible realizar un análisis de casos en este tipo de superposición a partir de la posición inicial relativa entre los vectores de rotación, esto es, de su diferencia entre fases.

a) Cuando los dos MAS tienen la misma fase $(\delta_1 = \delta_2)$ entonces $\delta_2 - \delta_1 = 0$ y la amplitud y fase del nuevo MAS es

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(0)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(1)} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

$$\tan \delta = \frac{A_1 \text{ sen } \delta_1 + A_2 \text{ sen } \delta_2}{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2} = \frac{A_1 \text{ sen } \delta_1 + A_2 \text{ sen } \delta_1}{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_1} = \frac{(A_1 + A_2) \text{ sen } \delta_1}{(A_1 + A_2) \cos \delta_1} = \tan \delta_1$$

$$\delta = \delta_1$$

Por la respuesta anterior se dice que los MAS interfieren o se superponen constructivamente ya que las amplitudes se suman. Gráficamente, tomando el valor de $\delta = 0$, se tiene

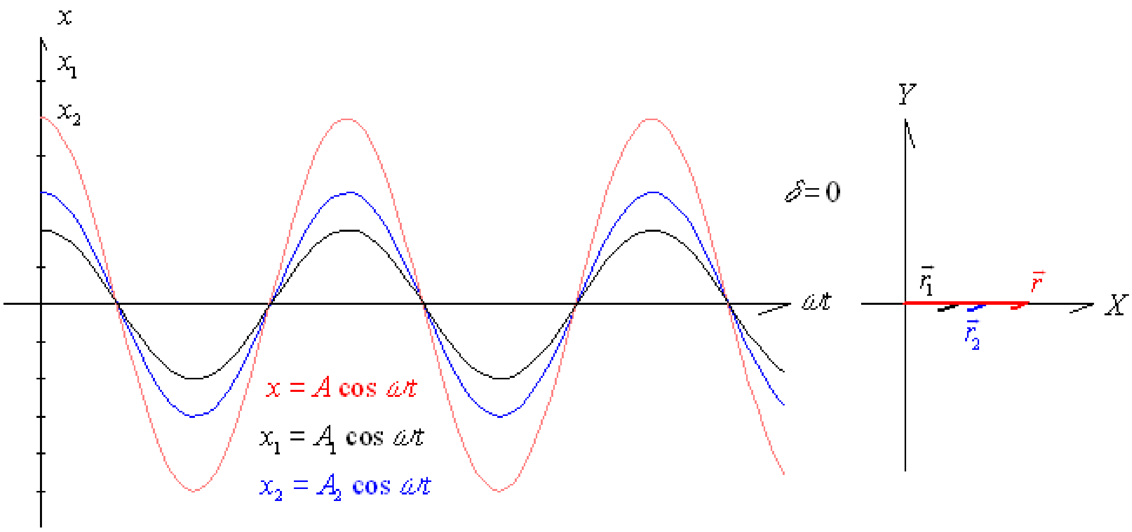


Figura 1.18 Resultado de la superposición de dos MAS en fase

b) Cuando los dos MAS están defasados 90º ($\frac{\pi}{2}$ rad), entonces $\delta_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$ y por tanto $\delta_2 - \delta_1 = \frac{\pi}{2}$, la amplitud y fase son

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,(0)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\tan\delta = \frac{A_1\ sen\ \delta_1 + A_2\ sen\ \delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2} = \frac{A_1\ sen\ \delta_1 + A_2\ sen\left(\delta_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\left(\delta_1 + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{A_1\ sen\ \delta_1 + A_2 \cos\delta_1}{A_1 \cos\delta_1 - A_2\ sen\ \delta_1} \quad \text{dividiendo numerador y denominador entre } A_1 \cos\delta_1$$

$$\tan\delta = \frac{\dfrac{A_1\ sen\ \delta_1 + A_2 \cos\delta}{A_1 \cos\delta_1}}{\dfrac{A_1 \cos\delta_1 - A_2\ sen\ \delta_1}{A_1 \cos\delta_1}} = \frac{\tan\delta_1 + \dfrac{A_2}{A_1}}{1 - \dfrac{A_2}{A_1}\tan\delta_1} \quad \text{pero} \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = A \quad \text{y} \quad \frac{A_2}{A_1} = \tan B \quad \therefore \quad B = \tan^{-1}\frac{A_2}{A_1}$$

$$\tan\delta = \tan\left(\delta_1 + \tan^{-1}\frac{A_2}{A_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \delta = \delta_1 + \tan^{-1}\frac{A_2}{A_1}$$

Al igual que en caso anterior, tomando $\delta_1 = 0$ se tiene la siguiente gráfica

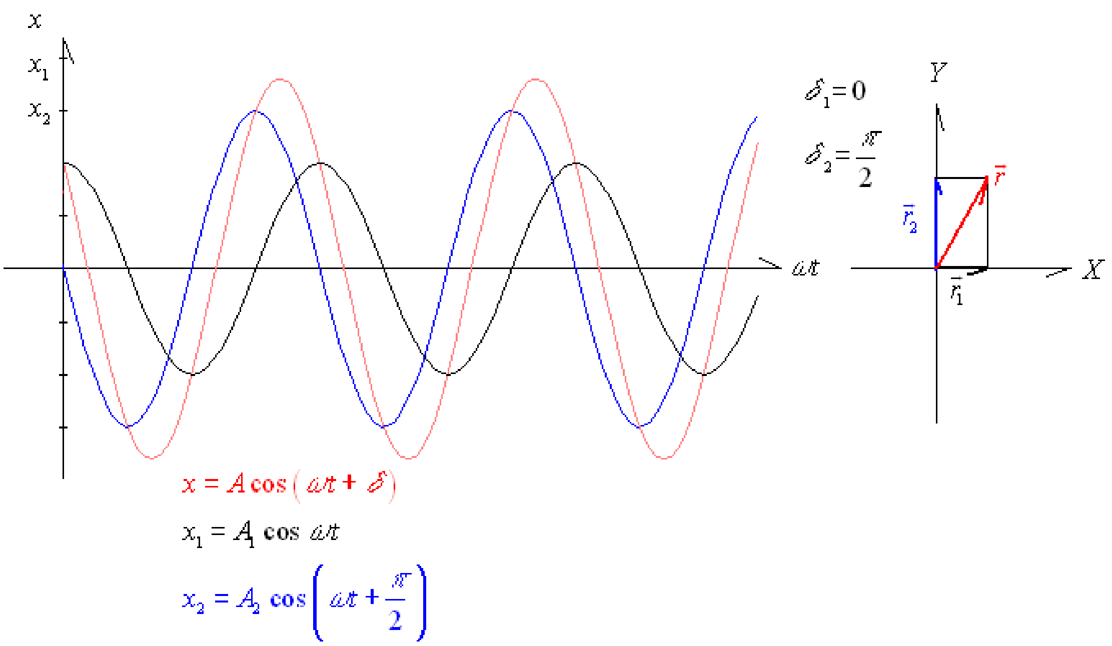


Figura 1.19 Resultado de la superposición de dos MAS en cuadratura

c) Cuando los dos MAS están defasados 180º (π *rad*) y $\delta_2 = \delta_1 + \pi$ de donde $\delta_2 - \delta_1 = \frac{\pi}{2}$ encontrando la siguiente amplitud y fase inicial:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\pi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(-1)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} =$$

$$= A_1 - A_2 \quad \text{cuando} \quad A_1 > A_2$$

$$= A_1 - A_2 \quad \text{cuando} \quad A_1 < A_2$$

$$\tan\delta = \frac{A_1\, sen\,\delta_1 + A_2\, sen\,\delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2} = \frac{A_1\, sen\,\delta_1 + A_2\, sen(\delta_1 + \pi)}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos(\delta_1 + \pi)} =$$

$$= \frac{A_1\, sen\,\delta_1 - A_2\, sen\,\delta_1}{A_1 \cos\delta_1 - A_2 \cos\delta_1} = \frac{(A_1 - A_2)\, sen\,\delta_1}{(A_1 - A_2)\cos\delta_1} = \tan\delta_1$$

$$\delta = \delta_1$$

Su representación gráfica es

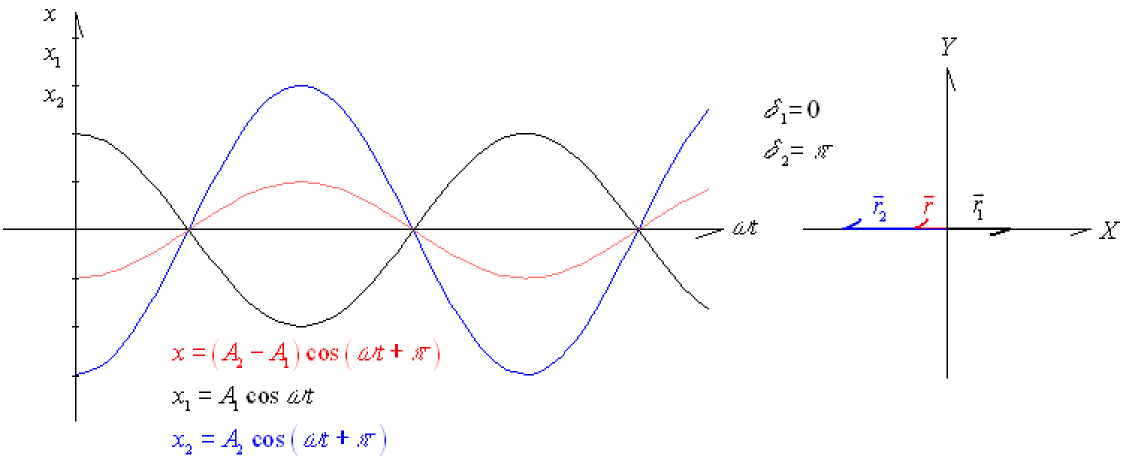


Figura 1.20 Resultado de la superposición de dos MAS en contrafase

1.3.2 Superposición de dos MAS en la misma dirección, pero con diferente frecuencia.

Al tener diferente frecuencia angular los MAS, los vectores de rotación que los representan viajaran con diferente velocidad angular, por lo que, para cada instante de tiempo, el ángulo entre los dos vectores es diferente. Para facilitar el estudio consideraremos que inician con la misma fase inicial y que esta es cero $(\delta_1 = \delta_2 = 0)$ de tal forma que quedarían como se muestra en la figura 1.21

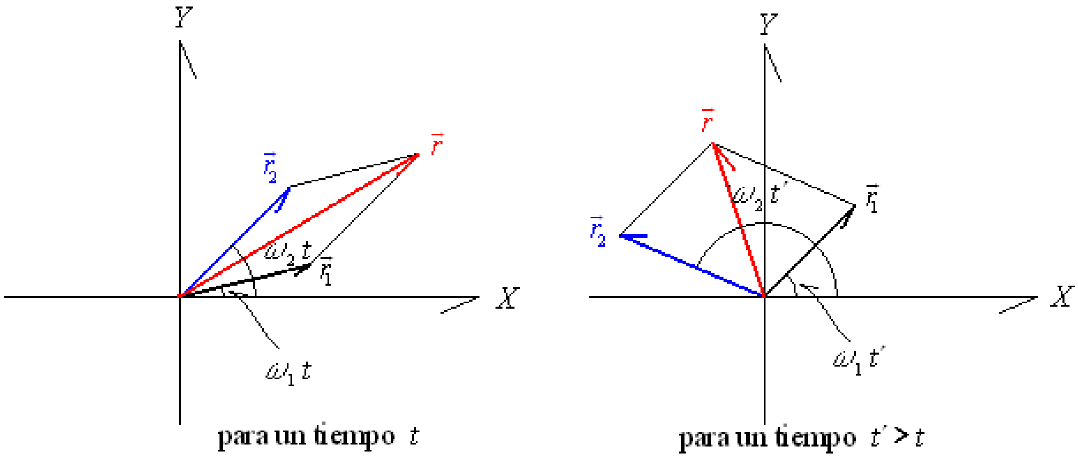


Figura 1.21 Fasores en la superposición de dos MAS con diferente frecuencia

El ángulo entre los dos vectores será $(\omega_2 - \omega_1)t$ y, como puede apreciarse en la figura, es variable en el tiempo. Si $\omega_2 > \omega_1$ el vector $\vec{r}_2$ se adelantará al vector $\vec{r}_1$ hasta que nuevamente lo alcance, y si $\omega_1 > \omega_2$ sucederá lo contrario. La suma de las componentes de los vectores en el eje *X* será la superposición de los dos MAS en la misma dirección por lo que se tiene

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

Aunque *x* es una suma de funciones armónicas, esto no garantiza que corresponda a un MAS, por lo que se requiere comprobar en la ecuación diferencial calculando la segunda derivada, o sea

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t\right] = -A_1\omega_1 \; sen \; \omega_1 t - A_2\omega_2 \; sen \; \omega_2 t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-A_1\omega_1 \; sen \; \omega_1 t - A_2\omega_2 \; sen \; \omega_2 t\right] = -A_1\omega_1^2 \cos \omega_1 t - A_2\omega_2^2 \cos \omega_2 t$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$-A_1\omega_1^2 \cos \omega_1 t - A_2\omega_2^2 \cos \omega_2 t + \omega^2\left[A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t\right] = 0$$

Al no estar definido el valor de ω y tener dos valores diferentes de ω_1 y ω_2 la igualdad no se cumple y esta solución de *x* no corresponde a un MAS.

Aún cuando no es un MAS, es importante analizar las características de la solución que nos permitan entender el comportamiento de una amplitud variable ya que, al sumar los vectores, la amplitud de $\vec{r}$ queda

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\omega_2 - \omega_1\right)t}$$

cuando $(\omega_2 - \omega_1)t = 2(n-1)\pi \;\; \Rightarrow \;\; \cos(\omega_2 - \omega_1)t = 1 \;\; \text{para} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

obteniendo el valor máximo de *A* que será $A = A_1 + A_2$ y

cuando $(\omega_2 - \omega_1)t = (2n-1)\pi \;\; \Rightarrow \;\; \cos(\omega_2 - \omega_1)t = -1 \;\; \text{para} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

obteniendo el valor mínimo de *A* que será $A = A_1 - A_2$ o $A = A_2 - A_1$.

Esto nos indica el rango en el que se encuentran los valores de A. Para conocer el comportamiento de la magnitud en el tiempo, se simplifica la expresión tomando iguales amplitudes para ambos MAS $(A_1 = A_2)$, esto es

$$A=\sqrt{A_1^2+A_1^2+2A_1A_1\cos(\omega_2-\omega_1)t}=\sqrt{2A_1^2+2A_1^2\cos(\omega_2-\omega_1)t}=$$
$$=\sqrt{2A_1^2\left[1+\cos(\omega_2-\omega_1)t\right]}=\sqrt{2}A_1\sqrt{1+\cos(\omega_2-\omega_1)t}$$

pero $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ que al sustituir en la ecuación queda

$$A = 2A_1\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t$$

Regresando a la solución de este movimiento, pero sustituyendo $A_1 = A_2$ o sea

$$x = A_1\cos\omega_1 t + A_1\cos\omega_2 t = A_1(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

pero $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ que al sustituir queda

$$x = 2A_1\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_2-\omega_1)t\right]\ \cos\frac{1}{2}\left[(\omega_2+\omega_1)t\right] = A\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]$$

Graficando

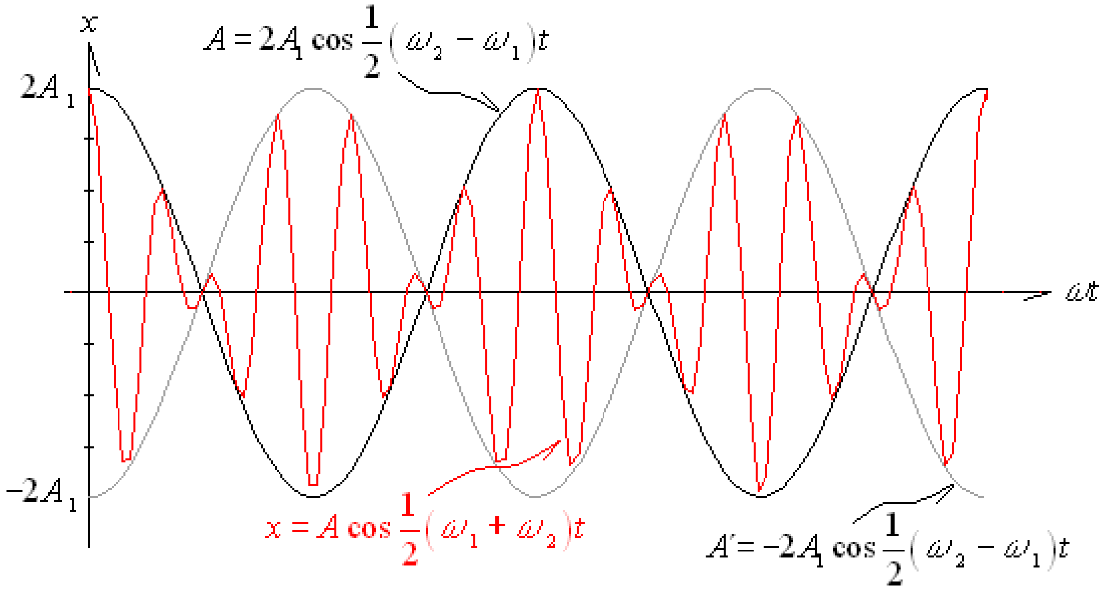


Figura 1.22 Resultado de la superposición de dos MAS con diferente frecuencia

En la figura se observa que la magnitud *A* es afectada por el valor de la función $\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)t\right]$ lo cual se interpreta como que la amplitud es modulada por al función. Físicamente se describiría como que un MAS está modulando la amplitud del otro y viceversa.

1.3.3. Superposición de dos MAS en direcciones perpendiculares.

En este caso los MAS están en diferentes direcciones pero perpendiculares entre sí (uno en *X* y el otro en *Y*). Para simplificar el análisis consideraremos en primer término que la fase inicial del primer MAS es cero

$(\delta_1 = 0)$ y que ambos tienen la misma frecuencia $(\omega_1 = \omega_2 = \omega)$ de manera que cada MAS representado por su vector de rotación quedaría

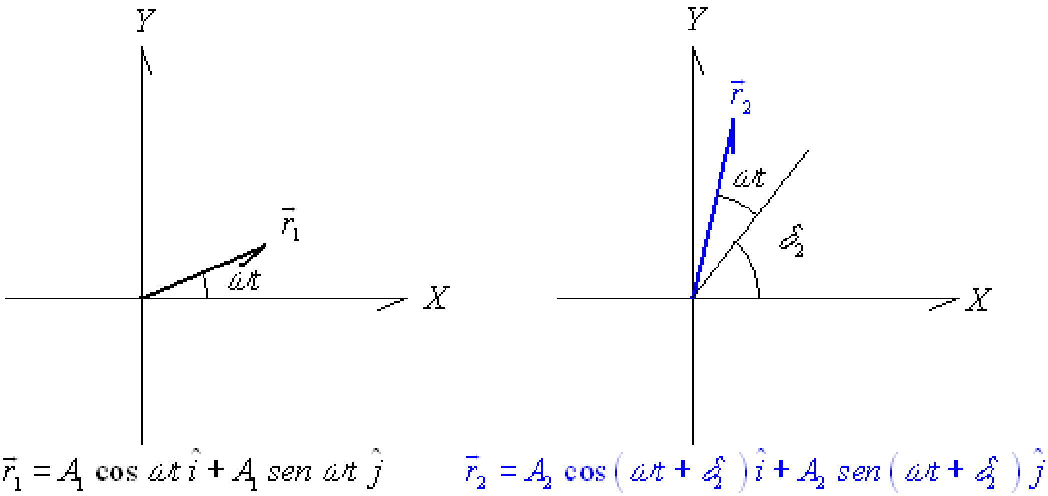


Figura 1.23 Fasores en la superposición de dos MAS con direcciones perpendiculares

La superposición se dará cuando la proyección de $\vec{r}_1$ en *X* se adiciona a la proyección de $\vec{r}_2$ en *X* pero ubicada ahora en el eje *Y*, esto es, el nuevo movimiento tendrá las siguientes componentes

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

A partir de este resultado es posible analizar los diferentes casos:

a) Cuando no existe defasamiento entre los MAS $(\delta_2 = 0)$

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$y = A_2 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = \frac{y}{A_2} \quad \text{igualando ambas ecuaciones}$$

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2} \qquad \therefore \quad y = \frac{A_2}{A_1} x \quad \text{Ecuación de una recta}$$

Graficando

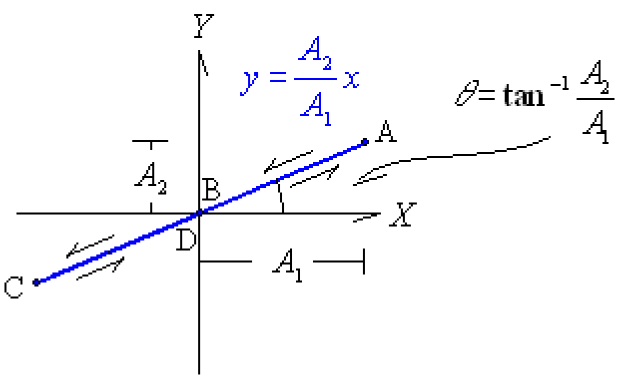


Figura 1.24 Trayectoria cuando no existe defasamiento entre los MAS

En la figura 1.24 se observa la trayectoria que describiría la partícula iniciando en el punto A cuando *t = 0*, luego se movería hacia el origen llegando a B cuando $t = \pi/2$, siguiendo hasta C en $t = \pi$ para regresar al origen en $t = 3\pi/2$ y regresar nuevamente al punto A en $t = 2\pi$ y seguir así con el movimiento periódico.

b) Cuando los MAS están defasados 90º $\left(\delta_2 = \frac{\pi}{2}\right)$

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \, sen \, \omega t \quad \Rightarrow \quad sen \, \omega t = -\frac{y}{A_2}$$

y de la identidad trigonométrica $sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ sustituyendo lo anterior queda

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad \text{Ecuación de una elipse}$$

Que gráficamente sería

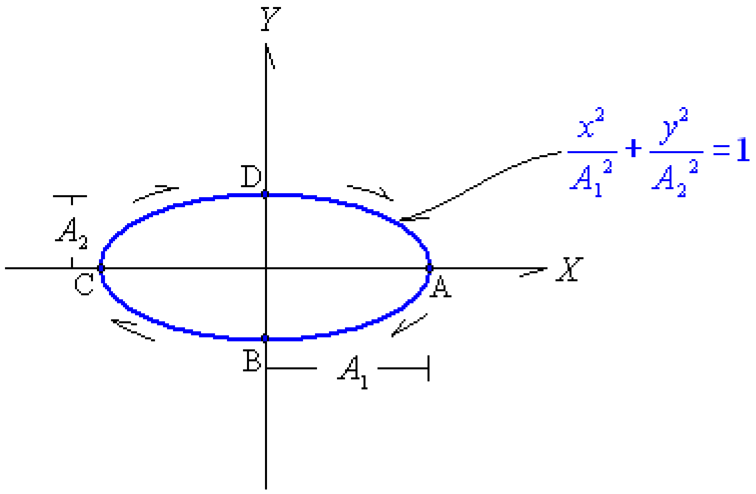


Figura 1.25 Trayectoria cuando el defasamiento es de 90º

Donde nuevamente A sería cuando *t = 0*, luego se movería hacia el B cuando $t = \pi/2$, siguiendo C en $t = \pi$ luego D en $t = 3\pi/2$ y regresar nuevamente al punto A en $t = 2\pi$ y seguir así con el movimiento periódico.

c) Con un defasamiento de 180º $(\delta_2 = \pi)$

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = -\frac{y}{A_2} \quad \text{igualando ambas ecuaciones}$$

$$\frac{x}{A_1} = -\frac{y}{A_2} \qquad \therefore \quad y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad \text{Ecuación de una recta}$$

Cuya gráfica sería

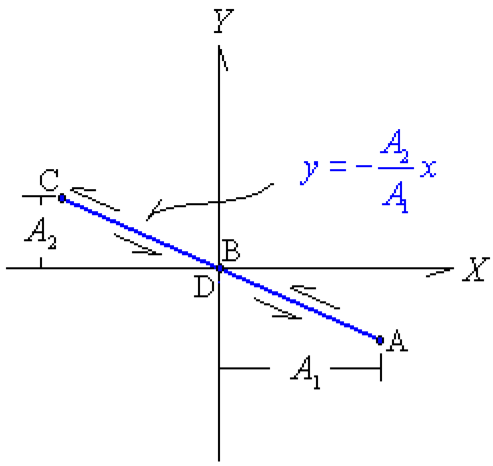


Figura 1.26 Trayectoria cuando el defasamiento es de 180º

Siguiendo la secuencia de los puntos A donde inicia para *t = 0* y sucesivamente con B, C y D para $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ respectivamente y regresar al ponto A para continuar con el ciclo.

d) MAS defasados 270º $\left(\delta_2 = 3\pi/2\right)$

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = A_2\ sen\ \omega t \quad \Rightarrow \quad sen\ \omega t = \frac{y}{A_2}$$

Usando nuevamente la identidad $sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$ se tiene

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad \text{Ecuación de una elipse}$$

que, aún cuando coincide con la curva del inciso b), el trazo de la curva sería en sentido opuesto como se muestra en la figura 1.27.

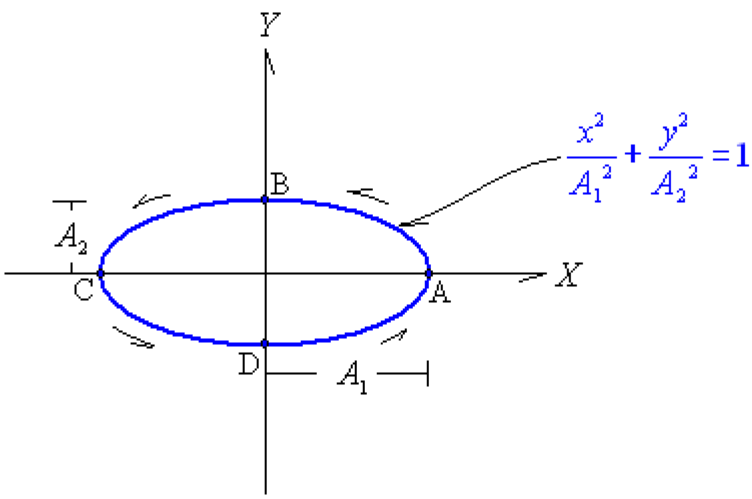


Figura 1.27 Trayectoria cuando el defasamiento es de 270º

Usando el mismo procedimiento, pero para diferentes relaciones entre frecuencias y fases se obtienen las figuras conocidas como “Figuras de Lissajous” debidas al físico francés Jules Antoine Lissajous y que se observan en la figura 1.28.

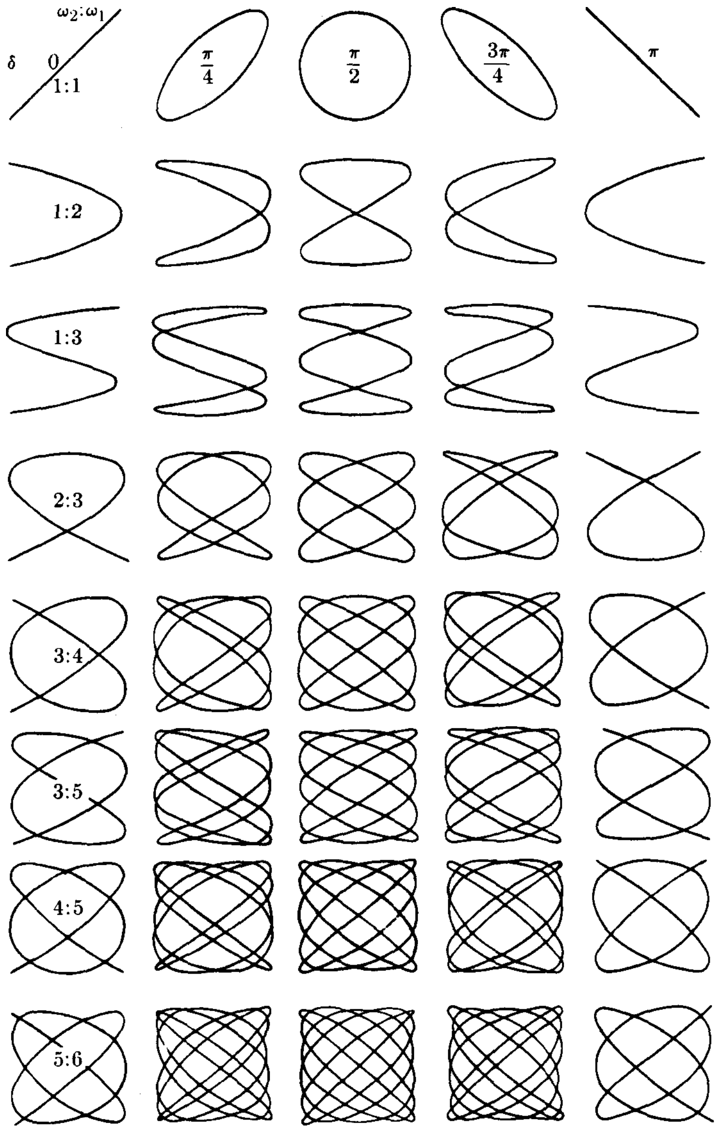


Figura 1.28 Figuras de Liddajous

1.4 Osciladores Acoplados.

Dos osciladores están acoplados cuando existe algún elemento entre ellos por el que se transfiere parte de la energía y por tanto, influye en su movimiento. Tal es el caso de los péndulos mostrados en la figura 1.29 a) o los sistemas masa-resorte de la figura 1.29 b). La solución a estos sistemas se encuentra al resolver la ecuación diferencial para cada masa incluyendo el efecto del elemento de acoplamiento.

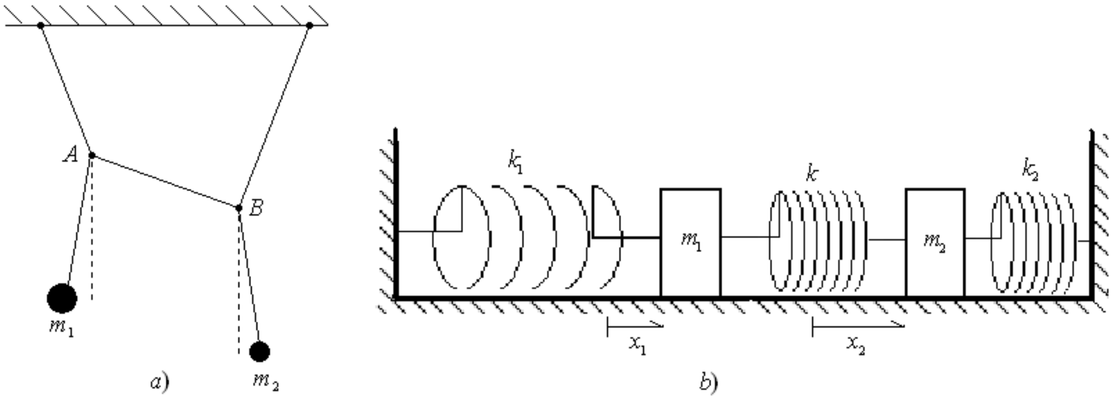


Figura 1.29 Sistemas de osciladores acoplados

Analizando el sistema de los resortes y considerando que en el punto de equilibrio de ambas masas ningún resorte ejerce acción sobre las masas, al desplazarse la masa m_1 una distancia x_1 hacia la derecha y la masa m_2 una distancia x_2 también hacia la derecha y suponiendo que $x_2 > x_1$ se tiene que el resorte k_1 se alarga por lo que ejerce una fuerza en m_1 hacia la izquierda. El resorte k_2 se acorta por lo que ejerce una fuerza hacia la izquierda sobre m_2 y finalmente, el resorte k, porque al ser $x_2 > x_1$, la distancia relativa entre sus extremos aumenta y por tanto se alarga y ejerce una fuerza sobre la masa m_1 hacia la derecha y sobre m_2 hacia la izquierda. Representando lo anterior mediante un diagrama de cuerpo libre se tiene

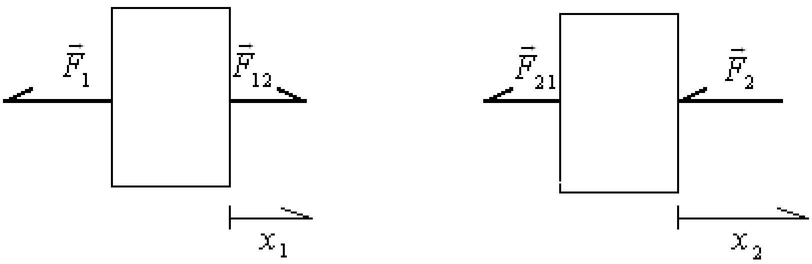


Figura 1.30 Fuerzas en las masas del sistema de osciladores acoplados

Para la masa m_1

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1$$

Para la masa m_2

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2$$

En magnitud

$$-k_1 x_1 + k\left(x_2 - x_1\right) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \qquad -k_2 x_2 - k\left(x_2 - x_1\right) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$-k_1 x_1 + k x_2 - k x_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \qquad -k_2 x_2 - k x_2 + k x_1 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \qquad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 = \frac{k}{m_2} x_1$$

Ambas ecuaciones, en su primer miembro, son idénticas a las de un MAS con una frecuencia de oscilación que se ve modificada por la *k* del resorte de acoplamiento. Por otro lado, el segundo término corresponde al término de acoplamiento. Si se simplifican ambas ecuaciones haciendo $k_1 = k_2$ y $m_1 = m_2$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_2 = \frac{k}{m_1} x_1$$

La solución propuesta a ambas ecuaciones es

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$
$$x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$
$$\text{donde} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k}{m_1}}$$

Las soluciones son semejantes a la obtenida en la superposición de dos MAS con la misma dirección y diferente frecuencia, por lo que es de esperarse que el movimiento resultante de los osciladores acoplados no sea un MAS, sino un movimiento donde las amplitudes son moduladas entre sí. Si además se plantean nuevas condiciones específicas tendremos:

a) Con iguales magnitudes $(A_1 = A_2)$ y fases iniciales igual a cero $(\delta_1 = \delta_2 = 0)$ las soluciones quedarán

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_1 \cos \omega_2 t = A_1 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$
$$x_2 = A_1 \cos \omega_1 t - A_1 \cos \omega_2 t = A_1 (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

A partir de las identidades trigonométricas

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\, sen \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\, sen \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

pero como $-sen\, \theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$sen\, \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

las soluciones para el movimiento son

$$x_1 = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) t \cos \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) t$$
$$x_2 = 2A_1 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) t + \frac{\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) t - \frac{\pi}{2}\right]$$

Lo que se traduce en desplazamientos con amplitud modulada y uno de ellos defasado 90º $\left(\pi/2\right)$ respecto al otro. Gráficamente

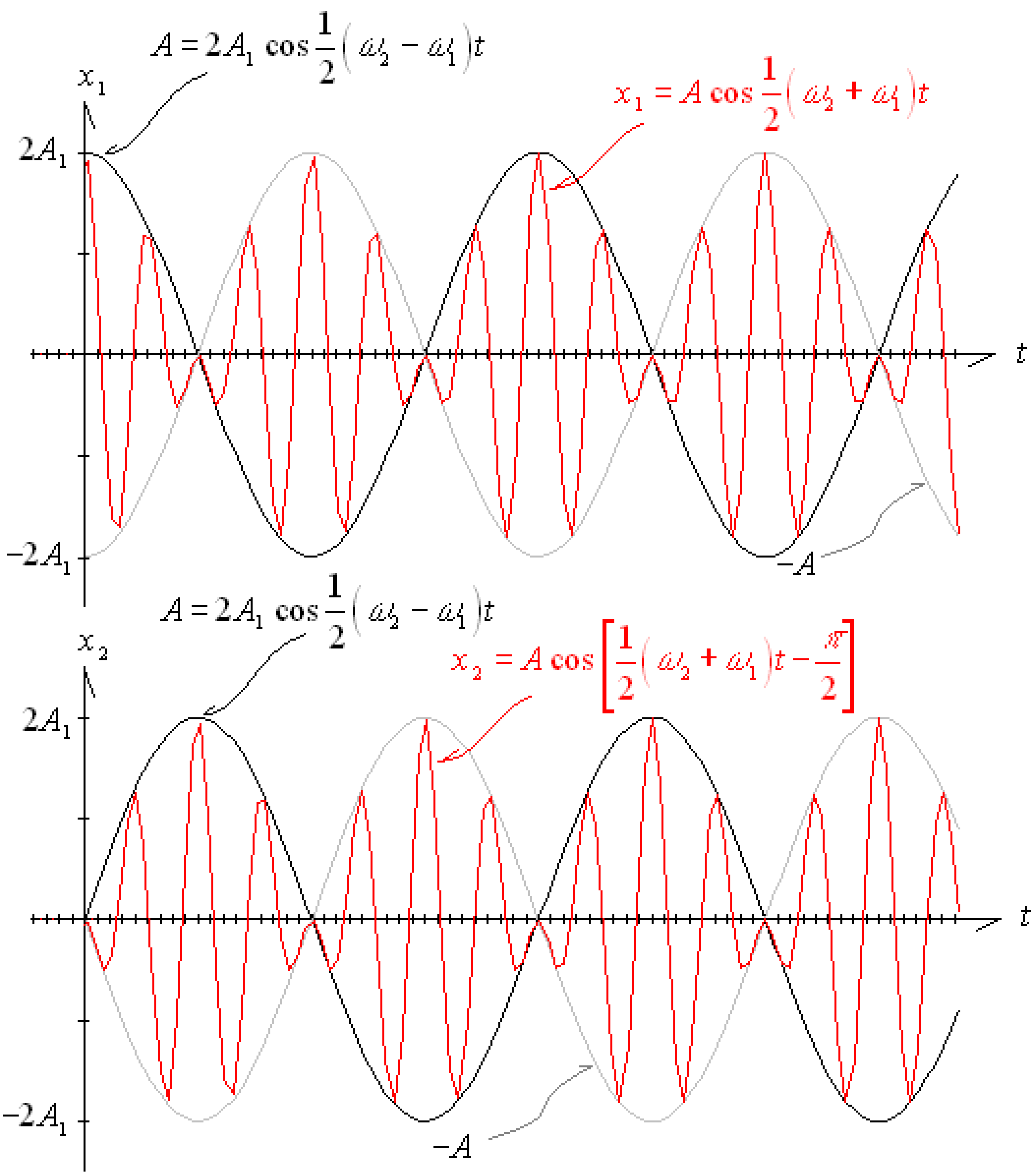


Figura 1.31 Resultado del sistema de osciladores acoplados sección a)

b) Amplitudes iguales $(A_1 = A_2)$, frecuencias iguales $(\omega_1 = \omega_2)$ y fases iniciales iguales $(\delta_1 = \delta_2)$.

En este caso, al tener la misma fase inicial, inician su movimiento al mismo tiempo y en la misma dirección y como la amplitud y la frecuencia son la mismas, ambas masas estarán siempre a la misma distancia entre sí y su desplazamiento es el mismo $(x_1 = x_2)$, por lo que el resorte *k* nunca sufrirá deformación $|F_{12}| = |F_{21}| = k(x_2 - x_1) = 0$ ya que $x_2 - x_1 = 0$ y por tanto será como si no existiera. Por ello, las masas se mueven con MAS. Es importante destacar que, al ser la misma frecuencia y como ésta depende de la masa, la condición anterior se dará solo si las masas son iguales y por tanto $m_1 = m_2 = m$. Matemáticamente y dado que $x_1 = x_2$ solamente se tendrá

$$x_1 = x_2 = A_1 \cos\left(\omega_1 t + \delta_1\right)$$

$$\text{donde} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

Gráficamente

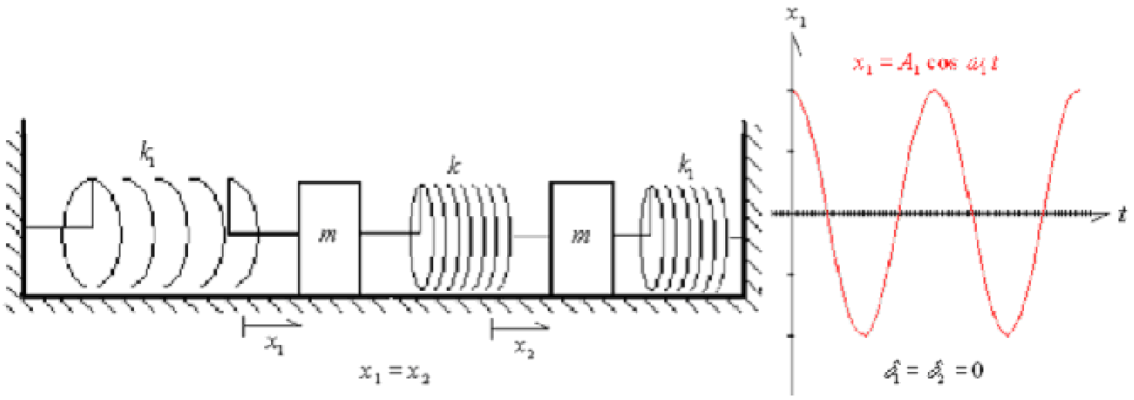


Figura 1.32 Sistema y resultado de osciladores acoplados sección b)

c) Amplitudes iguales $\left(A_1 = A_2\right)$, frecuencias iguales $\left(\omega_1 = \omega_2\right)$ pero en contrafase $\left(\delta_2 - \delta_1 = \pi\right)$.

Al igual que en el caso anterior, el máximo desplazamiento es el mismo, el periodo es el mismo ya que las frecuencias son iguales y como consecuencia las masas serán iguales, sin embargo, al especificar contrafase significa que mientras una masa inicia su movimiento hacia la izquierda, la otra lo realiza hacia la derecha de tal forma que ahora si actuará continuamente el resorte *k* ejerciendo fuerza sobre ambas masas pero manteniendo posiciones iguales y contrarias en cada instante de tiempo, es decir,

$$x_1 = -x_2 = -\left[A_1 \cos\left(\omega_1 t + \delta_1\right) - A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2\right)\right]$$

pero $A_1 = A_2$, $\quad \omega_1 = \omega_2 \quad$ y $\quad \delta_1 = \delta_2 - \pi$ sustituyendo

$$\begin{aligned} x_1 = -x_2 &= -\left[A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2 - \pi\right) - A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2\right)\right] = \\ &= -\left[-A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2\right) - A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2\right)\right] = \\ &= 2A_2 \cos\left(\omega_2 t + \delta_2\right) \end{aligned}$$

$$\text{donde} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k}{m}}$$

Gráficamente

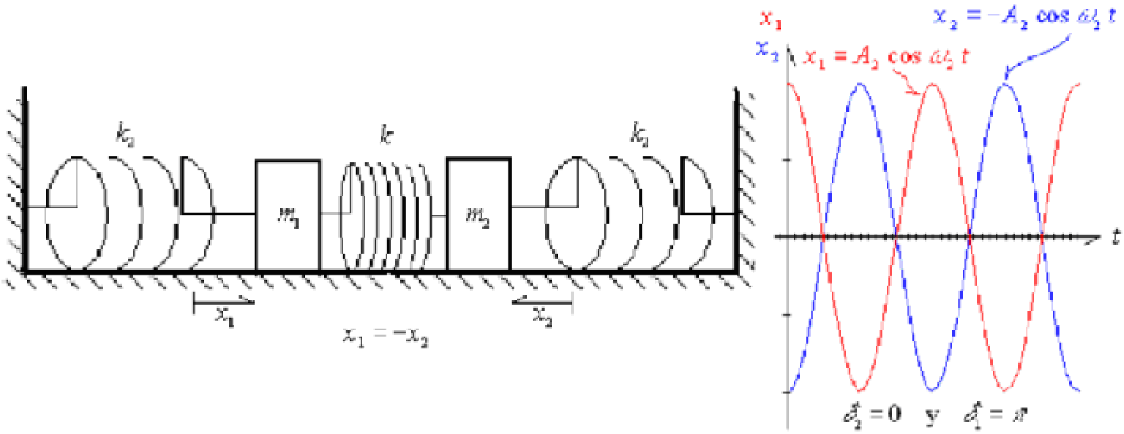


Figura 1.33 Sistema y resultado de osciladores acoplados sección c)

1.5 Oscilaciones Amortiguadas.

Cuando un sistema que se mueve con MAS disminuye su amplitud en el tiempo, debe existir una fuerza responsable de ello a la que se conoce como fuerza amortiguante y al movimiento se define como movimiento oscilatorio amortiguado. Este es el caso de un péndulo cuando disminuye su amplitud por efecto del rozamiento con el medio (figura 1.34 a), o el de un resorte horizontal y la fuerza de fricción con la superficie que soporta la masa (figura 1.34 b) o un sistema masa-resorte vertical y la acción del medio o de una fuerza amortiguante específica (figura 1.34 c y d).

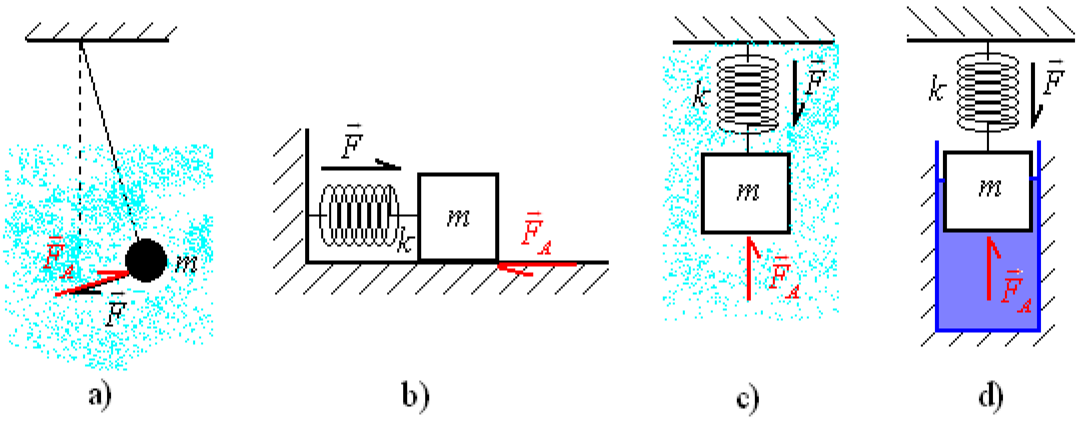


Figura 1.34 Sistemas oscilantes con amortiguamiento

La fuerza amortiguante presenta las siguientes características:

1º La fuerza siempre se opone al movimiento.
2º La fuerza es tangente a la trayectoria.
3º En la mayoría de los casos, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad ($F_A = -bv$ donde el signo menos indica que se opone al movimiento y *b* es la constante de proporcionalidad).

Partiendo de estas consideraciones incluyendo que la fuerza de amortiguamiento sea proporcional a la velocidad y, tomando el sistema de la figura 1.34 b) pero despreciando la fuerza de fricción sobre la mesa (esta fuerza no es proporcional a la velocidad) e incluyendo una fuerza amortiguante debida a un fluido identificada con la constante de amortiguamiento *b* según se muestra en la figura 1.35, se obtiene la ecuación dinámica del sistema, que es:

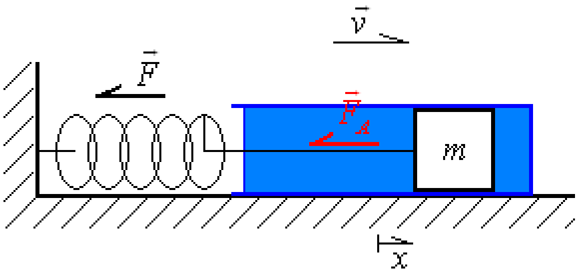


Figura 1.35 Sistema masa-resorte horizontal con amortiguamiento

$$-kx - bv = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

ya que $F_A = -bv$ y $v = \frac{dx}{dt}$. Haciendo $\frac{b}{m} = 2\gamma$ y $\frac{k}{m} = \omega_0^{\,2}$ se llega a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2}x = 0$$

$$\text{donde} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

definiendo a γ como constante de amortiguamiento y ω_0 como frecuencia natural de oscilación cuando no hay amortiguamiento. La solución de esta ecuación diferencial dependerá de los valores de γ y ω_0 y su relación entre sí, dando lugar a los siguientes casos:

a) $(\gamma < \omega_0)$ Movimiento armónico subamortiguado.

En este caso, el amortiguamiento no es tan fuerte permitiendo que la masa siga oscilando aunque en cada ciclo la amplitud del movimiento va disminuyendo, tendiendo a detenerse en un tiempo grande. La solución en este caso es

$$x = A_0\, e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \delta) = A\cos(\omega' t + \delta) \quad \text{donde} \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$$

$$\text{y} \quad A = A_0\, e^{-\gamma t}$$

La expresión $\cos(\omega' t + \delta)$ proporciona la periodicidad de la función mientras que $A_0 e^{-\gamma t}$ corresponde a una amplitud modulada por una función exponencial decreciente, esto es, define que la amplitud vaya disminuyendo.

Si la constante de amortiguamiento es lo suficientemente pequeña respecto a la frecuencia natural de oscilación como para que

$\omega_0{}^2 - \gamma^2 \approx \omega_0{}^2$ y por tanto $\omega' = \omega_0$, entonces el movimiento oscila con la misma frecuencia que la natural del sistema.

Gráficamente

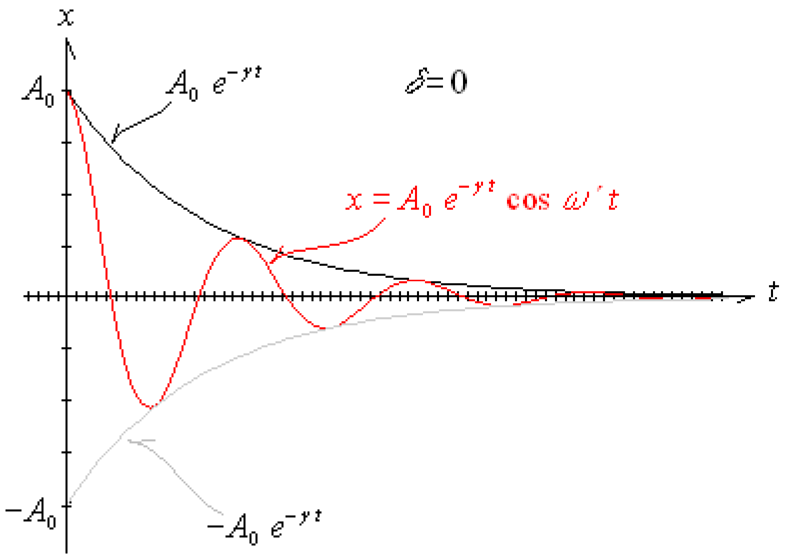


Figura 1.36 Comportamiento de un sistema oscilatorio subamortiguado

La energía mecánica total en este sistema se obtiene a partir de $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ que para este caso es

$$E = \frac{1}{2} m(\omega')^2 A^2 = \frac{1}{2} m(\omega')^2 \left(A_0\, e^{-\gamma t}\right)^2 = \frac{1}{2} m(\omega')^2 A_0{}^2\, e^{-2\gamma t}$$

pero $2\gamma = \frac{b}{m}$, despejando γ y sustituyendo en la expresión anterior

$$E = \frac{1}{2} m(\omega')^2 A_0{}^2\, e^{-2\frac{b}{2m}t} = \frac{1}{2} m(\omega')^2 A_0{}^2\, e^{-\frac{b}{m}t} = E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

donde $\tau = \frac{m}{b}$

y $E_0 = \frac{1}{2} m(\omega')^2 A_0{}^2$

τ se conoce como constante de tiempo para la función exponencial de la energía y nos indica lo rápido que disminuye la energía. De acuerdo a sus valores, si $\tau = 1$ la energía decrece en un 63%, si $\tau = 2$ la energía disminuye en un 87%, $\tau = 3$ un 95% y $\tau = 4$ un 98%.

Por otro lado, y para conocer el comportamiento del oscilador respecto a la pérdida de energía por ciclo, se define Q como el factor de calidad del sistema, y que se determina a partir de

$$Q = \omega_0 \tau$$

Sin embargo, es posible expresarlo a partir del cambio de energía partiendo de

$$E = E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad dE = -\frac{1}{\tau} E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = -\frac{1}{\tau} E\, dt$$

La pérdida de energía en un ciclo será la que ocurre en un periodo de tiempo T, por lo que, al integrar para ese tiempo queda

$$\int_{E_0}^{E} dE = \int_0^T -\frac{1}{\tau} E\, dt$$

Si el amortiguamiento es muy pequeño $(\gamma \ll \omega_0 \;\text{ y }\; \omega' = \omega_0)$, el cambio de energía es mínimo por lo que se podrá suponer como constante en la segunda integral obteniendo

$$E - E_0 = -\frac{1}{\tau} E\, T$$

Como E es menor que E_0 se toma el valor absoluto y se suprime el signo en el segundo miembro. Al dividir entre E se tiene

$$\frac{|E - E_0|}{E} = \frac{|\Delta E|}{E} = \frac{T}{\tau} \quad \text{en cada ciclo}$$

pero $\omega' = \frac{2\pi}{T} = \omega_0$ de donde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y que al sustituir en la ecuación

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}}} \quad \text{cuando} \quad \frac{|\Delta E|}{E} \ll 1$$

Ejemplo 1.5.1

(14.82 T-M) Un objeto de 2.00 kg ligado a un muelle de constante $k = 400\ N/m$ oscila con una amplitud inicial de 3.00 cm. Hallar (a) el periodo y (b) la energía inicial total. (c) Si la energía disminuye en un 1 por ciento por periodo, hallar la constante de amortiguamiento *b* y el factor *Q*.

Datos.

$m = 2.00\ kg$

$k = 400\ N/m$

$A_0 = 3.00\ cm = 0.0300\ m$

Incógnitas.

(a) *T*

(b) E_0

(c) b

Q si $E = 0.990 E_0$

Solución.

(a) Al perder poca energía se puede suponer que $\omega' = \omega_0$ y como $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{2.00}} = 14.1\ rad/s \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{14.1\ rad/s} = 0.444\ s$$

(b) $E_0 = \frac{1}{2} m (\omega')^2 A_0^2 = \frac{1}{2}(2.00\ kg)(14.1\ rad/s)^2 (0.0300\ m)^2 = 0.18\ J$

(c) $E = E_0\, e^{-\frac{T}{\tau}} = 0.990\, E_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{T}{\tau}} = 0.990$ obteniendo logaritmo natural

$$-\frac{T}{\tau} = Ln\, 0.990 \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{T}{Ln\, 0.990} = -\frac{0.444 \quad s}{-0.0100} = 44.2\, s$$

y como $\tau = \frac{m}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{m}{\tau} = \frac{2.00\, kg}{44.2\, s} = 0.0452\, {}^{kg}\!/\!_{s}$

$$Q = \omega_0 \tau = \left(14.4\, {}^{rad}\!/\!_{s}\right)\left(44.2\, s\right) = 625$$

b) $(\gamma = \omega_0)$ Movimiento oscilatorio críticamente amortiguado.

De acuerdo a la fórmula $\omega' = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$ por ser $\gamma = \omega_0$ el resultado de ω' sería cero lo cual indica que el sistema no oscila y regresará a su punto de equilibrio en el tiempo más corto posible. Su solución particular es

$$x = \left(A + Bt\right) e^{-\gamma t}$$

donde *A* y *B* son constantes a determinar de acuerdo a las condiciones iniciales del problema. En el caso de que $x = A_0$ y $v = 0$ en $t = 0$ se tiene

$$A_0 = \left(A + B[0]\right) e^{-\gamma[0]} = A \quad \Rightarrow \quad A = A_0$$

La velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = (A + Bt)\left[-\gamma\, e^{-\gamma t}\right] + B\, e^{-\gamma t}$ evaluada en $t = 0$

$$0 = \left(A + B[0]\right)\left[-\gamma\, e^{-\gamma[0]}\right] + B\, e^{-\gamma[0]} = -\gamma A + B \quad \Rightarrow \quad B = \gamma A = \gamma A_0$$

La solución para las condiciones iniciales especificadas quedaría

$$x = \left(A_0 + \gamma A_0 t\right) e^{-\gamma t} = A_0\left(1 + \gamma t\right) e^{-\gamma t}$$

En forma gráfica el movimiento se comporta como sigue

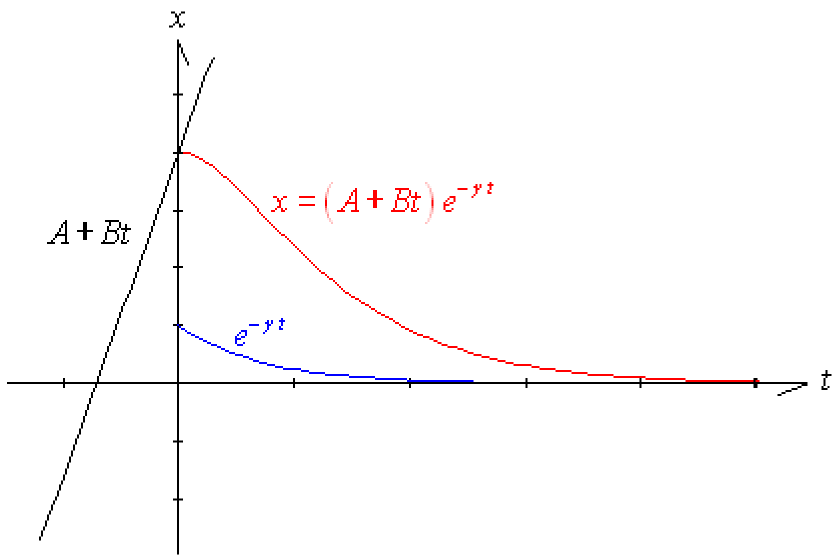


Figura 1.37 Comportamiento de un sistema oscilatorio críticamente amortiguado

c) $(\omega_0 < \gamma)$ Movimiento Amortiguado sobreamortiguado.

El sobre - amortiguamiento indica que tampoco oscila el sistema, pero que tardará más tiempo que el anterior en llegar al punto de equilibrio. Dado que $\omega_0 < \gamma$ el valor de ω' sería imaginario .lo cual justifica lo expresado con anterioridad. La solución para ese caso es

$$x = A\,e^{-(\gamma+\beta)t} + B\,e^{-(\gamma-\beta)t} \quad \text{donde} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^{\,2}}$$

Determinando también los valores de *A* y *B* de acuerdo a las condiciones iniciales obteniendo un movimiento de acuerdo a lo que se muestra en la figura 1.38.

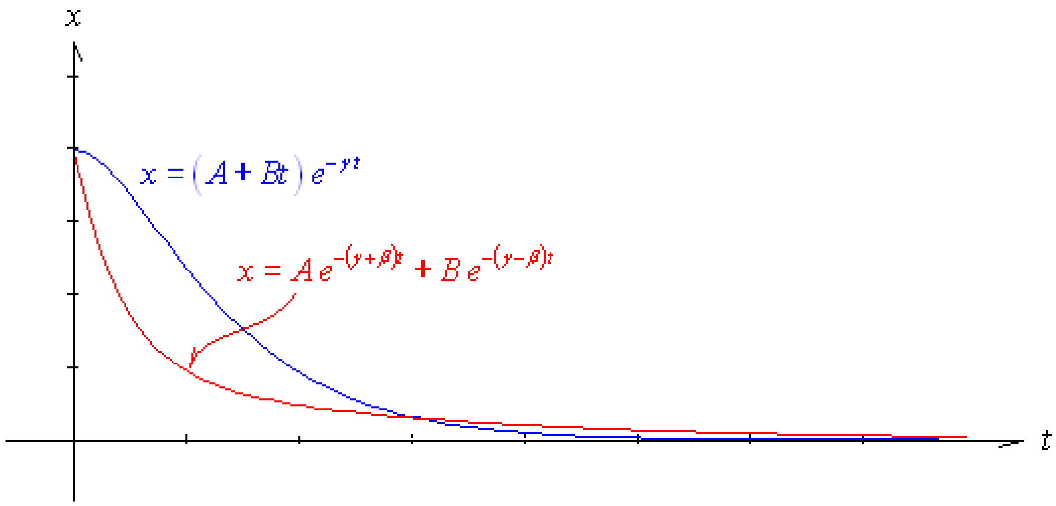


Figura 1.38 Comportamiento de un sistema oscilatorio sobreamortiguado

Es interesante observar como, de acuerdo a lo mencionado con anterioridad, la curva azul que representa al movimiento armónico críticamente amortiguado llega su valor a cero en primer lugar que el movimiento sobreamortiguado representado en rojo.

1.8 Oscilaciones forzadas.

En la naturaleza es común encontrar sistemas como los vistos en la sección anterior donde, debido a una fuerza amortiguante, la amplitud del movimiento disminuye en cada ciclo o se pierde. Por ello, se requiere aplicar una fuerza externa que recupere el movimiento. Dicha fuerza deberá cambiar en el tiempo pues la fuerza amortiguante cambia de sentido según sea el movimiento. Los sistemas oscilatorios que tienen una fuerza externa oscilante se les denomina sistemas oscilatorios forzados y la fuerza externa debe especificarse como sigue:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

La fuerza externa se opondrá siempre a la amortiguante y su frecuencia ω deberá ser muy parecida a la frecuencia natural de oscilación del sistema ω_0 ya que conforme transcurra el tiempo, el sistema termina oscilando a la frecuencia externa. Un ejemplo sencillo de estos sistemas es el caso de un columpio donde la oscilación y la amplitud de la misma la impone la persona que mueve externamente el columpio.

En el caso de un sistema masa-resorte se tiene

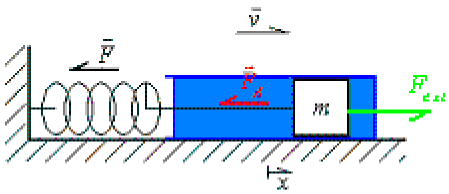


Figura 1.39 Sistema oscilatorio forzado

A la ecuación de las fuerzas se le añadirá esta nueva fuerza quedando

$$-kx - bx + F_0 \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos \omega t$$

cuya solución deberá corresponder nuevamente a un MAS solo que la amplitud no solo depende de la máxima elongación del resorte, sino de la magnitud de la fuerza externa. La frecuencia será la de la fuerza externa y la fase inicial dependerá de todos los parámetros del sistema. Matemáticamente es

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{donde} \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$\text{y} \quad \tan\delta = \frac{b\omega}{m\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)}$$

sin olvidar que el valor de $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. De la ecuación anterior para la amplitud se observa que su valor depende de las frecuencias, de la masa y de la constante de amortiguamiento. Tanto b, m y ω_0 son constantes del sistema mientras que ω es un valor definido externamente. La elección de este valor influirá en la amplitud con la que oscila el sistema. Graficando se tiene

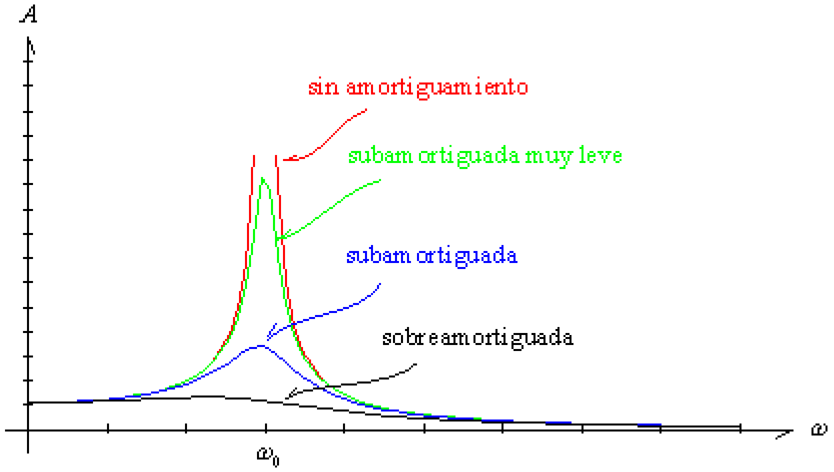


Figura 1.40 Amplitud de un sistema oscilatorio forzado

Se observa en la figura que cuando ω toma el valor de ω_0 el valor de A se vuelve máximo y se establece que el sistema entra en resonancia en amplitud. La frecuencia a la cual se logra este fenómeno se puede determinar por el procedimiento matemático de máximos y mínimos, obteniendo la primera derivada de A respecto a ω, igualando a cero para obtener el valor crítico y sustituyendo en la expresión de amplitud para conocer su valor máximo. Realizando este procedimiento se llega a

$$\omega_{crit\ A} = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

$$A_{\max} = \frac{F_0}{b\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

que cuando se tiene un amortiguamiento pequeño $(\gamma < \omega_0)$ y como

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^{\ 2} - \frac{b^2}{2m^2} = \omega_0^{\ 2} - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \omega_0^{\ 2} - 2\gamma^2 \approx \omega_0^{\ 2}$$

se llega a que la frecuencia crítica donde se tiene máxima amplitud cuando el amortiguamiento es pequeño es la frecuencia natural de oscilación.

$$\omega_{crit\ A} = \omega_0 \quad \text{cuando} \quad \gamma < \omega_0$$

$$A_{\max} = \frac{F_0}{b\omega_0}$$

De igual forma es posible obtener la frecuencia en la cual se tiene la máxima energía del sistema. Para ello, se parte de

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{mF_0^{\ 2}}{2}\frac{\omega^2}{m^2\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2} = \frac{mF_0^{\ 2}}{2m^2}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2\omega^2}{m^2}}\right) =$$

$$= \frac{F_0^{\ 2}}{2m}\left(\frac{1}{\frac{\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2}{\omega^2} + \frac{b^2\omega^2}{m^2\omega^2}}\right) = \frac{F_0^{\ 2}}{2m}\left(\frac{1}{\frac{\omega_0^{\ 4}}{\omega^2} - 2\omega_0^{\ 2} + \omega^2 + \frac{b^2}{m^2}}\right)$$

que, siguiendo el mismo procedimiento anterior para máximos y mínimos se llega a

$$\omega_{crit\ E} = \omega_0$$

$$E_{\max} = \frac{mF_0^{\ 2}}{2b^2}$$

cuyo comportamiento respecto a la frecuencia es

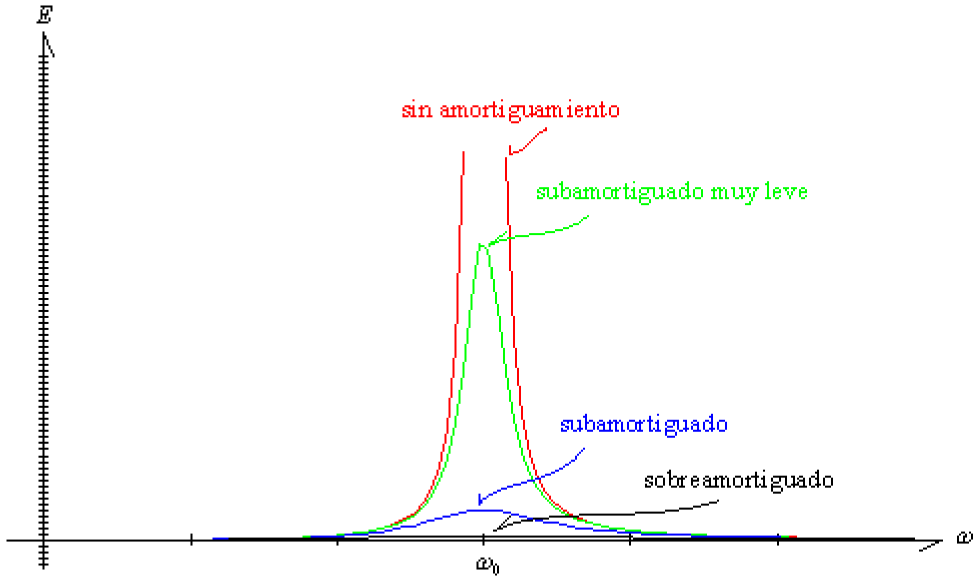


Figura 1.41 Energía en un sistema oscilatorio forzado

Finalmente, si en lugar de la energía se grafica la Potencia considerando que esta última es la variación del cambio de energía (trabajo) con respecto al tiempo, y considerando los valores de la frecuencia donde se tiene la mitad de la potencia máxima, se tiene un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ donde

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

conociéndose a $\Delta\omega$ como la anchura o el ancho de resonancia. Si $\Delta\omega$ es pequeña (el ancho de resonancia es estrecho) el valor de *Q* deberá ser grande por lo que un valor grande de *Q* indica una curva muy aguda respecto a su resonancia. Esto se aprecia en la figura 1.42. Cuando *b* es muy pequeña, en la curva de la potencia o de la energía se tiene un ancho de resonancia de

$$\Delta\omega \approx \frac{b}{m} \quad \text{para} \quad E \quad \text{o} \quad P \quad (\text{para } b \text{ pequeña})$$

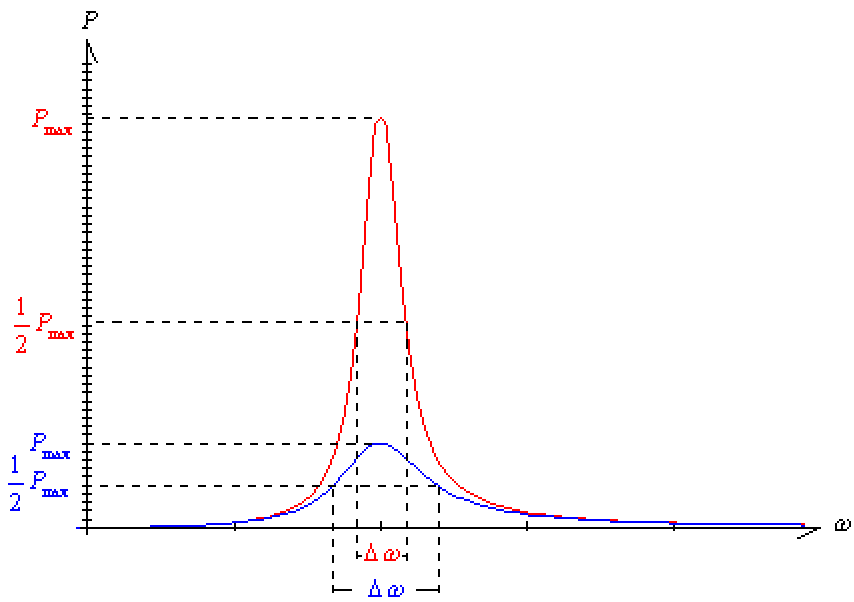


Figura 1.42 Potencia y ancho de resonancia en un sistema oscilatorio forzado

Y para el caso de la amplitud *A*, el valor del ancho de la resonancia para pequeños valores de *b* queda

$$\Delta\omega \approx \frac{2b}{m} \quad \text{para} \quad A \quad (\text{para } b \text{ pequeña})$$

Ejemplo 1.6.2.1

(13.65 F) Se cuelga una masa de 10 kg de un resorte que se estira 4 cm. El soporte del cual se cuelga el resorte se pone en movimiento senoidal. ¿A qué frecuencia esperaría usted un comportamiento resonante?

Datos.

$m = 10\ kg$

$y_0 = 4.0\ cm = 0.040\ m$

Incógnitas.

f_0

Solución.

La frecuencia de resonancia será la frecuencia natural de oscilación por lo que

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para un resorte vertical

$$ky_0 = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{y_0}$$

sustituyendo en la primer ecuación

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{mg}{y_0}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8\ m/s^2}{0.040\ m}} = 2.5\ Hz$$

Ejemplo 1.6.2.2

(14.92 T-M) Un oscilador amortiguado pierde 3.5% de la energía cada ciclo. (a) ¿Cuántos ciclos han de concluir antes de que se disipe la mitad de su energía? (b) ¿Cuál es el factor Q? (c) Si la frecuencia natural es 100 Hz, ¿Cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente?

Datos.

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{n-1} - E_n}{E_{n-1}} = 3.5\% = 0.035$$

$f_0 = 100\ Hz$

Incógnitas.

(a) n cuando $E_n = 0.50 E_0$

(b) Q

(c) $\Delta\omega$

Solución.

(a) En el primer ciclo $E_1 = E_0\left(1 - \frac{\Delta E}{E}\right)$

en el segundo $E_2 = E_1\left(1 - \frac{\Delta E}{E}\right) = E_0\left(1 - \frac{\Delta E}{E}\right)^2$ por lo que, para cualquier ciclo

$E_n = E_0\left(1-\frac{\Delta E}{E}\right)^n$ y despejando n al aplicar logaritmos se tiene

$$n=\frac{Ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right)}{Ln\left(1-\frac{\Delta E}{E}\right)}=\frac{Ln\left(\frac{0.5E_0}{E_0}\right)}{Ln\left(1-0.035\right)}=\frac{-0.6931}{-0.0356}=19.46$$

Como deben ser ciclos completos, se requerirán de 20 ciclos para que la energía disipada sea del 50%.

(b)De la expresión $\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{ciclo}=\frac{2\pi}{Q} \quad \Rightarrow \quad Q=\frac{2\pi}{\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{ciclo}}=\frac{2\pi}{0.035}=179.5$

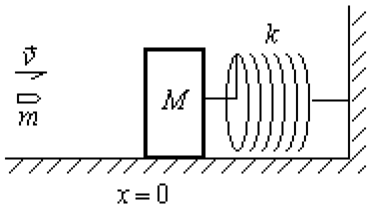
(c) $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{2\pi f_0}{Q}=\frac{2\pi\left(100\ Hz\right)}{179.5}=3.5\ {}^{rad}\!/_{s}$

1.7 Problemas

1.7.1 Problemas resueltos

Problema 1.7.1.1

(17.11 R) Un bloque de masa *M*, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está conectado a un soporte rígido por medio de un resorte con una constante de fuerza *k*. Una bala de masa *m* y de rapidez *v* la golpea como se advierte en la figura. La bala queda incrustada dentro del bloque. En función de *m*, *M*, *v* y *k*, determinar la amplitud del movimiento armónico simple resultante.



Datos.	Incógnitas.
M	*A*
k	
m	
v	

Solución.

Del principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$m\vec{v}+M\,\vec{v}_M=m\vec{v}'+M\left(\vec{v}_M\right)'$$

pero al moverse sólo en la dirección de *x* es posible trabajar con sus magnitudes, además $v_M=0$ y al moverse las dos masas integradas, $\left(v_M\right)'=v'$ por lo que, sustituyendo

$$mv+M\left(0\right)=mv'+M\,v'=\left(m+M\right)v' \quad \Rightarrow \quad v'=\frac{m}{m+M}$$

v' será la velocidad con que inicia el movimiento en $x=0$, por tanto corresponderá a la velocidad máxima del movimiento, es decir $v'=v_{\max}=A\omega$ y como $\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$ ya que *m* + *M* es la nueva masa del sistema oscilante, entonces

$$A=\frac{v_{\max}}{\omega}=\frac{\frac{m}{m+M}v}{\sqrt{\frac{k}{m+M}}}=\frac{m}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}}v=m\sqrt{\frac{m+M}{k\left(m+M\right)^{2}}}\,v=\frac{m}{\sqrt{k\left(m+M\right)}}v$$

Problema 1.7.1.2

(14.50 T-M) Un muelle de constante $k=250\ {}^{N}\!/_{m}$ se cuelga en un soporte rígido y se une a su extremo inferior un objeto de 1.00 kg de masa, que se deja en libertad partiendo del reposo cuando el muelle está sin deformar. (a) ¿A qué distancia por debajo del punto de partida está la posición de equilibrio del objeto? (b) ¿Cuánto desciende el objeto antes de ascender de nuevo? (c) ¿Cuál es el periodo de oscilación? (d) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza por primera vez su posición de equilibrio? (e) ¿Cuándo sucede esto?

Datos.

$k=250\ {}^{N}\!/_{m}$

$m=1.00\ kg$

Incógnitas.

(a) y_0

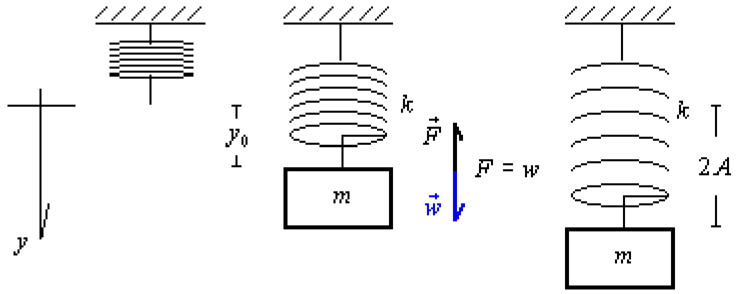
(b) y_T

(c) T

(d) v en $y'=0$ por primera vez

(e) t cuando $y'=0$ por primera vez

Solución. En la figura se observa cuando no hay masa y por tanto el resorte no ejerce ninguna fuerza, cuando se igualan las fuerzas del resorte y la de la gravedad y cuando la masa llega a su punto más bajo. El desplazamiento en y se considera positivo hacia abajo.



(a) De la fórmula para el nuevo punto de equilibrio tenemos

$$k\,y_0=mg\quad\Rightarrow\quad y_0=\frac{mg}{k}=\frac{(1.00\ kg)(9.80)}{250\ {}^{N}\!/_{m}}=0.0392\ m$$

(b) Dado que la distancia recorrida desde su posición inicial al nuevo punto de equilibrio es la amplitud del movimiento puesto que a partir de ese lugar la fuerza del resorte es mayor a la de la gravedad oponiéndose al movimiento, entonces la distancia total recorrida será

$$y_T=2A=2y_0=2\left(0.0392\ m\right)=0.0784\ m$$

(c) La frecuencia angular es $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250\ {}^{N}\!/_{m}}{1.00\ kg}} = 15.8\ {}^{rad}\!/_{s}$, el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{15.8\ {}^{rad}\!/_{s}} = 0.397\ s$$

(d) Cuando pasa por primera vez el punto de equilibrio, la velocidad va en dirección positiva (de acuerdo a nuestro eje de referencia) y por ser el punto de equilibrio, su valor es máximo de manera que,

$$v = A\omega = (0.0392\ m)\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right) = 0.620\ {}^{m}\!/_{s}$$

(e) Para determinar el tiempo en que $y' = 0$ por primera vez, que sería a un cuarto del periodo, por lo que

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{2\pi}{4\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right)} = 0.0994\ s$$

Otra forma sería a partir de las ecuaciones de movimiento determinando en primer término la fase inicial, ya que, en $t = 0$, $y' = -A$ y $v = 0$, entonces

$$y' = A\cos(\omega t + \delta) \quad \Rightarrow \quad -A = A\cos(0+\delta) \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = -1 \quad \text{y} \quad \delta = \pi$$

Sustituyendo en $v = -A\omega\ sen(\omega t + \delta)$ cuando $y' = 0$

$$0 = -A\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right) sen\left(\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right)t + \pi\right) \quad \Rightarrow \quad sen\left(\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right)t + \pi\right) = 0$$

$$\left(15.8\ {}^{rad}\!/_{s}\right)t + \pi = \sin^{-1}0 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{3\pi}{2}$$

como el tiempo no puede ser negativo, se toma el segundo valor y se despeja *t*

$$t = \frac{\frac{3\pi}{2} - \pi}{15.8\ {}^{rad}\!/_{s}} = 0.0994\ s$$

Problema 1.7.1.3

(30.41 S-Z) Cierto circuito RLC tiene $L = 0.285\ H$, $C = 4.60\times10^{-4}\ F$ y $\omega' = \frac{1}{\sqrt{6LC}}$. ¿Cuál es la resistencia *R* del circuito?

Datos.

$L = 0.285\ H$

$C = 6.60\times10^{-4}\ F$

$\omega' = \frac{1}{\sqrt{6LC}}$

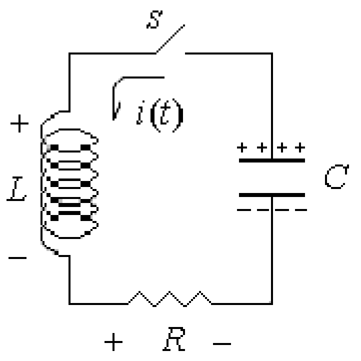
Incógnitas.

R

Solución. Del circuito se puede encontrar la ecuación diferencial considerando que la variación de la carga respecto al tiempo es negativa pues la carga disminuye y de igual forma el valor de la corriente respecto al tiempo, de manera que

$$-L\frac{di}{dt}-\frac{1}{C}q-Ri=0$$

$$-L\frac{d^2q}{dt^2}-R\frac{dq}{dt}-\frac{1}{C}q=0$$



Dividiendo entre –*L* se tiene

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$$ Ecuación diferencial del circuito RLC

Comparando con la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio amortiguado que es $\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=0$ se tiene

$$\gamma=\frac{R}{2L}\quad ;\quad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}\quad \text{y}\quad \omega'=\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2}$$

Sustituyendo valores en la última fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{6LC}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

elevando al cuadrado y despejando R

$$\frac{1}{6LC}=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$$

$$\frac{R^2}{4L^2}=\frac{1}{LC}-\frac{1}{6LC}=\frac{5}{6LC}\quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{10L}{3C}}=\sqrt{\frac{10(0.285\ H)}{3(4.60\times10^{-4}\ F)}}=45.4\ \Omega$$

Problema 1.7.1.4

(11.37 S-J) Un circuito RLC se usa en un radio para sintonizar una estación de FM que transmite a 99.7 MHz. La resistencia del circuito es de 120 Ω y la inductancia de 1.40 μH. ¿Qué capacitancia debe usarse?

Datos.

$R=120\ \Omega$

$L=1.40\ \mu H=1.40\times10^{-6}\ H$

Incógnitas.

C cuando $f_0=97.9\ MHz=97.9\times10^6\ Hz$

Solución. $\omega_0=2\pi f_0=2\pi\left(99.7\times10^6\ Hz\right)=6.26\times10^8\ rad/s$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{\omega_0{}^2L}=\frac{1}{\left(6.26\times10^8\ rad/s\right)^2\left(1.40\times10^{-6}\ H\right)}=1.82\times10^{-12}\ F$$

Problema 1.7.1.5

(14.47 T-M) Un bloque de 0.4 kg que está sujeto a un muelle de constante de fuerza $12\,{}^{N}\!/_{m}$ oscila con una amplitud de 8 cm. Determinar (a) la velocidad máxima del bloque, (b) la velocidad y aceleración del bloque cuando se encuentra a $x = 4\,cm$ de la posición de equilibrio y (c) el tiempo que tarda el bloque de $x = 0 \quad \text{a} \quad x = 4\,cm$.

Datos.

$m = 0.4\,kg$

$k = 12\,{}^{N}\!/_{m}$

$A = 8\,cm = 0.08\,m$

Incógnitas.

(a) $v_{\max}$

(b) v

$a \quad \text{cuando} \quad x = 4\,cm = 0.04\,m$

(c) $t \quad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{a} \quad x = 4\,cm = 0.04\,m$

Solución.

(a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12.0\,{}^{N}\!/_{m}}{0.400\,kg}} = 5.48\,{}^{rad}\!/_{s} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = A\omega = (0.0800\,m)\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right) = 0.438\,{}^{m}\!/_{s}$$

(b) y (c) Suponiendo que inicia su movimiento $(t = 0)$ en $x = 0$ hacia la derecha $(v > 0)$, de la ecuación de movimiento para el desplazamiento

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \Rightarrow \quad 0 = (0.0800\,m)\cos(0 + \delta)$$

$$\cos\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \cos^{-1} 0 = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

Si se toma $\delta = -\frac{\pi}{2}$, la velocidad en $t = 0$ es $v = -A\omega\, sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A\omega > 0$ lo que nos indica que es correcto el valor de la fase inicial asignado, quedando las ecuaciones

$$x = (0.0800\,m)\cos\left(\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = -(0.0800\,m)\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right) sen\left(\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -(0.0800\,m)\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)^2 \cos\left(\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2}\right)$$

para $x = 0.0400\,m$ sustituyendo

$$0.004\,m = (0.0800\,m)\cos\left(\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2}\right) = 0.500$$

$$\left(5.48\,{}^{rad}\!/_{s}\right)t - \frac{\pi}{2} = \cos^{-1} 0.500 = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$$

Considerando que $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.48\,{}^{rad}\!/_{s}} = 1.15\,s$ es el periodo y que en el primer $x = 0.0400\,m$ no debe ser el tiempo mayor de $\frac{T}{4}$ se toma el primer valor, esto es

$$t=\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{5.48\ rad/s}=0.0955\ s$$

sustituyendo en las ecuaciones para v y a se tiene

$$v=-(0.0800\ m)(5.48\ rad/s)\ sen\left((5.48\ rad/s)(0.0955)-\frac{\pi}{2}\right)=-0.438\ m/s\ sen(-1.08)$$

$$v=0.379\ m/s$$

$$a=-(0.0800\ m)(5.48\ rad/s)^2\cos\left((5.48\ rad/s)(0.0955\ s)-\frac{\pi}{2}\right)=-(2.40\ m/s^2)\cos(-1.08)$$

$$a=-1.13\ m/s^2$$

Problema 1.7.1.6

(15.45 S-J) Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve por $F=(3.00\ N)\ sen(2\pi t)$. Si la constante de fuerza del resorte es $20.0\ N/m$, determine (a) el periodo y (b) la amplitud del movimiento.

Datos.

$m=2.00\ kg$

$k=20.0\ N/m$

$b=0$

$F=(3.00\ N)\ sen\ 2\pi t$

Incógnitas.

(a) *T*

(b) *A*

Solución.

(a) $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20.0\ N/m}{2.00\ kg}}=3.16\ rad/s$ es la frecuencia natural de oscilación.

$\omega=2\pi\ rad/s$ es la frecuencia de la fuerza externa que será la que predomine en el tiempo por lo que

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\pi\ rad/s}=1.00\ s$$

(b) $A=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2}}=\frac{3.00\ N}{\sqrt{(2.00\ kg)^2\left([3.16\ rad/s]^2-[6.28\ rad/s]^2\right)^2+0}}$

$A=0.0509\ m$

1.7.2 Problemas a resolver

1.7.2.1 Verificar si las expresiones siguientes corresponden a la solución de un movimiento armónico simple, a) x(t) = A sen ωt + B cos ωt; b) x(t) = A $e^{-\omega t}$; c) y(t) = ½ ($e^{i\omega t}$ - $e^{-i\omega t}$) donde $i = \sqrt{-1}$. *{ RESP. a) si, b) no, c) si }*

1.7.2.2 (14.25 T-M) Una partícula de masa m empieza estando en reposo en x = +25 cm y oscila alrededor de la posición de equilibrio en x = 0 con un período de 1.5 s. Escribir las ecuaciones para a) la posición x en función del tiempo t, b) la velocidad v en función de t y c) la aceleración de a en función de t. *{ RESP. a) x = (25.0 cm) cos [(4.19 s^{-1})t]; b) v = - (105 cm/s) sen [(4.19 s^{-1})t]; c) a = -(439 cm/s^2) cos [(4.19 s^{-1})t] }*

1.7.2.3 (12.3 A) Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación x = 4 sen (0.1t + 0.5) donde todas las cantidades se expresan en unidades del MKS. Encontrar a) la amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento, b) la velocidad y la aceleración, c) las condiciones iniciales, d) la posición, velocidad y aceleración para t = 5 seg. *{ RESP. a) 4m, 20π seg. 0.05/π Hz, 0.5 rad; b) v = 0.4 cos (0.1t + 0.5) m/s, a = -0.04 sen (0.1t + 0.5) m/s^2; c) 1.92 m, 0.351 m/s, -0.02 m/s^2; d) 3.36 m, 0.216 m/s, -0.03 m/s^2 }*

1.7.2.4 (15.7 S-J) Un oscilador armónico simple tarda 12 s para experimentar cinco vibraciones completas. Hállese (a) el período de su movimiento, (b) la frecuencia en hertz y (c) la frecuencia angular en radianes por segundo. *{ RESP. (a) 2.40 s; (b) 0.417 Hz; (c) 2.62 rad/s }*

1.7.2.5 (14.33 T-M) Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 40 cm con una velocidad constante de 80 cm/s. Hallar a) la frecuencia y b) el período del movimiento. c) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la partícula en función de tiempo t, suponiendo que la partícula está sobre el eje x en el instante t = 0. *{ RESP: a) 3.14 s; b) 0.318 Hz; c) x = (40 cm) cos [(2 s^{-1})t] }*

1.7.2.6 (15.2 S-J) En un motor, un émbolo oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía según la expresión

$$x = (5.00 \text{ cm}) \cos (2t + \pi/6)$$

donde x es en centímetros y t es en segundos. En t = 0, encuentre (a) la posición del émbolo, (b) su velocidad y (c) su aceleración. (d) Encuentre el período y amplitud del movimiento. *{ RESP. (a) 4.33 cm; b) -5.00 cm/s; c) -17.3 cm/s^2; d) A = 5.00 cm , T = 3.14 s }*

1.7.2.7 (15.7 B) Un bloque de masa m = 0.5 kg se amarra a un resorte horizontal, cuya constante es k = 50 N/m. En t = 0.1 s, el desplazamiento es x = -0.2 m y la velocidad v = +0.5 m/s. Suponga x(t) = A sen(ωt + ϕ). a) Halle la amplitud y la constante de fase. b) Escriba la ecuación para x(t). c) ¿Cuándo ocurre por primera vez la condición x = 0.2 m y v = -0.5 m/s? *{ RESP. a) 0.206 m y -2.33 rad; b) x(t) = 0.206 sen(10t – 2.33) m /; c) 0.414 s }*

1.7.2.8 (15.19 S-J) Un cuerpo de 50.0 g conectado a un resorte de constante de fuerza 35.0 N/m oscila sobre una superficie horizontal sin fricción, con una amplitud de 4.00 cm. Hállese (a) la energía total del sistema y (b) la rapidez del cuerpo cuando la posición es 1.00 cm. Encuentre (c) la energía cinética y (d) la energía potencial cuando la posición es 3.00 cm. *{ RESP. (a) 28.0 mJ, (b) 1.02 m/s, (c) 12.2 mJ, (d) 15.8 mJ }*

1.7.2.9 (13.22 S-Z) Las puntas de un diapasón rotulado "392 Hz" está vibrando con una amplitud de 0.600 mm. a) ¿Qué rapidez máxima tiene una punta? b) Una mosca común (mosca doméstica) con masa de 0.0270 g está sujeta en el extremo de una de las puntas. Al vibrar la punta, ¿qué energía cinética máxima tiene la mosca? Suponga que el efecto de la masa de la mosca sobre la frecuencia de oscilación es despreciable. *{ RESP. a) 1.48 m/s; b) 2.96 x 10^{-5} J }*

1.7.2.10 (17.21 R) Una partícula de 12.3 kg experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 1.86 mm. Su aceleración máxima es 7.93 km/s^2. a) Encuentre el período del movimiento. b) ¿Cuál es la velocidad máxima? c) Calcule la energía mecánica total de este oscilador armónico simple. *{ RESP. a) 3.04 ms, b) 3.84 m/s, c) 90.7 J }*

1.7.2.11 (17.3 R) Un altavoz produce un sonido musical para la oscilación de un diafragma. Si la amplitud de la oscilación se limita a 1.20x10^{-3} mm, ¿qué frecuencias producirán en el diafragma la aceleración mayor que g? *{ RESP. >455 Hz }*

1.7.2.12 (17.51 R) Un automóvil de 2,200 lb que transporta cuatro pasajeros de 180 lb se desplaza por una accidentada carretera de terracería. Las asperezas del terreno se hallan a 13 ft de distancia una de otra. Se observa que el automóvil rebota con una amplitud máxima cuando va a una velocidad de 10 mi/h. Ahora se detiene y las cuatro personas salen de él. ¿Cuánto se eleva la carrocería en su suspensión con esta reducción de peso? *{ RESP. 1.9 in }*

1.7.2.13 (14.34 T-M) Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 15 cm, dando una revolución cada 3 s. a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? b) ¿Cuál es su velocidad angular ω? c) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la misma en función de t, suponiendo que está sobre el eje x positivo en el instante t = 0. *{ RESP. a) 31.4 cm/s; b) 2.094 rad/s; c) x = (15 cm) cos [(2.094 t) s^{-1}] }*

1.7.2.14 (17.9 R) El pistón de cabeza cilíndrica de una locomotora tiene una carrera de 76.5 cm. ¿Qué velocidad máxima alcanza si las ruedas motrices realizan 193 rev/min y el pistón se desplaza en un movimiento armónico simple? *{ RESP. 7.73 m/s }*

1.7.2.15 (17.25 R) Obtenga la longitud de un péndulo simple cuyo período es 1.00 s en lugares donde g = 9.82 m/s^2. *{ RESP. 0.249 m }*

1.7.2.16 (14.62 T-M) Si el período de un péndulo de 70 cm de longitud es 1.68 s, ¿cuál es el valor de g en el sitio donde está situado el péndulo? *{ RESP. 9.79 m/s^2 }*

1.7.2.17 (15.22 B) Un péndulo simple está formado por una lenteja de 40 g de masa y una cuerda de 80 cm de longitud. En t = 0, el desplazamiento angular es de θ = 0.15 rad y la velocidad es 60 cm/s. Halle: a) la amplitud angular y la constante de fase; b) la energía total; c) la altura máxima por encima de la posición de equilibrio. *{ RESP. a) θ_0 = 0.262 rad y δ = 0.96 rad; b) 0.0107 J; c) 2.73 cm }*

1.7.2.18 (13.19 S-Z) El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación x(t) = [(7.40 cm) cos[(4.16 s^{-1}) t – 2.42]. Calcule: a) el tiempo que tarda una vibración completa; b) la constante de fuerza del resorte; c) la rapidez máxima de la masa; d) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; e) la posición, rapidez y aceleración de la masa en t = 1.00 s, y la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento. *{ RESP. a) 1.51 s; b) 26.0 N/m; c) 0.308 m/s; d) 1.92 N; e) -0.0125 m, 0.303 m/s y 0.216 m/s^2 }*

1.7.2.19 (13.25 F) Se cuelga un resorte del techo. Se fija a él una masa de 25 g y el resorte se estira 12 cm. No tenga en cuenta el amortiguamiento. ¿Cuál es el período de oscilación de una masa de 75 g fija al resorte? *{RESP: 1.2 s }*

1.7.2.20 (31.3 G) En un circuito LC la frecuencia angular de oscilación de la corriente es 58 krad/s, y su capacidad es C = 58 nF, ¿cuánto vale la inductancia de la bobina? *{ RESP. 5.1 mH }*

1.7.2.21 (12.37 A) Encontrar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son x_1 = 6 sen 2t y x_2 = 8 sen (2t + α), si α = 0, π/2 y π. Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante en cada caso. *{ RESP. a) 14 sen 2t; b) 10 sen (2t + 0.93); c) -2 sen 2t }*

1.7.2.22 (12.39 A) Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son x = 4 sen ωt, e y = 3 sen (ωt + α), cuando α = 0, π/2 y π. Hacer un gráfico de la trayectoria de la partícula para cada caso y señalar el sentido en el cual viaja la partícula. *{ RESP. y = ¾ x; x^2/16 + y^2/9 = 1; y = -¾ x }*

1.7.2.23 (12,58 A) Los módulos de elasticidad de los resortes en la figura 1 son, respectivamente k_1 y k_2. Calcular la constante k del sistema cuando los dos resortes están conectador como en a) y b). *{ RESP. a) k_1k_2 / (k_1+k_2) y b) k_1 + k_2 }*

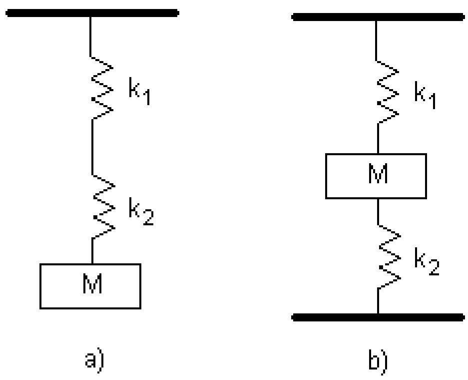


Figura 1

1.7.2.24 (13.57 F) Una masa en un resorte con frecuencia natural ω_0 = 38 rad/s, se coloca en un ambiente en el cual hay una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa. Si la amplitud se reduce a 0.82 veces su valor inicial en 9.9 s, ¿cuál es la frecuencia angular del movimiento amortiguado? *{RESP. 37.999995 rad/s }*

1.7.2.25 (15.41 S-J) Un péndulo con longitud de 1.00 m se suelta desde un ángulo inicial de 15.0º. Después de 1000 s su amplitud ha sido reducida por fricción a 5.50º. ¿Cuál es el valor de b/2m? *{ RESP. 1.00×10^{-3} s^{-1} }*

1.7.2.26 (15.43 S-J) Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de resistencia del aire está representado por el coeficiente de amortiguamiento b = 3.00 N s/m. (a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. (b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? (c) Encuentre el intervalo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial.*{ RESP. (a) 7.00 Hz, (b) 2.00%, (c) 10.6 s }*

1.7.2.27 (31.19 G) Un circuito RLC tiene R = 350 Ω, L = 16 mH y C = 390 nF. a) ¿Se trata de un sistema subamortiguado o sobreamortiguado? Si es subamortiguado, determinar b) ω_0 y c) τ. *{ RESP. a) Bajo amortiguamiento; b) 6.3 krad/s y c) 91 μs }*

1.7.2.28 (15.45 S-J) Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción y es impulsado por una fuerza externa dada por F = (3.00 N) sen (2πl). Si la constante de fuerza del resorte es 20.0 N/m, determine (a) el período y (b) la amplitud del movimiento. *{ RESP. (a) 1.00 s, (b) 5.09 cm }*

1.7.2.29 (14.91 T-M) Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante de fuerza k = 400 N/m. La constante de amortiguamiento es b = 2.00 kg/s. Está forzado por una fuerza senoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular ω = 10 rad/s. a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a que frecuencia se producirá la resonancia? c) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. d) ¿Cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la curva de resonancia? *{ RESP. a) 4.98 cm; b) 14.1 rad/s; c) 35.4 cm; d) 1.00 rad/s }*

1.7.2.30 (15.47 S-J) Un peso de 40.0 N se cuelga de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema es no amortiguado y está sometido a una fuerza armónica de exitación de 10.0 Hz, resultando en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza de excitación. *{ RESP. 318 N }*