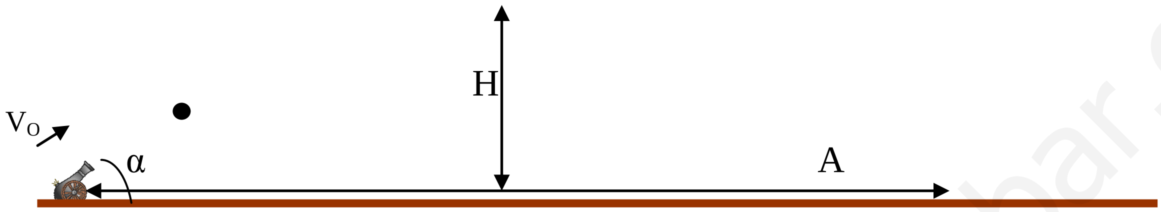
ESTUDIO DEL TIRO OBLICUO

PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS

Comenzamos el estudio del tiro parabólico planteando hipótesis respecto de este movimiento, más precisamente acerca de las variables que deberían influir en el alcance y la altura del lanzamiento. Lógicamente consideramos que los factores influyentes deberían ser la velocidad inicial del lanzamiento (v_o), el ángulo inicial (α) y el valor de la aceleración de la gravedad (g).



Respecto de la influencia de la velocidad inicial v_o (para un determinado ángulo y un cierto valor de g), es lógico suponer que, tanto el alcance como la altura serán mayores cuanto mayor sea dicha velocidad, v_o, excepto para los casos de que el lanzamiento fuera vertical ($\alpha=90^o$) u horizontal ($\alpha=0^o$) en los que el alcance debería ser nulo, con independencia de cuál sea la velocidad de lanzamiento. Como casos extremos, planteamos que si $v_o = 0$, tanto el alcance A, como la altura H del lanzamiento, serán nulos. Si, por el contrario la velocidad del lanzamiento se hiciera ilimitadamente grande ($v_o \to \infty$) el alcance y la altura también tenderían a aumentar de forma ilimitada.

En cuanto a la influencia de la aceleración de la gravedad, g (para una determinada velocidad de lanzamiento y un cierto ángulo inicial), planteamos que cuanto mayor sea g, menor serán la altura y el alcance del lanzamiento. Como casos extremos, diremos que si no hubiera gravedad ($g = 0$), el alcance y la altura serían ilimitados ($A\to\infty$, $H\to\infty$) Por el contrario, si la gravedad fuese ilimitadamente grande ($g\to\infty$) el alcance y la altura serían nulos ($A=0$, $H=0$)

Expresamos finalmente la influencia del ángulo del lanzamiento en el alcance (para una cierta velocidad inicial y un determinado valor de g) Mientras dicho ángulo esté por debajo de 45^o, resulta evidente que al aumentar el ángulo ha de aumentar el alcance, pero cuando superemos los 45^o el lanzamiento se hace más vertical (y menos horizontal) al aumentar el ángulo y, por tanto, es lógico plantear que disminuya el alcance. Planteamos, por ello, que el alcance máximo debería producirse cuando el ángulo inicial sea 45^o. En resumen:

Para $0^o<\alpha<45^o$, si α aumenta, A aumenta
Para $45^o<\alpha<90^o$, si α aumenta, A disminuye
Para $\alpha=0^o$ ó $\alpha=90^o$, $A=0$
Para $\alpha=45^o$ el alcance A es máximo

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Para escribir las ecuaciones del movimiento aplicamos la hipótesis de Galileo. Estableciendo el origen de coordenadas del SR en la posición inicial del lanzamiento, planteamos un movimiento teórico de avance horizontal uniforme con velocidad $v_x = v_o \cos\alpha$ (es decir, la componente horizontal de la velocidad inicial). Por tanto, las ecuaciones del movimiento horizontal son:

$$a_x = 0 \qquad v_x = v_o \cos\alpha \qquad x = v_o\,(\cos\alpha)\cdot t$$

El movimiento teórico vertical es uniformemente acelerado, con velocidad inicial $v_x = v_o \sin\alpha$ (la componente vertical de la velocidad oblicua inicial) y sometido a la aceleración g (negativa, teniendo en cuenta el SR escogido) Por tanto, las ecuaciones del movimiento vertical son:

$$a_y = -g \qquad v_y = -gt + v_o \sin\alpha \qquad y = -\frac{g\cdot t^2}{2} + v_o\,(\sin\alpha)\cdot t$$

ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA

Eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones de la posición se obtiene la expresión que da en todo momento la coordenada vertical de la posición en función de la coordenada horizontal.

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_o^2 cos^2\alpha}$$

La representación de esta función y = f(x) es la trayectoria del movimiento. Se trata de una parábola simétrica respecto de un eje vertical que pase por el punto de altura máxima.

OBTENCIÓN DEL ALCANCE Y DE LA ALTURA MÁXIMA DEL LANZAMIENTO

Una forma de hallar la altura máxima del lanzamiento se basa en considerar que en la posición de máxima altura la velocidad es horizontal. Es decir:

$$\text{Para} \quad y = H \;\rightarrow\; v_y = -gt_H + v_o \sin\alpha = 0 \;\rightarrow\; t_H = \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

Y la altura máxima, se calcula sustituyendo t_H en la ecuación de la posición vertical. Se obtiene:

$$H = \frac{v_o^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

Partiendo de este resultado, una forma de obtener el alcance es, sustituir $2\cdot t_H$ en la ecuación de la posición horizontal. Se obtiene:

$$A = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Es sencillo comprobar que estas expresiones de la altura y el alcance, verifican todas las hipótesis y los casos extremos expresados más arriba.

RELACIÓN ENTRE EL ALCANCE Y LA ALTURA MÁXIMA

Combinando las expresiones del alcance y la altura, obtenemos la siguiente relación directa entre ambas magnitudes:

$$A = \frac{4H}{\tan\alpha}$$

Es decir, para un ángulo dado, los alcances y las alturas máximas son proporcionales. El interés de esta relación estriba en el hecho de que es fácilmente susceptible de contrastación experimental (por ejemplo, se puede fijar α = 45º y comprobar la relación entre H y A en diversos lanzamientos realizados con velocidades iniciales diferentes). Al verificar esta relación, el experimento también contrasta la hipótesis de Galileo sobre la descomposición del movimiento, puesto que dicha hipótesis fundamentó las ecuaciones del tiro oblicuo.

ÁNGULO DE MAYOR ALCANCE

Puesto que la fórmula que calcula el alcance es:

$$A = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Para una velocidad inicial dada, v_o, y teniendo en cuenta que g es constante, el valor máximo del alcance se produce cuando se cumple que: $\sin\alpha\cos\alpha$ es máximo. Un procedimiento para exigirlo se basa en utilizar la fórmula del ángulo doble:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Por tanto, el producto del seno por el coseno es máximo cuando lo es el seno del ángulo doble, es decir, cuando:

$$\sin(2\alpha) = 1 \rightarrow 2\alpha = 90^o \rightarrow \alpha = 45^o$$

Otra forma de calcular el ángulo de máximo alcance es derivar la función del alcance respecto del ángulo e igualar a cero (para obtener los máximos y mínimos de dicha función):

$$\frac{dA}{d\alpha}=\frac{d\left[\frac{2v_o^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right]}{dt}=\frac{2v_o^2}{g}[\cos^2\alpha-\sin^2\alpha]$$

Para que A sea máximo respecto del ángulo tiene que ser $\frac{dA}{d\alpha}=0$, es decir:

$$\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=0 \rightarrow \text{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha \rightarrow \tan\alpha=\pm 1 \rightarrow \alpha=45^{\circ}$$

ÁNGULO DE MAYOR ALCANCE EN UN LANZAMIENTO CON ALTURA INICIAL

Si el lanzamiento se realiza desde una cierta altura inicial (y_o) sobre el suelo, el ángulo de alcance máximo (hasta que llega al suelo) ya no es 45º. Completando la trayectoria (prolongándola hacia atrás en el tiempo), nos damos cuenta de que el ángulo inicial correspondiente a un alcance máximo ha de ser inferior a 45º. En efecto, en este caso las ecuaciones del movimiento y la correspondiente de la trayectoria, son:

$$x=v_o(\cos\alpha)\cdot t \qquad y=-\frac{gt^2}{2}+v_o(\sin\alpha)t+y_o \qquad y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_o^2cos^2\alpha}$$

En este caso, para obtener el alcance máximo, lo más cómodo es usar directamente la ecuación de la trayectoria, sustituyendo y= 0 y x = A. Se obtiene:

$$0=A\tan\alpha-\frac{gA^2}{2v_o^2cos^2\alpha}+y_o \qquad (*)$$

Para imponer que sea máximo el alcance A, primero derivamos la ecuación respecto del ángulo α:

$$0=A\,sec^2\alpha+\frac{dA}{d\alpha}\tan\alpha-\frac{g2A}{2v_o^2}\frac{dA}{d\alpha}sec^2\alpha-\frac{gA^2}{2v_o^2}\frac{2\tan\alpha}{cos^2\alpha}$$

Como buscamos el ángulo (α) que hace máximo el alcance (A), hacemos $\frac{dA}{d\alpha}=0$ y la ecuación anterior queda:

$$0=Asec^2\alpha-\frac{gA^2\tan\alpha\,sec^2\alpha}{v_o^2}\rightarrow 0=1-\frac{gA}{v_o^2}\tan\alpha \rightarrow \tan\alpha=\frac{v_o^2}{gA} \quad (1)$$

Sustituyendo esta última expresión en (*) y teniendo en cuenta que $sec^2\alpha=1+tan^2\alpha$:

$$A=\frac{v_o}{g}\sqrt{v_o^2+2gy_o} \quad (2)$$

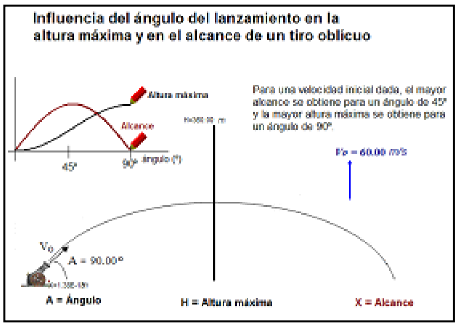
Combinando (1) y (2), se obtiene finalmente:

$$(\alpha)_{A\,max} = \tan^{-1}\frac{v_o}{\sqrt{v_o^2+2gy_o}}$$

Como habíamos intuido, este ángulo es menor de 45º. Por ejemplo, para una altura inicial de *10m* y una velocidad inicial de *20m/s*, resulta $\alpha = 39.3^o$

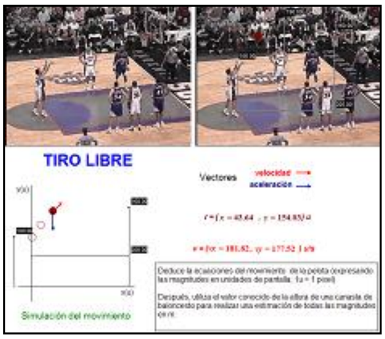
ANIMACIONES INFORMÁTICAS *MODELLUS* PARA PRACTICAR

En la Web del Departamento (http://intercentres.edu.gva.es/iesleonardodavinci/Fisica/fisica.htm) se desarrolla con detalle el tema del tiro oblicuo y se aportan cuatro animaciones informáticas *Modellus* de elaboración propia para practicar.



Una de tales animaciones calcula y representa los valores de la altura máxima y del alcance en función del ángulo de lanzamiento. Constata que, para una velocidad inicial dada, el mayor alcance se obtiene para un ángulo de lanzamiento de 45º y la mayor altura máxima corresponde a un ángulo de lanzamiento de 90º.

La segunda animación a que nos referimos aplica las ecuaciones del movimiento del tiro oblicuo al lanzamiento de un tiro libre, filmado en un partido de baloncesto. Usa dimensiones conocidas (altura de la canasta, distancia del lanzador a dicha canasta, etc.) como datos de referencia para establecer la equivalencia entre metros y pixeles. Constata que el movimiento real de la pelota filmada coincide con el de una pelotita virtual que obedece a las ecuaciones del tiro oblicuo (modelo matemático de la simulación).



La tercera animación sigue el mismo procedimiento que la anterior para estudiar el movimiento de una pelotita que rebota oblicuamente sobre el suelo. Constata la correspondencia entre el movimiento real de la pelotita filmada y el de una pelotita virtual que obedece a las ecuaciones del tiro oblicuo desde el momento de producirse el rebote.

Finalmente, la cuarta animación representa a intervalos iguales de tiempo la trayectoria seguida por un cuerpo tras un lanzamiento oblicuo. El usuario puede alterar cada una de las condiciones iniciales del problema: velocidad de lanzamiento, ángulo, gravedad y altura inicial.