Analice el movimiento horizontal del proyectil como una partícula bajo velocidad constante. Examine el movimiento vertical del proyectil como una partícula bajo aceleración constante.

4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mentales y gráficas y que sus resultados son realistas.

EJEMPLO 4.2 Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.11) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.

A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?

Mike Powell/Allsport/Getty Images

Figura 4.11 (Ejemplo 4.2) Mike Powell, actual poseedor del récord mundial de salto de longitud de 8.95 m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los brazos y piernas de un atleta de salto de longitud se mueven en una forma compleja, pero este movimiento se ignorará. El movimiento del atleta se conceptualiza como equivalente al de un proyectil simple.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. Puesto que se conocen la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y ya que la altura final es la misma que la altura inicial, se confirma que el problema satisface las condiciones para aplicar las ecuaciones 4.12 y 4.13. Este planteamiento es la forma más directa de analizar este problema, aunque los métodos generales descritos siempre darán la respuesta correcta.

Analizar

Aplique la ecuación 4.13 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 \operatorname{sen} 2(20.0°)}{9.80 \text{ m/s}^2} = \boxed{7.94 \text{ m}}$$

B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

SOLUCIÓN

Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2(\operatorname{sen} 20.0°)^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = \boxed{0.722 \text{ m}}$$

Finalizar Encuentre las respuestas a los incisos A) y B) con el uso del método general. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta como partícula es una simplificación. No obstante, los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en los deportes. Un sistema complicado, como el del atleta en salto de longitud, se puede representar como una partícula y aun así obtener resultados razonables.

www.yoquieroaprobar.es

EJEMPLO 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión

En una popular demostración, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, si el cañón se apunta inicialmente al objetivo fijo, el proyectil golpea al objetivo que cae como se muestra en la figura 4.12a.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se forman conceptos del problema al estudiar la figura 4.12a. Note que el problema no pide valores numéricos. El resultado esperado debe involucrar un argumento algebraico.

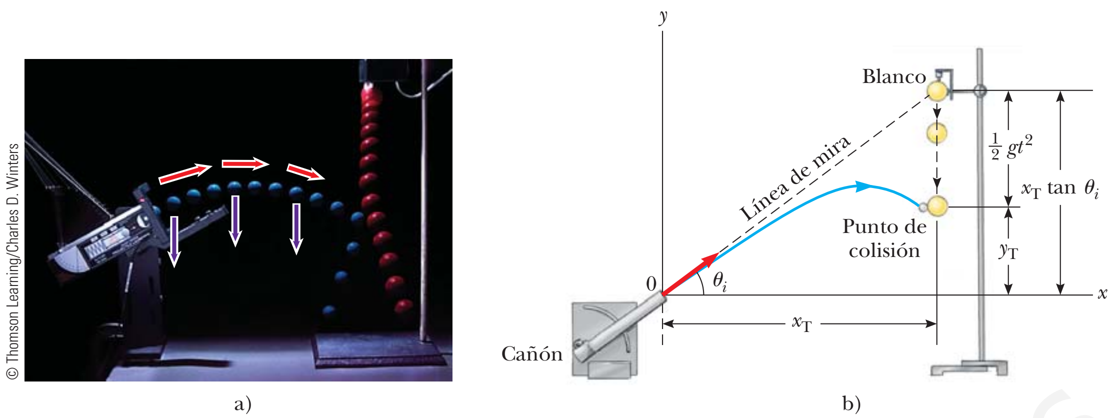


Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyectil–objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. Advierta que la velocidad del proyectil (flechas rojas) cambia en dirección y magnitud, mientras su aceleración descendente (flechas violetas) permanece constante. b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil–objetivo.

www.yoquieroaprobar.es

Categorizar Porque ambos objetos sólo están subordinados a la gravedad, este problema se clasifica como uno que supone dos objetos en caída libre, el blanco en movimiento en una dimensión y el proyectil que se mueve en dos.

Analizar El objetivo T se representa como una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. La figura 4.12b muestra que la coordenada y inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Cae con aceleración $a_y = -g$. El proyectil P se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Escriba una expresión para la coordenada y del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$1)\quad y_T = y_{iT} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento:

$$2)\quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada x del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 2):

$$3)\quad y_P = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)\left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Compare las ecuaciones 1) y 3). Se ve que, cuando las coordenadas x del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas y conocidas por las ecuaciones 1) y 3) son las mismas y resulta una colisión.

Finalizar Note que una colisión sólo resulta cuando $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i \geq \sqrt{gd/2}$, donde d es la elevación inicial del objetivo arriba del suelo. Si $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i$ es menor que este valor, el proyectil golpea el suelo antes de alcanzar el objetivo.

EJEMPLO 4.4 ¡Vaya brazo!

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio, a un ángulo de 30.0° con la horizontal, y con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 4.13. La altura del edificio es de 45.0 m.

A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

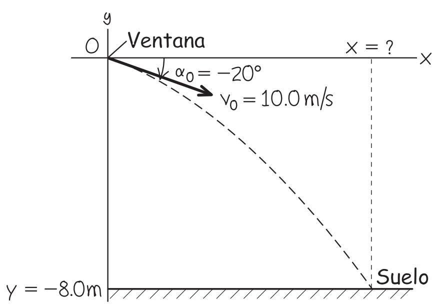
Usted lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana la pelota llegará al piso? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en nuestro cálculo del alcance horizontal en los ejemplos 3.7 y 3.8, estamos tratando de hallar la coordenada horizontal de un proyectil cuando está a un valor dado de y. La diferencia en este caso es que este valor de y *no* es igual a la coordenada y inicial.

PLANTEAR: Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y, hacia arriba. Colocamos el origen de coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$; el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal. Nuestra variable meta es el valor de x en el punto donde la pelota llega al suelo; es decir, cuando $y = -8.0$ m. Dado que las alturas inicial y final de la pelota son distintas, no podemos usar la expresión para el alcance horizontal del ejemplo 3.8. En vez de ello, usamos primero la ecuación (3.21) para hallar el instante t en que la pelota llega a $y = -8.0$ m y, después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

3.25 Esquema para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\begin{aligned}
t &= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)} \\
&= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g} \\
&= \frac{\left[\begin{array}{l}(10.0\text{ m/s})\operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10.0\text{ m/s})^2\operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9.80\text{ m/s}^2)(-8.0\text{ m})}\end{array}\right]}{9.80\text{ m/s}^2} \\
&= -1.7\text{ s} \quad \text{o} \quad 0.98\text{ s}
\end{aligned}$$

Podemos desechar la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota tarda 0.98 s en llegar al suelo. Por la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha_0)t = (10.0\text{ m/s})[\cos(-20°)](0.98\text{ s}) \\
&= 9.2\text{ m}
\end{aligned}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" a una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

Con el origen que elegimos, teníamos alturas inicial y final $y_0 = 0$ y $y = -8.0$ m. ¿Puede demostrar, con las ecuaciones (3.16) y (3.18), que se obtienen los mismos valores de t y x si se coloca el origen en el suelo, inmediatamente abajo de donde la pelota sale de la mano?

Ejemplo 3.10 La cuidadora y el mono

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 3.26). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo, tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles, el dardo sedante y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo. Para demostrar que el dardo golpea al mono, debemos probar que hay un instante en que el mono y el dardo tienen las mismas coordenadas x y y.

PLANTEAR: Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26). Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} sean iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{mono} = d$ en *todo* momento. En el caso del dardo, la ecuación (3.20) nos indica que $x_{dardo} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Cuando las coordenadas x son iguales, $d = (v_0 \cos \alpha_0)t$, o bien,

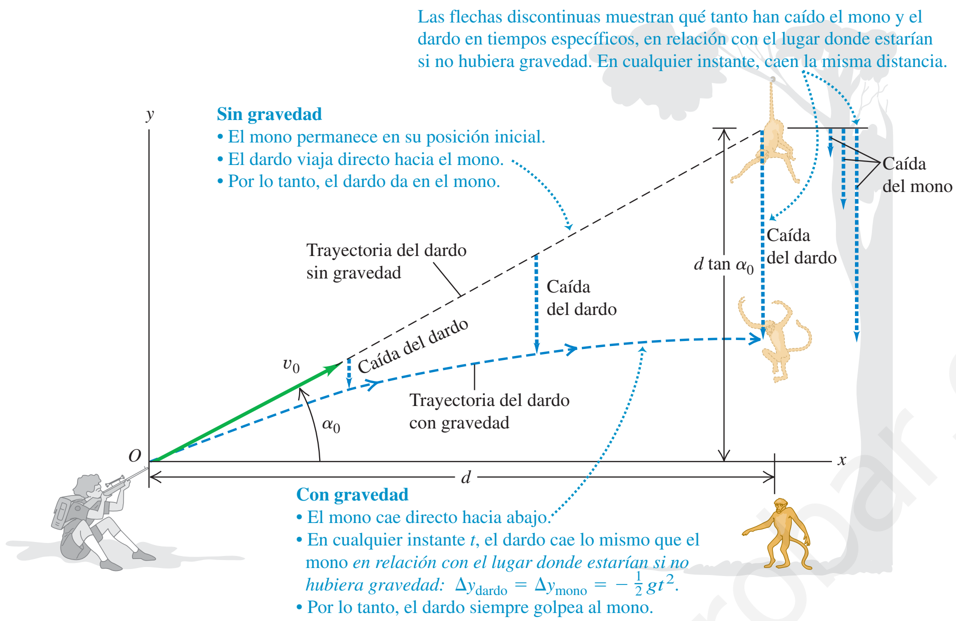
$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Para que el dardo golpee al mono, debe cumplirse que $y_{mono} = y_{dardo}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono es $d \tan \alpha_0$ (el cateto opuesto de un triángulo rectángulo con ángulo a_0 y cateto adyacente d), y obtenemos

$$y_{mono} = d\tan\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

www.yoquieroaprobar.es

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



Para el dardo, usamos la ecuación (3.21):

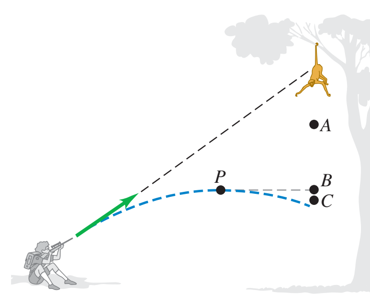
$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos\alpha_0} = d\tan\alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0. Este resultado también es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad inicial relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en i) el punto A (más alto que P), ii) en el punto B (a la misma altura que P) o iii) en el punto C (más abajo que P)? Desprecie la resistencia del aire.



3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

ActivPhysics ONLINE
4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

www.yquieroaprobar.es

TABLA 1 ECUACIONES VECTORIALES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE

Número de la ecuación	*Ecuación*	Contiene r	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{a}$	t
11	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$	×	✓	✓	✓	✓
12	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	✓	×	✓	✓
13[†]	$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$	✓	✓	✓	✓	×
14	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t$	✓	✓	✓	×	✓
15	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	×	✓	✓	✓

[†] Esta ecuación incluye el producto escalar o producto punto de dos vectores, que ya hemos visto en la sección 3-5.

longitud *at* que apunta en la misma dirección que el vector original **a**.

Continuando como lo hicimos en la sección 2-6, podemos desarrollar cinco ecuaciones que describan el movimiento en tres dimensiones con aceleración constante. Estas cinco ecuaciones se muestran en la tabla 1, la cual deberá compararse con las cinco ecuaciones unidimensionales correspondientes en la tabla 2 del capítulo 2. Con excepción de la ecuación 13, que incluye vectores aunque es una ecuación escalar, cada ecuación de la tabla 1 representa a tres ecuaciones escalares independientes. Las componentes x de las ecuaciones 11, 12, 14, y 15 son precisamente las ecuaciones correspondientes listadas en la tabla 2 del capítulo 2. Ya que la ecuación 13 es una ecuación escalar, *no tiene componente x (o cualquier otra).*

Problema muestra 2 Un esquiador desciende por una pendiente plana de la ladera de una montaña. La pendiente de descenso (norte-sur) forma un ángulo de 10° con la horizontal. Un viento que sopla desde el oeste da al esquiador una aceleración lateral de 0.54 m/s² (véase la Fig. 4). En la esquina noroeste de la pendiente, el esquiador sale con una componente de la

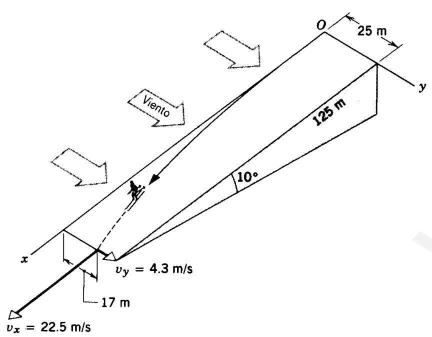


Figura 4 Problema muestra 2.

velocidad de 9.0 m/s cuesta abajo y una componente lateral de cero. La pendiente sin fricción tiene 125 m de longitud y 25 m de ancho. (*a*) ¿Dónde deja el esquiador la pendiente? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del esquiador en este punto? (*Sugerencia*: La aceleración gravitatoria a lo largo de un plano que se inclina en un ángulo θ es g sen θ.)

Solución (*a*) Elijamos el origen en la esquina noroeste, con el eje x cuesta abajo y el eje y lateral. Las componentes de la aceleración son

$$a_x = g \text{ sen } 10° = 1.70 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 0.54 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que estas componentes son evaluadas independientemente. La componente a_x es la aceleración cuesta abajo que resultaría aun si no hubiese viento lateral, y similarmente a_y es la aceleración lateral que resultaría del viento, aun cuando no hubiese una pendiente. El manejo de estas dos componentes de manera independiente es la esencia de la aritmética vectorial.

Tomemos t = 0 como el tiempo en que el esquiador se empuja, y se nos da que v_{x0} = 9.0 m/s y que v_{y0} = 0. Entonces

$$v_x = v_{x0} + a_x t = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)t,$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t = 0 + (0.54 \text{ m/s}^2)t,$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2,$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + (0.27 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Supongamos por ahora que el esquiador llega al fondo de la pendiente antes de dejar el borde lateral. (Podemos comprobar esta hipótesis más adelante.) Primero hallamos el tiempo en que esto ocurre (esto es, cuando x = 125 m):

$$125 \text{ m} = (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolviendo la cuadrática, tenemos que t = 7.94 s o −18.5 s. Considerando por el momento sólo la raíz positiva, evaluamos la coordenada y correspondiente:

$$y = (0.27 \text{ m/s}^2)t^2 = (0.27 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s})^2 = 17.0 \text{ m}.$$

El desplazamiento lateral de 17.0 m es realmente menor que la anchura de la pendiente (25 m), como hemos supuesto. El esquiador, por lo tanto, deja el fondo de la pendiente en un punto a 17.0 m del borde oeste.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

(*b*) Las componentes de la velocidad pueden obtenerse directamente para t = 7.94 s:

$$v_x = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 22.5 \text{ m/s},$$

$$v_y = (0.54 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 4.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que para resolver este problema hemos elegido que los ejes x y y estén en el plano de la pendiente, reduciendo por lo tanto un problema tridimensional a dos dimensiones. De haber escogido trabajar en un sistema de coordenadas en que el plano xy fuera horizontal y el eje z fuera vertical, la aceleración tendría tres componentes y el problema habría sido más complicado. Al resolver problemas, usualmente estamos en libertad de elegir la dirección de los ejes de coordenadas y la ubicación del origen a nuestra conveniencia, siempre que mantengamos de manera fija nuestra elección a través de toda la solución del problema.

¿Qué pasa con la raíz negativa, t = −18.5 s? Escribimos nuestras ecuaciones originales del movimiento comenzando en el tiempo 0, de modo que son tiempos positivos aquellos que describen el movimiento siguiente del esquiador al bajar la pendiente, y los tiempos negativos deben, por lo tanto, describir el movimiento del esquiador *antes* de pasar por la esquina de la pendiente que definimos como el origen. La solución negativa nos recuerda que pudiera haber habido una trayectoria previa que el esquiador pudiera haber seguido para pasar a través del origen en t = 0 con la velocidad correcta. Durante esta parte previa del movimiento, el esquiador habría pasado a través de x = 125 m (presumiblemente ¡esquiando cuesta arriba!) a los 18.5 s antes de llegar a la esquina noroeste. Calcule los componentes de la velocidad para t = −18.5 s y halle lo concerniente al movimiento del esquiador durante ese tiempo. ¿Cuál debería haber sido la coordenada y correspondiente a t = −18.5 s? ¿Es esto razonable? ¿Cuáles hubieran sido las coordenadas x y y mínimas alcanzadas durante el tiempo entre t = −18.5 s y t = 0?

La solución matemática de un problema físico a menudo tiene un resultado inesperado, tal como el tiempo negativo en este ejemplo. Si supusiéramos en este problema que el movimiento del esquiador empezó en t = 0, la raíz negativa carecería de interés para nosotros, pero siempre es una buena práctica examinar el significado físico de tales soluciones cuando éstas aparecen.

4-3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el movimiento de un proyectil. Se trata del movimiento bidimensional de una partícula lanzada oblicuamente en el aire. El movimiento ideal de una pelota de béisbol o de una pelota de golf es un ejemplo del movimiento de un proyectil. Suponemos por ahora que podemos despreciar el efecto del aire en este movimiento. En el capítulo 6 consideraremos el efecto (a menudo considerable) de la resistencia del aire en el movimiento de un proyectil.

El movimiento de un proyectil es aquél de aceleración constante **g**, dirigido hacia abajo. Aun cuando puede haber una componente horizontal de la velocidad, no hay una componente horizontal de la aceleración. Si elegimos un

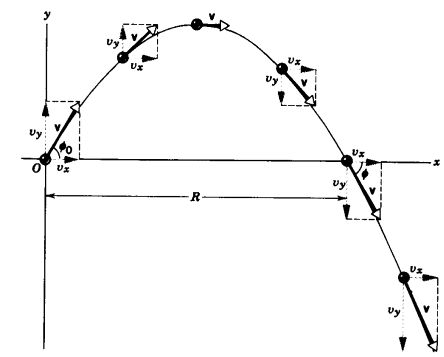


Figura 5 La trayectoria de un proyectil, mostrando la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y sus componentes así como también la velocidad **v** y sus componentes en cinco tiempos posteriores. Nótese que $v_x = v_{x0}$ durante el vuelo. La distancia horizontal R es el alcance del proyectil.

sistema de coordenadas con el eje y positivo verticalmente hacia arriba, podemos poner $a_y = -g$ (como en el capítulo 2, g es siempre un número *positivo*) y a_x = 0. Más aún, suponemos que $\mathbf{v}_0$ está en el plano xy, de modo que v_{z0} = 0. Puesto que a_z es también 0, la componente de la ecuación 11 nos dice que v_z es cero en todo momento y podemos, por tanto, centrar nuestra atención a lo que sucede en el plano xy.

Elijamos además que el origen de nuestro sistema de coordenadas sea el punto en el cual el proyectil comienza su vuelo (véase la Fig. 5). Por lo tanto, el origen es el punto en que la pelota deja la mano del lanzador, por ejemplo. Esta elección del origen implica que $x_0 = y_0$ = 0. La velocidad en t = 0, el instante en que el proyectil comienza su vuelo, es $\mathbf{v}_0$, que forma un ángulo ϕ_0 con la dirección x positiva. Las componentes x y y de $\mathbf{v}_0$ (véase la Fig. 5) son, entonces,

$$v_{x0} = v_0 \cos\phi_0 \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \text{ sen } \phi_0. \qquad (16)$$

Ya que no hay una componente horizontal de la aceleración, la componente horizontal de la velocidad es constante. Para la componente x de la ecuación 11 establecemos que a_x = 0 y $v_{x0} = v_0 \cos\phi_0$, obteniendo

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_0 \cos\phi_0. \qquad (17)$$

La componente horizontal de la velocidad retiene su valor inicial durante el vuelo.

La componente vertical de la velocidad cambia con el tiempo debido a la aceleración constante hacia abajo. En

www.yoquieroaprobar.es

la ecuación 11, tomamos a las componentes y y establecemos que $a_y = -g$ y $v_{y0} = v_0$ sen ϕ_0, de modo que

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \text{ sen } \phi_0 - gt. \qquad (18)$$

La componente vertical de la velocidad es la de la caída libre. (En efecto, si viéramos el movimiento de la figura 5 desde un marco de referencia que se mueva a la derecha con una velocidad v_{x0}, el movimiento sería el de un objeto lanzado vertical hacia arriba con una velocidad inicial v_0 sen ϕ_0.)

La magnitud del vector resultante de la velocidad en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (19)$$

El ángulo ϕ que el vector de la velocidad forma con la horizontal en ese instante está dado por

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}. \qquad (20)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todo punto, como se muestra en la figura 5.

La coordenada x de la posición de la partícula en cualquier momento, obtenida de la componente x de la ecuación 12 (véase la tabla 1), con $x_0 = 0$, $a_x = 0$, y $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$, es

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0)t. \qquad (21)$$

La coordenada y, obtenida de la componente y de la ecuación 12 con $y_0 = 0$, $a_y = -g$, y $v_{y0} = v_0$ sen ϕ_0, es

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \text{ sen } \phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (22)$$

Las ecuaciones 21 y 22 nos dan x y y en función del parámetro común t, el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a t de ellas, obtenemos

$$y = (\tan \phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2}x^2, \qquad (23)$$

la cual relaciona a y con x y es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil. Puesto que v_0, ϕ_0, y g son constantes, esta ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2,$$

que es la ecuación de una parábola. De aquí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica, como lo mostramos en la figura 5.

El *alcance horizontal R* del proyectil, como se muestra en la figura 5, se define como la distancia a lo largo de la horizontal cuando el proyectil retorna al nivel desde el cual fue lanzado. Podemos hallar el alcance poniendo $y = 0$ en la ecuación 23. Cuando $x = 0$ surge una solución inmediata; la otra nos da el alcance:

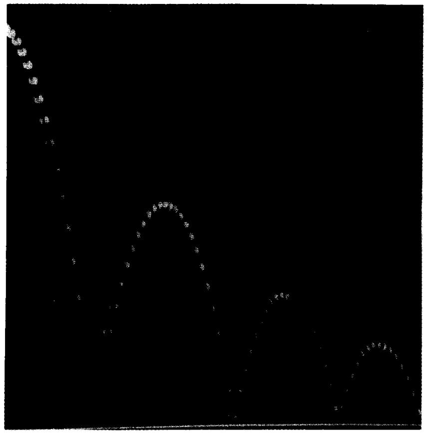


Figura 6 Una fotografía estroboscópica de una pelota de golf (que entra a la foto desde la izquierda) rebotando sobre una superficie dura. Entre los impactos, la pelota muestra la trayectoria parabólica característica del movimiento de un proyectil. ¿Por qué supone usted que la altura de los rebotes sucesivos está decreciendo? (Los capítulos 8 y 10 pueden dar la respuesta.)

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \text{ sen } \phi_0 \cos \phi_0$$
$$= \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\phi_0, \qquad (24)$$

usando la identidad trigonométrica sen $2\theta = 2$ sen $\theta \cos \theta$. Nótese que, para una velocidad inicial dada, obtenemos el alcance máximo cuando $\phi_0 = 45°$, que es cuando sen $2\phi_0 = 1$.

Las soluciones que hemos obtenido representan una visión idealizada del movimiento de un proyectil. Hemos considerado un efecto importante: la gravedad; pero existe otro factor en el movimiento de un proyectil que a menudo es importante, y es la resistencia del aire. La resistencia del aire es un ejemplo de una fuerza dependiente de la velocidad; cuanto mayor sea la velocidad mayor será el efecto decelerante de la resistencia del aire. A baja velocidad, el efecto de la resistencia del aire es usualmente despreciable, pero a alta velocidad la trayectoria de un proyectil ya no describe una parábola, como en la ecuación 23, y el alcance puede ser considerablemente menor que el dado por la ecuación 24. En el capítulo 6 consideraremos los efectos de la resistencia del aire; por ahora supondremos que las ecuaciones derivadas en esta sección describen adecuadamente el movimiento de los proyectiles.

La figura 6 muestra un ejemplo de la trayectoria de un proyectil que no es afectado severamente por la resistencia del aire. La trayectoria ciertamente parece de forma parabólica. La figura 7 muestra una comparación de los movimientos de un proyectil disparado horizontalmente y otro dejado caer en forma simultánea en caída libre. Aquí pueden verse directa las predicciones de las ecuaciones 21 y 22 cuando $\phi_0 = 0$. Nótese que (1) el movimiento horizontal del primer proyectil responde realmente a la ecuación 21: su coordenada x aumenta cantidades iguales en intervalos de tiempo iguales, independientemente del movimiento en y, y (2) los movimientos y de los dos proyectiles son idénticos: los aumentos verticales de la posición de los dos proyectiles es la misma, independientemente del movimiento horizontal de uno de ellos.

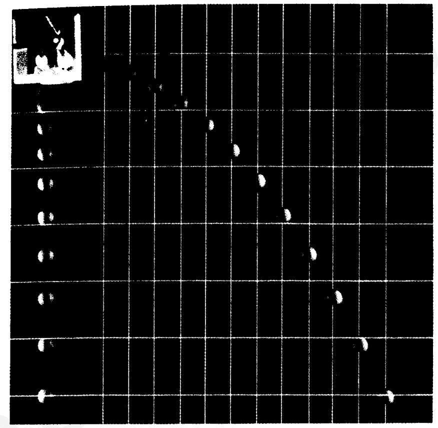


Figura 7 La bola I se deja caer desde el reposo en el mismo instante en que la bola II es disparada hacia la derecha. Nótese que ambas bolas caen a exactamente la misma tasa; el movimiento horizontal de la bola II no afecta su tasa vertical de caída. En esta fotografía estroboscópica, las exposiciones fueron tomadas a intervalos de 1/30 s. ¿Parece ser constante la velocidad horizontal de la bola II?

Disparo hacia un blanco en caída

En una magnífica demostración durante una conferencia, una pistola de aire es apuntada hacia un blanco elevado, el cual se deja caer en caída libre por un mecanismo de disparo mientras la "bala" sale de la boca del arma. Independientemente de la velocidad inicial de la bala, siempre da en el blanco mientras éste cae.

La manera más sencilla de entender esto es la siguiente. Si no existiera la aceleración debida a la gravedad, el blanco no caería y la bala se movería a lo largo de la línea de mira directa hacia el blanco (Fig. 8). El efecto de la gravedad es causar que cada cuerpo acelere hacia abajo a la misma tasa desde la posición que de otro modo habría tenido. Por lo tanto, en el tiempo t, la bala caerá a una distancia de $\frac{1}{2}gt^2$ desde la posición que tendría a lo largo de la línea de mira y el blanco caería la misma distancia desde su posición inicial. Cuando la bala alcanza la línea de caída del blanco, estará a la misma distancia abajo de la posición inicial del blanco, y de aquí la colisión. Si la bala se mueve más rápido de lo que se muestra en la figura (v_0 más grande), tendría un alcance mayor y cruzaría la línea de caída en un punto más alto; pero puesto que llega allí más pronto, el blanco caerá una distancia correspondiente más pequeña en el mismo tiempo y chocará con ella. Un argumento similar sirve también para velocidades más lentas.

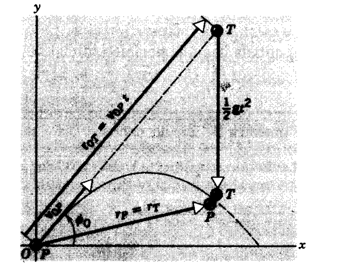


Figura 8 En el movimiento de un proyectil, su desplazamiento desde el origen para cualquier tiempo t puede considerarse como la suma de dos vectores: $\mathbf{v}_{0P}t$, dirigido a lo largo de $\mathbf{v}_{0P}$, y $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$, dirigido hacia abajo.

Para un análisis equivalente, usemos la ecuación 12

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

para describir las posiciones del proyectil y del blanco en cualquier tiempo t. Para el proyectil P, $\mathbf{r}_0 = 0$ y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, y tendremos que

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Para el blanco T, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$, $\mathbf{v}_0 = 0$, y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, conduciendo a

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Si hay una colisión, debemos tener que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$. La inspección demuestra que esto siempre ocurrirá en un tiempo t dado por $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$, esto es, en el tiempo $t(= r_{0T}/v_{0T})$ que le tomaría a un proyectil no acelerado viajar a la posición del blanco a lo largo de la línea de mira. A causa de que multiplicar un vector por un escalar nos da otro vector en la misma dirección, la ecuación $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ nos dice que $\mathbf{r}_{0T}$ y $\mathbf{v}_{0P}$ deben estar en la misma dirección. Esto es, el arma debe ser apuntada hacia la posición inicial del blanco.

Problema muestra 3 En un concurso para dejar caer un paquete sobre un blanco, el aeroplano de uno de los concursantes está volando horizontalmente a una velocidad constante de 155 km/h y a una altura de 225 m hacia un punto directamente arriba del blanco. ¿A qué ángulo de mira α debería ser soltado el paquete para que éste dé en el blanco (Fig. 9)?

Solución Elegimos un marco de referencia fijo con respecto a la Tierra, siendo su origen O el punto de liberación. El movimiento del paquete en el momento de la liberación es el mismo que el del aeroplano. Por tanto, la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del paquete es horizontal y su magnitud es 155 km/h. El ángulo de proyección ϕ_0 es cero.

Hallamos el tiempo de la caída por medio de la ecuación 22. Con = ϕ_0 = 0 y y = -225 m esto nos da

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\ \text{m})}{9.8\ \text{m/s}^2}} = 6.78\ \text{s}.$$

Nótese que el tiempo de caída no depende de la velocidad del aeroplano con una proyección horizontal. (Véase, sin embargo, el problema 38.)

La distancia horizontal recorrida por el paquete en este tiempo está dada por la ecuación 21:

$$x = v_{x0}t = (155\ \text{km/h})(1\ \text{h}/3600\ \text{s})(6.78\ \text{s})$$
$$= 0.292\ \text{km} = 292\ \text{m},$$

de modo que el ángulo de mira (Fig. 9) sería

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{|y|} = \tan^{-1}\frac{292\ \text{m}}{225\ \text{m}} = 52°.$$

¿Parecerá parabólico el movimiento del paquete cuando es visto desde un marco de referencia fijo respecto al aeroplano? (¿Puede usted recordar haber visto películas en que las bombas caían desde un aeroplano, tomadas por una cámara, ya sea desde ese aeroplano o desde otro aeroplano que volara en un curso paralelo con la misma velocidad?)

Problema muestra 4 Un jugador de fútbol soccer patea un balón con un ángulo de 36° respecto a la horizontal y una velocidad inicial de 15.5 m/s. Suponiendo que el balón se mueva en un plano vertical, halle (*a*) el tiempo t_1 en que el balón llega al punto más alto de su trayectoria, (*b*) su altura máxima, (*c*) su alcance y tiempo de vuelo, y (*d*) su velocidad cuando llega al suelo.

Solución (*a*) En el punto más alto, la componente vertical de la velocidad v_y es cero. Resolviendo la ecuación 18 para t, obtenemos:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\phi_0 - v_y}{g}.$$

Con

$$v_y = 0, \quad v_0 = 15.5\ \text{m/s}, \quad \phi_0 = 36°, \quad g = 9.8\ \text{m/s}^2,$$

tenemos que

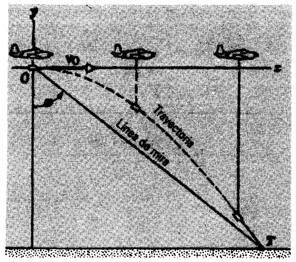


Figura 9 Problema muestra 3.

$$t_1 = \frac{(15.5\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 36°)}{9.8\ \text{m/s}^2} = 0.93\ \text{s}.$$

(*b*) La altura máxima es alcanzada en t = 0.93 s. Usando la ecuación 22,

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tenemos

$$y_{máx} = (15.5\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 36°)(0.93\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(0.93\ \text{s})^2$$
$$= 4.2\ \text{m}$$

(*c*) El alcance R puede ser obtenido por la ecuación 24:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\phi_0 = \frac{(15.5\ \text{m/s})^2}{9.8\ \text{m/s}^2}\operatorname{sen} 72° = 23.3\ \text{m}.$$

Ponemos y = 0 en la ecuación 22 y hallamos el tiempo t_2 en que el balón retorna al suelo. Obtenemos

$$t_2 = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\phi_0}{g} = \frac{2(15.5\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 36°)}{9.8\ \text{m/s}^2} = 1.86\ \text{s}.$$

Nótese que $t_2 = 2t_1$, lo cual debe ocurrir porque se requiere el mismo tiempo para que el balón suba (llegue a su máxima altura desde el suelo) que el requerido para que el balón baje (llegue al suelo desde su máxima altura).

Podemos verificar estos resultados para que exista compatibilidad con $x = x_0 + v_{x0}t$. Cuando $t = t_2$, x será igual a R. Entonces, según la ecuación 21, $R = v_{x0}t_2 = (v_0 \cos\phi_0 t_2)$ = 23.3 m, como se esperaba.

(*d*) Para hallar la velocidad del balón cuando llegue al suelo, usemos la ecuación 17 para obtener v_x, la cual permanece constante durante todo el trayecto:

$$v_x = v_0 \cos\phi_0 = (15.5\ \text{m/s})(\cos 36°) = 12.5\ \text{m/s},$$

y, según la ecuación 18, obtenemos v_y para $t = t_2$.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\phi_0 - gt = (15.5\ \text{m/s})(\operatorname{sen} 36°) - (9.8\ \text{m/s}^2)(1.86\ \text{s})$$
$$= -9.1\ \text{m/s}.$$

Así pues, la velocidad tiene una magnitud dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\ \text{m/s})^2 + (-9.1\ \text{m/s})^2} = 15.5\ \text{m/s},$$

y una dirección dada por

$$\tan\phi = v_y/v_x = -9.1/12.5,$$

de manera que ϕ = -36°, o sea 36° en el sentido horario del eje x. Nótese que $\phi = -\phi_0$, como esperábamos de la simetría (Fig. 5).

La velocidad final resulta ser igual a la velocidad inicial. ¿Puede usted explicarlo? ¿Es una coincidencia?

4-4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el movimiento de proyectiles la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad cambia tanto en magnitud como en dirección. Examinaremos ahora el caso especial en que una partícula se mueve a *velocidad* constante en una trayectoria circular. Como veremos, tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante, pero ambas cambian de dirección continuamente. Esta situación se llama *movimiento circular uniforme*. Entre los ejemplos de esta clase de movimiento se incluyen a los satélites de la Tierra y a puntos de rotores que giran, tales como ventiladores, discos de fonógrafo y discos de computadora. De hecho, hasta el punto en que podemos vernos a nosotros mismos como partículas, participamos en un movimiento circular uniforme a causa de la rotación de la Tierra.

En la figura 10a se muestra la situación. Sea P_1 la posición de la partícula en el tiempo t_1 y P_2 su posición en el tiempo $t_2 = t_1 + \Delta t$. La velocidad en P_1 es $\mathbf{v}_1$, un vector tangente a la curva en P_1. La velocidad en P_2 es $\mathbf{v}_2$, un vector tangente a la curva en P_2. Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tienen la misma magnitud v, ya que la velocidad es constante, pero sus direcciones son diferentes. La longitud de la trayectoria descrita durante Δt es la longitud del arco P_1P_2, que es igual a $r\phi$ (donde ϕ está medido en radianes) y también a $v\,\Delta t$. Entonces tenemos que

$$r\theta = v\,\Delta t. \tag{25}$$

Podemos ahora trazar a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, como en la figura 10*b*, de modo que se originen en un punto común. Tenemos la libertad de hacerlo en tanto que la magnitud y la dirección de cada vector sean las mismas que en la figura 10*a*. La figura 10*b* nos permite ver claramente el *cambio en la velocidad* al moverse la partícula desde P_1 hasta P_2. Este cambio, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v}$, es el vector que debe sumarse a $\mathbf{v}_1$ para obtener $\mathbf{v}_2$. Si representamos el cambio en la velocidad en el intervalo P_1P_2 trazando $\Delta\mathbf{v}$ desde el punto medio del arco P_1P_2, entonces $\Delta\mathbf{v}$ apuntaría hacia el centro del círculo.

Ahora el triángulo OQ_1Q_2 formado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\Delta\mathbf{v}$ es semejante al triángulo CP_1P_2 (Fig. 10*c*) formado por la cuerda P_1P_2 y los radios CP_1 y CP_2. Esto se debe a que ambos son triángulos isósceles que tienen el mismo ángulo en el vértice; el ángulo θ entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el mismo que el ángulo P_1CP_2 porque $\mathbf{v}_1$ es perpendicular a CP_1 y $\mathbf{v}_2$ es perpendicular a CP_2. Trazando una bisectriz del ángulo θ en la figura 10*b*, hallamos que

$$\tfrac{1}{2}\Delta v = v \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}. \tag{26}$$

Expresemos ahora la magnitud de la aceleración promedio en el intervalo usando los resultados obtenidos en las ecuaciones 25 y 26 para Δv y Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \operatorname{sen}(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2}. \tag{27}$$

Ahora deseamos hallar la aceleración instantánea tomando el límite de esta expresión como $\Delta t \to 0$. Cuando Δt es muy pequeña, el ángulo θ es pequeño. En este caso podemos usar la *aproximación de un ángulo pequeño*, $\operatorname{sen} x \approx x$. (Esto es válido *solamente* cuando el ángulo está en radianes; por ejemplo, cuando x = 5° = 0.0873 rad, $\operatorname{sen} x$ = 0.0872.) Entonces, para ángulos pequeños $\operatorname{sen}(\theta/2) \approx \theta/2$, y la segunda fracción del lado derecho de la ecuación 27 tiende a 1. Nótese también que, en la primera fracción del lado derecho de la ecuación 27, ni v ni r dependen de Δt y así el valor de esta fracción no es afectado por el límite. Por lo tanto, podemos obtener para la magnitud de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v^2}{r}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2} = \frac{v^2}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2}$$

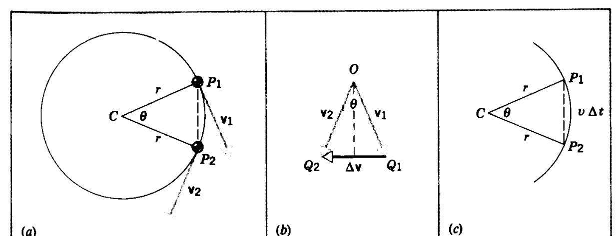


Figura 10 Movimiento circular uniforme. (*a*) La partícula viaja alrededor de un círculo con velocidad constante. Se muestra su velocidad en dos puntos P_1 y P_2. (*b*) El cambio de velocidad, que va de P_1 a P_2, es $\Delta\mathbf{v}$. (*c*) La partícula viaja a lo largo del arco P_1P_2 durante el tiempo Δt.