MECÁNICA

CAPÍTULO III

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA. MAGNITUDES FUNDAMENTALES. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

A) MAGNITUDES FUNDAMENTALES

FORMULARIO

Ecuación vectorial horaria (radio vector o vector de posición):

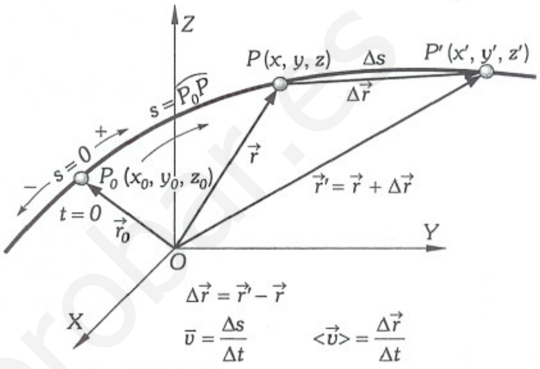
$$\boldsymbol{r} = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

Ecuaciones analíticas de la trayectoria y ley horaria:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right| \qquad s = s(t)$$

Velocidad media y vector velocidad media:

$$\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$



Vector desplazamiento. Vector velocidad media.

Vector velocidad:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} = v_x(t)\,\boldsymbol{i} + v_y(t)\,\boldsymbol{j} + v_z(t)\,\boldsymbol{k} = \dot{s}\,\boldsymbol{\tau} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

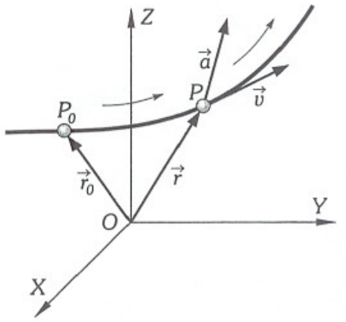
$\boldsymbol{\tau}$: es el vector unitario tangente a la trayectoria y es una función del tiempo.

$$\int_{r_1}^{r_2} d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)\,dt$$

Vector aceleración media: $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$

Vector aceleración:

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{v}} = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \wedge \quad \int_{v_1}^{v_2} d\boldsymbol{v} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{a}(t)\,dt$$



$\vec{v}$ y $\vec{a}$ pertenecen al mismo plano (plano osculador).

Problema III-1. La ecuación vectorial horaria de una partícula que se mueve en un plano, viene dada en el SI por la expresión: $\boldsymbol{r} = (2t^2 - 1)\,\boldsymbol{i} + (t^3 + 1)\,\boldsymbol{j}$. Calcular:

1. El vector de posición inicial.
2. La distancia al observador (distancia al origen del sistema de referencia) a los 5 s de haber empezado a contar el tiempo.
3. Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.

Solución

1) $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r}_0 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\ \text{m}} \qquad P_0(-1, 1)\ \text{m}$

2) $t = 5\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_5 = 49\boldsymbol{i} + 126\boldsymbol{j}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = r = \sqrt{49^2 + 126^2} = 135{,}2\ \text{m}}$

3) $\dot{\boldsymbol{r}} = 4t\,\boldsymbol{i} + 3t^2\,\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad |\dot{\boldsymbol{r}}| = \dot{s} = t\sqrt{16 + 9t^2} = \dfrac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = \int_2^3 t\sqrt{16 + 9t^2}\,dt = \dfrac{1}{27}\left[(16 + 9t^2)^{3/2}\right]_2^3 = 21{,}5\ \text{m}}$

Problema III-2. La ecuación vectorial horaria del movimiento de una partícula escrita en el SI es: $\boldsymbol{r} = (3 - 6t^2 - 3t^3)\,\boldsymbol{i} + (5 + 4t^2 + 2t^3)\,\boldsymbol{j} + (2 + 2t^2 + t^3)\,\boldsymbol{k}$. Determinar la ecuación analítica de su trayectoria y su ley horaria.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - 6t^2 - 3t^3 \\ y = 5 + 4t^2 + 2t^3 \\ z = 2 + 2t^2 + t^3 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 3 = -3\,(2t^2 + t^3) \\ y - 5 = 2\,(2t^2 + t^3) \\ z - 2 = 2t^2 + t^3 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}}$$

La ecuación analítica de la trayectoria es una recta cuyos parámetros directores son proporcionales a $-3, 2, 1$.

1^er^ MÉTODO:

Para $t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r}_0 = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, y como:

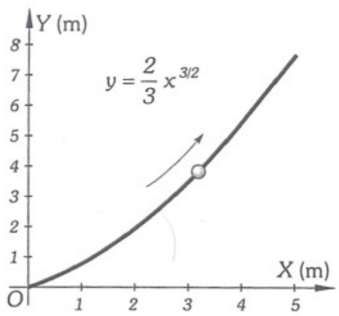
$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{2}{3}(x-3) + 5 \\ z = -\dfrac{1}{3}(x-3) + 2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3} \\ z' = \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right| \Rightarrow s = \int_3^x \pm\sqrt{\frac{14}{9}}\,dx = \pm\frac{\sqrt{14}}{3}(x-3)$$

sustituyendo $x = x(t)$, obtenemos: $\boxed{s(t) = \mp\sqrt{14}\,(2t^2 + t^3)}$ SI

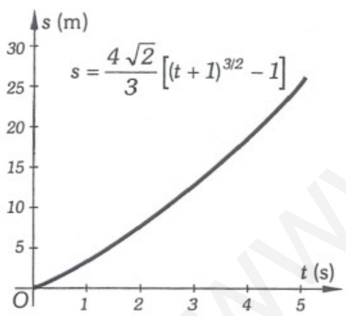
2º MÉTODO:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -3\,(4t + 3t^2)\,\boldsymbol{i} + 2\,(4t + 3t^2)\,\boldsymbol{j} + (4t + 3t^2)\,\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad v = |\dot{\boldsymbol{r}}| = \dot{s} = \pm\sqrt{14}\,(4t + 3t^2) = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{s = \int_0^t \pm\sqrt{14}\,(4t + 3t^2)\,dt = \pm\sqrt{14}\,(2t^2 + t^3)} \quad \text{SI}$$



Problema III-3-1ª.– Trayectoria.



Problema III-3-2ª.– Ley horaria.

Problema III-3. La ecuación vectorial horaria del movimiento de una partícula que se mueve en un plano OXY, viene dada en el SI: $\boldsymbol{r} = (2t + 1)\,\boldsymbol{i} + 2\,(2t+1)^{3/2}/3\,\boldsymbol{j}$. Determinar la ecuación analítica $[y = f(x)]$ y su ley horaria $[s = s(t)]$ y representarlas.

Solución

La ecuación analítica de su trayectoria [escrita en forma implícita $y = f(x)$] la obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t + 1 \\ y = \dfrac{2}{3}(2t+1)^{3/2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x^{3/2}} \quad \text{SI} \qquad \text{(Gráfica 1ª)}$$

La obtención de su ley horaria se puede hacer utilizando dos procedimientos:

1^er^ MÉTODO:

En nuestro caso: si $t = 0 \Rightarrow x_0 = 1$ m, obteniéndose:

$$s(t) = \int_{s_0}^{s} ds = \int_{x_0}^{x}\sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \wedge \quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad s(x) = \int_1^x \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_1^x = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right] \quad \wedge \quad x = 2t + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{s(t) = \frac{2}{3}\left[(2t+2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[(t+1)^{3/2} - 1\right]} \quad \text{SI} \qquad \text{(Gráfica 2ª)}$$

En la que para $t = 0 \Rightarrow s_0 = 0$.

2º MÉTODO:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} = 2\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2t+1}\,\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = 2\sqrt{2}\,\sqrt{t+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = \int_0^t 2\sqrt{2}\,\sqrt{t+1}\,dt = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[(t+1)^{3/2} - 1\right]} \quad \text{SI}$$

Problema III-4. La ley horaria de un punto móvil está dada en el SI por la expresión: $s = t^2 + t + 1$. Calcular:

1. Posición inicial del móvil.
2. Velocidad media en el intervalo comprendido entre tres y cinco segundos.

Solución

1) $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_0 = 1\,\text{m}}$

el móvil comienza su movimiento a 1 m del origen de espacios (mojón cero si fuera una pista).

2) $t = 3\text{ s} \;\Rightarrow\; s_3 = 13\text{ m} \quad \wedge \quad t = 5\text{ s} \;\Rightarrow\; s_3 = 31\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{31 - 13}{2} = 9\text{ m/s}}$

En esta ocasión *no es conocida la ecuación de la trayectoria del móvil*, sin embargo, obtenemos información del movimiento en estudio.

Problema III-5. Un automóvil ha ido de la ciudad A a la B distantes entre sí 180 km en 3 h, y sin pérdida de tiempo retorna en $3{,}5$ h.

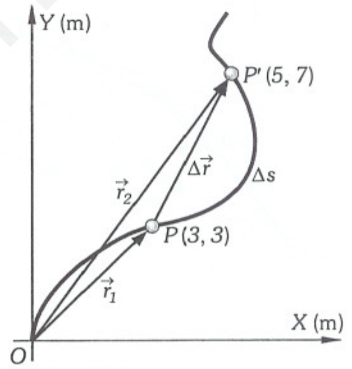
1. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de ida?
2. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de vuelta?
3. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto ida-vuelta?

Solución

1) $\boxed{\bar{v} = \dfrac{180}{3} = 60\text{ km/h}}$ 2) $\boxed{\bar{v} = \dfrac{180}{3{,}5} = 51{,}4\text{ km/h}}$ 3) $\boxed{\bar{v} = \dfrac{2 \times 180}{3 + 3{,}5} = 55{,}4\text{ km/h}}$

Problema III-6. La ley horaria del movimiento de una partícula en trayectoria plana queda determinada en el SI: $s(t) = t^2 + t + 1$. Si el móvil respecto de un sistema de referencia OXY, a los 2 s de iniciado el movimiento se encuentra en el punto $(3, 3)$ m y a los 4 s, en el $(5, 7)$ m. Determinar:

1. La velocidad media en su desplazamiento sobre su trayectoria.
2. El vector velocidad media y su módulo.



Problema III-6.– La partícula va de P a P' recorriendo Δs sobre la trayectoria.

Solución

La función $s = s(t)$ para $t = 0 \Rightarrow s_0 = 1$ m, luego el origen de tiempo y espacio se encuentra a 1 m (medido sobre la trayectoria) del punto O que hemos elegido como origen de referencia OXY.

1) $\left.\begin{array}{l} t_1 = 2\text{ s} \;\Rightarrow\; s_1 = 7\text{ m} \\ t_2 = 4\text{ s} \;\Rightarrow\; s_2 = 21\text{ m} \\ \Delta t = t_2 - t_1 = 2\text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta s = s_2 - s_1 = 14\text{ m} \qquad \boxed{\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 7\text{ m/s}}$

2) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\text{ m} \\ \mathbf{r}_2 = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}\text{ m} \\ \Delta t = 2\text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\text{ m} \qquad \boxed{\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}\text{ m/s}} \qquad \boxed{|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{5}\text{ m/s}}$

Obsérvese que $\bar{v}$ y $|\bar{\boldsymbol{v}}|$ no coinciden, tampoco lo hacen Δs y $|\Delta\mathbf{r}| = 2\sqrt{5}$ m.

Problema III-7. Una partícula se mueve en el plano OXY; un observador colocado en O sabe que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria escritas en el SI son: $x = 2 + t$, $y = 2 + 3t + 2t^2$.

1. Determinar la forma explícita de la trayectoria.
2. La expresión del vector de posición y del vector velocidad de ella.
3. Las condiciones iniciales del movimiento.
4. Los valores del vector de posición y velocidad para $t = 2$ s.
5. Distancia de la partícula al observador en ese momento.
6. El vector desplazamiento y el vector velocidad media entre $t = 2$ s y $t = 5$ s.

Solución

1) Despejando t en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$t = x - 2 \;\Rightarrow\; y = 2 + 3(x - 2) + 2(x - 2)^2 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 2x^2 - 5x + 4}$ (parábola)

2) $\boxed{\mathbf{r}(t) = (t + 2)\,\mathbf{i} + (2 + 3t + 2t^2)\,\mathbf{j}}$ $\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + (3 + 4t)\,\mathbf{j}}$ SI

3) $t = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\text{ m}}$ y $\boxed{\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}\text{ m/s}}$

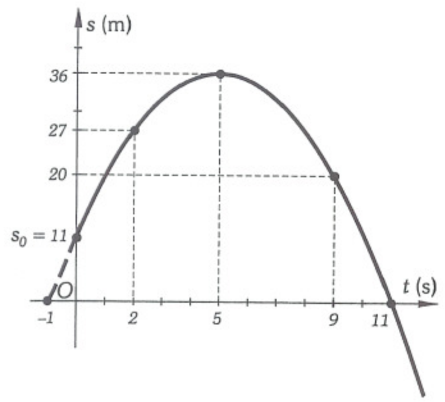
4) $t = 2\text{ s} \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 16\mathbf{j}\text{ m}}$ y $\boxed{\boldsymbol{v}(2) = \mathbf{i} + 11\mathbf{j}\text{ m/s}}$

5) $\boxed{r_2 = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{17}\text{ m}}$

6) $\left.\begin{array}{l} \langle\boldsymbol{v}\rangle = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2}{\Delta t} \\ t = 5\text{ s} \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_5 = 7\mathbf{i} + 67\mathbf{j}\text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \boxed{\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 51\mathbf{j}\text{ m}} \\ \Delta t = 3\text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\langle\boldsymbol{v}\rangle = \mathbf{i} + 17\mathbf{j}\text{ m/s}}$

Problema III-8. Una partícula se mueve de tal forma que en cada instante el valor de su velocidad (módulo) queda determinada en el SI por la función: $v = 10 - 2t$. Determinar:

1. Las velocidades inicial y en los instantes $t = 2$ s y $t = 9$ s.
2. La ley horaria de su movimiento (distancia al origen de espacios recorridos $s = 0$), si para $t = 0$ el punto se encuentra a 11 m del origen y hacer una representación gráfica de esta ley.
3. Distancia al origen de espacios pata $t = 2$ s y $t = 9$ s, e indicar en qué instante cambia el sentido del movimiento.
4. Espacio recorrido por la partícula entre 2 y 9 s; tomando una trayectoria cualquiera en un sistema $OXYZ$, representar el sentido del movimiento sobre ella poniendo los puntos mencionados en los apartados anteriores.
5. Velocidad media de la partícula en el intervalo considerado.

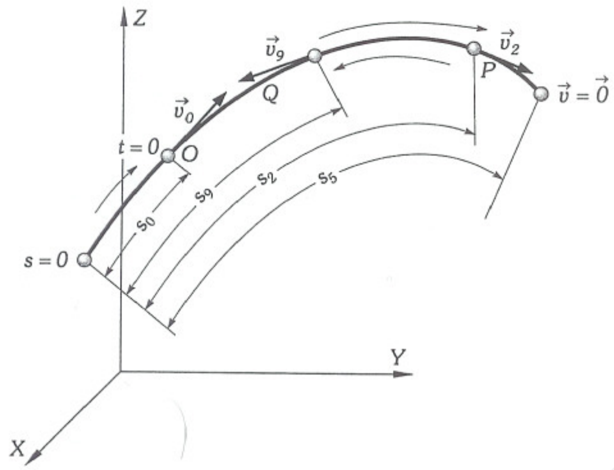


Problema III-8-1ª.– Ley horaria del movimiento de la partícula.

Solución

1) $t = 0 \Rightarrow v_0 = 10$ m/s $\qquad t = 2$ s $\Rightarrow v_2 = 6$ m/s $\qquad t = 9$ s $\Rightarrow v_9 = -8$ m/s

El signo menos de v_9 indica que en el intervalo entre 2 y 9 s, la partícula ha cambiado el sentido de su velocidad y, en un instante intermedio se hace nula; a partir de tal instante no coinciden la distancia al origen de espacios con el camino recorrido por la partícula sobre su trayectoria.



Problema III-8-2ª.– Trayectoria arbitraria que hemos supuesto para la partícula cuyo movimiento es: $O \to P \to Q$.

2) $$s = s_0 + \int_0^t v\,dt = 11 + \int_0^t (10 - 2t)\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = 11 + 10t - t^2} \quad \text{(parábola)}$$

$s(t) = 0 \Rightarrow t = 11$ s (la solución -1 no tiene sentido físico).

3) $t = 2$ s $\Rightarrow \boxed{s_2 = 27 \text{ m}} \qquad t = 9$ s $\Rightarrow \boxed{s_9 = 20 \text{ m}}$

$v = 0 \Rightarrow \boxed{t = 5 \text{ s}}$

Para $t = 5$ s se encuentra el máximo en la gráfica de la ley horaria, siendo $s_5 = 36$ m (Fig. 1ª).

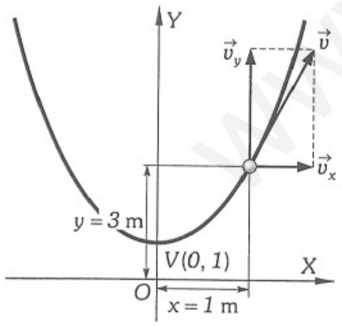
4) $$s_T = \left|\int_2^5 v\,dt\right| + \left|\int_5^9 v\,dt\right| = |s_5 - s_2| + |s_9 - s_5| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s_T = |35 - 27| + |20 - 27| = 15 \text{ m}}$$

5) Según la definición de velocidad media en ese intervalo, valdrá:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_9 - s_2}{9 - 2} = \frac{20 - 27}{9 - 2} = -1 \text{ m/s}}$$

considerándola como el espacio total recorrido sobre la trayectoria en $\Delta t = 7$ s, diríamos: $\bar{v} = 15/7$ m/s.



Problema III-9.

Problema III-9. Una partícula se mueve sobre una trayectoria plana, cuya ecuación expresada en el SI es: $y = x^2 + 1$; para $x = 1$ m entonces $v_y = 3$ m/s. Calcular el vector velocidad en ese momento.

Solución

$$y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{v_y}{2x} = 1{,}5 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = 1{,}5\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

Problema III-10. Si el radio vector que nos define la posición de una partícula viene dado por: $\boldsymbol{r} = (3t^2 - 5)\,\boldsymbol{i} + e^t\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\boldsymbol{k}$. Calcular las expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.

Solución

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 6t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + \pi \cos \pi t\boldsymbol{k}} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = 6\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\boldsymbol{k}}$$

Problema III-11. El radio vector de un punto móvil queda determinado por las siguientes componentes: $x = 4 + 3t$, $y = t^3 + 5$, $z = 2t + 4t^2$, en las que x, y, z vienen expresadas en cm y el tiempo en s. Determinar la velocidad y la aceleración del punto en el instante $t = 1$ s.

Solución

$$\boldsymbol{r} = (4+3t)\,\boldsymbol{i} + (t^3+5)\,\boldsymbol{j} + (2t+4t^2)\,\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = 3\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (2+8t)\,\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = 6t\,\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

$$t = 1\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}\ \text{cm/s}} \quad \boxed{\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}\ \text{cm/s}^2}$$

Problema III-12. El vector velocidad del movimiento de una partícula referido a un punto O (velocidad definida por un observador en O) viene dado en el SI por: $\boldsymbol{v} = (2t+8)\,\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + (6t^2-8)\,\boldsymbol{k}$. El vector que nos define la posición inicial sobre la trayectoria es: $\boldsymbol{r}_0 = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ m. Determinar:

1. El vector velocidad inicial y su módulo.
2. El vector velocidad para $t = 5$ s.
3. La expresión del vector de posición en cualquier instante.
4. La distancia del móvil al origen O (distancia a que se encontraría el móvil, de un observador colocado en el origen de los vectores de posición) 1 s después de haber empezado a contar el tiempo.

Solución

1) $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_0 = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}\ \text{m/s}} \quad \boxed{v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2} = \sqrt{64+36+64}\ \text{m/s} \simeq 13\ \text{m/s}}$

2) $t = 5\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = (2\times 5+8)\,\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + (6\times 25 - 8)\,\boldsymbol{k} = 18\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 142\boldsymbol{k}\ \text{m/s}}$

3)
$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int v_x\,dt = \int (2t+8)\,dt = t^2 + 8t + C_1 \quad \left|\begin{array}{l} t=0 \\ C_1 = x_0 = 4\ \text{m}\end{array}\right| \Rightarrow x = t^2 + 8t + 4$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = \int v_y\,dt = \int 6\,dt = 6t + C_2 \quad \left|\begin{array}{l} t=0 \\ C_2 = y_0 = 3\ \text{m}\end{array}\right| \Rightarrow y = 6t + 3$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow z = \int v_z\,dt = \int (6t^2-8)\,dt = 2t^3 - 8t + C_3 \quad \left|\begin{array}{l} t=0 \\ C_3 = z_0 = -6\ \text{m}\end{array}\right| \Rightarrow z = 2t^3 - 8t - 6$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (t^2+8t+4)\,\boldsymbol{i} + (6t+3)\,\boldsymbol{j} + (2t^3-8t-6)\,\boldsymbol{k}} \quad \text{SI}$$

4) $t = 1\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = 13\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{169+81+144}\ \text{m} \simeq 20\ \text{m}}$

Problema III-13. El vector aceleración de una partícula referido a un punto O (vector aceleración definido por un observador en O) viene dado por: $\boldsymbol{a} = 2\,(18t^2+1)\,\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j}$ (SI). En el instante $t = 0$ la velocidad es nula y el vector de posición es: $\boldsymbol{r}_0 = 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ m. Se trata de determinar el vector velocidad y el vector de posición de la partícula en cualquier instante.

Solución

Cálculo del vector velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\,(18t^2+1) \Rightarrow v_x = \int 2\,(18t^2+1)\,dt = 12t^3 + 2t + C_1$$
$$t = 0 \Rightarrow v_{ox} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow v_x = 12t^3 + 2t$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 9\ \text{m/s}^2 \Rightarrow v_y = \int 9\,dt \Rightarrow v_y = 9t + C_2$$
$$t = 0 \Rightarrow v_{oy} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow v_y = 9t$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = C_3$$
$$t = 0 \Rightarrow v_{oz} = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow v_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = 2\,(6t^3+t)\,\boldsymbol{i} + 9t\,\boldsymbol{j}}$$

Cálculo del vector de posición:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\,(6t^3+t) = 0 \Rightarrow x = \int 2\,(6t^3+t)\,dt = 3t^4 + t^2 + C_1'$$
$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow C_1' = 0 \Rightarrow x = 3t^4 + t^2$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 9t \Rightarrow y = \int 9t\,dt = 4{,}5t^2 + C_2'$$
$$t = 0 \Rightarrow y_0 = 4\ \text{m} \Rightarrow C_2' = 4\ \text{m}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z = C_3'$$
$$t = 0 \Rightarrow z_0 = 6\ \text{m} \Rightarrow C_3' = 6\ \text{m} \Rightarrow z = 6\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r} = (3t^4+t^2)\,\boldsymbol{i} + (4{,}5t^2+4)\,\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}} \quad \text{SI}$$

Problema III-14. El vector aceleración de una partícula en movimiento viene expresado en el SI: $\boldsymbol{a} = 6t\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, inicialmente la partícula se encuentra en $P_0(1, 3, -2)$ m y transcurridos 3 s su velocidad es: $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ m/s. Calcúlese el vector velocidad y el vector de posición en cualquier instante.

Solución

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}\, dt = \int (6t\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k})\, dt = (3t^2 + C_1)\,\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + (-2t + C_3)\,\boldsymbol{k}$$

$$t = 3\text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = (27 + C_1)\,\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + (-6 + C_3)\,\boldsymbol{k}$$

que comparada con la expresión dada:

$$\left.\begin{array}{lll} 27 + C_1 = 3 & \Rightarrow & C_1 = -24\text{ m/s} \\ C_2 = 2\text{ m/s} & & \\ -6 + C_3 = -6 & \Rightarrow & C_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = (3t^2 - 24)\,\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}} \quad \text{SI}$$

$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}\, dt = \int \left[(3t^2 - 24)\,\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}\right] dt = (t^3 - 24t + C_1')\,\boldsymbol{i} + (2t + C_2')\,\boldsymbol{j} + (-t^2 + C_3')\,\boldsymbol{k}$$

$$t = 0 \quad \left.\begin{array}{l} C_1' = x_0 = \ \ 1\text{ m} \\ C_2' = y_0 = \ \ 3\text{ m} \\ C_3' = z_0 = -2\text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r} = (t^3 - 24t + 1)\,\boldsymbol{i} + (2t + 3)\,\boldsymbol{j} - (t^2 + 2)\,\boldsymbol{k}} \quad \text{SI}$$

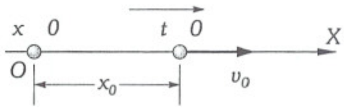
B) MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS. MAGNITUDES ANGULARES

FORMULARIO

Ecuaciones generales de los movimientos en trayectoria recta:

$$x = x(t) \qquad v = v(t) = \dot{x} \qquad a = a(t) = \dot{v} = \ddot{r} \qquad v\,dv = a\,dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

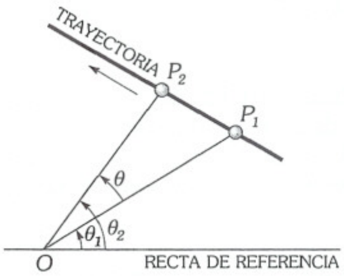


Movimiento rectilíneo.

Magnitudes angulares

$$\theta = \theta(t) \qquad \omega = \omega(t) = \dot{\theta} \qquad \alpha = \alpha(t) = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \qquad \omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$$

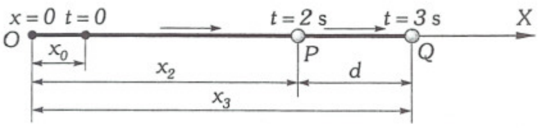
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\,dt \qquad \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)\,dt$$



Para definir la magnitud angular θ, que en este caso es positiva por ser su sentido el contrario a las agujas del reloj.

Problema III-15. La fórmula que da la posición de una partícula que se mueve en trayectoria recta, escrita en el SI es: $x = 7t^3 - 2t^2 + 3t + 1$. Calcular:

1. Ecuación de la velocidad.
2. Ecuación de la aceleración.
3. Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.



Problema III-15.– Trayectoria. La partícula se mueve $O \to P \to Q$.

Solución

1) $\boxed{v = \dfrac{dx}{dt} = 21t^2 - 4t + 3}$ 2) $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 42t - 4}$ SI

3) $\left.\begin{array}{l} t = 2\text{ s} \Rightarrow x_2 = \ \ 55\text{ m} \\ t = 3\text{ s} \Rightarrow x_3 = 181\text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{d = x_3 - x_2 = 126\text{ m}}$

Problema III-16. El movimiento de un punto material en línea recta viene dado por la ecuación escrita en el sistema CGS: $x = e^{3t} - 5$. Calcular:

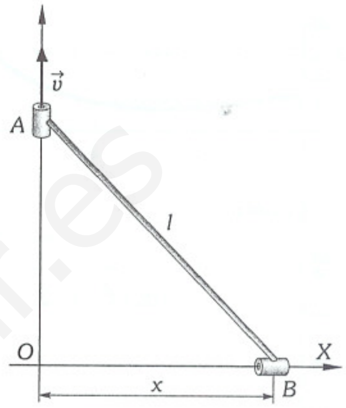
1. Las expresiones de la velocidad y aceleración en función del tiempo y de la posición.
2. Valor de la aceleración inicial.
3. Valor de la velocidad inicial.

Solución

1) $\boxed{v = \frac{dx}{dt} = 3e^{3t} = 3\,(x+5)}$ $\quad$ $\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 9e^{3t} = 9\,(x+5)}$ $\quad$ CGS

2) y 3) $t = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{a_0 = 9 \text{ cm/s}^2} \;\wedge\; \boxed{v_0 = 3 \text{ cm/s}^2}$

Problema III-17. El extremo A de una varilla de longitud l de la figura asciende por el eje OY con una velocidad constante v, siendo $y = 0$ en $t = 0$. El extremo B se mueve sobre el eje OX. Determinar las ecuaciones del movimiento del extremo B.



Problema III-17.

Solución

La ecuación del movimiento de la partícula A es: $y = vt$, y como:

$$\boxed{x(t) = \sqrt{l^2 - v^2t^2}} \;\Rightarrow\; \boxed{u(t) = \dot{x} = -\frac{v^2 t}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}}} \;\Rightarrow\; \boxed{a(t) = \dot{u} = -\frac{v^2 l^2}{(l^2 - v^2t^2)^{3/2}}}$$

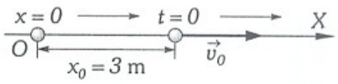
Problema III-18. La velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta está dada por la ecuación $v = 7/(1+t^2)$ SI. Calcular las expresiones de la posición y de la aceleración en función del tiempo sabiendo que en el instante inicial la partícula está en el origen.

Solución

$$x = \int v\,dt = \int \frac{7}{1+t^2}\,dt = 7 \text{ arctg } t + C \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x_0 = C = 0 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \boxed{x = 7 \text{ arctg } t} \;\wedge\; \boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\frac{14t}{(1+t^2)^2}} \quad \text{SI}$$

Problema III-19. La ecuación de la velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta, viene dada en el SI por: $v = 4t^2 - 6t + 2$. Sabiendo que en el instante $t = 0$, $x_0 = 3$ m, calcular:

1. Ecuación de la posición en cualquier instante.
2. Ecuación de la aceleración.
3. La velocidad inicial del móvil.
4. Aceleración media entre los instantes $t = 1$ s y $t = 2$ s.



Problema III-19.

Solución

1) $v = \frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; dx = (4t^2 - 6t + 2)\,dt$

$$x = \int (4t^2 - 6t + 2)\,dt = \frac{4t^3}{3} - 3t^2 + 2t + C \quad \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ C = x_0 = 3 \text{ m} \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \boxed{x = \frac{4t^3}{3} - 3t^2 + 2t + 3} \quad \text{SI}$$

2) $\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 8t - 6}$ $\qquad$ 3) $t = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v = v_0 = 2 \text{ m/s}}$

4) $\left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ s} \;\Rightarrow\; v_1 = 0 \\ t = 2 \text{ s} \;\Rightarrow\; v_2 = 6 \text{ m/s} \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 6 \text{ m/s}^2}$

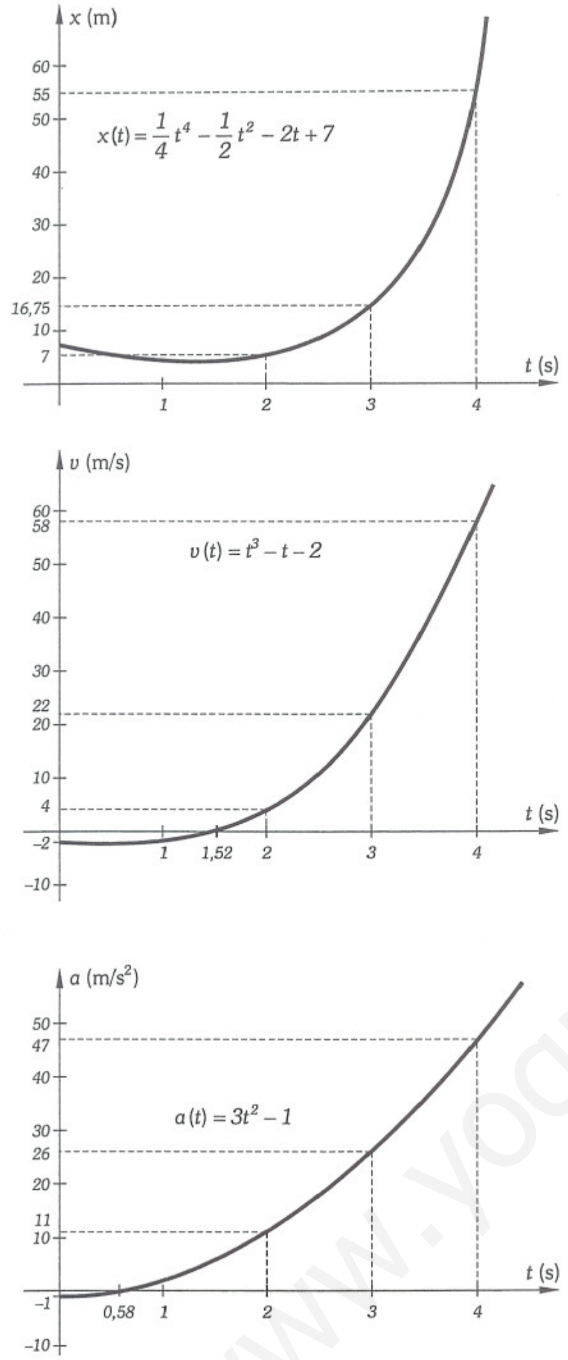
Problema III-20. Una partícula que posee un movimiento rectilíneo recorre un espacio de $7{,}00$ m antes de empezar a contar el tiempo, y cuando $t = 2{,}00$ s posee una velocidad de $4{,}00$ m/s. Si la ecuación de su aceleración escrita en unidades del SI es: $a = 3{,}00t^2 - 1{,}00$. Calcular:

1. Ecuación de la velocidad y posición.
2. La velocidad media de la partícula entre los instantes $t = 2{,}00$ s y $t = 3{,}00$ s.
3. Representar gráficamente $x = x(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$ en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 4{,}00$ s, haciendo un esquema de la trayectoria de la partícula.

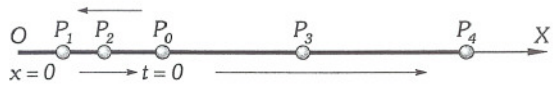
Solución

1) $a = \frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; dv = (3t^2 - 1)\,dt \;\Rightarrow\; v = \int (3t^2 - 1)\,dt \;\Rightarrow\; v = t^3 - t + C$

$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ s} \\ 4 = 8 - 2 + C \end{array} \right| \;\Rightarrow\; C = v_0 = -2{,}00 \text{ m/s} \;\Rightarrow\; \boxed{v = t^3 - t - 2}$ SI



Problema III-20-1ª.



Problema III-20-2ª.– Trayectoria:
$P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0 \to P_3 \to P_4 \to$.

$$υ=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx=(t^3-t-2)\,dt \quad \Rightarrow \quad x=\int (t^3-t-2)\,dt$$

$$x=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2-2t+C \qquad \left.\begin{array}{l} t=0 \\ C=x_0=7{,}00\text{ m}\end{array}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2-2t+7} \quad \text{SI}$$

2) $t=2{,}00$ s $\Rightarrow$ $x_2=5{,}00$ m
$t=3{,}00$ s $\Rightarrow$ $x_3=16{,}75$ m

El espacio total recorrido en tal intervalo de tiempo será:

$$\Delta x=x_3-x_2=11{,}75\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{υ}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=11{,}75\text{ m/s}}$$

3)

Punto	$P_0 \to$	$P_1 \to$	$P_2 \to$	$P_0 \to$	$P_3 \to$	$P_4 \to$
t (s)	0,00	1,52	2,00	2,33	3,00	4,00
x (m)	7,00	4,14	5,00	7,00	16,75	55,00
υ (m/s)	–2,00	0,00	4,08	8,32	22,00	58,00
a (m/s²)	–1,00	5,93	11,00	15,29	26,00	47,00

Problema III-21. Un movimiento rectilíneo es tal que su velocidad viene dada en función del desplazamiento por la ecuación $υ=3x+1$. Hallar sus ecuaciones horarias sabiendo que para $t=0$ el móvil el se encuentra en el origen.

Solución

$$υ=3x+1=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{3x+1}=\int dt \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}\ln(3x+1)=t+C \\ t=0 \;\Rightarrow\; x=0\end{array}\right| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C=\frac{1}{3}\ln 1=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ln(3x+1)=t \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{3x+1}=e^t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{e^{3t}-1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{υ=\frac{dx}{dt}=e^{3t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=\frac{dυ}{dt}=3e^{3t}}$$

Problema III-22. Una partícula parte del reposo en $t=0$ y en trayectoria recta, su velocidad viene dada en el SI por la ecuación: $υ=2\sqrt{x}$.

1. Demostrar que su aceleración es constante con el tiempo y calcular su valor.
2. Determinar su ley horaria $[x=x(t)]$.

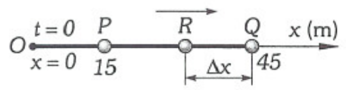
Solución

1) $\boxed{a=\frac{dυ}{dt}=\frac{dυ}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{2}{2\sqrt{x}}\,υ=2\text{ m/s}^2}$ c.q.d.

2) $υ=\dot{x}=2\sqrt{x}=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=t^2}$ SI

Problema III-23. El cuadrado de la velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta de origen O, como indicamos en la figura, viene dado en el SI por la expresión: $υ^2=345-5x$. Determinar:

1. El tiempo que tarda la partícula en ir de P a Q distantes entre sí 30 m.
2. Espacio recorrido por ella (Δx) un segundo antes de llegar a Q.



Problema III-23.– La partícula pasa de $P \to R \to Q$.

Solución

1) La partícula llega al reposo cuando $υ=0 \Rightarrow x=69$ m (y se mantiene en él, puesto que $345-5x<0$ no tiene sentido físico y las velocidades en $P(υ_1)$ y en $Q(υ_2)$ serán positivas. Llamando t_1 al tiempo empleado en el recorrido OP, t_2 en el OQ, $\Delta t=t_2-t_1$, $x_1=OP=15$ m y $x_2=OQ=$ $=45$ m, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{345 - 5x} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\pm\sqrt{345 - 5x}} = \mp\frac{2}{5}\left(\sqrt{345 - 5x_2} - \sqrt{345 - 5x_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 2{,}2 \text{ s}}$$

el signo + de la ecuación no tiene realidad física:

2) Si: $\Delta t = 1\text{ s} \quad \wedge \quad x_3 = OR \quad \Rightarrow \quad \Delta t = -\frac{2}{5}\left(\sqrt{345 - 5x_2} - \sqrt{345 - 5x_3}\right) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = -\frac{2}{5}\left(\sqrt{345 - 5 \times 45} - \sqrt{345 - 5x_3}\right) \quad \Rightarrow \quad x_3 = 32{,}8 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = x_2 - x_3 = 12{,}2 \text{ m}}$$

Problema III-24. La ecuación de la aceleración en función de la velocidad de una partícula en trayectoria recta es: $a = 3\sqrt{1 - v^2}$; sabiendo que el móvil parte del reposo en el origen, calcular las ecuaciones de este movimiento [$x = x(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$].

Solución

$$a = \frac{dv}{dt} = 3\sqrt{1 - v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = 3\,dt \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \text{arcsen } v = 3t + C_1 \\ t = 0 \ \Rightarrow \ v = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen } v = 3t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \text{sen } 3t} \qquad \boxed{a = 3\sqrt{1 - \text{sen}^2\, 3t} = 3 \cos 3t}$$

y como:

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{sen } 3t \quad \Rightarrow \quad dx = \text{sen } 3t\, dt \qquad \left|\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}\cos 3t + C_2 \\ t = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{3}(1 - \cos 3t)}$$

Problema III-25. En el proyecto de una pista de aterrizaje para grandes aviones a reacción se ha propuesto un estanque de agua de poca profundidad (aproximadamente 1 m). El avión en el momento de contactar con el agua se considera que tiene una velocidad de 180 km/h y debe reducirse a 27 km/h en una distancia de 300 m; durante su recorrido la resistencia que se opone al movimiento produce una deceleración que viene dada por: $a = -kv^2$. Calcular:

1. El valor de k (que depende del tamaño y forma del tren de aterrizaje que se sumerge en el estanque).
2. El tiempo transcurrido en tal recorrido.

Solución

$$v_0 = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s} \qquad v = 27 \text{ km/h} = 7{,}5 \text{ m/s} \qquad x = 300 \text{ m}$$

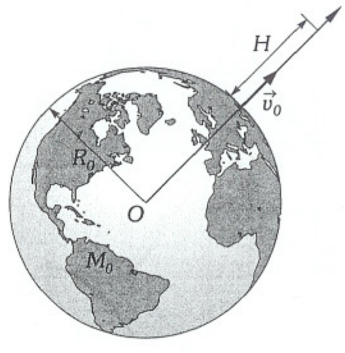
1) $v\,dv = a\,dx \quad \Rightarrow \quad v\,dv = -kv^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{v_0}{v} = kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\ln v_0/v}{x} = 6{,}324 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}}$

2) $a = \dot{v} \quad \Rightarrow \quad -kv^2 = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\int_0^t k\,dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} \quad \Rightarrow \quad kt = \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{v_0 - v}{kvv_0} = 18 \text{ s}}$

Problema III-26. La variación de la aceleración de la gravedad con la altura viene dada por la fórmula:

$$g = -\frac{GM_0}{(R_0 + h)^2}$$

y cuando $h = 0$ entonces $|g| = g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2$. Teniendo en cuenta esta expresión, calcular la velocidad inicial v_0 que habría que darle a un cuerpo (sin propulsión autónoma) para que lanzado desde la superficie terrestre, ascienda una altura vertical de $4\,000$ km. (Radio terrestre $R_0 = 6\,000$ km, y supondremos nula la resistencia del aire).



Problema III-26.

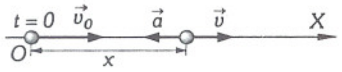
Solución

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan este movimiento rectilíneo son:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{dh}{dt} \\ g = \dfrac{dv}{dt} \end{array}\right| \quad dt = \frac{dh}{v} = \frac{dv}{g} \quad \Rightarrow \quad v\,dv = g\,dh \quad \Rightarrow \quad \int v\,dv = -\int \frac{GM_0}{(R_0 + h)^2}\,dh \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{GM_0}{R_0 + h} + C$$

cuando $v = 0$ entonces $h = H = 4\,000$ km, luego:

$$0 = \frac{GM_0}{R_0 + H} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{GM_0}{R_0 + H} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = GM_0\left[\frac{1}{R_0 + h} - \frac{1}{R_0 + H}\right] = GM_0\,\frac{H - h}{(R_0 + h)(R_0 + H)}$$



Problema III-27.

$$h=0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} v=v_0 \\ g_0=\dfrac{GM_0}{R_0^2} \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \boxed{v_0=\sqrt{\dfrac{2g_0R_0H}{R_0+H}}=\sqrt{\dfrac{2\times 9{,}8\times 6\times 10^6\times 4\times 10^6}{(6+4)\,10^6}}\simeq 6\,858 \text{ m/s}}$$

Problema III-27. La aceleración a de una partícula que se mueve en el eje X viene expresada en función de la posición por la fórmula: $a=-\omega^2 x$, cuando $x=0$ entonces $v=v_0$ y $t=0$. Encontrar las expresiones de la velocidad v y de la posición x en función del tiempo.

Solución

1^er^ MÉTODO:

$$v\,dv=a\,dx \;\Rightarrow\; \int v\,dv=-\int \omega^2 x\,dx \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2}=-\frac{\omega^2x^2}{2}+C_1 \qquad \left| \begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \\ v=v_0 \end{array} \right| \qquad C_1=\frac{v_0^2}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v=\sqrt{v_0^2-\omega^2x^2}=\frac{dx}{dt}$$

separando variables podemos poner:

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2-\omega^2x^2}}=dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{\omega}\,\text{arcsen}\,\frac{\omega x}{v_0}=t+C_2 \qquad \left| \begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \end{array} \right| \qquad C_2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boxed{x=\frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t} \qquad \boxed{v=\frac{dx}{dt}=v_0\cos\omega t}$$

2º MÉTODO:

El problema se puede resolver también teniendo en cuenta que:

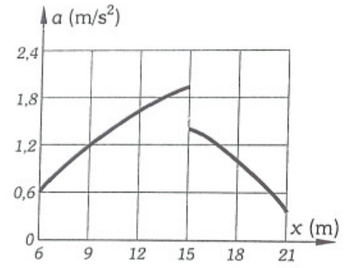
$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general es:

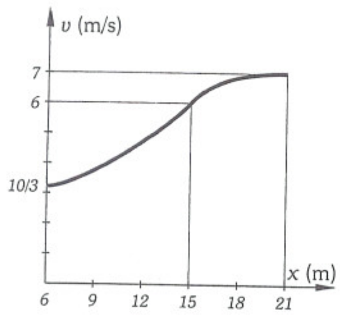
$$x=A\,\text{sen}\,\omega t+B\cos\omega t \;\Rightarrow\; v=A\omega\cos\omega t-B\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

A este movimiento se le llama *vibratorio armónico simple* (MAS). Las condiciones iniciales nos conducen a:

$$t=0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} x=0=B \\ v=v_0=A\omega \end{array} \right. \;\Rightarrow\; A=\frac{v_0}{\omega} \;\Rightarrow\; \boxed{x=\frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t} \qquad \boxed{v=v_0\cos\omega t}$$



Problema III-28.



Problema III-28-1ª.

Problema III-28. Durante una fase del movimiento rectilíneo de un vehículo experimental, el registro de su aceleración en función de su desplazamiento [$a=a(x)$] viene dado por la gráfica de la figura. La velocidad es de 12 km/h en $x=6$ m y, el mecanismo del motor hace que la aceleración descienda bruscamente (punto de discontinuidad en la gráfica) en $x=15$ m. Representar $v=v(x)$ en el intervalo considerado y calcular la velocidad en $x=21$ m.

Solución

$$v\,dv=a\,dx \;\Rightarrow\; \int_{v_0}^{v} dv=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=A \qquad \left(\begin{array}{r}\text{Área encerrada bajo la curva } a=a(x)\\ \text{en el intervalo de } v_0 \text{ a } v\end{array}\right)$$

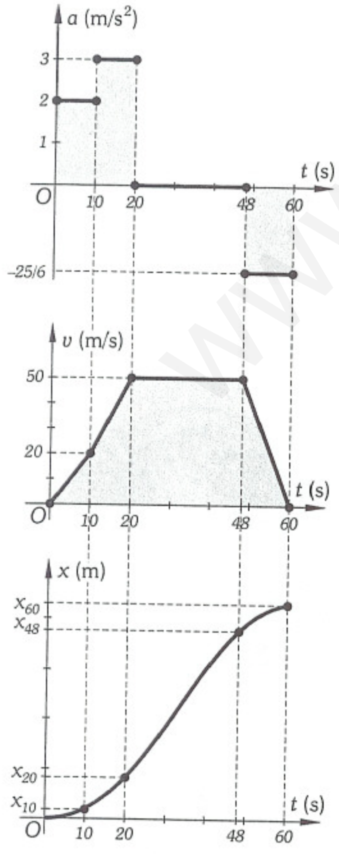
$$v_6=12\text{ km/h}=\frac{10}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{en} \qquad x=6\text{ m}$$

s: área de un cuadro $=3\times 0{,}6=1{,}8$ m²/s²
A_1: área bajo la curva entre 6 y 15 m $\simeq 7\,s=12{,}6$ m²/s²
A_2: área bajo la curva entre 15 y 21 m $\simeq 3{,}4\,s=6{,}12$ m²/s²

Llamando v_{15} la velocidad en $x=15$ m:

$$\frac{1}{2}(v_{15}^2-v_6^2)=A_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(v_{15}^2-\frac{100}{9}\right)=12{,}6 \;\Rightarrow\; v_{15}\simeq 6{,}0\text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}(v_{21}^2-v_{15}^2)=A_2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(v_{21}^2-6^2)=6{,}12 \;\Rightarrow\; \boxed{v_{21}\simeq 7\text{ m/s}}$$



Problema III-29.

Problema III-29. Un punto móvil parte del reposo de un punto O, en trayectoria recta, acelera durante 10 s a 2 m/s² y a continuación a 3 m/s² hasta alcanzar una velocidad de 50 m/s, conservándola hasta que decelera durante 12 s y se para en un punto P. El tiempo total empleado en el trayecto OP es de 60 s. Representar las curvas $a=a(t)$, $v=v(t)$ y $x=x(t)$ y calcular la distancia OP sobre la trayectoria.

Solución

Curva $a = a(t)$: al ser la aceleración constante o nula, la $a = a(t)$ estará formada por líneas horizontales. Como la variación de velocidad en un intervalo de tiempo es igual al área bajo la curva $a = a(t)$ y dicho intervalo: a la vista de la figura (a), obtenemos v_{10}, t_2 y a_4; en efecto:

$0 < t < 10$ s	la velocidad pasa de 0 a v_{10}:	$v_{10} - v = 10 \times 2 \;\Rightarrow\; v_{10} = 20$ m/s
10 s $< t < t_2$	la velocidad aumenta de 20 a 50 m/s:	$50 - 20 = (t_2 - 10)\,3 \;\Rightarrow\; t_2 = 20$ s
$20 < t < 48$	la aceleración es nula	
$48 < t < 60$	la velocidad disminuye de 50 m/s a 0:	$0 - 50 = a_4\,(60 - 48) \;\Rightarrow\; a_4 = -25/6$ m/s^2

Curva $v = v(t)$: al ser la aceleración constante o nula, estará formada por segmentos rectilíneos que unirán los puntos que hemos calculado. El desplazamiento en un intervalo de tiempo Δt será igual al área encerrada bajo la curva $v = v(t)$ en dicho intervalo. Por lo que podemos calcular x_{10}, x_{20}, x_{48} y $OP = x_{60}$, en efecto:

$0 < t < 10$ s El desplazamiento es el área del triángulo:

$$x_{10} - 0 = \frac{1}{2}\,10 \times 20 \quad\Rightarrow\quad x_{10} = 100\,\text{m}$$

10 s $< t < 20$ s El desplazamietno será el área del trapecio:

$$x_{20} - 100 = \frac{1}{2}(20 + 50)(20 - 10) \quad\Rightarrow\quad x_{20} = 450\,\text{m}$$

20 s $< t < 48$ s El desplazamiento será el área del rectángulo:

$$x_{48} - 450 = (48 - 20)\,50 \quad\Rightarrow\quad x_{48} = 1\,850\,\text{m}$$

48 s $< t < 60$ s El desplazamiento es el área del triángulo:

$$x_{60} - 1\,850 = \frac{1}{2}(60 - 48)\,50 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_{60} = 2\,150\ \text{m} = OP}$$

Curva $x = x(t)$: los puntos que hemos determinado deben unirse con tres arcos de parábola (tramos de aceleración constante) y una línea recta (tramo de aceleración nula). Para el trazado de las parábolas se tendrá en cuenta que para cualquiera que sea el instante considerado t, la pendiente de la curva $x = x(t)$, es igual a la velocidad en ese instante ($v = dx/dt$).

Problema III-30. El movimiento de una partícula en trayectoria recta es tal que para $t = 0$ es $x = 0$ y la ecuación de su velocidad viene dada en el SI por la ecuación: $v = t^2 - 2t$.

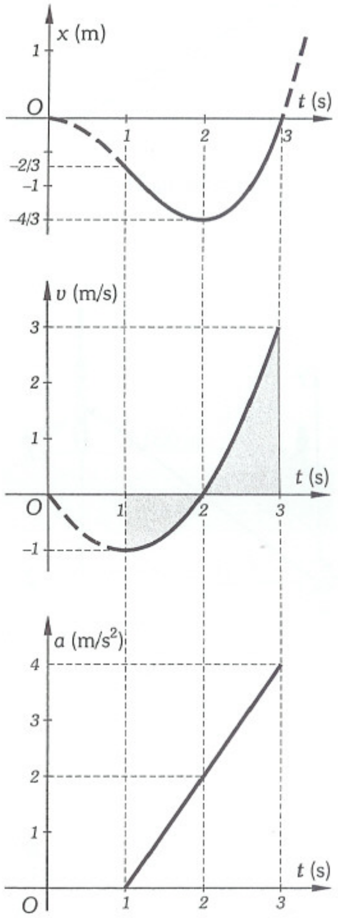
1. Representar gráficamente las funciones $v(t)$, $x(t)$ y $a(t)$ en el intervalo de tiempo comprendido entre $t_1 = 1$ s y $t_2 = 3$ s.
2. Calcular el espacio total recorrido por la partícula en ese intervalo de tiempo.
3. Describir el movimiento de la partícula.

Solución

1) $v(t) = \dot{x} = t^2 - 2t \quad\Rightarrow\quad \int_0^x dx = \int_0^t (t^2 - 2t)\,dt \quad\Rightarrow\quad \boxed{x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2} \quad \boxed{a(t) = \dot{v} = 2t - 2}$ SI

La gráfica de $v(t)$ es una parábola de vértice $(1, -1)$ m y para $v = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 2$ s, esta última solución perteneciente al intervalo $[1, 3]$ s.

t (s)	1	↗	2	↗	3
x (m)	−2/3	↘	−4/3	↗	0
v (m/s)	−1	↗	0	↗	3
a (m/s²)	0	↗	2	↗	4

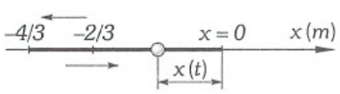


Problema III-30-1ª.

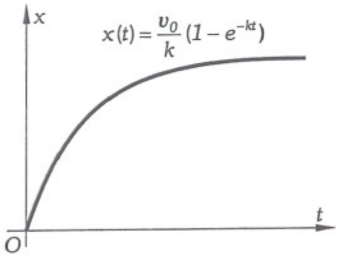
2) El espacio total recorrido vendrá dado por el área encerrada entre la curva $v = v(t)$ y el eje del tiempo (sombreada en la Fig. 1ª), es decir:

$$\boxed{s = \left|\int_1^2 v(t)\,dt\right| + \int_2^3 v(t)\,dt = \left|\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_1^2\right| + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_2^3 = \left|-\frac{2}{3}\right| + \frac{4}{3} = 2\,\text{m}}$$

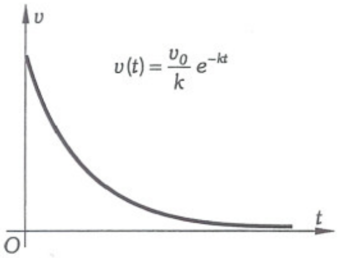
3) La partícula (ver Fig. 2ª) para $t = 1$ s se encuentra a $-2/3$ m del origen y alejándose de él, disminuyendo su velocidad con aceleración positiva y en aumento, hasta que a los 2 s se encuentra $-4/3$ m del origen donde se para ($v = 0$), y su aceleración se hace 2 m/s^2. A partir de $t = 2$ s la partícula retrocede, se acerca al origen con velocidad positiva y aceleración también positiva y creciente; en $t = 3$ s se encuentra en el origen con velocidad y aceleración crecientes y con valores $v = 3$ m/s y $a = 4$ m/s^2...



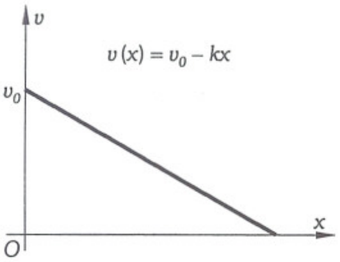
Problema III-30-2ª.



Problema III-31-1ª.



Problema III-31-2ª.



Problema III-31-3ª.

Problema III-31. Un mecanismo de freno consiste esencialmente en un pistón que puede desplazarse en un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el pistón retrocede con una velocidad inicial v_0, el aceite es forzado a pasar a través de orificios que tiene el pistón, originando en el mismo una deceleración proporcional a su velocidad, es decir: $a = -kv$. Expresar $v(t)$, $x(t)$ y $v(x)$, dibujando las curvas correspondientes.

Solución

$$a = -kv = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int -k\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln v = -kt + C_1$$

$$\left| \begin{array}{l} t = 0 \\ v = v_0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = \ln v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$

$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int v_0 e^{-kt}\,dt = \int dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{v_0}{k} e^{-kt} = x + C_2 \qquad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{v_0}{k}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(x) = v_0 - kx}$$

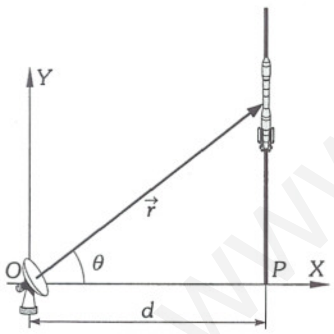
Problema III-32. Se dispara un cohete verticalmente, su vuelo se sigue por radar desde un punto O que dista d del punto de lanzamiento P como se indica en la figura. Determinar la velocidad y aceleración del cohete en función de r y θ y sus derivadas respecto al tiempo $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$.

Solución

$$\left. \begin{array}{lll} x = d & \Rightarrow & v_x = 0 \\ y = r \operatorname{sen} \theta & \Rightarrow & v_y = \dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_y = \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r\dot{\theta} \cos \theta}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{r} \operatorname{sen} \theta + \dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = a_y = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \operatorname{sen} \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta}$$



Problema III-32.

Problema III-33. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a ω y está situado a una distancia d de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forman d y el rayo es θ.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\theta} \dfrac{d\theta}{dt} \\ x = d \operatorname{tg} \theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{wd}{\cos^2 \theta}} \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\omega^2 d \operatorname{sen} \theta}{\cos^3 \theta}}$$

Problema III-34. Queremos filmar un coche que viaja a velocidad v constante por una carretera recta desde un punto que dista d de ella. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular de giro con que debemos mover la cámara para un ángulo cualquiera θ.

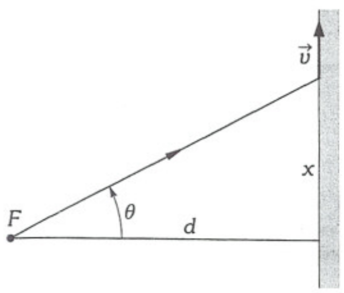
Solución

En este caso debemos obtener $\dot{\theta}$ y $\dot{\omega}$; partimos de la misma ecuación que en el problema anterior, es decir (Fig. III-34):

$$x = d \operatorname{tg} \theta \quad \Rightarrow \quad v = \dot{x} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{d}{\cos^2 \theta} \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{v \cos^2 \theta}{d}}$$

Derivando respecto del tiempo obtenemos la aceleración angular:

$$\boxed{\alpha = \dot{\omega} = -\frac{2v}{d} \dot{\theta} \cos \theta \operatorname{sen} \theta = -\frac{v^2}{d^2} \cos^2 \theta \operatorname{sen} 2\theta}$$



Problema III-33 y 34.

C) MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMES

FORMULARIO

Movimiento rectilíneo y uniforme:	$a = 0$	$v = cte$	$x = x_0 + vt$
Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado:	$a = cte$	$v = v_0 + at$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

Problema III-35. Sabiendo que la estrella α-Centauro (la más próxima a nosotros después del Sol) se encuentra de la Tierra a $4{,}04 \times 10^{13}$ km, calcular el tiempo que tarda la luz de α-Centauro en llegar a la Tierra.

Solución

Sabemos que la luz viaja en el vacío a la velocidad constante de $c = 3 \times 10^8$ m/s, luego:

$$x = ct \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{x}{c} = \frac{4{,}04 \times 10^{16}}{3 \times 10^8} = 1{,}346\,7 \times 10^8 \text{ s} = 4{,}27 \text{ a}}$$

razón por la que se dice que la estrella α-Centauro se encuentra a $4{,}27$ años luz (el año luz será por tanto una unidad de distancia).

Problema III-36. La distancia mínima a que debe estar un muro para que se produzca eco al emitir enfrente de él una sílaba, es de 17 m; el mínimo tiempo para que se perciban dos sílabas distintamente es $0{,}1$ s (poder separador del oído medio). Calcular con estos datos la velocidad de propagación del sonido en el aire, teniendo en cuenta que el sonido va y vuelve en el trayecto de 17 m. ¿Cuál es el valor de una velocidad «supersónica» en km/h?

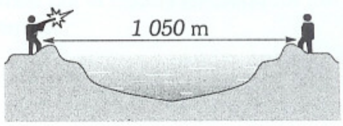
Solución

El sonido recorre: $2 \times 17 = 34$ m en $0{,}1$ s. La velocidad es:

$$c = \frac{x}{t} = \frac{34}{0{,}1} = 340 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 340 \text{ m/s} = \frac{340 \times 3\,600}{1\,000} \text{ km/h} = 1\,224 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{\text{La velocidad supersónica es mayor que } 1\,224 \text{ km/h}}$$

Problema III-37. Entre dos observadores hay una distancia de $1\,050$ m; uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de $3{,}0$ s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.



Problema III-37.

Solución

La velocidad es: $\boxed{c = \frac{x}{t} = \frac{1\,050}{3} = 350 \text{ m/s}}$

Problema III-38. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los dos problemas anteriores, calcular:

1. La componente de la velocidad del viento en la dirección de los observadores en la experiencia del problema.
2. ¿Qué tiempo tardaría el sonido en recorrer los $1\,050$ m si los observadores del anterior problema invirtieran sus posiciones?

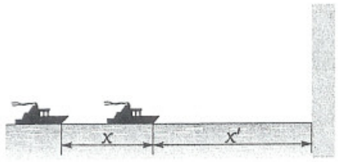
Solución

1) La componente de la velocidad del viento es la diferencia de los resultados de los dos problemas anteriores:

$$\boxed{350 - 340 = 10 \text{ m/s}}$$

2) Haciendo la observación inversamente, el sonido se propagará en contra del viento, con una velocidad:

$$c = 340 - 10 = 330 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{x}{c} = \frac{1\,050}{330} = 3{,}2 \text{ s}}$$



Problema III-39.

Problema III-39. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver el fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.

Solución

Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:

$$\boxed{x = 340 \times 3 = 1\,020 \text{ m}}$$

El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:

$$t = 11 - 3 = 8 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad 2x' = 340 \times 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x' = 1\,360 \text{ m}}$$

Problema III-40. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo de 20 km/h. Calcular:

1. ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
2. ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
3. ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

Solución

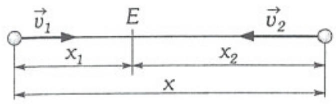
1) $$\boxed{\overline{v} = \frac{s_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} = \frac{x_{\text{subidas}} + x_{\text{baja}}}{t_{\text{total}}} = \frac{2x}{\dfrac{x}{v_1} + \dfrac{x}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km/h}}$$

2) $$\boxed{\overline{v} = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12{,}5 \text{ km/h}}$$

3) $$\boxed{\overline{v} = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = \frac{2 \times 5 + 20}{3} = 10 \text{ km/h}}$$

(Obsérvese que la velocidad media es la media aritmética de las velocidades uniformes únicamente en el caso en que el tiempo que duran los distintos recorridos es el mismo).

Problema III-41. Dos móviles marchan en sentidos contrarios, dirigiéndose el uno al encuentro del otro con las velocidades de 4 y 5 cm/s respectivamente. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a $1{,}52$ m, de la posición de partida del primero, determinar la distancia entre los móviles al comenzar el movimiento y el tiempo transcurrido hasta que se encontraron.



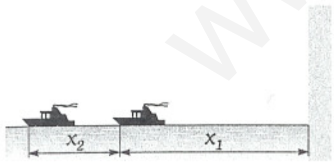
Problema III-41.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1 t \\ x_2 = v_2 t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1{,}52}{x_2} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1{,}90 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} = \frac{152}{4} = 38 \text{ s}}$$

La distancia entre los móviles al comenzar el movimiento será: $\boxed{x = x_1 + x_2 = 3{,}42 \text{ m}}$

Problema III-42. Un acorazado se aleja de la costa, en la que hay un alto acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo; el eco es percibido $4{,}1$ s después. Calcular la velocidad del acorazado. (Se supone para el sonido la velocidad de 340 m/s).



Problema III-42.

Solución

Llamamos c a la velocidad del sonido:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = ct \\ x_2 = vt \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + vt = ct \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{ct - 2x_1}{t} = \frac{340 \times 4{,}1 - 2 \times 680}{4{,}1} = 8{,}3 \text{ m/s}}$$

Problema III-43. Un móvil parte de un punto con una velocidad de 110 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración de -10 cm/s^2. Calcular el tiempo que tardará en pasar por un punto que dista 105 cm del punto de partida. (Interpretar físicamente las dos soluciones que se obtienen).

Solución

La ecuación del movimiento haciendo $x_0 = 0$, es:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad 105 = 110t - \frac{1}{2} 10 t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 22t + 21 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{t_1 = 21 \text{ s}} \\ \boxed{t_2 = 1 \text{ s}} \end{array} \right.$$

t_2 representa el tiempo que tarda el móvil en recorrer los *105* primeros cm.
t_1 representa el tiempo que tarda el móvil en pararse por su movimiento retardado y retrocediendo luego con movimiento acelerado llegar de nuevo al punto que dista del origen *105* cm.

Problema III-44. Hallar las fórmulas de un movimiento uniformemente variado sabiendo que la aceleración es 8 cm/s^2, que la velocidad se anula para $t = 3$ s, y que pasa por el origen ($x = 0$) en $t = 11$ s.

Solución

$$\left.\begin{array}{lll} 0 = v_0 + 8 \times 3 & \Rightarrow & v_0 = -24 \text{ cm/s} \\ 0 = x_0 - 24 \times 11 + \frac{1}{2} 8 \times 121 & \Rightarrow & x_0 = -220 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{x = -220 - 24t + 4t^2} \\ \boxed{v = -24 + 8t} \end{array}\right. \quad \text{CGS}$$

Problema III-45. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación: $v = 40 - 8t$. Para $t = 2$ s el punto dista del origen 80 m. Determinar:

1. La expresión general de la distancia al origen.
2. El espacio inicial.
3. La aceleración.
4. ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?
5. ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
6. Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s, y $t = 15$ s.

Solución

1) $x = \int v\,dt = \int (40 - 8t)\,dt = 40t - 4t^2 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + 40t - 4t^2}$

2) $80 = x_0 + 80 - 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = 16 \text{ m}}$

3) $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = -8 \text{ m/s}^2}$ 4) $0 = 40 - 8t \quad \boxed{t = 5 \text{ s}}$

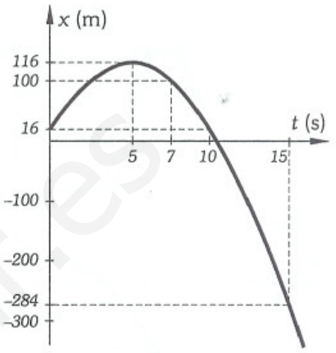
5) $\boxed{x_5 = 16 + 40 \times 5 - 4 \times 5^2 = 116 \text{ m}}$

6) $$\boxed{\begin{array}{lr} x_7 = 16 + 40 \times 7 - 4 \times 7^2 = & 100 \text{ m} \\ x_{10} = 16 + 40 \times 10 - 4 \times 10^2 = & 16 \text{ m} \\ x_{15} = 16 + 40 \times 15 - 4 \times 15^2 = & -284 \text{ m} \end{array}}$$

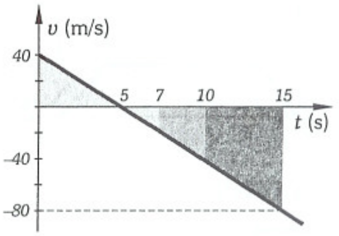
Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$:
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$ s.
El recorrido en los 5 primeros segundos es: $C = x - x_0 = 40t - 4t^2 = 100$ m
A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, en valor absoluto, entre los límites $t = 5$ s y $t =$ instante final.

$$\boxed{C_7 = 100 + \left| \int_5^7 (40 - 8t)\,dt \right| = 116 \text{ m}} \qquad \boxed{C_{10} = 100 + \left| \int_5^{10} (40 - 8t)\,dt \right| = 200 \text{ m}}$$

$$\boxed{C_{15} = 100 + \left| \int_5^{15} (40 - 8t)\,dt \right| = 500 \text{ m}}$$



Problema III-45-1ª.– Representación gráfica de la distancia al origen en función del tiempo.



Problema III-45-2ª.– En la gráfica de la velocidad frente al tiempo, el área limitada por el eje de abcisas y la gráfica entre dos instantes, coincide numéricamente con el camino recorrido por el móvil entre esos dos instantes.

Problema III-46. Trazar la curva de la posición y la de la velocidad en función del tiempo en el movimiento dado por la fórmula $x = 4{,}00 - 26{,}00t + 4{,}00t^2$ (SI) y determinar los instantes para los cuales la velocidad y el espacio tienen el mismo valor numérico.

Solución

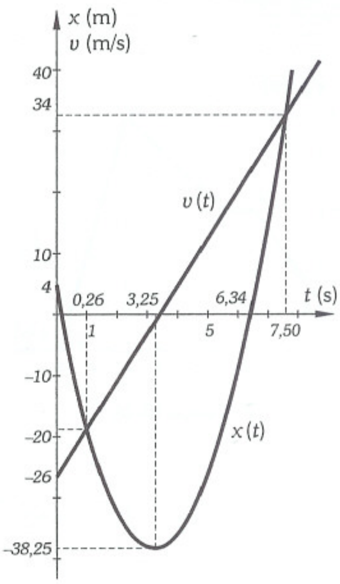
$$v = \frac{dx}{dt} = -26 + 8t$$

La curva: $x = x(t)$, es una parábola. Cálculo del máximo o mínimo:

$$\frac{dx}{dt} = -26 + 8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}25 \text{ s} \qquad x_m = -38{,}25 \text{ m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8{,}00 > 0 \qquad \text{el punto } (3{,}25, -38{,}25) \text{ es el mínimo.}$$

Cálculo de cortes con los ejes:
La parábola corta el eje de las posiciones en: $x = 4{,}00$ m, para $t = 0$.



Problema III-46.

La parábola corta al eje de los tiempos en las soluciones de la ecuación:

$$0 = 4 - 26t + 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}26 \text{ s} \qquad t_2 = 6{,}34 \text{ s}$$

La función: $v = v(t)$, es una recta que corta al eje de tiempos en la solución de la ecuación:

$$0 = -26{,}00 + 8{,}00t \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}25 \text{ s}$$

corta al eje de las velocidades en: $v = -26{,}00$ m/s

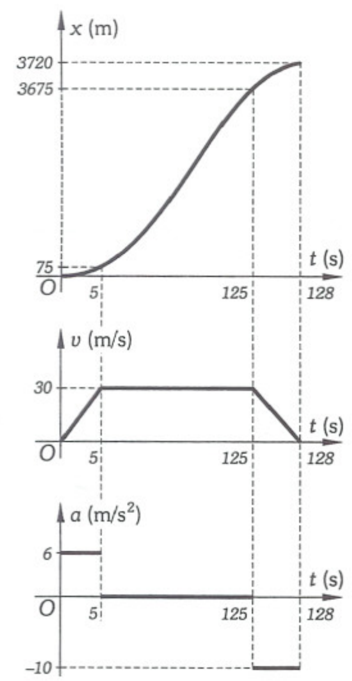
Los gráficos son los de la figura.
La velocidad y el espacio tendrán el mismo valor cuando:

$$4{,}00 - 26{,}00t + 4{,}00t^2 = -26{,}00 + 8{,}00t \quad \Rightarrow \quad 4{,}00t^2 - 34{,}00t + 30{,}00 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \begin{cases} 1{,}00 \text{ s} \\ 7{,}50 \text{ s} \end{cases}}$$

Problema III-47. Un automóvil arranca de un punto con movimiento uniformemente acelerado, alcanzando a los 5 s la velocidad de 108 km/h desde cuyo momento la conserva, hasta que a los 2 minutos de alcanzarla, frena hasta pararse al producirle los frenos una deceleración de 10 m/s^2.

1. Calcular el tiempo transcurrido y el espacio recorrido desde que arranca hasta que se para.

2. Hacer una representación gráfica de $x = x(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$.



Problema III-47.– (Las cotas en los ejes no se han representado a escala).

Solución

1) $v = 108$ km/h $= 30$ m/s $\qquad t_1 = 5$ s $\qquad t_2 = 2 \times 60$ s $= 120$ s $\qquad a_3 = -10$ m/s^2

$$0 = v + a_3 t_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{30}{10} = 3 \text{ s} \qquad \boxed{t = t_1 + t_2 + t_3 = 128 \text{ s} = 2^{\text{min}}\ 8^{\text{s}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2} a_1 t_1^2 \\ v = a_1 t_1 \end{array}\right| \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} v t_1 = \frac{1}{2} 30 \times 5 = 75 \text{ m}$$

$$x_2 = v t_2 = 30 \times 120 = 3\,600 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} \quad \Rightarrow \quad 0 = v^2 + 2a_3 x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{v^2}{2a_3} = \frac{30^2}{2 \times 10} = 45 \text{ m}$$

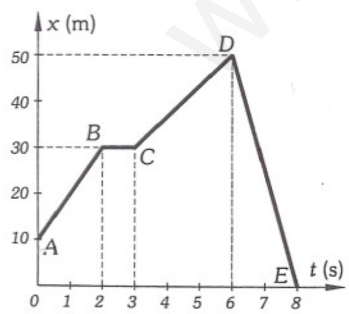
$$\Rightarrow \quad \boxed{x = x_1 + x_2 + x_3 = 3720 \text{ m}}$$

2) En el primer intervalo: $\left| \begin{array}{l} a(t) = cte = 6 \text{ m/s}^2 \\ v(t) = 6t \\ x(t) = 3t^2 \end{array} \right.$

En el segundo intervalo: $\left| \begin{array}{l} a(t) = cte = 0 \\ v(t) = cte = 30 \text{ m/s} \\ x(t) = 3t \end{array} \right.$

En el tercer intervalo: $\left| \begin{array}{l} a(t) = cte = -10 \text{ m/s}^2 \\ v(t) = 30 - 10t \\ x(t) = 30t - 5t^2 \end{array} \right.$

Problema III-48. El gráfico de la figura nos representa el movimiento realizado por un móvil en trayectoria recta. Interpretar y clasificar su movimiento.



Problema III-48.

Solución

TRAMO AB.— Su ecuación es: $x = 10 + 10t$

El *movimiento es uniforme* de velocidad: $v = \dfrac{dx}{dt} = 10$ m/s

el espacio inicial (para $t = 0$) vale $x_0 = 10$ m

TRAMO BC.— Su ecuación es: $x = 30$ m

El móvil está parado en el intervalo de tiempo de 2 a 3 s.

TRAMO CD.— Su ecuación es: $x = 10 + \dfrac{20}{3}t$

El *movimiento es uniforme* de velocidad: $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{20}{3}$ m/s

El móvil comienza este movimiento a los 3 s de partir y dista del origen de espacios 30 m.

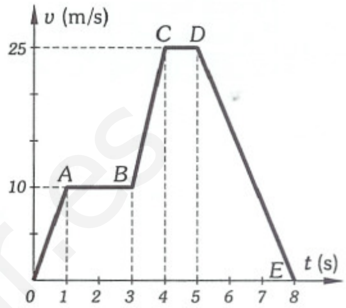
TRAMO DE.— Su ecuación es: $x = 50 - 25t$

El *movimiento es uniforme* de velocidad: $v = \dfrac{dx}{dt} = -25$ m/s el signo menos indica que se mueve en sentido opuesto al llevado en los tramos anteriores, y en el instante $t = 8$ s se encuentra en el origen de los espacios.

El móvil comienza a los 6 s de partir y dista del origen de posiciones 50 m.

Problema III-49. El gráfico de la figura nos representa la velocidad de un móvil en trayectoria recta, en el que para $t = 0$, $x_0 = 0$. Determinar las ecuaciones de la posición y de la aceleración interpretando el movimiento que tiene en cada caso.

Solución



Problema III-49.

TRAMO *OA*.— Su ecuación es: $v = 10t$

la ecuación del espacio: $x = \int v\,dt = \int 10t\,dt = 5t^2 + C_1$

y como para $t = 0$, $x = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 5t^2}$

El movimiento es *uniformemente acelerado* de aceleración: $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = 10 \text{ m/s}^2}$

TRAMO *AB*.— Su ecuación es: $v = 10$ m/s

luego el *movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el primero al tercer segundo; la ecuación de la posición la calcularemos:

$$x = \int v\,dt = \int 10\,dt = 10t + C_2$$

para calcular C_2 tendremos en cuenta que en el segundo anterior (Tramo *OA*) el móvil recorrió una distancia:

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow x_{OA} = 5t^2 = 5 \text{ m}$$

luego: $t = 1$ s $\Rightarrow 5 = 10 \times 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -5$ m $\Rightarrow$ $\boxed{x = -5 + 10t}$

TRAMO *BC*.— Su ecuación es: $v = -35 + 15t$

téngase en cuenta que el móvil comienza este movimiento cuando $t = 3$ s y su velocidad es $v = 10$ m/s en ese instante. La ecuación de la posición será:

$$x = \int v\,dt = \int (-35 + 15t)\,dt = -35t + \frac{15}{2}t^2 + C_3$$

para calcular C_3, tendremos en cuenta que la distancia recorrida hasta el tercer segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación de la posición del tramo *AB*, $t = 3$ s.

$$x_{OB} = -5 + 10 \times 3 = 25 \text{ m} \Rightarrow 25 = -35 \times 3 + 7{,}5 \times 9 + C_3 \Rightarrow C_3 = 62{,}5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{x = 62{,}5 - 35t + 7{,}5t^2}$$

téngase en cuenta que el móvil comienza a moverse cuando $t = 3$ s, entonces la distancia que ha recorrido antes es de 25 m.

El movimiento es *uniformemente acelerado* de aceleración: $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = 15 \text{ m/s}^2}$

TRAMO *CD*.— Su ecuación es: $v = 25$ m/s

luego el *movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el cuarto al quinto segundo; la ecuación de la posición la calcularemos:

$$x = \int v\,dt = \int 25\,dt = 25t + C_4$$

para calcular C_4, tendremos en cuenta que la distancia recorrida hasta el cuarto segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación de la posición del tramo *BC*, $t = 4$ s:

$$x_{OC} = 62{,}5 - 35 \times 4 + 7{,}5 \times 4^2 = 42{,}5 \text{ m} \Rightarrow 42{,}5 = 25 \times 4 + C_4 \Rightarrow C_4 = -57{,}5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{x = -57{,}5 + 25t}$$

TRAMO *DE*.— Su ecuación es: $v = \dfrac{200}{3} - \dfrac{25}{3}t$

la ecuación de la posición será: $x = \int v\,dt = \dfrac{200}{3}t - \dfrac{25}{6}t^2 + C_5$

si sustituimos en la ecuación de la distancia del tramo *CD*, *t* por 5 s, obtendremos:

$$x_{OD} = -57{,}5 + 25 \times 5 = 67{,}5 \text{ m} \Rightarrow 67{,}5 = \frac{200}{3}5 - \frac{25}{6}25 + C_5 \Rightarrow C_5 = -\frac{485}{3} \text{ m} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{485}{3} + \frac{200}{3}t - \frac{25}{6}t^2}$$

El movimiento es uniformemente decelerado y transcurridos 8 s el móvil llega al reposo; su deceleración es:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\frac{25}{3}\ \text{m/s}^2}$$

y dista del punto de partida: $t = 8\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad x = 105\ \text{m}$

Problema III-50. Dos puntos materiales A y B se mueven con movimiento uniformemente acelerado partiendo del reposo; la aceleración de B es doble que la de A y el tiempo que emplea A en su trayectoria es triple que el de B. ¿Qué camino recorre B, con respecto al recorrido por A?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} x_B = \dfrac{1}{2} a t^2 \\ x_A = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2} 9t_2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x_B}{x_A} = \frac{2}{9}}$$

Problema III-51. Un automóvil que está parado, arranca con una aceleración de $1,5$ m/s^2. En el mismo momento es adelantado por un camión que lleva una velocidad constante de 15 m/s. Calcular:

1. Distancia contada desde el punto de cruce en la que alcanza el automóvil al camión.
2. Velocidad del automóvil en ese momento.

Solución

$$1)\quad x = \frac{1}{2} a t^2 = v t \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2v}{a} = \dfrac{30}{1,5} = 20\ \text{s} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 2) \left| \begin{array}{l} \boxed{x = 15 \times 20 = 300\ \text{m}} \\ \boxed{v = at = 1,5 \times 20 = 30\ \text{m/s}} \end{array}\right.$$

Problema III-52. Un automóvil y un camión parten en el mismo momento, incialmente el coche se encuentra a una cierta distancia del camión; si el coche tiene una aceleración de 3 m/s^2 y el camión de 2 m/s^2 y el coche alcanza al camión cuando este último ha recorrido 60 m. Calcular:

1. Distancia inicial entre ambos.
2. Velocidad de cada uno en el momento del encuentro.

Solución

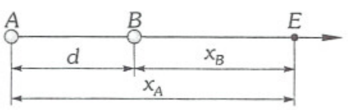
$$1)\quad x_C = \frac{1}{2} a_C t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x_C}{a_C}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{2}} = 2\sqrt{15}\ \text{s} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = \frac{1}{2} 3 \times 60 = 90\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = x_A - x_C = 30\ \text{m}}$$

$$2)\quad \boxed{v_A = a_A t = 6\sqrt{15}\ \text{m/s}} \qquad \boxed{v_C = a_C t = 4\sqrt{15}\ \text{m/s}}$$

Problema III-53. Dos cuerpos A y B situados a 2 km de distancia salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración del más lento, el B, de $0,32$ cm/s^2. Deben encontrarse a $3,025$ km de distancia del punto de partida del cuerpo B. Calcular el tiempo que invertirán en ello y cuál será la aceleración de A, así como las velocidades de los dos en el momento de encontrarse.

Solución



Problema III-53.

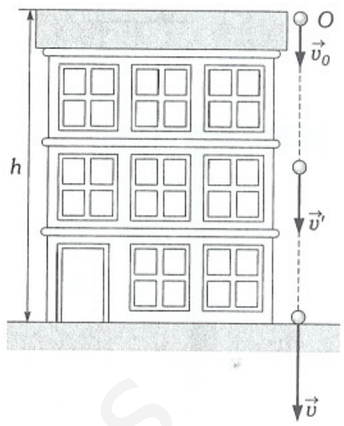
$$x_B = 302\,500\ \text{cm} = \frac{1}{2} 0,32 t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1\,375\ \text{s}}$$

$$x_A = 502\,500\ \text{cm} = \frac{1}{2} a_A t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_A = \frac{2x_A}{t^2} = 0,53\ \text{cm/s}^2}$$

$$\boxed{v_A = a_A t = 728\ \text{cm/s} = 7,28\ \text{m/s}} \qquad \boxed{v_B = a_B t = 400\ \text{cm/s} = 4,4\ \text{m/s}}$$

Problema III-54. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s (tomar $g = 9,8$ m/s^2). Calcular:

1. Velocidad con que llega al suelo.
2. Tiempo que tarda el llegar al suelo.
3. Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
4. Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado 3).



Problema III-54.

Solución

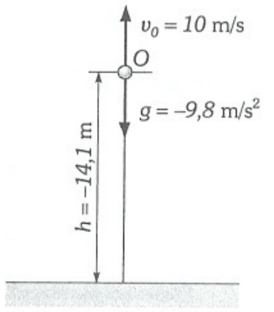
Tomamos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical descendente. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} v_0 &= 10 \text{ m/s} \\ g &= 9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$1) \text{ y } 2) \quad h = 60 \text{ m} \quad \left|\begin{aligned} v &= 10 + 9{,}8t \\ 60 &= 10t + \frac{1}{2} 9{,}8t^2 \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} &\boxed{t = 2{,}6 \text{ s}} \\ &\boxed{v = 35{,}7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

$$3) \text{ y } 4) \quad h' = 30 \text{ m} \quad \left|\begin{aligned} v' &= 10 + 9{,}8t' \\ 30 &= 10t' + \frac{1}{2} 9{,}8t'^2 \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} &\boxed{t' = 1{,}7 \text{ s}} \\ &\boxed{v' = 26{,}2 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Problema III-55. Desde el balcón situado a $14{,}1$ m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo ($g = 9{,}8$ m/s^2).



Problema III-55.

Solución

Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical ascendente, nuestros datos son:

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \qquad h = -14{,}1 \text{ m} \qquad g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en la ecuación general: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad -14{,}1 = 10t - \frac{1}{2} 9{,}8t^2$

Ecuación de segundo grado en t, que resuelta nos da para valores del tiempo: $t_1 = 3$ s y $t_2 = -0{,}96$ s. El tiempo pedido es 3 s; el tiempo invertido por el cuerpo en subir hasta la cúspide del trayecto y caer desde ella hasta al calle.

El tiempo negativo $-0{,}96$ s (anterior al origen de tiempos) hubiese sido el empleado por el cuerpo lanzado desde el suelo, en subir hasta el origen (O) y pasar por él a la velocidad de 10 m/s hacia arriba (no tiene sentido físico).

Problema III-56. Desde lo alto de una torre de 100 m de alta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con la velocidad de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de ordenadas el punto de lanzamiento, calcular la posición y la velocidad de la piedra al cabo de 1 y 4 s después de su salida. ¿Cuál es la altura alcanzada por la piedra y qué tiempo tarda en alcanzarla? Asimismo calcular la velocidad cuando se encuentra a 8 m por encima del punto de partida y cuando cayendo pasa por el punto de partida. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y qué velocidad lleva en ese momento? ($g = 10$ m/s^2).

Solución

Tomamos como sentido positivo el del eje vertical ascendente. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ h &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} v_0 &= 15 \text{ m/s} \\ g &= -10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ s} \quad \left|\begin{aligned} &v = 15 - 10 \times 1 = 5 \text{ m/s (subiendo)} \\ &h = 15 \times 1 - \frac{1}{2} 10 \times 1^2 = 10 \text{ m} \end{aligned}\right.$$

$$t = 4 \text{ s} \quad \left|\begin{aligned} &v = 15 - 10 \times 5 = -25 \text{ m/s (bajando)} \\ &h = 15 \times 4 - \frac{1}{2} 10 \times 16 = -20 \text{ m} \end{aligned}\right.$$

$$v = 0 \quad \left|\begin{aligned} &15 = 10t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{2} \text{ s} \\ &h = \frac{1}{2} 10 \frac{9}{4} = \frac{45}{4} \text{ m} \end{aligned}\right.$$

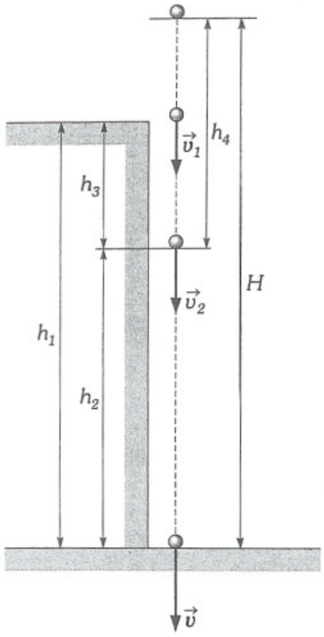
$$h = 8 \text{ m} \quad \left|\begin{aligned} &8 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \left|\begin{aligned} t_1 &= 0{,}7 \text{ s} \\ t_2 &= 2{,}3 \text{ s} \end{aligned}\right. \\ &v_1 = 15 - 10 \times 0{,}7 = 8 \text{ m/s} \\ &v_2 = 15 - 10 \times 2{,}3 = -8 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

$$h = 0 \quad \left|\begin{aligned} &0 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \left|\begin{aligned} t_1 &= 0 \text{ s} \\ t_2 &= 3 \text{ s} \end{aligned}\right. \\ &v_1 = 15 - 0 \times 10 = 15 \text{ m/s} \\ &v_2 = 15 - 3 \times 10 = -15 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

$$h = -100 \text{ m} \quad \left|\begin{aligned} &-100 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 6{,}2 \text{ s} \\ &v = 15 - 10 \times 6{,}2 = -47 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

Problema III-57. Una piedra que cae libremente pasa a las 10^h frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las $10^h\,2^s$ frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo ($g = 10$ m/s^2). Se pide calcular:

1. La altura desde la que cae.
2. En qué momento llegará al suelo.
3. La velocidad con que llegará al suelo.



Problema III-57.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = 300\text{ m} \\ h_2 = 200\text{ m} \\ h_3 = 100\text{ m} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} t_1 = 2\text{ s} \\ g = 10\text{ m/s}^2 \end{array}$$

1) $$\left.\begin{array}{l} v_2 = v_1 + gt_1 \\ h_3 = v_1 t_1 + \dfrac{1}{2} g t_1^2 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2g} \\ H = h_2 + h_4 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} v_2 = v_1 + 10 \times 2 \\ 100 = 2v_1 + \dfrac{1}{2} 10 \times 4 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2 \times 10} \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} v_1 = 40\text{ m/s} \\ v_2 = 60\text{ m/s} \\ h_4 = 180\text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{H = 200 + 180 = 380\text{ m}}$$

2) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow 300 = 40 t_2 + \frac{1}{2} 10 t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5\text{ s} \qquad \boxed{\text{Luego llega al suelo a las } 10^{\text{h}}\ 5^{\text{s}}}$$

3) $$\boxed{v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 380} = 87\text{ m/s}}$$

Problema III-58. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal, al chocar con el fondo, se oye 2 s después de ser soltada. (Velocidad del sonido: 340 m/s; $g = 9{,}8$ m/s^2).

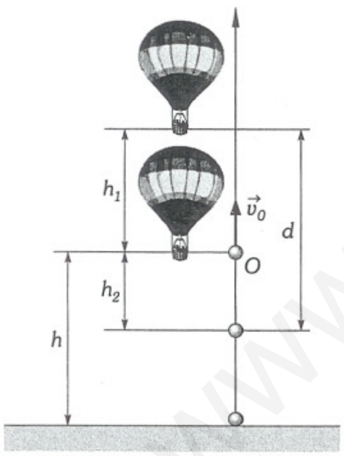
Solución

t_1: tiempo de bajada de la piedra. t_2: tiempo de subida del sonido. h: profundidad del pozo.

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 4{,}9 t_1^2 \\ h = v t_2 = 340 t_2 \\ t_1 + t_2 = 2\text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{h = 18{,}5\text{ m}}$$

Problema III-59. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de 3 m/s; si llega al suelo a los 3 s, tomando $g = 10$ m/s^2, calcular:

1. Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
2. Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.



Problema III-59.

Solución

Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen dirección hacia arriba.

1) $$\left.\begin{array}{l} v_0 = 3\text{ m/s} \\ g = -10\text{ m/s}^2 \\ t = 3\text{ s} \end{array}\right| \quad \boxed{h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 3 \times 3 - \frac{1}{2} 10 \times 9 = -36\text{ m}}$$

2) $t' = 2$ s. h_1: distancia del globo al origen en t'. h_2: distancia de la piedra al origen en t'.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = v_0 t' = 3 \times 2 = 6\text{ m} \\ h_2 = v_0 t' + \dfrac{1}{2} g t'^2 = 3 \times 2 - \dfrac{1}{2} 10 \times 4 = -14\text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{d = 6 + 14 = 20\text{ m}}$$

Problema III-60. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo hacia arriba, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 30 m/s. ¿Qué intervalo de tiempo tiene que haber entre los dos lanzamientos para que los dos lleguen a la vez al suelo? (Tomar $g = 10$ m/s^2).

Solución

El tiempo que tarda el primero en llegar al suelo se calcula:

$$h = 0 = v_{01} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow 50 t_1 - 5 t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 10\text{ s}$$

El tiempo real del segundo será:

$$h = 0 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow 30 t_2 - 5 t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = 6\text{ s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = t_1 - t_2 = 4\text{ s}}$$

Problema III-61. Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de

80 m/s. ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura? ¿A qué altura sucederá? ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento? ($g = 9{,}8$ m/s²).

Solución

$$\left.\begin{array}{l} h = 50t - 4{,}9t^2 = 80\,(t-2) - 4{,}9\,(t-2)^2 \quad \Rightarrow \\ 50t = 4{,}9t^2 = 80t - 160 - 4{,}9t^2 - 4{,}9\times 4 + 2\times 4{,}9\times 2t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{t \simeq 3{,}62\ \text{s}}$$

$$\boxed{h \simeq 50\times 3{,}62 - 4{,}9\times 3{,}62^2 = 116{,}8\ \text{m}}$$

$$\boxed{v_1 \simeq 50 - 9{,}8\times 3{,}62 = 14{,}5\ \text{m/s}} \qquad \boxed{v_2 \simeq 80 - 9{,}8\times 1{,}62 = 64{,}1\ \text{m/s}}$$

Problema III-62. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s². Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor. ($g = 9{,}8$ m/s²).

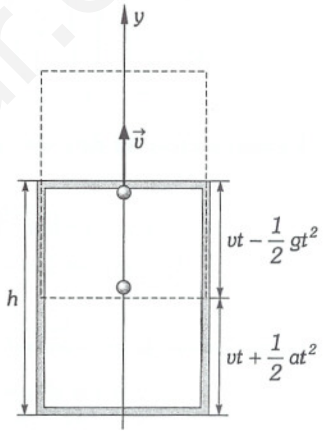
Solución

1^er^ MÉTODO:

En el instante en que empieza a caer el cuerpo al ascensor lleva una velocidad vertical y hacia arriba v.

El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es: $h - (vt + at^2/2)$ (h = altura del ascensor) y $(vt + at^2/2)$ ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación: $y = vt + at^2/2$, siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{9{,}8+1}}\ \text{s} = 0{,}74\ \text{s}}$$



Problema III-62.

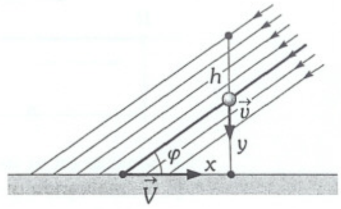
2° MÉTODO:

La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:

$$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}8\ \text{m/s}^2$$

$$h = \frac{1}{2}a_{BA}t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2\times 3}{10{,}8}} = 0{,}74\ \text{s}}$$

Problema III-63. A una cierta hora del día los rayos solares inciden sobre un lugar con un ángulo φ con la horizontal; dejamos caer libremente un cuerpo desde una altura h sobre un terreno horizontal. Calcular la velocidad de la sombra cuando el cuerpo se encuentra a una altura y del suelo.



Problema III-63.

Solución

Al ser: $$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}v$$

por otro lado, la velocidad del cuerpo cuando ha recorrido un espacio $h - y$ es:

$$v = \sqrt{2g\,(h-y)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\sqrt{2g\,(h-y)}}{\operatorname{tg}\varphi}}$$

Problema III-64. Si la resistencia que opone el aire en reposo produce una deceleración $a = -kv$ (se opone al movimiento en su seno), y suponiendo que g es constante, calcular:

1. La posición en función del tiempo en el ascenso de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0.
2. La altura máxima alcanzada por el objeto.

Solución

1) Trabajando en el eje OY, tomando su dirección positiva hacia arriba; el valor de la aceleración del movimiento rectilíneo que posee el proyectil, será:

$$a = -g - kv = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{g+kv} \quad \Rightarrow \quad -t = \frac{1}{k}\ln\frac{g+kv}{g+kv_0} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{k}\left[(g+kv_0)\,e^{-kt} - g\right] = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{1}{k}\left[(g+kv_0)\,e^{-kt} - g\right]dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{k^2}\left[(g+kv_0)(1-e^{-kt}) - gkt\right]}$$

2) En la cúspide: $\quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad (g + kv_0)\, e^{-kt} = g \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{1}{k} \ln \dfrac{g + kv_0}{g}$

sustituyendo en $y(t)$ y operando: $\quad \boxed{h = \dfrac{1}{k^2}\left(v_0 k - g \ln \dfrac{g + kv_0}{g}\right)}$

D) OSCILACIONES

FORMULARIO

Movimiento vibratorio armónico simple (MAS) en trayectoria recta:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) \\ v &= \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \\ a &= \dot{v} = \ddot{x} = -A\omega^2 \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{aligned}\right| \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Composición de dos MAS de la misma dirección y frecuencia:

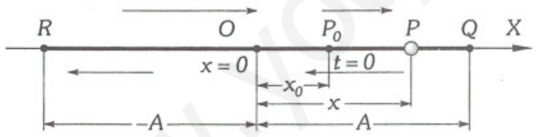
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right| \qquad x = x_1 + x_2 = A \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) \qquad \left|\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \text{tg}\,\varphi &= \frac{A_1 \,\text{sen}\,\varphi_1 + A_2 \,\text{sen}\,\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \end{aligned}\right.$$

Si los dos MAS se encuentran en CUADRATURA $[\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ ó $(2K + 1)\,\pi/2,\ (K \in Z)]$:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \qquad \varphi = \varphi_1 + \Phi \qquad \text{tg}\,\Phi = \frac{A_1}{A_2}$$

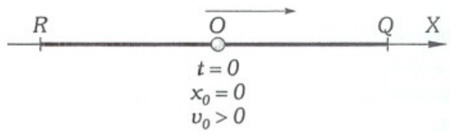
$$x(t) = A \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$
$$t = 0 \ \Rightarrow \ x_0 = A \,\text{sen}\,\varphi$$

Si en $t = 0$, $x = 0$ y $v > 0 \ \Rightarrow \ x = A \,\text{sen}\,\omega t \quad \left| \begin{aligned} x_0 &= 0 \\ \varphi &= 0 \end{aligned}\right.$

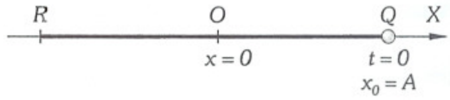


La partícula en su MAS pasa de $P_0 \to Q \to O \to R \to O \to P_0 \ldots$ realizando un movimiento de «vaivén»; en este caso $0 < \varphi < \pi/2$.

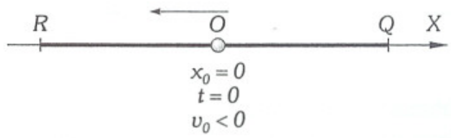
$\varphi = 0 \ \Rightarrow \ x = A \,\text{sen}\,\omega t = A \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$



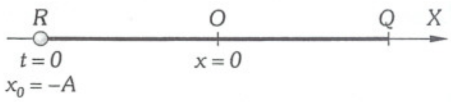
$\varphi = \dfrac{\pi}{2} \qquad x = A \,\text{sen}\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = A \cos\omega t$



$\varphi = \pi \qquad x = A \,\text{sen}\,(\omega t + \pi) = -A \,\text{sen}\,\omega t$



$\varphi = \dfrac{3\pi}{2} \qquad x = A \,\text{sen}\left(\omega t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -A \cos\omega t$



Diversos valores de la fase para distintas posiciones iniciales de la partícula en su MAS.

Composición de n MAS de la misma dirección y frecuencia:

$$x = \sum_i x_i = A \,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) \qquad \left|\begin{aligned} A^2 &= \sum_i \sum_j A_i A_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \\ \text{tg}\,\varphi &= \frac{\sum_i A_i \,\text{sen}\,\varphi_i}{\sum_i A_i \cos\varphi_i} \end{aligned}\right.$$

Composición de MAS de la misma dirección y diferente frecuencia:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \,\text{sen}\,(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \,\text{sen}\,(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}\right| \qquad x = A_1 \,\text{sen}\,(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \,\text{sen}\,(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Si: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{n_1}{n_2}$ (con n_1 y n_2 números primos entre sí) $\Rightarrow$

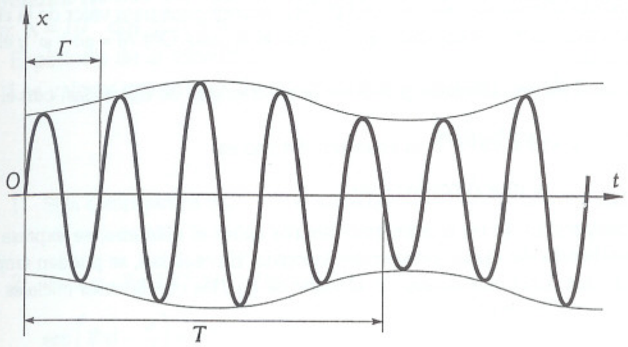
$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

Composición de MAS de la misma dirección y pequeña diferencia de frecuencia. Modulación de amplitud. Pulsaciones:

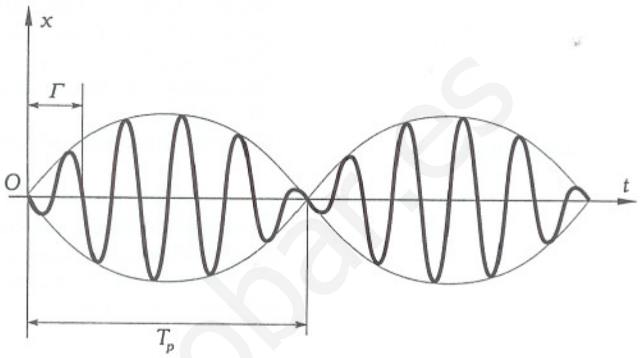
$$|\omega_1 - \omega_2| << |\omega_1 + \omega_2| \qquad A(t) = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)\,t}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \qquad \nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

$A(t)$: función de modulación. ν: frecuencia del movimiento oscilatorio resultante $[x(t) = x_1 + x_2]$



Superposición de dos MAS de frecuencias parecidas. Las líneas envolventes corresponden a la función de modulación.



Pulsaciones o batidos.

PULSACIONES O BATIDOS: $\quad A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 2A_1\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \;\text{sen}\;\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$

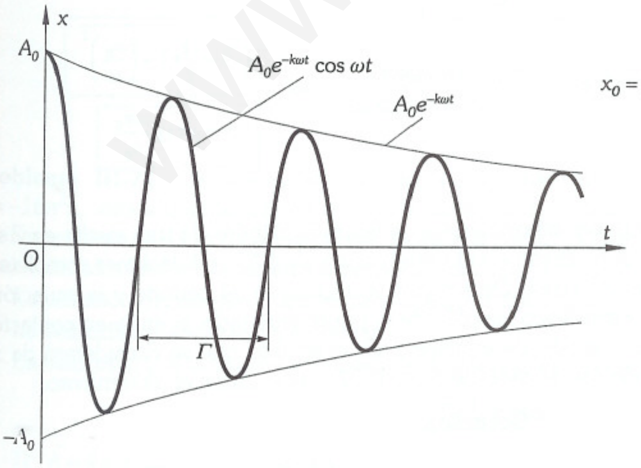
Frecuencia del oscilador: $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 1/\Gamma$ (Γ: tiempo que la partícula tarda en dar una cualquiera de sus oscilaciones).

$$A(t) = 2A_1\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{t}t \quad \Rightarrow \quad T_p = \frac{1}{\nu_p} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}$$

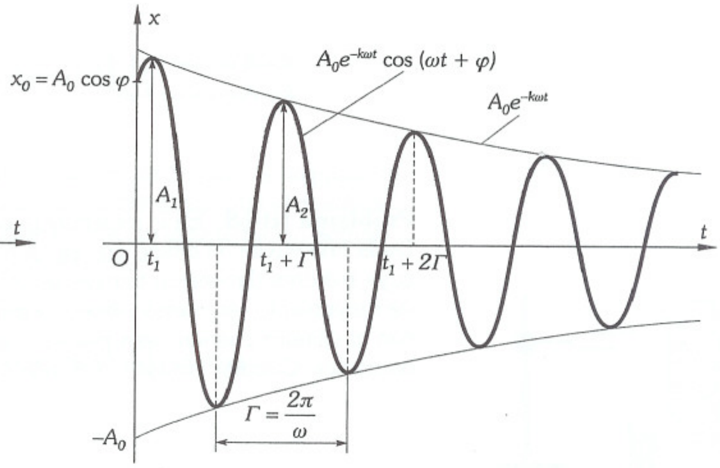
Movimiento vibratorio amortiguado:

$$x = A_0e^{-k\omega t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad A = A_0e^{-k\omega t} \qquad \Gamma = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$A_1 = A_0e^{-k\omega t} \qquad A_2 = A_0e^{-k\omega(t+\Gamma)} \qquad \delta = 2\pi k = \ln\frac{A_1}{A_2}$$



El movimiento vibratorio amorgiguado como función del tiempo cuando $\varphi = 0$. Las curvas envolventes son $A = A(t)$.

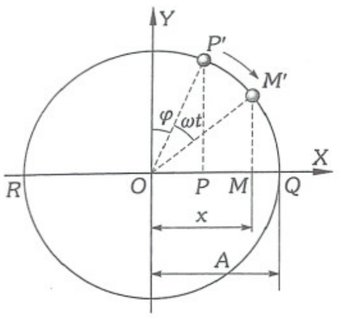


El movimiento amortiguado como función del tiempo cuando $\varphi \neq 0$. Obsérvese la disminución continua de su amplitud.

El movimiento vibratorio amortiguado NO ES PERIÓDICO, lo que ocurre es que a intervalos de tiempo iguales (Γ) se hace $x = 0$, pero en ese tiempo la amplitud de este movimiento decrede en e^{δ}.

Problema III-65. Demostrar que un movimiento vibratorio armónico de trayectoria recta, coincide con el movimiento de la proyección sobre un diámetro, de una partícula que gira uniformemente alrededor de una circunferencia*.

Solución



Problema III-65.

Supongamos una partícula saliendo del punto P' representado en la figura, girando sobre la circunferencia en el sentido de la flecha. La proyección de P' sobre el diámetro QR es P. Cuando la partícula pasa de P' a M', su proyección pasa de P a M; cuando llega a Q, su proyección llega también a Q, etc. Al dar la partícula una vuelta completa, su proyección describe un vaivén sobre el diámetro, es decir, una vibración completa (de P a Q, volver hasta O; llegar a R, y retornar a P).

Si ω (frecuencia angular, constante de este movimiento armónico que coincide con la velocidad angular del punto imaginario) *es la velocidad angular del movimiento circular*, en ángulo $P'OM'$ descrito en un tiempo t, será igual a ωt. Considerando el triángulo rectángulo $OM'M$, obtendremos para valor de la elongación: $OM = OM'$ sen $OM'M$, es decir: $x(t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$, ya que el ángulo $OM'M = \omega t + \varphi$ y el radio se identifica con la amplitud del MAS.

La corrección de fase (φ) representa el ángulo formado por el radio en el origen de distancias, con el eje OY ($P'OY$).

Si en vez de proyectar M sobre X, lo hacemos sobre Y, la ecuación del MAS es:

$$y(t) = A \cos (\omega t + \varphi)$$

La elongación de un MAS, como proyección de un movimiento circular sobre el diámetro, se expresa en función del seno o el coseno, dependiendo del eje de proyección escogido. En realidad, se pueden emplear indistintamente cualquiera de las dos funciones ajustando el valor de φ a las condiciones iniciales del problema que se trate.

Problema III-66. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de 1 m de radio, dando 30 rpm. Expresar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resultaría al proyectar sobre un diámetro las posiciones del punto material en los dos casos siguientes:

1. Se comienza a contar el tiempo cuando la proyección del punto móvil es el centro de la circunferencia y el movimiento va en el sentido de las agujas de un reloj.

2. En el caso de comenzar a contar el tiempo cuando el radio ha girado desde la posición anterior un ángulo de $57{,}328°$.

Solución

1) $x = A \text{ sen } \omega t \qquad \left| \begin{array}{l} A = 100 \text{ cm} \\ \omega = 2\pi\nu = \pi \text{ rad/s} \end{array} \right| \qquad \boxed{x = 100 \text{ sen } \pi t}$ CGS

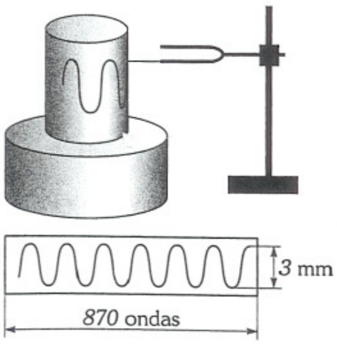
2) $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) \qquad \left| \begin{array}{r} 180° \ldots\ldots \pi \\ 57{,}328° \ldots\ldots \varphi \end{array} \right| \qquad \varphi = \dfrac{57{,}328 \times 3{,}14}{180} = 1 \text{ rad} \qquad \boxed{x = 100 \text{ sen } (\pi t + 1)}$

Problema III-67. Un MAS viene dado por la ecuación $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ siendo las condiciones iniciales (para $t = 0$) $x = x_0$ y $v = v_0$; determinar las constantes A y φ para una determinada pulsación ω.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = A\omega \cos (\omega t + \varphi) \end{array} \right| \quad \wedge \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = A \text{ sen } \varphi \\ v_0 = A\omega \cos \varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}} \\ \boxed{\varphi = \text{arctg } \dfrac{\omega x_0}{v_0}} \end{array} \right.$$

Problema III-68. En la experiencia correspondiente a la figura el cilindro da una vuelta en 2 s. Dada una vuelta, el dibujo que se ha realizado en el papel consta de 870 ondulaciones completas cuya máxima dimensión transversal es 3 mm. Determinar la frecuencia, el período y la ecuación de movimiento –supuesto vibratorio armónico simple– de la punta entintada, si entra en contacto con el cilindro cuando pasa por su posición de equilibrio, en el sentido que se considerará de x crecientes. Calcular también la elongación al cabo de $0{,}1$ y $0{,}01$ s de iniciado el movimiento.



Problema III-68.

Solución

870 vibraciones corresponden a 2 s, luego la frecuencia será: $\boxed{\nu = \dfrac{870}{2} = 435 \text{ Hz}}$

El período será: $\boxed{T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{435} \text{ s}}$ La pulsación será: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 870\pi$ rad/s

* Ver movimiento circular y uniforme en el capítulo V.

La amplitud de la vibración es: $A = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15$ cm

La ecuación del movimiento es: $\boxed{x = 0{,}15 \text{ sen } 870\pi t}$ CGS

Para $t = 0{,}1$ s: $\boxed{x_1 = 0{,}15 \text{ sen } 870\pi\, 0{,}1 = 0{,}15 \text{ sen } \pi = 0}$

Para $t = 0{,}01$ s: $\boxed{x_2 = 0{,}15 \text{ sen } 870\,\pi\, 0{,}01 = 0{,}15 \text{ sen } 0{,}7\pi = 0{,}12 \text{ cm}}$

Problema III-69. La ecuación del movimiento de una partícula viene dada en el SI por la expresión: $x = 10^{-2} \cos(2\pi t + \pi/4)$. Calcular:

1. El período de la vibración.
2. Los valores extremales de la velocidad y aceleración de la partícula.

Solución

1) Si la comparamos con: $x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \text{ rad/s} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 1 \text{ s}}$

2) $$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \dot{x} = -2\pi\, 10^{-2} \text{ sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \end{array}\right| \quad \boxed{\upsilon_M = \pm 2\pi\, 10^{-2} \text{ m/s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -4\pi^2\, 10^{-2} \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2 x \\ x = \pm A \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_M = \mp 4\pi^2\, 10^{-2} \text{ m/s}^2}$$

Problema III-70. Un punto material oscila con movimiento vibratorio armónico simple de amplitud 2 cm y frecuencia 10 Hz. Calcular su velocidad y aceleración extremas y la velocidad y aceleración en el tiempo $t = 1/120$ s. Suponer la fase inicial nula.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} A = 2 \text{ cm} \\ \omega = 2\pi\nu = 20\pi \text{ s}^{-1} \\ \varphi = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x = 2 \text{ sen } 20\pi t \\ \upsilon = 40\pi \cos 20\pi t = 20\pi\sqrt{4 - x^2} \\ a = -800\pi^2 \text{ sen } 20\pi t = -400\pi^2 x \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Para} & \cos 20\pi t = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_{\text{máx}} = \pm 40\pi \text{ cm/s}} \\ \text{Para} & \text{sen } 20\pi t = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{\text{máx}} = \mp 800\pi^2 \text{ cm/s}^2} \end{array}$$

$$t = \frac{1}{120} \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{\upsilon = 40\pi \cos\frac{20\pi}{120} = 40\pi\cos\frac{\pi}{6} = 20\pi\sqrt{3} \text{ cm/s}} \\ \boxed{a = -800\pi^2 \text{ sen}\frac{\pi}{6} = -400\pi^2 \text{ cm/s}^2} \end{array}\right.$$

Problema III-71. La aceleración de un movimiento queda determinada por la expresión: $a = -16\pi^2 x$, estando a medida en cm/s^2 y x (distancia al origen) en cm. Sabiendo que el desplazamiento máximo es 4 cm y que se ha comenzado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo, en los desplazamientos positivos, determinar:

1. La ecuación del desplazamiento para cualquier instante.
2. La velocidad y aceleración extremas.
3. La velocidad y la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.

Solución

1) $$\left.\begin{array}{l} A = 4 \text{ cm} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x = 4\cos 4\pi t \\ \upsilon = -16\pi \text{ sen } 4\pi t = -4\pi\sqrt{16 - x^2} \\ a = -64\pi^2 \cos 4\pi t = -16\pi^2 x \end{array}$$

2) Los extremos serán: $$\left|\begin{array}{lll} \text{Si} & \text{sen } 4\pi t = \pm 1 & \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_{\text{máx}} = \mp 16\pi \text{ cm/s}} \\ \text{Si} & \cos 4\pi t = \pm 1 & \Rightarrow \quad \boxed{a_{\text{máx}} = \mp 64\pi^2 \text{ cm/s}^2} \end{array}\right.$$

3) $x = \frac{A}{2} = 2$ cm $\quad \boxed{v = -4\pi\sqrt{16-4} = -8\pi\sqrt{3}\ \text{cm/s}}$ $\quad \boxed{a = -16\pi^2 2 = -32\pi^2\ \text{cm/s}^2}$

Problema III-72. Para un MAS de la partícula, su velocidad es *3* cm/s cuando su elongación es *2,4* cm y *2* cm/s cuando su elongación es *2,8* cm. Determinar la amplitud y su frecuencia angular.

Solución

Sea el movimiento de ecuación: $\quad x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$

$$v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

sustituyendo los valores dados en esta última ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 9 = \omega^2 (A^2 - 5{,}76) \\ 4 = \omega^2 (A^2 - 7{,}84) \end{array}\right| \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{A^2 - 5{,}76}{A^2 - 7{,}84} \Rightarrow \boxed{A = 3{,}1\ \text{m}} \quad \boxed{\omega = \frac{3}{\sqrt{3{,}1^2 - 5{,}76}} = 1{,}53\ \text{rad/s}}$$

Problema III-73. Las aceleraciones extremas de un MAS para una partícula son: ± 158 cm/s^2, la frecuencia de las vibraciones es *4* Hz y la elongación cuando $t = 0{,}125$ s es $x = 0{,}125$ cm y $v < 0$. Escribir la ecuación del MAS de la partícula.

Solución

Tomamos como ecuación: $x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$, y como la aceleración es extremal para $x = \pm A$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_M = \omega^2 A = 158\ \text{cm/s}^2 \\ \omega = 2\pi\nu = 8\pi\ \text{rad/s} \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{a_M}{\omega^2} = \frac{158}{64\pi^2} = 0{,}250\ \text{cm}$$

$$t = 0{,}125\ \text{s} \Rightarrow 0{,}125 = 0{,}250\,\text{sen}\,(\pi + \varphi) \Rightarrow \text{sen}\,(\pi + \varphi) = \frac{1}{2} \left\{\begin{array}{l} \pi + \varphi = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} \Rightarrow \varphi = -\frac{5\pi}{6}\ \text{rad} \\ \pi + \varphi = \frac{5\pi}{6}\ \text{rad} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}\ \text{rad} \end{array}\right.$$

como en cualquier instante: $\quad \left|\begin{array}{l} x = 0{,}250\,\text{sen}\,(8\pi t + \varphi) \\ v = 2\pi\cos(8\pi t + \varphi) \end{array}\right|$

si $t = 0{,}125$ s y: $\quad \left|\begin{array}{l} \varphi = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow v = 2\pi\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) > 0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow v = 2\pi\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) < 0 \end{array}\right.$

luego la solución válida es $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad, luego: $\quad \boxed{x(t) = 0{,}250\,\text{sen}\left(8\pi t - \frac{\pi}{6}\right)}$ CGS

Problema III-74. Una partícula que se mueve con un movimiento vibratorio armónico simple, tiene un desplazamiento inicial $x_0 = 1{,}5$ cm, una velocidad inicial dirigida en el sentido positivo del eje X de $v_0 = 3\pi\sqrt{3}$ cm/s y su período es *1* s. Determinar las ecuaciones horarias del MAS.

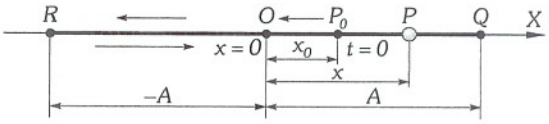
Solución

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi) = A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \\ v(t) = \dot{x} = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \end{array}\right| \wedge \quad t = 0 \quad \left|\begin{array}{l} x_0 = A\,\text{sen}\,\varphi \\ v_0 = \frac{2\pi}{T}A\cos\varphi \end{array}\right| \quad \text{tg}\,\varphi = \frac{2\pi x_0}{v_0 T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \varphi = \text{artg}\,\frac{2\pi x_0}{v_0 T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} \\ A = \frac{x_0}{\text{sen}\,\varphi} = 3\ \text{cm} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x = 3\,\text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)} \\ \boxed{v = 6\pi\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)} \\ \boxed{a = -12\pi^2\,\text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)} \end{array} \quad \text{CGS}$$

Problema III-75. Una partícula vibra con un MAS obedeciendo a la ecuación horaria dada en el SI: $x(t) = 10^{-2}\cos(8\pi t + \pi/6)$.

1. Hacer la representación gráfica $x = x(t)$.
2. Determinar el tiempo que tarda la partícula en pasar por tercera vez por la posición de equilibrio.
3. Calcular el espacio recorrido por la partícula en ese tiempo.



Problema III-75-1ª.

Solución

1) $A = 10^{-2}\text{ m} = 1\text{ cm} \quad \wedge \quad \omega = 8\pi \text{ rad/s} = \dfrac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{4}\text{ s} \quad \wedge$

$$\wedge \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 10^{-2}\cos\frac{\pi}{6} = 8{,}66 \cdot 10^{-3}\text{ m} = 0{,}866\text{ cm}$$

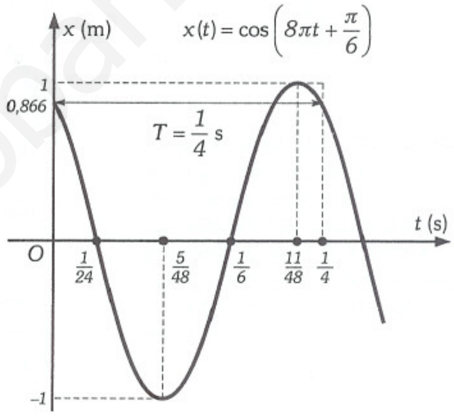
$$v(t) = \dot{x} = -8\pi 10^{-2}\,\text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \quad \wedge \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -8\pi 10^{-2}\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = -4\pi 10^{-2}\text{ m} < 0$$

La partícula al pasar por P_0 $(t = 0)$ se dirige hacia la izquierda, es decir: va de P_0 a O en la Fig. 1ª.

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{24}\text{ s}$$

El intervalo de tiempo que tarda en ir de O a R es $T/4 = 1/16$ s y es el mismo que de R a O, de O a Q, ... Luego (Fig. 2ª):

t (s)	0	↗	$\frac{1}{24}$	↗	$\frac{5}{48}$	↗	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{11}{48}$	↗	$\frac{1}{4}$	...
x (cm)	0,866	↘	0	↘	–1	↗	0	↗	1	↘	0,866	...
	P_0	→	O	→	R	→	O	→	Q	→	P_0	...



Problema III-75-2ª.

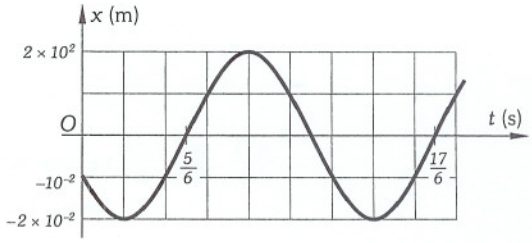
2) El tiempo es: $\boxed{t = \dfrac{1}{24} + T = \dfrac{7}{24}\text{ s}}$

3) El espacio recorrido en ese tiempo por la partícula será:

$$\boxed{s = 0{,}866 + 4A = 4{,}866\text{ cm}}$$

Problema III-76. La gráfica de la figura nos representa la posición en función del tiempo de una partícula que oscila en torno al origen. Determinar:

1. Sus ecuaciones horarias $x = x(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$ y representar las dos últimas.
2. El espacio recorrido por la partícula en el primero, segundo y tercer segundo a partir de $t = 0$.

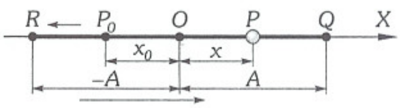


Problema III-76.

Solución

1) Tomamos como ecuación: $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$. La gráfica de la figura dada nos indica que para $t = 0$, la partícula se encuentra a la izquierda del punto de equilibrio O (Fig. 1ª), alejándose de él y que la fase inicial cumple: $\pi < \varphi < 3\pi/2$. Además $A = 2 \times 10^{-2}$ m, $T = 17/6 - 5/6 = 2$ s $\Rightarrow \omega = 2\pi/T = \pi$ rad/s, y que:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -10^{-2}\text{ m} \;\Rightarrow\; -10^{-2} = 2 \times 10^{-2}\,\text{sen}\,\varphi \;\Rightarrow\; \text{sen}\,\varphi = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

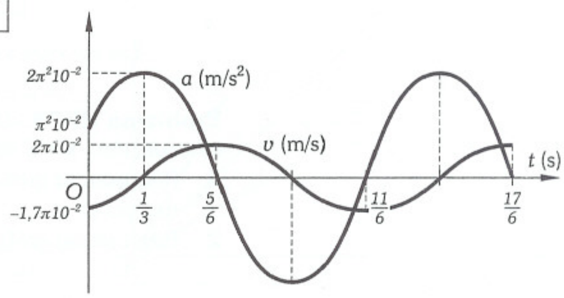


Problema III-76-1ª.

luego las ecuaciones horarias del MAS escritas en el SI: $\boxed{x(t) = 2 \times 10^{-2}\,\text{sen}\left(\pi t + \dfrac{7\pi}{6}\right)}$

$$\boxed{v(t) = \dot{x} = 2\pi 10^{-2}\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)} \qquad \boxed{a(t) = \dot{v} = -2\pi^2 10^{-2}\,\text{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = -\pi^2 x}$$

$t = 0 \Rightarrow a = \pi^2\, 10^{-2}$ m/s^2. $(x = 10^{-2}$ m$)$; $a = 2\pi^2\, 10^{-2}$ m/s^2 (máxima) cuando: $x = -2 \times 10^{-2}$ m y $t = 1/3$ s; $a = 0$ $(x = 0)$ cuando $t = 5/6$... Las gráficas son las de la Fig. 2ª.



Problema III-76-2ª.

2) $t = 1\text{ s} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \times 10^{-2}\,\text{sen}\dfrac{13\pi}{6} = 10^{-2}\text{ m} = 1\text{ cm}$

La partícula ha ido al extremo izquierdo, ha pasado por el origen y se encuentra a 1 cm de él; luego la distancia recorrida es:

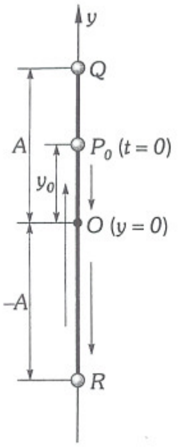
$$\boxed{s_1 = 1 + 2 + 1 = 4\text{ cm}}$$

Para $t = 2$ s (un período) la partícula habrá recorrido: $\boxed{s_2 = 4A = 8 \text{ cm}}$

En $t = 3 \text{ s} = T + 1$ habrá recorrido: $\boxed{s_3 = 4A + s_1 = 12 \text{ cm}}$

Problema III-77. Una partícula, suspendida de un muelle vertical, realiza un movimiento vibratorio armónico con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de $0{,}5$ Hz. se empieza a contar tiempo en el instante en que la partícula está 5 cm por encima de su posición de equilibrio y bajando.

1. Obtener su ecuación de movimiento.
2. ¿En qué instantes alcanza la máxima elongación negativa?
3. ¿En qué instantes pasa por la posición inicial?



Problema III-77.– La partícula oscila en torno a su posición de equilibrio (O) con un MAS; elegido en O el origen para el análisis del movimiento, no será necesario tener en cuenta g (aceleración de la gravedad), como se demuestra en el párrafo VI-8 del libro de teoría (Física General) de los mismos autores.

Solución

1) Tomado el eje OY en la dirección del movimiento y sentido hacia arriba, la ecuación buscada es:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{con:} \quad A = 10 \text{ cm:} \quad \nu = 0{,}5 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi 0{,}5 = \pi \text{ rad/s}$$

A falta de la fase inicial la ecuación es: $y = 10 \operatorname{sen}(\pi t + \varphi)$ CGS

Condiciones iniciales: $t = 0, \quad y = +5 \text{ cm}, \quad v < 0$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \text{ s} \\ y = +5 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow 5 = 10 \operatorname{sen}(0 + \varphi) \Rightarrow \varphi = \operatorname{arcsen} 0{,}5 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{array}\right.$$

La velocidad es: $$v = \dot{y} = 10\pi \cos(\pi t + \varphi) \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} & \Rightarrow & v_0 = 10\pi \cos \dfrac{\pi}{6} > 0 \\ \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6} & \Rightarrow & v_0 = 10\pi \cos \dfrac{5\pi}{6} < 0 \end{array}\right.$$

Por tanto el valor de la fase inicial que corresponde a la velocidad inicial negativa es $5\pi/6$, y la ecuación buscada resulta:

$$\boxed{y = 10 \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)}$$

2) Elongación máxima negativa: $y = -A = -10$ cm

$$-10 = 10 \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \pi t + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$t = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + 2n \Rightarrow \boxed{t = \frac{2}{3} + 2n \text{ s}}$$

es decir, la primera vez a los $2/3$ segundos y después cada 2 segundos, que es el valor del período.

3) Pasa por la posición inicial cuando $y = +5$ cm.

$$+5 = 10 \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} \pi t_1 + \dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{arcsen} 0{,}5 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n & \Rightarrow & t_1 = -\dfrac{2}{3} + 2n \text{ s} \\ \pi t_2 + \dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{arcsen} 0{,}5 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n & \Rightarrow & t_2 = 2n \text{ s} \end{array}\right.$$

La solución t_1 para $n = 0$ da un tiempo negativo, sin interés por corresponder a un paso por la posición inicial antes de que empecemos a observar el movimiento. Por consiguiente, los instantes en que pasa por esa posición son:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t_1 = -\dfrac{2}{3} + 2n & n = 1, 2, \ldots \\ t_2 = 2n & n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad t_1 = \dfrac{4}{3}, \ \dfrac{4}{3} + 2, \ \dfrac{4}{3} + 4, \ \ldots \text{ s} \\ \Rightarrow \quad t_2 = 0, 2, 4, \ldots \text{ s} \end{array}$$

Las soluciones t_2 son de velocidad negativa (bajando) y las t_1 de velocidad positiva subiendo).

Problema III-78. Una partícula realiza un movimiento vibratorio armónico en el eje OX, siendo su ecuación: $x = 2 \cos(2t - \pi/3)$ escrita en el SI.

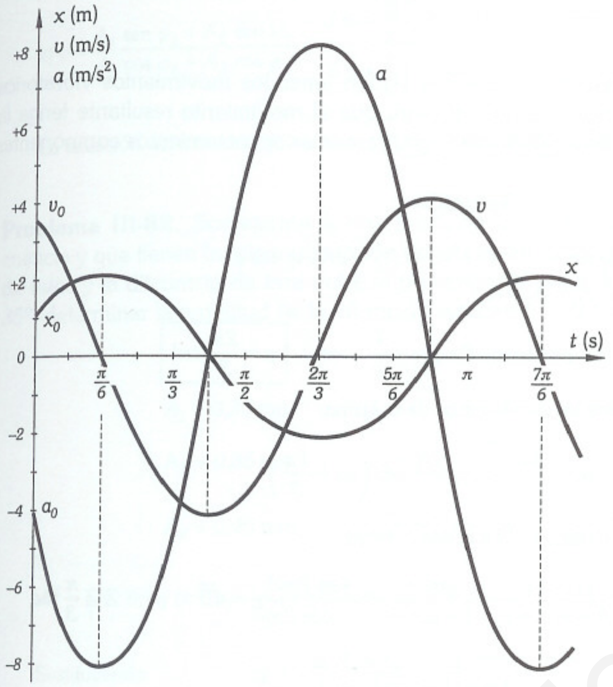
1. Representar gráficamente el desplazamiento x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo t.
2. Representar gráficamente la velocidad y la aceleración en función del desplazamiento.

Solución

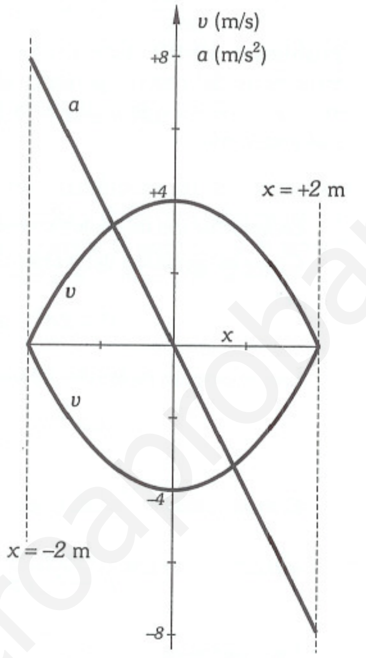
1) Las expresiones que hay que representar son:

$$x = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} v = \dfrac{dx}{dt} = -4\,\text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) \\[2ex] a = \dfrac{dv}{dt} = -8\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

cuyos valores iniciales son: $x_0 = 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = +1\ \text{m}$; $\quad v_0 = +2\sqrt{3}\ \text{m/s}$; $\quad a_0 = -4\ \text{m/s}^2$



Problema III-78-1ª.



Problema III-78-2ª.

Son funciones periódicas de período: $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi\ \text{s}$

La función coseno toma los valores 0 y ± 1 en los instantes siguientes:

$$\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t - \frac{\pi}{3} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{con:} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad t = (2n+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \ldots$$

$$\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2t - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad t = n\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots$$

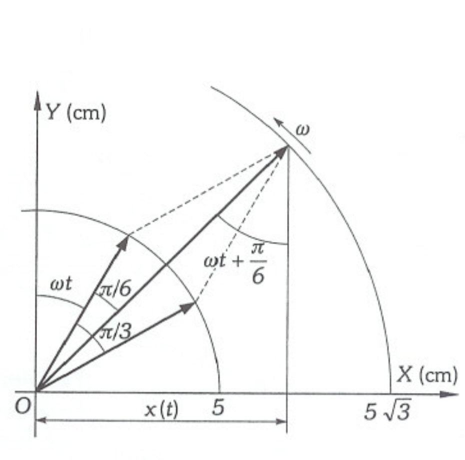
$$\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad 2t - \frac{\pi}{3} = (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \quad t = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \ldots$$

Un cálculo análogo para la función seno proporciona los valores necesarios para construir la gráfica de la figura 1ª.

2) $v = -4\,\text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) = -4\sqrt{1 - \cos^2\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = -2\sqrt{4 - x^2}}$

$a = -8\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -4x}$

cuyas representaciones gráficas son las de la figura 2ª. La doble rama de la velocidad corresponde matemáticamente al doble signo de la raíz cuadrada, y físicamente a que la partícula pasa por cada posición en los dos sentidos, con velocidad positiva en uno y negativa en el otro.



Problema III-79.– Construcción de Fresnel.

Problema III-79. Determinar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resulta de estar sometida una partícula a las vibraciones: $x_1 = 5\,\text{sen}\,2\pi t$ y $x_2 = 5\,\text{sen}\,(2\pi t + \pi/3)$ estando éstas escritas en el sistema CGS. Construir el diagrama vectorial (Fresnel) de la composición de amplitudes.

Solución

$$x = x_1 + x_2 = 5\left[\text{sen } 2\pi t + \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Aplicando: $\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

y simplificando se obtiene: $\boxed{x = 5\sqrt{3} \text{ sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}$ CGS

Problema III-80. Calcular la diferencia de fase que deben tener los movimientos vibratorios armónicos del mismo período, dirección y amplitud, para que el movimiento resultante tenga la misma amplitud que cualquiera de ellos. Representar gráficamente los movimientos componentes y el resultante.

Solución

La amplitud del movimiento resultante es: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi$

Como es condición del problema que $A_1 = A_2 = A$:

$$A^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}}$$

Las ecuaciones de los dos movimientos las escribiremos de la forma:

$$x_1 = A \text{ sen } \omega t \qquad x_2 = A \text{ sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

El movimiento resultante tendrá por ecuación: $x = A \text{ sen } (\omega t + \alpha)$

como: $\text{tg } \alpha = \frac{A_2 \text{ sen } \varphi}{A_1 + A_2 \cos\varphi} = \frac{A \text{ sen } \varphi}{A + A\cos\varphi} = \frac{\text{sen } \varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{\text{sen } 2\pi/3}{1 + \cos 2\pi/3} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

La ecuación es: $x = A \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$

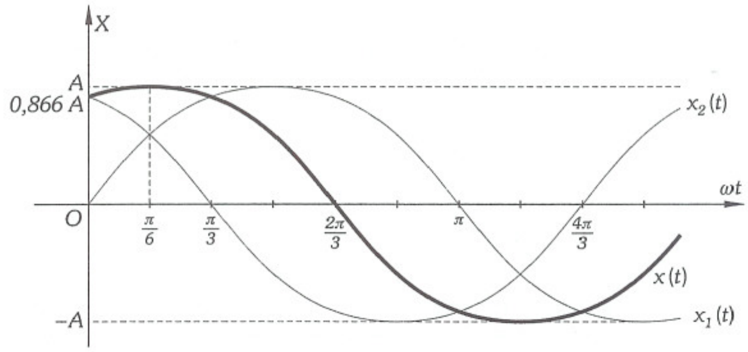
La representación gráfica de $x_1 = f_1(t)$ es una sinusoide que parte del origen.

La representación de $x_2 = f_2(t)$, como: $x_{02} = A \text{ sen } \frac{2\pi}{3} = A\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\, A$

será una sinusoide con ordenada en el origen x_{02}, teniendo en cuenta que para $\omega t = \pi/3$ rad se anula x_2, adquiriendo a partir de ese valor del tiempo, valores negativos:
La ordenada en el origen del movimiento resultante ($t = 0$) es:

$$x_0 = A \text{ sen } \frac{\pi}{3} = A\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\, A$$

idéntica a la anterior. El valor máximo de la elongación se encuentra para $\omega t = \pi/6$ rad, y su anulación para $\omega t = 2\pi/3$ rad.



Problema III-80.

Problema III-81. Determinar la amplitud y la ecuación general del movimiento vibratorio armónico que resulta al estar sometido un punto material a las vibraciones $x_1 = 3 \text{ sen } (8\pi t + \pi/2)$ y $x_2 = 4 \text{ sen } 8\pi t$, estando escritas en el sistema CGS. Construir el diagrama vectorial de la composición de amplitudes.

Solución

Como son dos MAS del mismo período: $8\pi t = \dfrac{2\pi}{T}t \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{4}$ s

tendremos: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 3^2 + 4^2 + 2\times 3\times 4 \cos\dfrac{\pi}{2} = 25\ \text{cm}^2 \quad \Rightarrow$

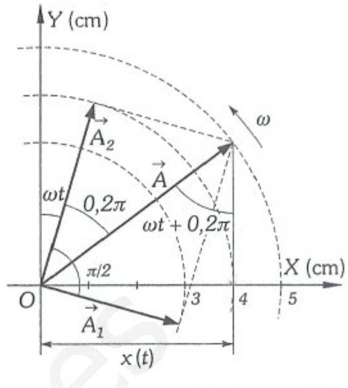
$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \sqrt{25} = 5\ \text{cm}}$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{A_1 \,\text{sen}\,\varphi_1 + A_2\,\text{sen}\,\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = \frac{3\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} + 4\,\text{sen}\,0}{3\cos\dfrac{\pi}{2} + 4\cos 0} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36{,}87° = \frac{36{,}87\,\pi}{180} = 0{,}2\pi\ \text{rad}$$

La ecuación del movimiento será: $\boxed{x = 5\,\text{sen}\,(8\pi t + 0{,}2\pi) = 5\,\text{sen}\,\pi\,(8t + 0{,}2)}$ CGS

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5$ cm

$x(t) = 5\,\text{sen}\,(\omega t + 0{,}2\pi)$



Problema III-81.– Los ángulos están expresados en radianes.

Problema III-82. Sometemos a una partícula a tres movimientos armónicos de la misma frecuencia y que tienen la misma dirección de vibración; siendo 0,30, 0,35 y 0,45 mm las amplitudes de estos y la diferencia de fase entre el primero y el segundo 25°, y entre el segundo y el tercero 35°; determinar la amplitud de la vibración resultante y su fase relativa al primer componente.

Solución

$$A_1 = 0{,}30\ \text{mm} \qquad \varphi_1 = 0 \qquad x_1 = 0{,}30\times 10^{-3}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$A_2 = 0{,}35\ \text{mm} \qquad \varphi_2 = 25° = \frac{5\pi}{36}\ \text{rad} \qquad x_2 = 0{,}35\times 10^{-3}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{5\pi}{36}\right)$$

$$A_3 = 0{,}45\ \text{mm} \qquad \varphi_3 = 60° = \frac{\pi}{3}\ \text{rad} \qquad x_3 = 0{,}45\times 10^{-3}\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A^2 = \sum_i\sum_j A_iA_j\cos(\varphi_i - \varphi_j) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2A_1A_3\cos(\varphi_3 - \varphi_1) + 2A_2A_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2)$$

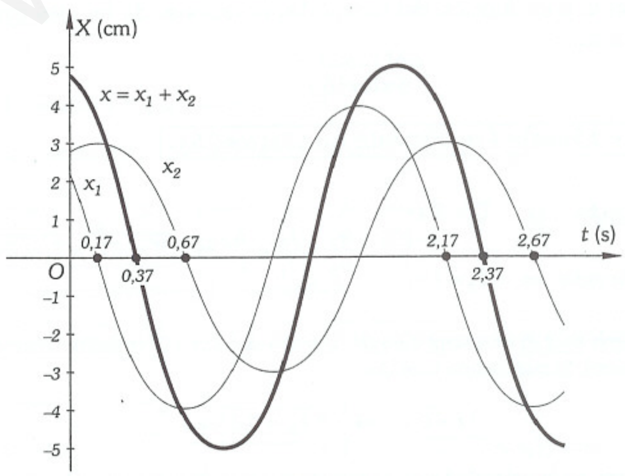
Sustituyendo: $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{\sum A_i\,\text{sen}\,\varphi_i}{\sum A_i\cos\varphi_i} = \dfrac{A_1\,\text{sen}\,\varphi_1 + A_2\,\text{sen}\,\varphi_2 + A_3\,\text{sen}\,\varphi_3}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 + A_3\cos\varphi_3}$

Sustituyendo valores y despejando: $\boxed{A = 1\ \text{mm}}$ $\boxed{\varphi = 0{,}568\ \text{rad}}$

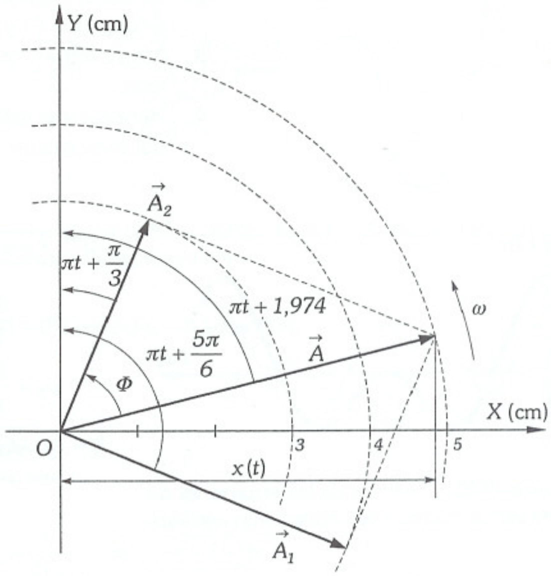
Problema III-83. Una partícula se encuentra sometida a dos MAS de la misma dirección y frecuencia encontrándose en *cuadratura* y teniendo por ecuaciones escritas en el sistema CGS: $x_1(t) = 4\,\text{sen}\,(\pi t + 5\pi/6)$ y $x_2(t) = 3\,\text{sen}\,(\pi t + \pi/3)$. Componer analítica y gráficamente estos dos MAS y representar su diagrama vectorial.

Solución

Se encuentran en cuadratura ya que $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ rad. Analíticamente, el movimiento resultante será de ecuación: $x = A\,\text{sen}\,(\pi t + \varphi)$. La amplitud resultante A y la fase inicial φ, serán:

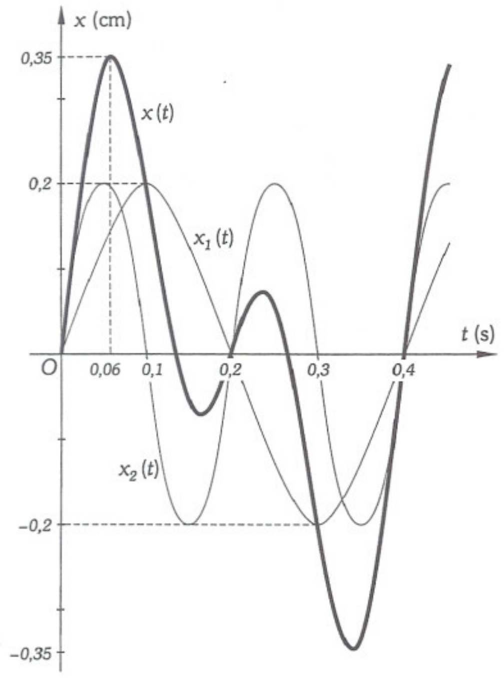


Problema III-83-1ª.



Problema III-83-2ª.

$$\left.\begin{array}{l} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \Phi = \text{arctg}\,\dfrac{A_1}{A_2} \\ \varphi = \varphi_2 + \Phi \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{l} A = 5 \text{ cm} \\ \Phi = 0{,}927 \text{ rad} \\ \varphi = 1{,}974 \text{ rad} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x(t) = 5 \text{ sen}\,(\pi t + 1{,}974)} \quad \text{CGS}$$



Problema III-84.– Gráficas del movimiento resultante y de los MAS componentes.

Problema III-84. Una partícula está sometida a dos MAS que tienen la misma dirección y cuyas ecuaciones escritas en el CGS son: $x_1 = 0{,}2$ sen $5\pi t$ y $x_2 = 0{,}2$ sen $10\pi t$.

1. Hallar la ecuación del movimiento resultante y su período.
2. Determinar el momento en el que la partícula se encuentra por primera vez en su máxima separación al origen ($x = 0$) y, calcular ésta.
3. Representar gráficamente y en función del tiempo los MAS componentes [$x_1(t)$ y $x_2(t)$] y el movimiento resultante [$x = x(t)$].

Solución

1) $\boxed{x = x_1 + x_2 = 0{,}2\,(\text{sen}\,5\pi t + \text{sen}\,10\pi t) = 0{,}4\,\text{sen}\,7{,}5\pi t\,\cos 2{,}5\pi t}$

que es la ecuación de un movimiento no armónico pero sí periódico y cuyo valor se calcula:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = 5\pi \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 0{,}4 \text{ s} \\ \omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2} = 10\pi \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0{,}2 \text{ s} \end{array}\right| \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 2T_2 = T_1 = 0{,}4 \text{ s}}$$

2) La partícula alcanzará su máxima separación al origen ($x = 0$ y $t = 0$), cuando su velocidad sea nula o lo que es lo mismo, cuando la primera derivada respecto del tiempo sea cero ($\dot{x} = 0$):

$$\dot{x} = \pi\,(\cos 5\pi t + 2\cos 10\pi t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 5\pi t + 2\,(\cos^2 5\pi t - \text{sen}^2\,5\pi t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

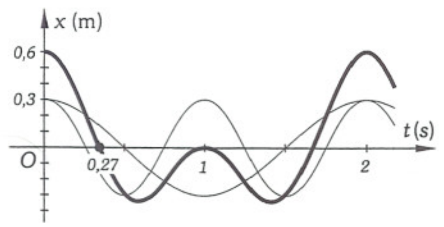
$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 5\pi t + \cos 5\pi t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}06 \text{ s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_M = 0{,}35 \text{ cm}}$$

Se puede comprobar que el período es $0{,}4$ s sustituyendo en $x(t)$ el valor t por $t + 0{,}4$ y $x(t)$ será la misma; en efecto:

$$x\,(t + 0{,}4) = 0{,}2\,[\text{sen}\,5\pi\,(t + 0{,}4) + \text{sen}\,10\pi\,(t + 0{,}4)] =$$
$$= 0{,}2\,[\text{sen}\,(5\pi t + 2\pi) + \text{sen}\,(10\pi t + 4\pi)] = x\,(t)$$

Problema III-85. Una partícula participa simultáneamente de dos MAS de la misma dirección, cuyas ecuaciones escritas en el sistema CGS son: $x_1 = 0{,}3 \cos \pi t$ y $x_2 = 0{,}3 \cos 2\pi t$.

1. Determinar la ecuación del movimiento resultante y su período.
2. Hallar el instante en que la partícula se encuentra por primera vez en su máxima separación al origen ($x = 0$) y calcular ésta.
3. Momento en que toma en valor absoluto y por primera vez su máxima velocidad y calcular ésta.
4. Representar gráficamente y en función del tiempo las ecuaciones de los MAS componentes y del movimiento resultante.



Problema III-85.– Gráficas de las ecuaciones de los MAS componentes y del movimiento resultante.

Solución

1) $\boxed{x = x_1 + x_2 = 0{,}3\,(\cos \pi t + \cos 2\pi t) = 0{,}6\,\cos 1{,}5\pi t\,\cos 0{,}5\pi t}$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = \pi \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2 \text{ s} \\ \omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1 \text{ s} \end{array}\right| \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2T_2 = T_1 = 2 \text{ s}}$$

2) El valor máximo de x lo alcanzará cuando $\cos \pi t + \cos 2\pi t = 2$ (máximo valor que puede tomar esta función), lo cual ocurre cuando:

$$\boxed{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_M = 0{,}6 \text{ cm}}$$

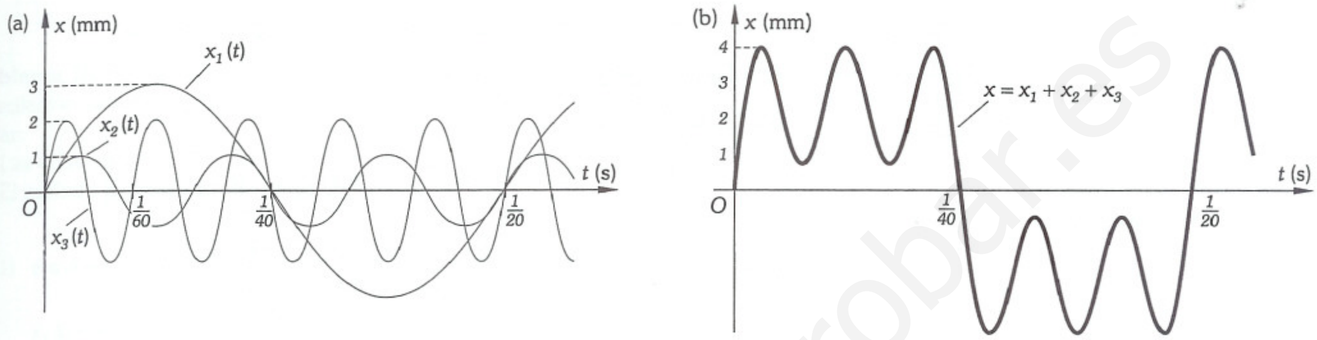
3) El valor máximo de la velocidad será alcanzada por la partícula cuando la aceleración de ésta sea nula $a = \dot{v} = 0$

$$v = \dot{x} = -0{,}3\pi\,(\text{sen}\,\pi t + 2\,\text{sen}\,2\pi t) \quad \Rightarrow \quad a = \dot{v} = -0{,}3\pi^2\,(\cos\pi t + 4\cos 2\pi t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\pi t + 4\,(\cos^2\pi t - \text{sen}^2\,\pi t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\pi t + 4\,(\cos^2\pi t - 1 + \cos^2\pi t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8\cos^2\pi t + \cos\pi t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}27\text{ s}} \quad \wedge \quad \boxed{v = -2{,}57\text{ m/s}}$$

Problema III-86. Una partícula está sometida a tres MAS de amplitudes $A_1 = 3$ mm, $A_2 = 1$ mm y $A_3 = 2$ mm y cuyas frecuencias respectivas son: $\nu_1 = 20$ Hz, $\nu_2 = 60$ Hz y $\nu_3 = 100$ Hz, si la diferencia de fase entre ellos cuando $t = 0$, es igual a cero:
1. Escribir las ecuaciones de las componentes de la vibración compleja y calcular su período.
2. Dibujar la gráfica de estas componentes.
3. Dibujar la gráfica de la vibración compleja resultante y calcular su período.



Problema III-86.– (a) Gráfica de los MAS componentes. (b) Gráfica del movimiento periódico resultante.

Solución

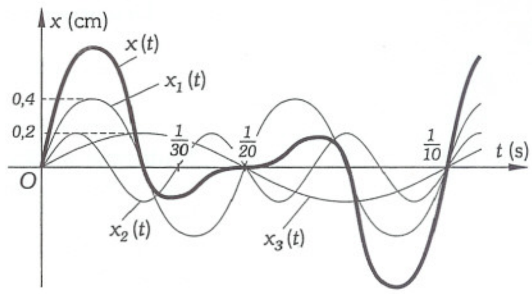
1) $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 40\pi$ rad/s $\Rightarrow$ $x_1(t) = 3$ sen $40\pi t$
$\omega_2 = 2\pi\nu_2 = 120\pi$ rad/s $\Rightarrow$ $x_2(t) =$ sen $120\pi t$ (t en s, x en mm)
$\omega_3 = 2\pi\nu_3 = 200\pi$ rad/s $\Rightarrow$ $x_3(t) = 2$ sen $200\pi t$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\nu_1} = \frac{1}{20}\text{ s} \\ T_2 &= \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{60}\text{ s} \\ T_3 &= \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{120}\text{ s} \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{n_2}{n_1} = \frac{3}{1} \\ \frac{T_1}{T_3} &= \frac{n_3}{n_1} = \frac{6}{1} \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ n_2 &= 3 \\ n_3 &= 6 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = n_1T_1 = n_2T_2 = n_3T_3 = \frac{1}{20}\text{ s}}$$

2) y 3) La gráfica del movimiento resultante será la de la función:

$$x = x(t) = x_1 + x_2 + x_3 .$$

Problema III-87. La ecuación horaria del movimiento de una partícula escrita en el CGS es: $x(t) = 0{,}4\,(1 + \cos 20\pi t)$ sen $40\pi t$.
1. Determinar las vibraciones armónicas que lo componen y represéntalas gráficamente en función del tiempo.
2. Calcular la frecuencia de este movimiento y represéntalo gráficamente en función del tiempo.



Problema III-87.– Gráfica de los MAS componentes y del movimiento resultante.

Solución

1) $x(t) = 0{,}4$ sen $40\pi t + 0{,}4$ sen $40\pi t \cos 20\pi t$

teniendo en cuenta que: $\quad \text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 80\pi t \\ A - B &= 40\pi t \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2A &= 120\pi t \quad \Rightarrow \quad A = 60\pi t \\ 2B &= 40\pi t \quad \Rightarrow \quad B = 20\pi t \end{aligned}\ \Bigg| \Rightarrow \quad x(t) = 0{,}4\,\text{sen}\,40\pi t + 0{,}2\,\text{sen}\,60\pi t + 0{,}2\,\text{sen}\,20\pi t$$

y las vibraciones armónicas que lo componen:

$\boxed{x_1(t) = 0{,}4\text{ sen }40\pi t}$ $\quad$ $\boxed{x_2(t) = 0{,}2\text{ sen }60\pi t}$ $\quad$ $\boxed{x_3(t) = 0{,}2\text{ sen }20\pi t}$ CGS

$$2)\quad \left.\begin{aligned} \omega_1 &= 40\pi\text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 60\pi\text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 20\pi\text{ rad/s} \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\omega_3}{\omega_1} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\omega_3}{\omega_2} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} n_1 &= 2 \\ n_2 &= 3 \\ n_3 &= 1 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad T = n_1T_1 = n_2T_2 = n_3T_3 = \frac{1}{10}\text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = 10\text{ Hz}}$$

Problema III-88. Una partícula está sometida a dos MAS en la misma dirección y de ecuaciones escritas en el CGS: $x_1 = 0{,}20$ sen $120\pi t$ y $x_2 = 0{,}30$ sen $116\pi t$.

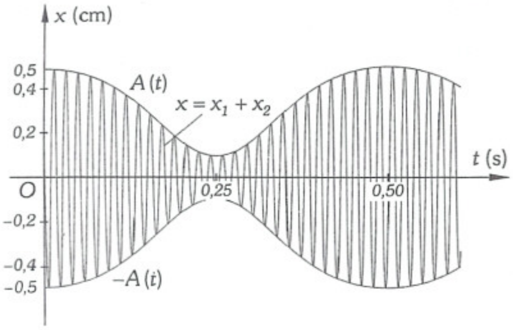
1. Determinar el período del movimiento resultante.
2. La función de modulación, sus valores extremos y los momentos en que toma éstos.
3. Representar gráficamente la *ecuación del movimiento resultante* y la función de modulación.

Solución

1) $x(t) = x_1 + x_2 = 0{,}20 \text{ sen } 120\pi t + 0{,}30 \text{ sen } 116\pi t$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1 = 120\pi \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 116\pi \text{ rad/s}\end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l}\nu_1 = 60 \text{ Hz} \\ \nu_2 = 58 \text{ Hz}\end{array}\right| \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{30}{29} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 30T_1 = 29T_2 = 0{,}5 \text{ s}}$$



Problema III-88.

2) $A^2(t) = 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 2 \times 0{,}2 \times 0{,}3 \cos 4\pi t = 0{,}13 + 0{,}12 \cos 4\pi t \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A(t) = \pm\sqrt{0{,}13 + 0{,}12 \cos 4\pi t}} \quad (\text{SI})$$

Los valores extremos los obtiene cuando:

$$\cos 4\pi t = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad 4\pi t = k\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{k}{4} \text{ s} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)}$$

luego:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_M = \pm(A_1 + A_2) = \pm 0{,}50 \text{ cm} \\ A_m = \pm(A_1 - A_2) = \pm 0{,}10 \text{ cm}\end{array}}$$

3) Llamando $A_0 = A(0)$ $(t = 0)$: $A_0 = \pm 0{,}50$ cm. El período de la función de modulación es:

$$T_M = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} = 0{,}5 \text{ s} = T$$

Problema III-89. Averiguar la frecuencia de la vibración resultante y la frecuencia de las pulsaciones que se producen al estar sometido un punto material a vibraciones de la misma dirección y de frecuencias 440 y 442 Hz. Suponiendo 5 cm la amplitud de cada una de las vibraciones y que ambas están en concordancia de fase ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$), determinar la expresión general de la elongación en función del tiempo.

Solución

La frecuencia de la vibración resultante vendrá dada por: $\boxed{\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \frac{400 + 442}{2} = 441 \text{ Hz}}$

La frecuencia de la pulsación será: $\boxed{\nu_p = \nu_2 - \nu_1 = 442 - 440 = 2 \text{ Hz}}$

La ecuación del MAS resultante será:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left[\pi(\nu_1 - \nu_2)t\right] \text{ sen}\left[\pi(\nu_1 + \nu_2)t\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 10 \cos(2\pi t) \text{ sen}(882\pi t)} \quad \text{CGS}$$

Problema III-90. Determinar la ecuación de la vibración que resulta de estar sometida una partícula a los movimientos vibratorios armónicos de ecuaciones: $x_1 = 0{,}5 \cos 10\pi t$ y $x_2 = 0{,}5 \cos 12\pi t$ (escritas en el sistema CGS y teniendo ambas la misma dirección de vibración). Calcúlese también el período de batido, el de vibración y representar gráficamente la función de la vibración resultante.

Solución

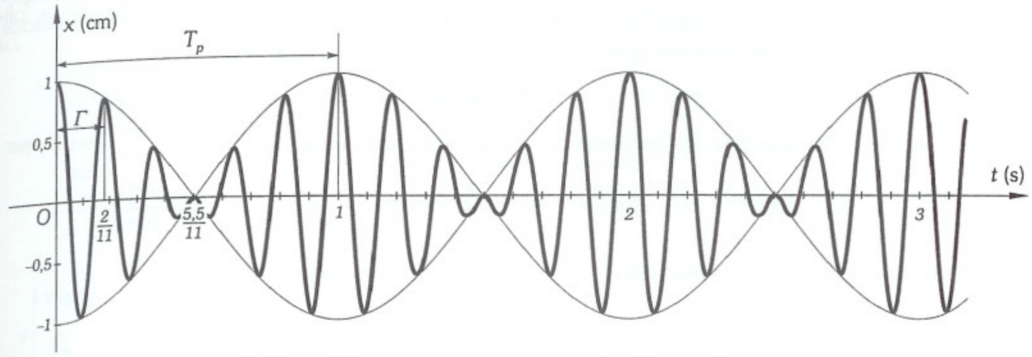
$$\cos A + \cos B = 2 \cos\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_1 + x_2 = \cos \pi t \cos 11\pi t}$$

como:

$$\left|\begin{array}{l}\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 10\pi \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 5 \text{ Hz} \\ \omega_2 = 2\pi\nu_2 = 12\pi \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = 6 \text{ Hz}\end{array}\right.$$

El período de batido será: $\nu_p = \nu_1 - \nu_2 = 1 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_p = \frac{1}{\nu_p} = 1 \text{ s}}$

El período de la vibración será: $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \frac{11}{2} \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2}{11} \text{ s}}$



Problema III-90.

Problema III-91. Se superponen dos MAS de la misma dirección actuando sobre una partícula, la oscilación resultante viene dada por la ecuación escrita en el SI: $x(t) = 0{,}02 \cos 92{,}7t \cos 2{,}3t$. Hallar:

1. Las ecuaciones de los MAS cuya vibración resultante pueda dar dicha ecuación.
2. El período de la pulsación resultante.

Solución

1) $\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega_1 t \\ x_2(t) &= A \cos \omega_2 t \end{aligned}\right| \qquad x(t) = 2A \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

comparándola con la dada obtenemos:

$$\begin{aligned} &A = 0{,}01 \text{ m} \\ &\left.\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 185{,}4 \\ \omega_1 - \omega_2 &= 4{,}6 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned} \omega_1 &= 95{,}0 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 90{,}4 \text{ rad/s} \end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned} &\boxed{x_1(t) = 0{,}01 \cos 95{,}0t} \\ &\boxed{x_2(t) = 0{,}01 \cos 90{,}4t} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

2) $$\left.\begin{aligned} \omega_1 = 2\pi\nu_1 \quad &\Rightarrow \quad \nu_1 = 15{,}1 \text{ Hz} \\ \omega_2 = 2\pi\nu_2 \quad &\Rightarrow \quad \nu_1 = 14{,}4 \text{ Hz} \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{T_p = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} = 1{,}4 \text{ s}}$$

Problema III-92. Una partícula sometida a dos MAS en la misma dirección, amplitudes iguales a $0{,}2$ mm y de frecuencias muy próximas, dan como resultado pulsaciones de período $0{,}1$ s. Si la frecuencia del segundo movimiento aumenta en $0{,}025$ de su valor, el período de las pulsaciones se duplica. Determinar la ecuación del movimiento resultante.

Solución

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \text{ sen } \omega_1 t \\ x_2(t) &= A_1 \text{ sen } \omega_2 t \end{aligned}\right| \qquad x(t) = 2A_1 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \text{ sen } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

$$\left.\begin{aligned} T_p = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} = 0{,}1 \text{ s} \quad &\Rightarrow \quad \nu_1 - \nu_2 = 10 \text{ Hz} \\ \nu_1 - \nu_2 - 0{,}025\,\nu_2 = 5 \quad &\Rightarrow \quad \nu_1 - 1{,}025\,\nu_2 = 5 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \nu_1 &= 210 \text{ Hz} \\ \nu_2 &= 200 \text{ Hz} \end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi\nu_1 = 420\pi \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 2\pi\nu_2 = 400\pi \text{ rad/s} \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{x(t) = 4 \times 10^{-4} \cos 10\pi t \text{ sen } 410\pi t} \quad \text{SI}$$

Problema III-93. De un oscilador con amortiguamiento viscoso conocemos la frecuencia angular ω y el índice de amortiguamiento k. Si en el instante $t = 0$ es $x = x_0$ y $v = v_0$, determinar los valores de la distancia máxima alcanzada por la partícula a partir de la posición de equilibrio A_0 y la fase inicial φ.

Solución

$$x = A_0 e^{-k\omega t} \text{ sen } (\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -k\omega A_0 e^{-k\omega t} \text{ sen } (\omega t + \varphi) + \omega A_0 e^{-k\omega t} \cos (\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} x_0 &= A_0 \text{ sen } \varphi \\ v_0 &= -k\omega A_0 \text{ sen } \varphi + \omega A_0 \cos \varphi \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} &\boxed{A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0^2 - k\omega x_0)^2}{k^2 + k\omega x_0}}} \\ &\boxed{\varphi = \text{arctg } \frac{x_0 \sqrt{k^2 (1 - \omega^2)}}{v_0 + k\omega x_0}} \end{aligned}\right.$$

Problema III-94. Una partícula oscila con movimiento amortiguado de tal forma que su amplitud máxima a partir de una determinada vibración, se reduce de $A = 0{,}2$ m a $0{,}1$ m en 10 ciclos de oscilación. Calcular en cuántos ciclos se reduce la amplitud de A a $0{,}05$ m.

Solución

$A = A_0\, e^{-k\omega t}$ y transcurridos 10Γ segundos (10 ciclos) la amplitud será: $A_{10} = A_0\, e^{-k\omega(t+10\Gamma)}$, con lo que:

$$\frac{A}{A_{10}} = e^{10k\omega\Gamma} \quad \wedge \quad \Gamma = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_{10}} = e^{20\pi k} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{20\pi}$$

En n ciclos, transcurridos $n\Gamma$ segundos, A pasa de $0{,}2$ m a $0{,}05$ m, luego:

$$\frac{A_0}{A_n} = e^{2\pi n k} = \frac{0{,}2}{0{,}05} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{2\ln 2}{2\pi k} = 20 \text{ oscilaciones}}$$

Problema III-95. Una partícula realiza oscilaciones amortiguadas de ecuación: $x(t) = A_0 e^{-k\omega t}$ sen ωt. Calcular:

1. La velocidad de la partícula en $t = 0$.
2. Instantes en que el punto alcanza las posiciones límites.

Solución

1) $$v(t) = \dot{x} = A_0 \omega e^{-k\omega t}(-k \operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t) \quad \wedge \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = A_0\omega}$$

2) $x(t)$ será máxima cuando la velocidad sera nula $[\dot{x}(t) = 0]$, entonces:

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -k \operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \omega t = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_n = \frac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{k} + n\pi\right) \quad \wedge \quad n \in N}$$

Problema III-96. ¿Cuántas veces disminuye la aceleración de una partícula que se encuentra en su posición extrema, con movimiento vibratorio amortiguado, en n ($\forall n \in N$) vibraciones? El decremento logarítmico de este movimiento vale $0{,}2$.

Solución

$$\delta = 2\pi k = 0{,}2 = k\omega\Gamma \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{10\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega\Gamma = 2\pi \text{ rad}$$

$$x(t) = A_0 e^{-k\omega t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \dot{x} = -A_0\omega e^{-k\omega t}\left[k\cos(\omega t + \varphi) + \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]$$

llamando $a(t)$ a la aceleración de la partícula, que en ese tiempo t ha alcanzado la máxima separación y $a_n(t + n\Gamma)$ a su aceleración después de n vibraciones:

$$a(t) = \dot{v} = -A_0\omega^2 e^{-k\omega t}\left[(1 - k^2)\cos(\omega t + \varphi) - 2k \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]$$

$$a_n(t + n\Gamma) = -A_0\omega^2 e^{-k\omega(t + n\Gamma)}\left[(1 - k^2)\cos\left[\omega(t + n\Gamma) + \varphi\right] - 2k \operatorname{sen}\left[\omega(t + n\Gamma) + \varphi\right]\right]$$

pero como $\omega n\Gamma = 2n\pi$ con $n \in N$ (número par de π):

$$a_n(t + n\Gamma) = -A_0\omega^2 e^{-k\omega(t + n\Gamma)}\left[(1 - k^2)\cos(\omega t + \varphi) - 2k \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a}{a_n} = e^{k\omega n\Gamma} = e^{0{,}2n}}$$

Problema III-97. La ecuación del movimiento oscilatorio amortiguado de una partícula viene dada en el sistema CGS: $x(t) = 10\, e^{-0{,}25t}$ sen $0{,}5\pi t$. Hallar:

1. El índice de amortiguamiento y el decremento logarítmico.
2. ¿Cuánto disminuye la velocidad de la partícula, a partir de una posición en la que $x = 0$, en una oscilación.
3. Hacer la gráfica de $x = x(t)$.

Solución

1) Comparando la ecuación dada con la ecuación general: $x(t) = A_0\, e^{-k\omega t}$ sen $(\omega t + \varphi)$, obtenemos:

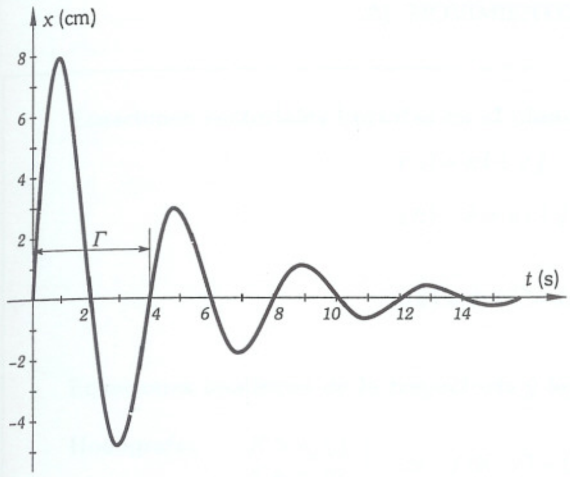
$$\left.\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ k\omega = 0{,}25 \text{ s}^{-1} \\ \omega = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad/s} = \dfrac{2\pi}{\Gamma} = 2\pi\nu \\ A_0 = 10 \text{ cm} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{\Gamma} = 0{,}25 \text{ Hz} \quad \boxed{k = \frac{1}{2\pi}} \quad \boxed{\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = 2\pi k = 1}$$

2) Llamando $v_1 = v(t) = \dot{x}(t)$ y $v_2 = v(t+\Gamma) = \dot{x}(t+\Gamma)$, tendremos:

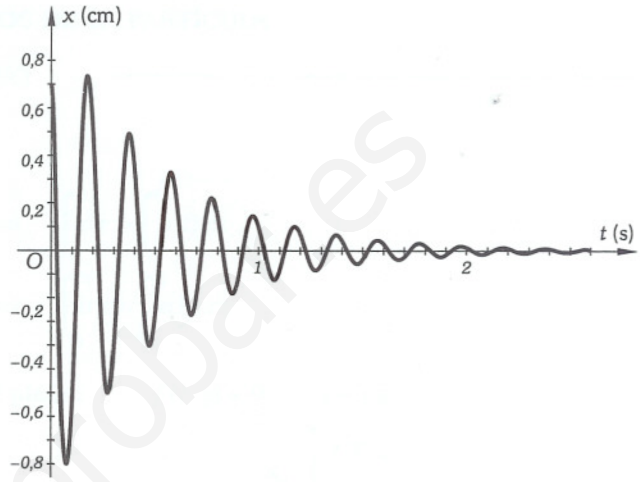
$$v_1 = A_0 \omega e^{-k\omega t}\,(-k \text{ sen } \omega t + \cos \omega t)$$

$$v_2 = A_0 \omega e^{-k\omega(t+\Gamma)}\left[-k \text{ sen } \omega(t+\Gamma) + \cos \omega(t+\Gamma)\right] \quad \wedge \quad \omega\Gamma = 2\pi \text{ s} \quad \Rightarrow \quad v_2 = A_0 \omega e^{-k\omega(t+\Gamma)}\,(-k \text{ sen } \omega t + \cos \omega t)$$

luego: $$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = e^{k\omega\Gamma} = e^{2\pi k} = e^{\delta} = e}$$



Problema III-97.



Problema III-98.

Problema III-98. El decremento logarítmico de un movimiento vibratorio amortiguado es $0{,}40$, su frecuencia de oscilación 5 Hz y su fase inicial $\pi/4$. La elongación es $0{,}10$ cm, 1 s después de comenzar a contar el tiempo.

1. Determinar la ecuación de este movimiento vibratorio amortiguado.
2. Hallar la velocidad de la partícula vibrante en los momentos en que t es igual a: 0, $0{,}2$, $0{,}4$ y $0{,}6$ s.
3. Construir la gráfica $x = x(t)$.

Solución

1) $\delta = 2\pi k = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{5\pi}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{\Gamma} = 10\pi$ rad/s

$k\omega = 2$ rad/s $\quad \wedge \quad x(t) = A_0 e^{-2t} \cos\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad 0{,}10 = A_0 e^{-2} \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad A_0 = 1{,}04 \text{ cm}$$

$$\boxed{x(t) = 1{,}04 e^{-2t} \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{CGS}$$

2) $$v(t) = \dot{x} = -2{,}08 e^{-2t}\left[\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\pi \text{ sen}\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

En cada oscilación (transcurridos Γ) la velocidad disminuye (ver problema anterior) en e^{δ}, y como $t = 0$, Γ, 2Γ y 3Γ, entonces: $\delta = k\omega\Gamma = 0{,}4$ rad, obtenemos:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(0) = -2{,}08\left(\cos\frac{\pi}{4} + 5\pi \text{ sen } \frac{\pi}{4}\right) = -24{,}57 \text{ cm/s}}$$

$$t = 0{,}2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(0{,}2) = v(0)\, e^{-\delta} = -24{,}57 e^{-0{,}4} = -16{,}47 \text{ cm/s}}$$

$$t = 0{,}4 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(0{,}4) = v(0{,}2)\, e^{-\delta} = v(0)\, e^{-2\delta} = -11{,}04 \text{ cm/s}}$$

$$t = 0{,}6 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(0{,}6) = v(0)\, e^{-3\delta} = -7{,}40 \text{ cm/s}}$$