

931

Introducción a la mecánica de la partícula en el plano

Hugo Sergio Becerril Hernández
Nicolás Falcón Hernández
Abelardo Rodríguez Soria



**INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA
DE LA PARTÍCULA EN EL PLANO**

www.yoquieroaprobar.es

**INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA
DE LA PARTÍCULA EN EL PLANO**

Este material fue aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 13 de febrero del 2003.

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LA PARTÍCULA EN EL PLANO

Hugo Sergio Becerril Hernández,
Nicolás Falcón Hernández
Abelardo Luis Rodríguez Soria



División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

UAM-AZCAPOTZALCO

RECTOR

Dr. Adrián Gerardo de Garay Sánchez

SECRETARIA

Dra. Sylvie Jeanne Turpin Marion

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO

Dra. Norma Rondero López

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA

DI Jorge Armando Morales Aceves

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES

Lic. Francisco Javier Ramírez Treviño

ISBN: 970-31-0179-8

© **UAM-Azcapotzalco**

Hugo Sergio Becerril Hernández
Nicolás Falcón Hernández
Abelardo Luis Rodríguez Soria

Corrección:

Marisela Juárez Capistrán

Ilustración de portada:

Consuelo Quiroz Reyes

Diseño de Portada:

Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Introducción a la mecánica
de la partícula en el plano

1a. edición, 2003

2a. edición, 2008

Impreso en México

CONTENIDO

PREFACIO ix

REFERENCIAS x

CONVENIOS SOBRE NOTACIÓN xi

MÓDULO I. CINEMÁTICA RECTILÍNEA Y PLANA DE LA PARTÍCULA

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS PRIMARIOS

- 1.1. Introducción. 1-3
- 1.2. Marco de referencia o referencial. 1-3
- 1.3. Sistema de coordenadas. 1-4

CAPÍTULO 2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

- 2.1. Camino o Eje X. 1-5
- 2.2. Posición x y tiempo t . 1-5
- 2.3. Ecuación de movimiento. 1-6
- 2.4. Desplazamiento y distancia recorrida. 1-7
- 2.5. Gráfico x vs t . 1-8
- 2.6. Velocidad. 1-9
- 2.7. Interpretación gráfica de las velocidades media e instantánea. 1-12
- 2.8. La velocidad instantánea es una "tasa". 1-14
- 2.9. Movimiento uniforme. 1-14
- 2.10. Aceleración. 1-16
- *2.11. Representaciones alternativas del movimiento. 1-20
- 2.12. Problemas. 1-22

CAPÍTULO 3. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

- 3.1. Introducción. 1-24
- 3.2. Propiedades del movimiento. 1-24
- 3.3. Ecuaciones de movimiento. 1-25
- 3.4. Plantear las ecuaciones de movimiento. 1-26
- 3.5. Gráficos de posición y velocidad contra tiempo. 1-28
- 3.6. Estrategia de resolución de problemas sobre MRUA. 1-29
- 3.7. Problemas. 1-36
- 3.8. Más ejemplos. 1-38
- 3.9. Problemas. 1-43

CAPÍTULO 4. MOVIMIENTO PLANO. DESCRIPCIÓN EN LA BASE NATURAL

- 4.1. Conceptos básicos. Extensión al plano. 1-47
- 4.2. Problemas. 1-50
- 4.3. Base ortonormal natural. 1-51
- 4.4. Curvatura y radio de curvatura. 1-52
- 4.5. Velocidad como vector. 1-53
- 4.6. Aceleración. 1-54
- 4.7. Cálculo de la curvatura. 1-56
- 4.8. Aceleración y fuerza. 1-57
- 4.9. Problemas. 1-59

CAPÍTULO 5. DESCRIPCIÓN EN LAS BASES CARTESIANA Y POLAR

- 5.1. Introducción. 1-61

- 5.2. Ecuaciones paramétricas de la trayectoria. 1-61
- 5.3. Velocidad en componentes cartesianas. 1-62
- 5.4. Componentes de la aceleración en la base cartesiana. 1-63
- 5.5. Velocidad y aceleración en la base polar. 1-65
- 5.6. Movimiento circular. 1-66
- 5.7. Tiro parabólico. 1-68
- 5.8. Problemas. 1-71

MÓDULO II. LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA

CAPÍTULO 6. LAS LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA

- 6.1. Enunciados de las leyes de Newton. 2-3
- 6.2. Sobre la primera ley de Newton. 2-3
- 6.3. Sobre la segunda ley de Newton. 2-4
- 6.4. Ley de atracción universal de Newton. 2-6
- 6.5. Sobre la tercera ley de Newton. 2-7
- 6.6. Principio de superposición de las fuerzas. 2-9
- 6.7. Marcos de referencia inerciales. 2-9

CAPÍTULO 7. LEYES DE NEWTON. FUERZAS CONSTANTES

- 7.1. El problema general. 2-11
- 7.2. Método para resolver el problema general. 2-11
- 7.3. Combinar varias partículas en una sóla. 2-13
- 7.4. Acelerómetro. 2-15
- 7.5. Ojo con las hipótesis. 2-16
- 7.6. Sistemas con aceleración común. 2-18
- 7.7. Sistemas con una polca móvil. 2-24
- 7.8. Bloque sobre plano inclinado áspero. 2-25
- 7.9. Otros sistemas con fricción. 2-28
- 7.10. ¿Hay deslizamiento o no? 2-31
- 7.11. Otros ejemplos. 2-34
- *7.12. Relaciones cinemáticas en general. 2-37
- *7.13. Método turbo para obtener relaciones cinemáticas. 2-38
- 7.14. Problemas. 2-42

CAPÍTULO 8. LEYES DE NEWTON. MOVIMIENTO CIRCULAR

- 8.1. El problema general. 2-46
- 8.2. Repaso de cinemática circular. 2-46
- 8.3. Dos elases de movimiento circular. 2-47
- 8.4. Movimiento en un plano horizontal. 2-49
- 8.5. Movimiento en un plano vertical. 2-54
- 8.7. Movimientos de la Luna y la Tierra. 2-59
- 8.8. Problemas. 2-61

MÓDULO III. TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA (UN ENFOQUE DE SISTEMAS)

- INTRODUCCIÓN. 3-3

CAPÍTULO 9. TRABAJO EN EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

- 9.1. Repaso de fuerzas en una dimensión. 3-5
- 9.2. Definición del trabajo. 3-7

- 9.3. Trabajo de la fuerza total. 3-8
- 9.4. Cálculo del trabajo de fuerzas comunes. 3-8
- 9.5. Interpretación gráfica del trabajo en una dimensión. 3-10
- 9.6. Trabajo cuasiestático. 3-11
- 9.7. Potencia en una dimensión. 3-12
- 9.8. Ejemplos. 3-13
- 9.9. Problemas. 3-16

CAPÍTULO 10. ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA PARA UNA SÓLA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO

- 10.1. Teorema Trabajo-Energía cinética en una dimensión. 3-18
- 10.2. Ecuación de balance de energía. 3-19
- 10.3. Ejemplos. 3-21
- 10.4. Otra vez la potencia. 3-24
- 10.5. Problemas. 3-26

CAPÍTULO 11. TRABAJO EN EL MOVIMIENTO PLANO

- 11.1. Trayectoria recta y fuerza constante. 3-29
- 11.2. Trayectoria curva y fuerza constante. 3-31
- 11.3. Trayectoria curva y fuerza variable. 3-32
- 11.4. Cálculo de la integral del trabajo en coordenadas cartesianas. 3-33
- 11.5. Fuerzas conservativas. 3-35
- 11.6. Galería de trabajos. 3-36
- 11.7. Trabajo de fuerzas restrictivas en sistemas conectados. 3-38
- 11.8. Fuerzas activas y diagrama de fuerzas activas. 3-39
- 11.9. Cálculo de la integral del trabajo en coordenadas polares. 3-40
- 11.10. Campos de fuerzas centrales. 3-40
- 11.11. Trabajo de las fuerzas de interacción centrales entre dos partículas. 3-42
- *11.12. Más sobre las fuerzas conservativas. 3-44
- 11.13. Potencia en el movimiento plano. 3-48
- 11.14. Problemas. 3-48

CAPÍTULO 12. BALANCE DE ENERGÍA PARA UNA SÓLA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

- 12.1. Teorema Trabajo-Energía cinética en el plano. 3-52
- 12.2. Ejemplos. 3-53
- 12.3. Problemas. 3-57

CAPÍTULO 13. ENERGÍA POTENCIAL Y BALANCE DE ENERGÍA PARA SISTEMAS DE DOS O MÁS PARTÍCULAS

- 13.1. Sobre la energía potencial. 3-59
- 13.2. Definición de la energía potencial. 3-60
- 13.3. Cálculo de energías potenciales. 3-61
- 13.4. Ecuación de balance de energía para un sistema de dos partículas. 3-63
- 13.5. Teorema de conservación de la energía mecánica. 3-65
- 13.6. Energía potencial del sistema de muchas partículas. 3-67
- 13.7. Sobre la aplicación de la ecuación de balance. 3-68
- 13.8. Energía potencial de algunos sistemas compuestos. 3-69
- 13.9. Potencia. 3-71
- 13.10. Estrategia general y ejemplos. 3-72
- 13.11. Problemas. 3-79

PREFACIO

El presente texto tiene como propósito principal auxiliar al estudiante en el estudio de la materia de *Energías Mecánica y Eléctrica*, tal como ésta se imparte actualmente en el Tronco General de Asignaturas de Ingeniería en la Universidad Autónoma Metropolitana en Azcapotzalco.

El contenido de este escrito se distribuye en tres módulos, a saber.

Módulo I.	Cinemática rectilínea y plana de la partícula.
Módulo II.	Cinética de la partícula.
Módulo III.	Trabajo, energía y potencia. Un enfoque de sistemas.

En estos módulos se incluyen respectivamente 40, 32 y 44 ejemplos resueltos con detalle. El texto contiene además un total de 182 problemas con sus resultados numéricos o algebraicos. Los ejemplos y problemas se han seleccionado con cuidado, apegándose al nivel introductorio de la materia.

En el módulo I, capítulo 1, hacemos una distinción clara entre los conceptos de marco de referencia y sistema de coordenadas (No empleamos en este texto la frase “sistema de referencia”). En el capítulo 2 emprendemos el estudio del movimiento rectilíneo. Hemos usado una notación consistente para las cantidades cinemáticas empleadas, evitando la propensión a designar con los símbolos t , x , v , etc. las cantidades tiempo, coordenada y velocidad, respectivamente, de cualquier punto del movimiento, sin importar que sea un punto arbitrario o un punto particular (es decir, de que dichas cantidades sean variables o constantes). El capítulo 3 es un tratamiento extenso del movimiento uniformemente acelerado en línea recta. En los problemas relativos a este tema el estudiante tiene una primera oportunidad de ejercitar una notación consistente, de aprender a organizar los datos e incógnitas y traducirlos a relaciones matemáticas, etc. Asimismo se da cuenta que en muchos problemas existen varios caminos hacia la solución. Los capítulos 4 y 5 se dedican a la cinemática de la partícula en el plano. Estos capítulos exigen un buen nivel de matemáticas, pero son indispensables para la comprensión de los conceptos de velocidad y aceleración como vectores.

El módulo II está dedicado a la formulación y aplicaciones de las leyes de Newton y la ley de gravitación universal. La discusión de las leyes de Newton, en el capítulo 6, es didáctica; no entramos en una discusión profunda de estas leyes. En el capítulo 7 aplicamos las leyes de Newton a movimientos rectilíneos en que todas las fuerzas que intervienen son constantes. Damos un método general (el método “DELIRO”) con objeto de que el estudiante no pase por alto unas etapas importantes en la resolución de los problemas. Asimismo damos unas reglas para evitar los tan comunes errores de signo que se cometen al utilizar relaciones cinemáticas en problemas de dinámica. En el capítulo 8 se ejemplifican las leyes de Newton en problemas sobre movimiento circular, donde nos hemos restringido a (a) movimientos en un plano horizontal con velocidad angular constante, (b) movimientos en un plano vertical bajo la acción de la fuerza de gravedad, (c) movimiento de la Luna y los planetas, supuestos circulares.

El módulo III trata sobre el tema de la energía, de capital importancia en ingeniería. Al respecto nos hemos apartado de los tratamientos estándar de muchos libros de texto. Específicamente, como concepto principal subyacente al desarrollo del tema de energía hemos adoptado el concepto de *sistema [físico]*, esto es, el cuerpo o conjunto de cuerpos materiales al que vamos a aplicar la ecuación de balance de energía mecánica. Expliquemos.

En muchos textos se introduce la energía prácticamente como una *función matemática* asociada con una partícula, y se habla por ejemplo de que “la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece constante”. La energía potencial, por otra parte, también se asocia con las fuerzas y se habla de “la energía potencial asociada con la fuerza gravitatoria”. Además, pocas veces se estipula cuál es el sistema físico considerado al aplicar la ley de conservación de la energía y otras relacionadas. Este enfoque tiene sus ventajas: permite “librarse” de la teoría rápidamente y pasar cuanto antes a resolver problemas. Efectivamente, es posible resolver problemas de esta manera, si bien son problemas muy simples casi siempre relativos a una o dos partículas. Sin embargo, en este enfoque no se vislumbra una conexión lógica con la primera ley de la termodinámica, ni se anticipa una comprensión clara de los balances de energía en sistemas más complejos como mecanismos, máquinas, sistemas eléctricos, fluidos, etc.

El desarrollo de la teoría sobre el concepto de energía debe tener como fin primordial adquirir una aceptable capacidad para resolver problemas, los cuales no deben verse exclusivamente como vehículos para ilustrar la teoría.

Igualmente importante es que la teoría debe desarrollarse con la extensión y profundidad necesarias para pisar terreno firme a la hora de aplicarla. Hemos tratado en este texto de equilibrar ambos propósitos.

Según el “enfoque de sistemas” que hemos tomado en relación con el tema, la energía es una propiedad de los cuerpos materiales, no de las fuerzas que los solicitan. En especial, la energía potencial es un concepto aplicable a un sistema físico compuesto de al menos dos cuerpos (que interactúan con fuerza conservativa). Así, en lugar de la frase “la energía potencial de la partícula en el campo gravitatorio de la Tierra” empleamos la frase “la energía potencial del sistema (Tierra, partícula)”. En los ejemplos de aplicación de la teoría siempre especificamos el sistema físico cuya ecuación de balance de energía vamos a plantear. Este enfoque no es nada nuevo y su principal desventaja es el requerir de un gran cuerpo de teoría antes de poder pasar a las aplicaciones. Pero el esfuerzo vale la pena, porque el estudiante puede extender su estudio de la energía en cursos más avanzados sin necesidad de “reaprender” los conceptos fundamentales.

Dedicamos este libro al Dr. Francisco Medina Nicolau, gran maestro y amigo, por su incomparable labor de motivación e ilustración en tantas ocasiones que tuvimos la fortuna de discutir con él sobre temas de física.

REFERENCIAS

J. L. Meriam y L.G. Kraige

Mecánica para Ingenieros – DINÁMICA, 3a. Edición

Editorial Reverté, S. A.

F. Beer y Johnston

Mecánica vectorial para ingenieros. Vol. II. Dinámica, 6a. edición

Editorial Mc Graw Hill

Russell C. Hibbeler

Mecánica para Ingenieros. Vol. II. DINÁMICA, 6a. Edición

Editorial CECSA

Ferdinand L. Singer

Mecánica para ingenieros: Dinámica, 3a. edición

Editorial Harper & Row Latinoamericana

CONVENIOS SOBRE NOTACIÓN.

1. Cantidades positivas por definición se escriben en fuente Times New Roman normal de 10 puntos.

Caracteres en fuente normal:

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Ejemplos: masa m , energía cinética K , longitud L , etc.

2. Cantidades algebraicas (o signadas), esto es, que pueden tener signo positivo o negativo, se escriben en fuente cursiva.

Caracteres en fuente cursiva:

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz *ABCDEFGHIJKLMNPQRSTUVWXYZ*

Ejemplos: coordenadas (x, y) , energía E , trabajo W , aceleración a (magnitud "a"), velocidad v (magnitud "v"), etc.

Lo anterior no se aplica a las letras griegas: $\alpha, \beta, \chi, \Omega$, etc.

Las "deltas" son siempre cantidades algebraicas ΔK , etc.

3. Los vectores se escriben en negrita.

Vectores: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\omega}$, etc.

4. El vector separación o desplazamiento entre dos puntos P y Q se escribe \mathbf{PQ} . La diferencial de un vector \mathbf{A} se escribe $d\mathbf{A}$. La magnitud del vector \mathbf{A} se escribe " A " o bien $|\mathbf{A}|$. La magnitud de \mathbf{PQ} se escribe PQ ; la de $d\mathbf{A}$ se escribe $|d\mathbf{A}|$.

5. El formato de cursiva y negrita aplicado a un término o frase indica que dicho término o frase está definiendo un concepto nuevo. Ejemplo. En lugar de poner "Se define el trabajo W como esto o aquello..." se pone "El *trabajo* W es esto o aquello...".

6. Para las unidades físicas se usa la fuente **Courier New** en negrita y con un tamaño de 9 puntos.

Ejemplos:

$$N = 200 \text{ N} \quad (\text{Fuerza normal igual a } 200 \text{ newton})$$

$$a = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{Valor de aceleración})$$

7. Como es usual en física, los símbolos matemáticos de las ecuaciones contienen sus unidades físicas. Así, en la igualdad " $x = 12 \text{ m}$ " el símbolo " x " engloba tanto el valor numérico "12" como la unidad "m". Ahora bien, en los cálculos muchas veces suprimiremos las unidades para mejor visualización, teniendo cuidado de expresar todo previamente en el Sistema Internacional de Unidades. Al final del cálculo sí añadiremos las unidades, entre paréntesis (si esto le parece chocante, incluya las unidades en cada paso).

Ejemplo. Calcular $W = F \Delta x$, con $F = 24 \text{ N}$ y $\Delta x = 5 \text{ m}$:

$$W = 24 \cdot 5 = 120 \quad (\text{N} \cdot \text{m})$$

Si incluyéramos las unidades en cada paso escribiríamos

$$W = 24 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

8. Los productos de unidades se indican con un punto “ · ” o un pequeño guión “ - ”. De esta manera, “mm” es milímetro y “m · m” es metro al cuadrado, por si se lo encuentra algún día.

9. Para evitar cosas como “consulte la ecuación 823” o “véase la Fig. 3456”, las ecuaciones, figuras, ejemplos y páginas se numeran desde “1” en cada módulo. Las figuras de los ejemplos se numeran como en “Fig. E12b”, que indica la figura “b” del Ejemplo 12.

10. Al número de página se le antepone el número del módulo, como en “página 2–12”. Cuando hacemos referencia a una ecuación contenida en la misma página o la página precedente indicamos simplemente el número de la ecuación, como en “la ecuación (15)”. Si la ecuación referida se encuentra “lejos”, se añade la página donde se localiza, como en “la ecuación (15)-p8”, que se encuentra en la página 8 del módulo actual.

Módulo I

**CINEMÁTICA RECTILÍNEA Y
PLANA DE LA PARTÍCULA**

www.voquieroaprobar.es

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PRIMARIOS

1.1. Introducción

La *cinemática* es la rama de la mecánica que se encarga de la *descripción* del movimiento, sin entrar al estudio de sus causas. Este último asunto le compete a la *cinética*. La cinemática y la cinética hacen la *dinámica*, que es el estudio general completo del movimiento.

Los conceptos fundamentales de la cinemática son los de *espacio* y *tiempo*. En un primer acercamiento a ellos debemos basarnos en nuestras ideas intuitivas, adquiridas a través de nuestra experiencia cotidiana. Esto es lo que haremos aquí.

La cinemática se clasifica según el ámbito espacial del movimiento y la clase de cuerpo móvil de que se trate. Hay *cinemática rectilínea*, como su nombre lo indica, para estudiar movimientos a lo largo de una recta. Hay *cinemática plana* y *cinemática en tres dimensiones*. El móvil puede ser una *partícula*, esto es, un cuerpo tan diminuto, en relación con la región donde se enmarca su movimiento, que puede considerarse como un "punto". Puede ser también un *cuerpo extendido* como un trompo, un avión, etc. O puede ser un *fluido* como un gas, un líquido, etc.

La cinemática de la partícula es básica, pues otra clase de cuerpos siempre pueden subdividirse en un gran número de partículas. Por ejemplo, para describir el movimiento de un fluido se podría dividirlo en numerosos y pequeños "elementos de fluido" o partículas, que fuesen digamos cubitos de volumen 1 mm^3 , o bien 1 cm^3 , u otra dimensión conveniente. Cosa análoga puede hacerse en el campo de la cinética. De hecho las leyes de Newton de la cinética se enuncian para partículas, y se hacen extensibles luego a cuerpos más complejos.

En este texto abordaremos la cinemática de la partícula (llamada también *cinemática del punto*) en movimiento rectilíneo o plano.

1.2. Marco de referencia o referencial

Todo movimiento es una relación entre al menos dos cuerpos: uno es el *móvil*, cuyo movimiento nos interesa observar, describir, medir o analizar; el otro es el llamado *marco de referencia* o *referencial*, cuerpo o "plataforma" desde donde se realizan las observaciones.

El *referencial* es algún *cuerpo rígido* que se adopta como "soporte" (material y conceptual) para la determinación experimental de todas las cantidades físicas referentes al móvil. Esto es, en el referencial se *fijan* los instrumentos y aparatos de medición utilizados para efectuar las mediciones de tiempos, distancias, ángulos, etc., con que se describe numéricamente ("numeriza") el movimiento. A la vez, el referencial da significado preciso a las definiciones de las cantidades físicas.

El referencial más común en ingeniería es una porción de la superficie terrestre o (equivalentemente) algún cuerpo fijo a ella, como un laboratorio, un edificio, etc. Cuando no especifiquemos el referencial explícitamente, supondremos que es éste. Le llamaremos *referencial Tierra*. Otro ejemplo de referencial es un vehículo en movimiento con respecto a Tierra.

Por definición, dos referenciales (cuerpos rígidos) que guarden siempre "la misma relación espacial" el uno con el otro (es decir, que estén en reposo relativo mutuo), son *equivalentes*: constituyen de hecho un mismo referencial. Por ejemplo, el referencial "Laboratorio" es equivalente al referencial "Tierra".

Si los referenciales están en movimiento, según se observan mutuamente, entonces se trata por definición de dos *referenciales distintos*.

La distinción entre referenciales tiene un contenido físico fundamental. Los valores experimentales de las cantidades físicas siempre van ligadas al referencial subyacente, en el sentido de que no se puede afirmar a priori que tales medidas resulten las mismas al efectuarse desde otro referencial distinto.

En particular, dado que la distinción entre referenciales se da por sus movimientos relativos mutuos, todos los conceptos asociados con desplazamientos tendrán un carácter *relativo* evidente. Todos nos percatamos, por ejemplo, de que la velocidad de un Automóvil con respecto a Tierra puede no ser la misma que con respecto a un Tren que viaje paralelamente a él. Tampoco es la velocidad del Tren en general la misma con respecto a Tierra que con respecto al Automóvil. Advierta que se puede tratar a un cuerpo unas veces como el móvil, otras veces como el referencial. Podemos hablar así de los *referenciales*

Tierra, Automóvil y Tren, y de los *móviles* Automóvil y Tren.

En la teoría de la relatividad especial de Einstein se introduce un nivel adicional más profundo de “relatividad” de las cantidades físicas, que toca incluso los conceptos fundamentales de espacio y tiempo. Sin embargo, no abordaremos este tema aquí.

En la física, la frase “*según el observador X*” significa “según se mide desde el referencial X”. El observador no necesariamente es una persona; puede ser un instrumento o aparato. Por ejemplo, un satélite artificial puede hacerla de “observador” de fenómenos atmosféricos o astrofísicos.

Demos otros ejemplos de referenciales:

El Sol se usa como marco de referencia para describir los movimientos de los planetas del sistema solar.

- Un avión en vuelo.
- Cierta conjunto de estrellas, de las más distantes de la Tierra, sirve como marco para estudiar los movimientos de cuerpos celestes. A este se le llama el *referencial de las estrellas fijas*.
- Un elevador en caída libre.
- Una cabina centrífuga.
- Una estación espacial en órbita terrestre.
- La Vía Láctea, nuestra galaxia (para el movimiento del Sol y otras estrellas).
- Un vehículo acelerado en línea recta.
- La pluma de una grúa durante una maniobra.
- Un satélite artificial o sonda espacial.

Etc. Etc.

La teoría física permite traducir valores medidos en un referencial a otro. De esta manera, no es necesario mantener instrumentos de medición en todos los referenciales utilizados. El referencial puede ser incluso un cuerpo físico muy pequeño incapaz de albergar instrumentos de medición, como por ejemplo un elemento de un mecanismo.

1.3. Sistema de coordenadas

Una vez escogido un marco de referencia, el siguiente paso en el análisis del movimiento es fijar en él uno o varios sistemas de coordenadas, según convenga. Por ejemplo, para describir el curso de navegación de un barco en alta mar se usa el sistema de coordenadas geográficas (longitud y latitud

geográficas) fijado en el referencial Tierra.

Nosotros usaremos principalmente dos sistemas de coordenadas: el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas polares.

Un *sistema de coordenadas* consta de uno o más puntos (origen, polo) y direcciones especiales (ejes), y de un procedimiento para asignar coordenadas a los puntos del espacio. Cabe hacer notar que estos puntos y direcciones especiales se establecen con ayuda de puntos materiales inmutables y fácilmente distinguibles del referencial. Por ejemplo, una mesa de billar puede hacerla de marco de referencia para estudiar el movimiento de las bolas de billar. Podríamos definir un sistema cartesiano cuyo origen fuese una esquina de la mesa, y cuyos ejes fuesen dos bandas perpendiculares.

CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

2.1. Camino o Eje X

En el *movimiento rectilíneo*, como su nombre lo indica, el móvil recorre un camino recto. En la Fig. 1 se muestran unos ejemplos de movimientos rectilíneos.

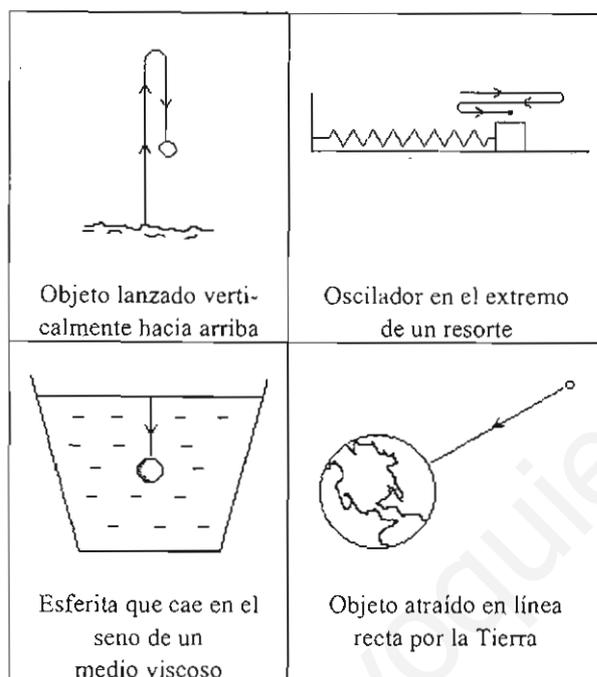


Fig. 1

Sobre el camino se finca un eje de coordenadas, que se suele designar en general como *Eje X*, dotado de un origen O y una escala de longitud. Podemos visualizar el *camino* y el eje X como la misma cosa.

La *trayectoria* de una partícula en movimiento rectilíneo puede ser un sólo segmento recto (*trayectoria simple*), como por ejemplo las de la esferita y el objeto atraído por la Tierra (Fig. 1), o bien puede constar de dos o más segmentos rectos solapados, como las del objeto lanzado verticalmente y el oscilador (Fig. 1). En la Fig. 2 se muestra una trayectoria con tres segmentos tales. Los tres están situados sobre el camino o eje X , pero los hemos trazado en la figura un poco separados con objeto de distinguirlos bien (lo mismo hicimos en la Fig. 1 para el objeto lanzado verticalmente y el oscilador).

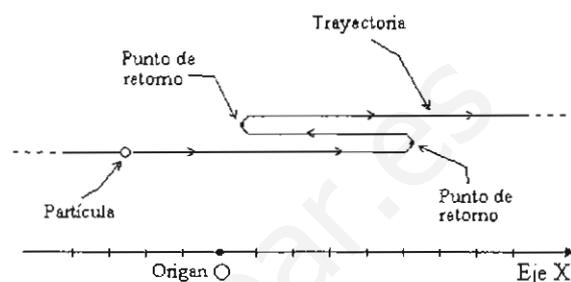


Fig. 2

Esta trayectoria corresponde a una partícula que inicialmente se mueve hacia la derecha; llega a un *punto de retorno*, donde invierte la dirección de su movimiento; prosigue por el mismo camino hasta un segundo punto de retorno; finalmente retoma su dirección inicial de movimiento. En los puntos de retorno la partícula se detiene, ya sea durante un rato, o bien "momentáneamente".

Puesto que una misma trayectoria puede ser recorrida de muchas maneras (en mayor o menor tiempo, con paradas en el camino, etc.), el movimiento no queda determinado únicamente por la trayectoria. Se requiere conocer además la correspondencia entre los puntos de la trayectoria y los tiempos cuando el móvil pasa por ellos.

2.2. Posición x y tiempo t

A la coordenada del móvil relativa al eje X se le nombra la *posición* del móvil. La denotaremos como en geometría analítica con el símbolo " x " (Fig. 3).

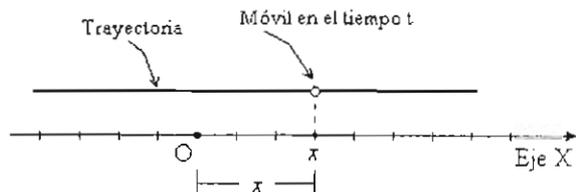


Fig. 3

En cuanto a la variable *tiempo*, la denotaremos con " t ". El valor de t es el tiempo transcurrido a partir

de algún momento (o "instante") prefijado. Usualmente esta referencia es el instante cuando se inicia el movimiento o nuestra observación del mismo, y se le hace corresponder convencionalmente al valor $t \equiv 0$. De este modo, t será siempre no-negativo¹: $t \geq 0$.

Usaremos las literales "t" y "x" para denotar el tiempo y la posición del *punto general* (variable, indeterminado, arbitrario) del movimiento. Estas cantidades son *variables*.

Un *punto particular* (determinado, específico) del movimiento corresponde a valores particulares de t y x . Estos puntos los distinguiremos mediante un número de orden 0, 1, 2, ..., n, ..., etc., conforme a orden temporal creciente. Así, el valor $t = 0$ se asignará al "*punto inicial*" o "*punto 0*". Los valores de t y x para el punto "i" se escribirán t_i y x_i , respectivamente. Estas cantidades son *constantes*. Un *punto particular arbitrario* es cualquiera de los puntos particulares que se hayan definido.

Observe la Fig. 4. Se muestra una trayectoria en la que hemos señalado 7 puntos particulares, numerados del 0 al 6. El reloj se echa a andar cuando el móvil está en su punto inicial 0, esto es, $t_0 = 0$ por definición. En tal punto el móvil tiene una posición simbolizada por " x_0 ".

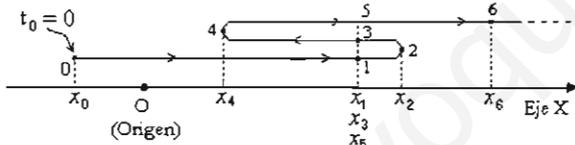


Fig. 4

Los puntos 2 y 4 son de retorno. Note que los puntos 1, 3 y 5 tienen la misma posición o coordenada:

$$x_1 = x_3 = x_5$$

Se diferencian, sin embargo, en sus tiempos:

$$t_5 > t_3 > t_1$$

Entiéndase bien el significado de la variable tiempo: dado que el reloj se echa a andar cuando la partícula está en el punto 0, tendremos que

¹ Si se desea podrían considerarse también tiempos negativos. Así, un tiempo $t = -5$ s se referiría a un instante que es 5 s anterior a $t = 0$. Sin embargo, en este texto supondremos que $t \geq 0$.

- t_3 es el tiempo invertido por el móvil entre los puntos 0 y 3.
- t_6 es el tiempo invertido por el móvil entre los puntos 0 y 6.
- $t_6 - t_3$ es el tiempo invertido entre los puntos 3 y 6.

Observe que $x_3 - x_1 = 0$, pero que $t_3 - t_1 \neq 0$.

2.3. Ecuación de movimiento

Obviamente, el móvil no puede hallarse en dos lugares distintos al mismo tiempo. Es decir, su posición x es una *función* del tiempo t . La ecuación que da a x como función de t se denomina *ecuación de movimiento*:

$$x = f(t)$$

En la "notación física" la relación anterior se escribe

Ecuación de movimiento

$$(1) \quad x = x(t)$$

Es decir, se usa la misma letra "x" para denotar tanto el valor numérico de la posición como la regla para asociar valores de t con x (sea una función lineal, cuadrática, sinusoidal, etc.).

Dado que hemos acordado escribir x_i para la posición en t_i , tenemos la siguiente equivalencia notacional:

$$x(t_i) \equiv x_i \quad (\text{o también } x(t = t_i) = x_i)$$

Con la ecuación de movimiento podemos calcular directamente dónde se encuentra el móvil en cualquier tiempo dado. Pero no solamente ello; dicha ecuación nos permitirá extraer todas las características del movimiento (como desplazamientos, velocidades, aceleraciones, etc.), como explicaremos más adelante.

La siguiente sería una posible ecuación de movimiento:

$$x = -5m + 8 \frac{m}{s} t + 12 \frac{m}{s^2} t^2 - \frac{m}{s^3} t^3$$

Al sustituir en ella algún valor del tiempo en segundos, obtenemos un valor de x expresado en metros. Por ejemplo, poniendo $t = 2$ s en la ecuación anterior,

$$x = -5\text{m} + 8\frac{\text{m}}{\text{s}}(2\text{s}) + 12\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(2\text{s})^2 - \frac{\text{m}}{3}(2\text{s})^3 = 51\text{m}$$

O sea, en $t = 2$ s el móvil se halla en $x = 51$ m.

Para mejor visualización se suele suprimir las unidades físicas, apuntándolas por separado:

$$x = -5 + 8t + 12t^2 - t^3$$

(t en segundos, x en metros)

2.4. Desplazamiento y distancia recorrida.

El desplazamiento es una cantidad que se refiere a *dos* puntos (o instantes) del movimiento.

Se define el **desplazamiento** del móvil en el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$, denotado con " Δx ", como la diferencia de posiciones:

Desplazamiento

$$(2) \quad \Delta x \equiv x(t_f) - x(t_i) = x_f - x_i$$

Desplazamiento es sinónimo de *cambio de posición*.

Un desplazamiento nulo en un intervalo $[t_i, t_f]$ puede resultar de dos maneras:

- Que la partícula no se haya movido en absoluto durante el intervalo considerado.
- Que la partícula, a partir de su posición x_i en $t = t_i$, haya recorrido una trayectoria que la llevó de regreso al mismo punto x_i en $t = t_f$.

En ambos casos, como $x_i = x_f$, el desplazamiento es $\Delta x = 0$.

Volvamos a la Fig. 4, reproducida en la Fig. 5, con el fin de captar gráficamente la noción de desplazamiento.

Consideremos el desplazamiento entre los puntos 1 y 4, dado por

$$\Delta x = x_4 - x_1$$

La *magnitud* de Δx es la distancia entre los puntos 1 y 4, medida a lo largo del Eje X, o sea $|x_4 - x_1|$. En cuanto al *signo* del desplazamiento, se puede obtener gráficamente imaginando un vector que vaya desde el punto inicial x_i hasta el punto final x_f . Si este vector apunta en el mismo sentido que el eje X, entonces el

desplazamiento es positivo, y es negativo en caso contrario. Entonces el desplazamiento entre los puntos 1 y 4 tiene signo negativo; el desplazamiento entre los puntos 1 y 6 es positivo, y entre los puntos 1 y 5 es cero.

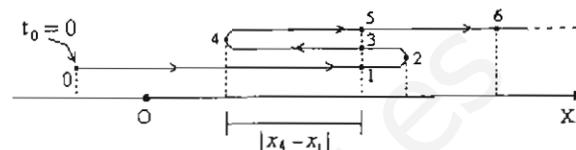


Fig. 5

La **distancia recorrida** por el móvil entre dos puntos (o instantes) del movimiento, que denotaremos con " D ", es la longitud total del recorrido del móvil entre ambos puntos. La distancia recorrida se mide a lo largo de la trayectoria, en una y otra dirección del Eje X. Si el móvil fuese un automóvil, es lo que marcaría el odómetro.

Así pues, para calcular la distancia recorrida digamos entre los puntos 1 y 4 de la Fig. 5, tendríamos que sumar los tramos de 1 a 2 y de 2 a 4. Está claro que esta distancia vendría dada por

$$(3) \quad D = |x_2 - x_1| + |x_4 - x_2|$$

Para calcular un desplazamiento no es necesario conocer los detalles de la trayectoria. Simplemente calculamos con la ecuación de movimiento las posiciones inicial y final y formamos su diferencia. En cambio, para calcular la distancia recorrida durante un lapso $[t_i, t_f]$ debemos averiguar si es que existen puntos de retorno entre t_i y t_f . En caso afirmativo, obtendríamos la distancia recorrida como una suma de valores absolutos de desplazamientos (análogamente a como en la expresión (3)), en la que figurarían las posiciones de cualesquiera puntos de retorno intermedios entre t_i y t_f .

Como vemos, no es lo mismo "desplazamiento" que "distancia recorrida". Sin embargo, existe un caso en que la *magnitud* de un desplazamiento sí es igual a la distancia recorrida.

Definiremos un **desplazamiento directo** como aquel que se verifica sin que el móvil invierta la dirección de su movimiento. Por ejemplo, en la Fig. 5 los siguientes desplazamientos son directos:

De 0 a 2 De 2 a 4 De 4 a 5

Si un desplazamiento es directo sí existe igualdad entre su magnitud y la distancia recorrida. Así, la distancia recorrida entre los puntos 2 y 4 es

$$D = |x_4 - x_2| = |\Delta x| \quad (\text{entre 2 y 4})$$

Entre los puntos 5 y 6 la distancia recorrida es

$$D = x_6 - x_5 = \Delta x \quad (\text{entre 5 y 6})$$

La *duración* " Δt " de un intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$ es el tiempo elapsado entre t_i y t_f , esto es,

Duración

(4) $\Delta t = t_f - t_i$

2.5. Gráfico x vs. t

Para darse una idea global del movimiento es conveniente graficar la ecuación de movimiento $x = x(t)$ en un espacio cartesiano abstracto con un eje de tiempos (Eje t) y un eje de posiciones (Eje X). Un punto de este espacio plano tiene abscisa "t" y ordenada "x", esto es, coordenadas cartesianas (t, x).

El *gráfico x vs t* es el lugar geométrico de los puntos (t, x) que satisfacen la ecuación $x = x(t)$.

Eche un vistazo al gráfico de la Fig. 6. Se supone que es el gráfico x vs t de alguna ecuación de movimiento cuya expresión matemática no viene al caso ahora. Notemos lo siguiente:

- El eje de tiempos tiene parte positiva solamente, ya que hemos acordado que $t \geq 0$.
- El movimiento tiene 3 puntos de retorno, marcados como puntos 1, 2 y 3. En los puntos de retorno la pendiente a la curva $x = x(t)$ es horizontal.
- La trayectoria del móvil entre $t_0 \equiv 0$ y t_4 consta de 4 segmentos solapados, que hemos trazado a la izquierda del Eje X. Recuerde que el Eje X es el camino del móvil. Como se ve, la trayectoria es una especie de imagen muy angosta (achatada horizontalmente $\rightarrow \leftarrow$) de la curva $x(t)$.
- Recíprocamente, la curva $x(t)$ se obtiene "desplegando" la trayectoria apropiadamente hacia la dirección del eje de tiempos. A mayor despliegue mayor será el tiempo de recorrido entre los puntos 0 y 4.

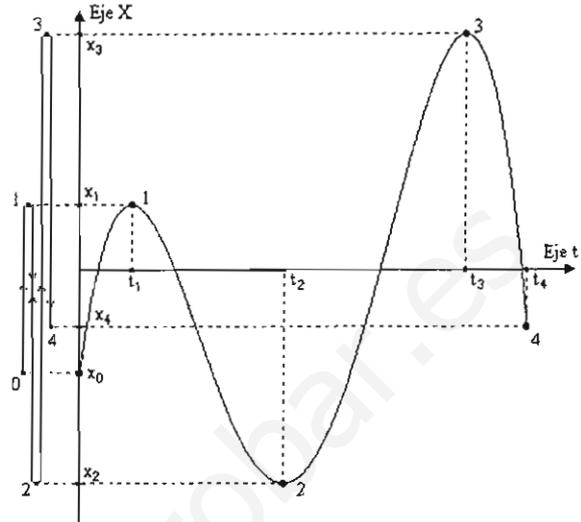


Fig. 6

- A cada punto de la *trayectoria* le corresponde uno y sólo un punto del gráfico $x(t)$ y recíprocamente. En cambio, a un mismo punto *del eje X* (o sea a una posición x_i) pueden corresponderle varios puntos del gráfico, correspondientes necesariamente a tiempos diferentes.
- Si la pendiente de la curva x vs t es positiva entonces el móvil se está moviendo en la dirección del Eje X (entre $t = 0$ y t_1 , y entre t_2 y t_3); si es negativa, se mueve en dirección contraria a la del Eje X (entre t_1 y t_2 , y entre t_3 y t_4).

La Fig. 7 muestra otro ejemplo de gráfico x vs t. Corresponde a la ecuación de movimiento de un oscilador armónico: $x = A_0 \text{ sen } \omega t$. El movimiento del oscilador, a lo largo del Eje X, está esquematizado a la izquierda de dicho eje.

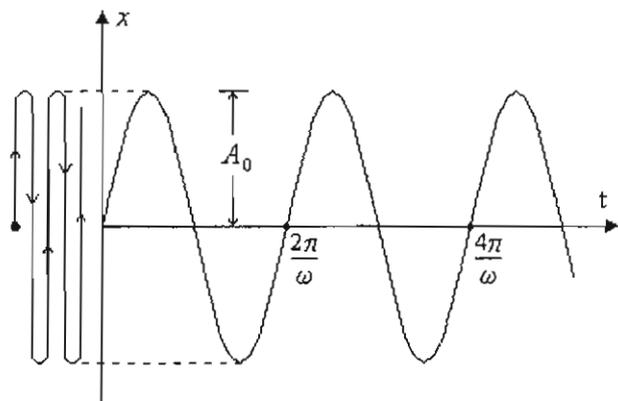


Fig. 7

2.6. Velocidad.

El concepto de velocidad se ofrece en una variedad de sabores. El de vainilla es el que se nos presenta por primera vez en la escuela secundaria, en la forma

$$(5) \quad \text{velocidad} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

Esta es la noción del ciudadano común, y se usa mucho también en el lenguaje técnico informal. Corresponde técnicamente al concepto de "rapidez media", que se define como sigue:

Rapidez media

La rapidez media " R_m " en un intervalo de tiempo dado es el cociente de la distancia recorrida durante este intervalo y la duración del mismo. En símbolos,

$$(6) \quad R_m = \frac{D}{\Delta t}$$

(D es la distancia recorrida, Δt es la duración del intervalo de tiempo considerado).

Ejemplo 1. Calculemos la rapidez media de un recorrido en automóvil México-Cuernavaca-México. Tomemos la distancia entre ambas ciudades igual a 60 km y supongamos que los viajes de ida y regreso duran cada uno 45 min.

Entonces la distancia recorrida es $D = 120$ km, y la duración del recorrido $\Delta t = 90$ min = 1.5 h, por lo que

$$R_m = \frac{120 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 2. Un móvil tiene la ecuación de movimiento siguiente:

$$x = 10t - t^2$$

(x en metros, t en segundos).

Calcular su rapidez media en el intervalo $[0 \text{ s}, 12 \text{ s}]$.

Hemos visto anteriormente que para calcular distancias recorridas usando la ecuación de movimiento debemos averiguar si el móvil tiene puntos de retorno en el intervalo considerado.

Como la función $x(t)$ es continua en el intervalo dado, tendrá un punto de retorno dentro del intervalo dado si su derivada es cero en algún punto dentro de dicho intervalo:

$$\frac{dx}{dt} = 10 - 2t = 0 \quad \text{para } t = 5 \in [0, 12]$$

(Observe el gráfico x vs t en la Fig. E2).

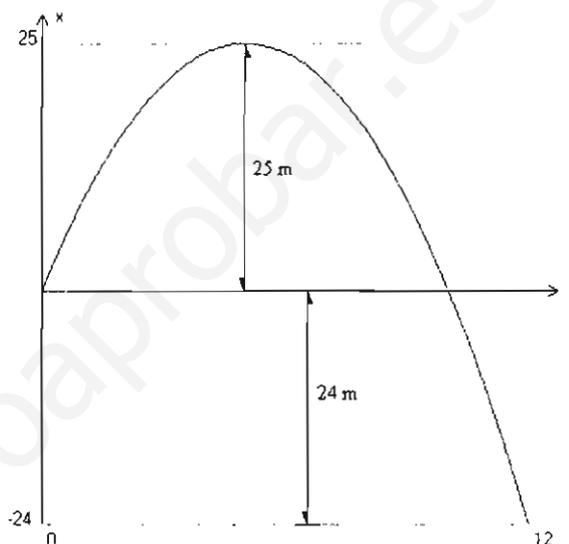


Fig. E2

En vista de que efectivamente existe un punto de retorno, calculemos las posiciones en $t = 0$, $t = 5$ y $t = 12$:

$$x(0) = 0, \quad x(5) = 25, \quad x(12) = -24 \quad (\text{m})$$

La distancia recorrida en $[0 \text{ s}, 12 \text{ s}]$ es entonces

$$D = |25 - 0| + |-24 - 25| = 74 \quad (\text{m})$$

y la rapidez media en $[0 \text{ s}, 12 \text{ s}]$ es

$$R_m = \frac{74 \text{ m}}{12 \text{ s}} = 6.16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Notemos que la rapidez media es un concepto asociado con un *intervalo de tiempo*.

Si al evaluar el cociente (7) usamos el desplazamiento Δx en lugar de la distancia recorrida D , obtenemos otro sabor de velocidad, denominado *velocidad media*:

Velocidad media

La velocidad media " v_m " en el intervalo $[t_i, t_f]$ es el cociente del desplazamiento " Δx " durante este intervalo y la duración " Δt " del mismo. En símbolos,

$$(7) \quad v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$(\Delta x = x(t_f) - x(t_i) = x_f - x_i, \quad \Delta t = t_f - t_i)$$

Ejemplo 3. La ecuación de movimiento de un móvil viene dada por

$$x(t) = -2t^3 + 4t^2 - t + 8$$

(x en metros, t en segundos).

Calcular la velocidad media en el intervalo de tiempo entre $t_1 = 2$ s y $t_2 = 10$ s.

Para calcular velocidades medias no es necesario obtener los puntos de retorno (si existen) en el lapso considerado, ya que lo que se requiere son únicamente las *posiciones* del móvil en los tiempos extremos del intervalo de tiempo dado.

Calculemos las posiciones del móvil en estos tiempos (valores en metros):

$$x_i = x(t = 2) = -2(2^3) + 4(2^2) - 2 + 8 = 6$$

$$x_f = x(t = 10) = -2(10^3) + 4(10^2) - 2 + 8 = -1594$$

Entonces el desplazamiento en el intervalo dado es

$$\Delta x = x_f - x_i = -1594 - 6 = -1600$$

Por otra parte la duración del intervalo dado es (en segundos):

$$\Delta t = 10 - 2 = 8$$

y entonces la velocidad media en el intervalo dado es

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-1600 \text{ m}}{8 \text{ s}} = -200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El concepto de velocidad media tiene poca utilidad práctica cuando se refiere a intervalos de tiempo muy grandes, sobre todo si el intervalo incluye puntos de retorno. Por ejemplo, al calcular la velocidad media en el recorrido México-Cuernavaca-México considerado en el Ejemplo 1 obtenemos el valor 0, puesto que el desplazamiento entre el punto de partida (México) y el punto final (México) es igual a 0. Lo que ocurre aquí es obviamente que el desplazamiento es positivo en el viaje de ida y negativo en el viaje de regreso, de modo que el desplazamiento total es igual a cero.

La velocidad media puede ser positiva, negativa o cero, según Δx sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente. Un valor 0 de la velocidad media indica ya sea que el móvil no se movió en absoluto, o bien que al final del lapso regresó al punto de partida.

En contraste, la rapidez media siempre es positiva, ya que la distancia recorrida D siempre es positiva. La única manera en que la rapidez media puede valer 0 es que el móvil no se haya movido en absoluto durante el lapso considerado.

Un uso importante del concepto de velocidad media es el de servir como "intermediario" en la obtención del concepto más general de velocidad: el de velocidad instantánea.

Existe un tercer sabor de velocidad, que es el más general: el de velocidad instantánea. Como su nombre lo indica, es una velocidad asociada ya no con un *intervalo de tiempo*, sino con un *instante*.

Para medir una velocidad media en el laboratorio es necesario medir la distancia que recorre el móvil en un lapso de tiempo dado. Si durante este lapso el móvil no invierte la dirección de su movimiento (o sea si su desplazamiento es *directo*), entonces la distancia recorrida D coincidirá con el desplazamiento Δx y la medición dará indistintamente la rapidez media R_m o la velocidad media v_m durante el lapso de medición.

Ahora bien, si la medición es reproducible y vamos reduciendo la duración Δt del intervalo de medición, y calculando las correspondientes velocidades medias, llegaremos a una situación en que reducciones ulteriores de Δt ya no afectan el valor de la velocidad media, dentro de cierto grado de precisión supuesto. Demos un ejemplo.

Ejemplo 4. En la Fig. E4 se muestra un arreglo experimental para medir la velocidad media de una bala, correspondiente a un cortísimo lapso de tiempo después de ser expulsada. La bala perfora dos hojas delgadas prácticamente sin alterar su velocidad; las hojas están fijadas a una flecha giratoria que efectúa "n" revoluciones por segundo ("n" se mide con un medidor de revoluciones o tacómetro acoplado a la flecha).

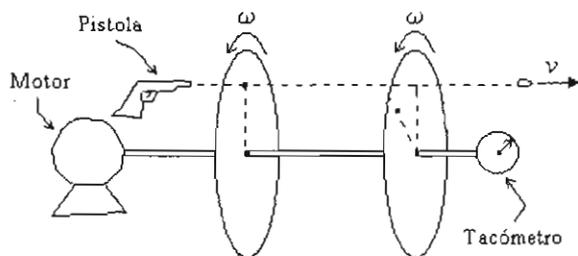


Fig. E4

Como veremos enseguida, el intervalo de tiempo de esta medición será del orden de 1 milésima de segundo:

El tiempo invertido entre las hojas se calcula a partir del ángulo que definen ambas perforaciones. Supongamos que la distancia entre las hojas se fija en 300 mm, que $n = 60$ revoluciones por segundo, y que el ángulo girado resultó de 20° . En virtud de que las hojas giran 360° en $\frac{1}{60}$ de segundo, girarán 1° en $\frac{1}{60} / 360$ de segundo y 20° en una fracción de segundo igual a $20 \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{360} = 0.00092$ s. Entonces la velocidad media es

$$v_m = \frac{0.3 \text{ m}}{0.00092 \text{ s}} = 326 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Repitamos la medición separando ahora las hojas en 200 mm. Obtendríamos para v_m prácticamente el mismo valor. Se justificaría decir entonces que el valor de 326 m/s es la velocidad de la bala en el instante en que es expulsada. Esta velocidad "extrapolada" se denomina *velocidad instantánea* (o velocidad, a secas). La denotaremos con el símbolo "v".

Hasta aquí lo que se refiere a la *medición* de una velocidad "instantánea". Analicemos ahora el proceso de *calcular* una velocidad instantánea para un

móvil cuya ecuación de movimiento se conoce. Para ilustrar, consideremos uno cuya ecuación de movimiento es

$$(8) \quad x(t) = -2t^3 + 4t^2 - t + 8$$

Traduzcamos a términos matemáticos el proceso de medición de la velocidad instantánea. Debemos calcular la velocidad media en un intervalo que empieza en un instante t cualquiera y cuya duración Δt es arbitraria, o sea el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Luego se va reduciendo Δt .

El desplazamiento en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ viene dado por la diferencia de posiciones en los extremos del intervalo, o sea $x(t + \Delta t) - x(t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= -2(t + \Delta t)^3 + 4(t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t) + 8 = \\ &= -2t^3 + 4t^2 - t + 8 + (-6t^2 + 8t - 1)\Delta t + \\ &\quad + (-6t + 4)(\Delta t)^2 - 2(\Delta t)^3 \end{aligned}$$

La velocidad media en el lapso $[t, t + \Delta t]$ es, por (7),

$$(9) \quad v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -6t^2 + 8t - 1 + (-6t + 4)\Delta t - 2(\Delta t)^2 = v_m(t, \Delta t)$$

Como vemos, v_m es una función tanto del instante inicial t como de la duración Δt . Ahora bien, la expresión (9) tiene sentido incluso para el valor $\Delta t = 0$, lo cual corresponde a "colapsar" el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ a su instante inicial "t". Poniendo $\Delta t = 0$ en (9) tenemos

$$(10) \quad v_m(t, 0) = -6t^2 + 8t - 1$$

Esta expresión no es propiamente una velocidad "media" porque ya no se refiere a un intervalo Δt , sino a un instante t . Es la *velocidad instantánea* correspondiente al instante t , denotada con "v":

$$(11) \quad v(t) = -6t^2 + 8t - 1$$

Si $x(t)$ es una función polinomial, como en (8), es válido poner la velocidad instantánea igual al valor

que toma la velocidad media $v_m(t, \Delta t)$ para $\Delta t = 0$:

$$\text{Velocidad instantánea} = v(t) = v_m(t, 0) \\ (\text{si } x(t) \text{ es polinomial})$$

Para otras clases de funciones $x(t)$ el insertar $\Delta t = 0$ en la expresión $v_m(t, \Delta t)$ puede conducir a una indeterminación del tipo "0/0". En estos casos se evalúa la velocidad instantánea en la forma

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(t, \Delta t)$$

o equivalentemente,

$$(12) \quad v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esta es la operación matemática de sacar la *derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo*:

Velocidad instantánea

$$(13) \quad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Es muy conveniente visualizar la cantidad "dx" que aparece en la derivada $v = \frac{dx}{dt}$ como un pequeño desplazamiento directo que tiene lugar en un corto tiempo "dt". Con esto la velocidad instantánea se interpretaría simplemente como el cociente de distancia recorrida y tiempo empleado. En relación con la medición de la velocidad de la bala, tratada en el Ejemplo 4, podríamos figurarnos que $dt = 0.00092$ s y $dx = 300$ mm.

Una velocidad instantánea positiva significa que el móvil se está moviendo en la dirección del eje X, puesto que $v > 0$ implica que $dx > 0$. Si la velocidad instantánea es negativa, el móvil se está moviendo en la dirección contraria a la del eje X.

Es muy conveniente utilizar flechas para indicar la dirección (y con ello el signo) de la velocidad instantánea, como en la Fig. 8.



Fig. 8

Naturalmente, si el eje X en esta figura se dirige hacia la izquierda, los signos de las velocidades se intercambiarían.

La magnitud de la velocidad instantánea v , denotada con $|v|$ o con "v", se denomina la *rapidez instantánea* (o simplemente la *rapidez*)

Rapidez (instantánea)

$$(14) \quad \text{Rapidez instantánea} = |v| = v$$

Ya no hay más sabores de velocidad. Recopilemos aquí las diversas nociones que hemos introducido:

$$\text{Rapidez media} \quad R_m = \frac{D}{\Delta t}$$

$$\text{Velocidad media} \quad v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{Velocidad (instantánea)} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Rapidez (instantánea)} \quad |v| = v = \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

Cuando usemos los términos "velocidad" y "rapidez", a secas, nos estaremos refiriendo a la velocidad y rapidez instantáneas.

2.7. Interpretación gráfica de las velocidades media e instantánea

La velocidad media v_m y la velocidad instantánea v poseen interpretaciones geométricas simples en el gráfico x vs t . De la expresión general $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ vemos que la velocidad media es la pendiente de la recta que conecta los puntos $P(t, x)$ y $Q(t + \Delta t, x + \Delta x)$ en el espacio cartesiano t - x . Esta recta se denomina *secante* (Fig. 9).

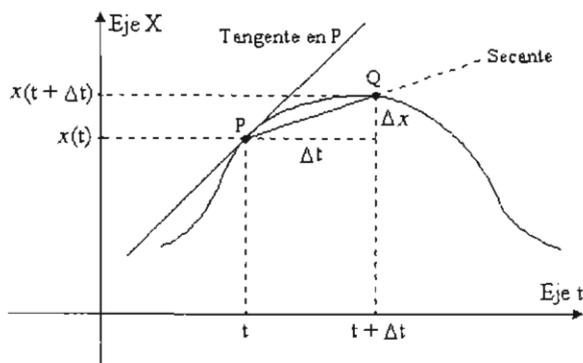


Fig. 9. (Espacio cartesiano t-x).

Hacer tender $\Delta t \rightarrow 0$ equivale a ir acercando el punto Q cada vez más a P. La secante se va pareciendo cada vez más a la recta tangente a la curva $x = x(t)$ en P. Por consiguiente,

La velocidad instantánea en P es igual a la pendiente de la tangente trazada a la curva x vs t en el punto P.

En un máximo o mínimo de la curva x vs t la tangente es horizontal, paralela al eje t . Entonces su pendiente es cero, lo cual corresponde a velocidad instantánea cero. Por otra parte, si el gráfico $x(t)$ posee un tramo recto, en ese tramo la velocidad instantánea es constante.

De esta manera, el gráfico de la ecuación de movimiento $x = x(t)$ da información no solamente sobre las posiciones del móvil, sino también sobre las velocidades medias e instantáneas, a través de las pendientes.

Ejemplo 5. Describir grosso modo el movimiento cuyo gráfico x vs t es el mostrado en la Fig. E5.

Imaginemos que el móvil se desplaza a lo largo del Eje X.

El móvil parte del punto $x = x_A$, situado sobre el Eje X. En este punto la pendiente del gráfico es positiva, de tal modo que la velocidad es positiva, es decir, el móvil se mueve hacia la dirección +X.

A partir del punto A la velocidad va disminuyendo (la pendiente del gráfico va disminuyendo) hasta hacerse nula en el punto B, donde el móvil se detiene.

Entre los tiempos t_B y t_C el gráfico es una recta paralela al Eje t . Durante este lapso el móvil permanece en reposo en el punto $x = x_B = x_C$.

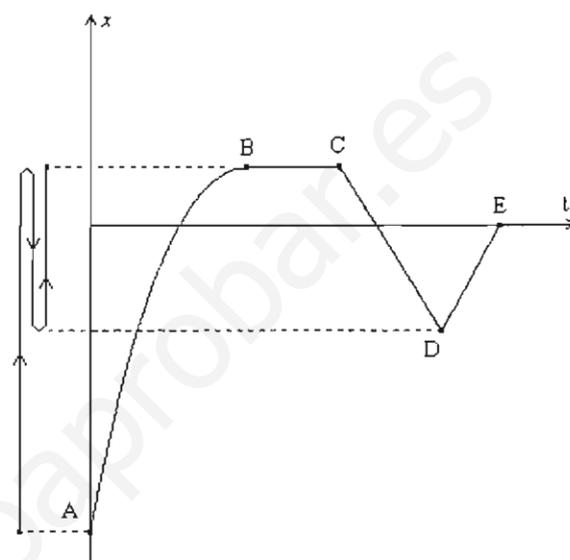


Fig. E5

En $t = t_C$ el móvil se desplaza en dirección -X (velocidad negativa), arribando al punto D, donde varía su velocidad abruptamente de un valor negativo a uno positivo. Entre $t = t_D$ y $t = t_E$ el móvil se mueve en la dirección +X.

2.8. La velocidad instantánea es una “tasa”

Una velocidad instantánea de, digamos, 8 metros por segundo, ¿significa que el móvil, desde el instante a que se refiere dicha velocidad, recorrerá 8 metros en un segundo? ¡No!

No es válido proyectar indiscriminadamente la velocidad instantánea. Todas las derivadas matemáticas son tasas. En particular, la velocidad instantánea es la tasa a la que el móvil gana distancia en relación con el tiempo.

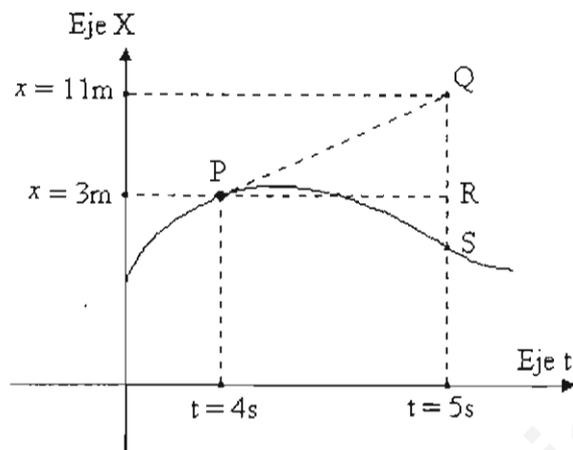


Fig. 10

Examinemos el asunto gráficamente. En la Fig. 10 está el gráfico $x-t$ de algún móvil. Como vemos, la posición del móvil en $t = 4$ s es $x = 3$ m. La recta PQ se supone que es la tangente a la curva en el punto P. La pendiente de esta recta tangente, como dijimos, es igual a la velocidad instantánea en P, o sea

$$v_P = \frac{QR}{PR} = \frac{8 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si a partir de P el móvil recorriera 8 m en 1 s, arribaría al punto Q, en $x = 11$ m. Esto es evidentemente falso. El móvil llega realmente al punto S en $t = 5$ s. Solamente si el gráfico x vs t es una recta es válido proyectar para tiempos arbitrariamente grandes. Este es el caso para el “movimiento uniforme”, que trataremos a continuación.

2.9. Movimiento uniforme

En el movimiento más simple de todos, la posición x es una función lineal del tiempo t :

$$(15) \quad x = A + B t \quad (A, B \text{ constantes})$$

La interpretación física de las constantes A y B es inmediata:

Poniendo $t = 0$ en (15) obtenemos

$$x_0 \equiv x(t=0) = A$$

Sacando la derivada de $x(t)$ con respecto a t obtenemos

$$v = B \quad (\text{la velocidad es constante}).$$

Luego, (15) se escribe mejor en la forma más reveladora siguiente:

Ecuación del movimiento uniforme

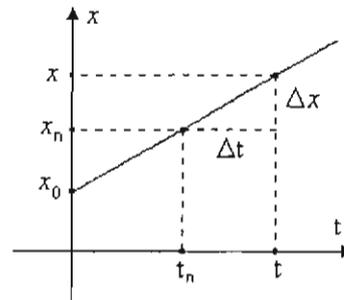
$$(16) \quad x = x_0 + v t$$

Esta clase de movimiento se denomina *uniforme*. Se verifica en línea recta con velocidad constante v . Tiene las siguientes propiedades:

- Su gráfico x vs t es una recta (Ejemplo: Fig. 11).
- La velocidad instantánea, que es constante, coincide con la velocidad media calculada *con base en cualquier intervalo de tiempo* $[t, t + \Delta t]$:

$$(17) \quad v = v_m \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\Delta t \text{ arbitrario})$$

- En el movimiento uniforme todos los desplazamientos son *directos*, de modo que la magnitud del desplazamiento, $|\Delta x|$, coincide con la distancia recorrida D .

Fig. 11. Gráfico x vs t de un movimiento uniforme.

Los problemas sobre movimiento uniforme son muy simples. Se pueden resolver partiendo de la ecuación de movimiento (16), o sea

$$[(16)] \quad x = x_0 + v t$$

Los parámetros x_0 y v pueden ser conocidos o no. La estrategia consiste en aplicar (16) para determinar estos parámetros, tras lo cual aplicamos la actualizada ecuación de movimiento para calcular las demás incógnitas.

Alternativamente se aplica la relación

$$[(17)] \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a un intervalo conveniente.

Nota importante

Tenga presente que la velocidad instantánea se puede calcular como el cociente del desplazamiento Δx y la duración Δt , como en (17), *solamente si el movimiento es uniforme* (pues solamente en este caso la velocidad instantánea coincide con la velocidad media). En el caso general habría que sacar la *derivada* de la posición con respecto al tiempo.

Ejemplo 6. Una partícula ejecuta un movimiento uniforme. Se sabe que a los tiempos 2 s y 6 s les corresponden las posiciones -6 m y 14 m, respectivamente. Obtener la ecuación de movimiento. ¿Dónde se halla la partícula en $t = 9$ s?

Planteemos la ecuación de movimiento en la forma

$$(r1) \quad x = x_0 + v t$$

Aparecen aquí las incógnitas x_0 y v .

Sabemos que en $t = 2$ s, $x = -6$ m. Pongamos estos valores en la ecuación (r1):

$$(r2) \quad -6 = x_0 + v \cdot 2$$

También sabemos que en $t = 6$ s, $x = 14$ m:

$$(r3) \quad 14 = x_0 + v \cdot 6$$

Resolviendo simultáneamente (r2) y (r3) hallamos

$$x_0 = -16 \quad v = 5$$

La ecuación de movimiento es entonces

$$(r4) \quad x = -16 + 5 t$$

Ahora podemos obtener la posición en $t = 9$ s:

$$x(t = 9) = -16 + 5 \cdot 9 = 29 \quad (\text{m})$$

Método alternativo.

En virtud de que conocemos las posiciones correspondientes a dos valores del tiempo, podemos calcular directamente la velocidad.

La duración del lapso dado [2 s, 6 s] es

$$\Delta t = 6 \text{ s} - 2 \text{ s} = 4 \text{ s}$$

Por otra parte, el desplazamiento en este lapso es

$$\Delta x = 14 \text{ m} - (-6 \text{ m}) = 20 \text{ m}$$

Así que la velocidad es

$$(r5) \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escribamos ahora la ecuación de movimiento en la forma (16), insertando el valor conocido de v :

$$(r6) \quad x = x_0 + 5 t$$

Para calcular x_0 usamos aquí el dato $x(t = 2) = -6$:

$$-6 = x_0 + 5 (2)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = -16 \quad (\text{posición inicial})$$

Etc.

<Nota. Alternativamente podemos usar en (r6) el dato $x(t = 6) = 14$. Llegaríamos al mismo valor para x_0 .>

Ejemplo 7. Un automóvil realiza un movimiento uniforme con velocidad de $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿Qué distancia recorre en 5 segundos?

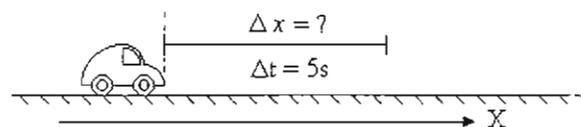


Fig. E7

En el movimiento uniforme todo es color de rosa y la distancia recorrida es el producto de la velocidad y el tiempo empleado. Para demostrarlo tomemos en cuenta que en esta clase de movimientos se tiene

$$(r1) \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(donde Δx y Δt son el desplazamiento y la duración correspondientes a un intervalo de tiempo *de cualquier tamaño*). Por otra parte, como todos los desplazamientos en esta clase de movimiento son directos, se cumple que

$$|\Delta x| = D$$

y entonces de (r1) tenemos

$$(18) \quad D = v \Delta t \quad (\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo})$$

donde $v = |v| = \text{rapidez}$. La fórmula (18) nos es familiar desde la escuela secundaria.

Nota. Un poco más adelante explicaremos cómo calcular distancias recorridas cuando el movimiento no es uniforme. Veremos que hay que efectuar una integración.

Hagamos el cálculo:

$$D = v \Delta t = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 5 \text{ s} = 36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 50 \text{ m}$$

¿Y si el movimiento no fuera uniforme, podríamos calcular la distancia con los datos proporcionados? No.

2.10. Aceleración.

Si la velocidad de un móvil va cambiando, el móvil está *acelerado*. Se define la aceleración "a" de un movimiento como el ritmo de variación de la velocidad, en la forma

Aceleración

$$(19) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

En general la aceleración de un movimiento es función del tiempo, es decir, la velocidad no va cambiando siempre a la misma tasa en el transcurso del tiempo.

En el caso especial del movimiento uniforme la aceleración del movimiento obviamente es cero, ya que la velocidad es constante.

Si la aceleración es constante el movimiento se denomina *uniformemente acelerado*: la velocidad disminuye siempre en la misma cuantía cada unidad de tiempo. Demos un ejemplo.

Supongamos que la aceleración de un móvil es $a = -5 \text{ m/s}^2$, y que en $t = 0$ el móvil posee velocidad inicial $v = 20 \text{ m/s}$. El valor constante " $a = -5 \text{ m/s}^2$ " significa que la velocidad va cambiando a razón de -5 m/s cada segundo; por lo tanto, en los 4 segundos sucesivos a partir de $t = 0$ toma los valores

$$v = 15 \text{ m/s en } t = 1 \text{ s}$$

$$v = 10 \text{ m/s en } t = 2 \text{ s}$$

$$v = 5 \text{ m/s en } t = 3 \text{ s}$$

$$v = 0 \text{ m/s en } t = 4 \text{ s}$$

Ahora bien, el valor $v = 0$ en $t = 4 \text{ s}$ no significa que el móvil se detiene permanentemente. A partir de $t = 4 \text{ s}$ la velocidad toma los valores

$$v = -5 \text{ m/s en } t = 5 \text{ s}$$

$$v = -10 \text{ m/s en } t = 6 \text{ s}$$

$$v = -15 \text{ m/s en } t = 7 \text{ s}$$

$$v = -20 \text{ m/s en } t = 8 \text{ s}$$

Etc.

Como vemos, la velocidad sigue *disminuyendo* a razón de 5 m/s cada segundo. Estas velocidades negativas indican que el móvil invirtió su dirección de movimiento en $t = 4 \text{ s}$, tiempo cuando su velocidad llegó a anularse (momentáneamente).

Un ejemplo típico de esta clase de movimiento es el que realiza un objeto que sube o cae verticalmente bajo la única acción de su peso cerca de la superficie terrestre. Se le llama *movimiento de caída libre*, y su aceleración, llamada *aceleración de caída libre* o *aceleración de la gravedad*, vale aproximadamente

$$a = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Este valor se suele abreviar con el símbolo "g".

Cuidese del siguiente error común:

¡Error! "Cuando un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba, la aceleración vale cero en el punto de máxima altura."

Lo que es cero allí es la *velocidad*, no la aceleración. Al llegar el cuerpo a su punto de máxima altura su velocidad *sigue cambiando*, a razón de 9.8 m/s cada segundo.

Algunos otros errores y confusiones que surgen infortunadamente en el análisis del movimiento rectilíneo provienen de no caer en la cuenta que la velocidad y la aceleración son cantidades *con signo algebraico*. Al respecto, he aquí una pregunta que causa extrañeza a primera vista:

¿Es posible que mientras la *velocidad* de un móvil vaya disminuyendo, su *rapidez* (o sea la magnitud de la velocidad) vaya aumentando?

La respuesta es: sí es posible. Basta con dar un ejemplo numérico: si la velocidad pasa del valor $v = -4 \text{ m/s}$ al valor $v = -10 \text{ m/s}$, tenemos una *disminución* de la velocidad, puesto que se hace más negativa. Sin embargo, la rapidez pasa del valor $|v| = 4 \text{ m/s}$ al valor $|v| = 10 \text{ m/s}$, o sea, experimenta un *aumento*. En este caso, aunque la velocidad v del móvil va disminuyendo, ¡el móvil se va moviendo más rápidamente! Esta circunstancia no causa grandes problemas en la práctica, empero.

Una aceleración positiva se representa mediante un vector que apunta en el mismo sentido que el Eje X, y una negativa mediante un vector dirigido en sentido contrario al Eje X.

Para interpretar el signo de la velocidad conviene compararlo con el signo de la aceleración. Veamos.

Si las flechas que representan la velocidad y la aceleración tienen la misma dirección, como en los casos ilustrados en la Fig. 12, entonces la rapidez del móvil va aumentando. En estos dos casos v y a son ambas positivas o ambas negativas.

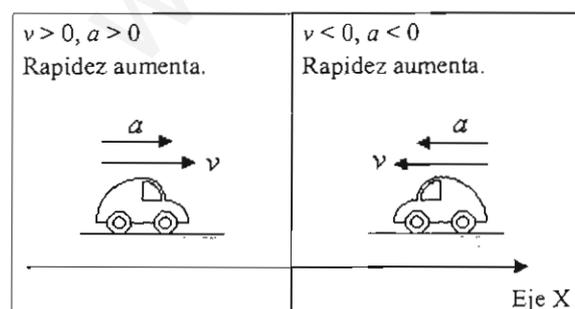


Fig. 12

Por otra parte, si v y a tienen signos distintos, como en los casos ilustrados en la Fig. 13, la rapidez del móvil va menguando.

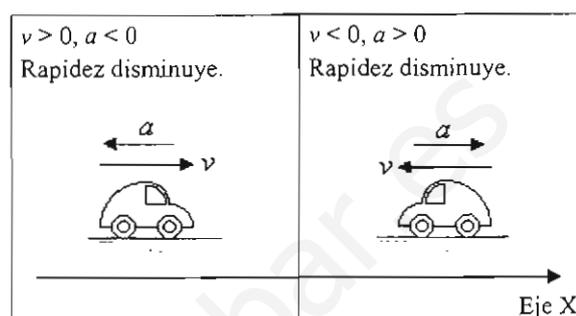


Fig. 13

Para evitar errores de signos, se recomienda incluir en las figuras las flechas asociadas a las velocidades y aceleraciones.

Cuando la velocidad y la aceleración apuntan en direcciones opuestas decimos que el móvil está *desacelerado*. En estos casos se le llama alternativamente *desaceleración* al valor numérico de la aceleración, y en algunos casos a la *magnitud* de la aceleración. Por ejemplo, si se dice que un móvil tiene en un momento dado una velocidad de 10 m/s y una desaceleración de 2 m/s², entonces la aceleración del móvil es $a = -2 \text{ m/s}^2$ (signo opuesto al de velocidad).

La relación entre la aceleración y las variaciones de la rapidez se comprenden mejor a la luz de la segunda ley de Newton. Ésta relaciona la aceleración directamente con la fuerza total que actúa sobre el móvil, en la forma

$$F = m a$$

(Fuerza = Masa \times Aceleración)

Según esta ley los signos de a y F son iguales, ya que la masa "m" siempre es positiva. Así que si un móvil posee aceleración entonces debe existir sobre él una fuerza neta *en la misma dirección que la aceleración*. Apliquemos esto a los casos de la Fig. 12; en ambos existe una fuerza sobre el automóvil en la misma dirección que la velocidad, que provoca un aumento de la rapidez. En cambio, en los casos de la Fig. 13 la fuerza se opone a la velocidad (el móvil es "refrenado") por lo que la rapidez va disminuyendo.

Ejemplo 8. La ecuación de movimiento de un móvil es la función cuadrática del tiempo

$$x = A + Bt + Ct^2$$

donde A , B y C son constantes. Interpretar físicamente estas constantes.

Poniendo en la ecuación dada $t = 0$, tiempo que suponemos corresponde al punto inicial del movimiento, designado como "Punto 0", tenemos

$$x(t = 0) \equiv x_0 = A$$

Hemos interpretado así la constante A : es la posición del móvil en el instante inicial $t = 0$.

Derivemos $x(t)$ con respecto al tiempo para obtener la velocidad como función del tiempo:

$$v = B + 2Ct$$

Poniendo aquí $t = 0$ obtenemos $v(t = 0) \equiv v_0 = B$.

Finalmente, la aceleración es la derivada de la velocidad, o sea

$$a = 2C \quad (\text{constante})$$

de donde $C = a/2$. Entonces la ecuación dada puede ponerse también en la forma más descriptiva siguiente:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

En el gráfico x vs t , los puntos (t, x) donde la aceleración vale cero son *puntos de inflexión*. En estos puntos la pendiente a la curva (es decir, la velocidad) pasa de ir aumentando a ir disminuyendo, o viceversa.

Ejemplo 9. Analizar en el intervalo $[0 \text{ s}, 8 \text{ s}]$ el movimiento rectilíneo descrito por la ecuación de movimiento

$$x = -t^3 + 14t^2 - 59t + 70$$

(x en metros, t en segundos)

Estudie el gráfico x - t del movimiento en la Fig. 9a. Tenga presente que el movimiento ocurre a lo largo del eje X . La trayectoria del móvil está dibujada a la izquierda del eje X con línea gruesa.

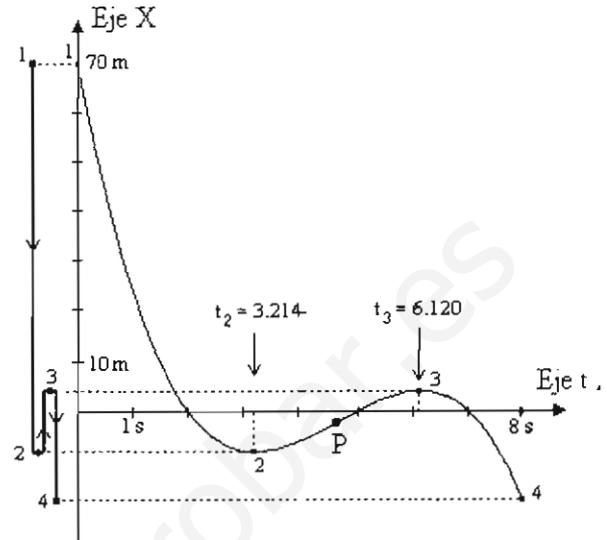


Fig. E9a

Derivemos la ecuación $x(t)$ para obtener la velocidad como función del tiempo:

$$v = -3t^2 + 28t - 59$$

La velocidad es cero para

$$t = 3.214 \quad \text{y} \quad t = 6.120,$$

tiempos que corresponden a valores extremos de la función $x(t)$, donde la tangente a la curva $x(t)$ es horizontal. En este ejemplo se trata de puntos de retorno, si bien podría tratarse también de puntos de inflexión en otros casos.

La aceleración viene dada por la derivada de la velocidad:

$$a = -6t + 28$$

Esta se hace cero en $t = 4.67$. Corresponde al punto "P" del gráfico. En este punto la velocidad pasa de ir aumentando a ir disminuyendo (¡algebraicamente!). Efectivamente, la pendiente de la curva $x(t)$ va aumentando desde el valor $v = -59$ en $t = 0$ hasta el valor $v = 6.33$ en $t = 4.67$. En este momento empieza a disminuir desde el valor $v = 6.33$ hasta el valor $v = -27$ en $t = 8$.

La rapidez disminuye entre los puntos 1 y 2, de 59 a 0; aumenta de 2 al punto P, de 0 a 6.33; luego disminuye de P a 3, de 6.33 a 0, y aumenta de 3 a 4, de 0 a 27.

La distancia recorrida por el móvil entre los instantes $t_1 = 0$ y $t_4 = 8$ s es

$$|\Delta x(1 \rightarrow 2)| + |\Delta x(2 \rightarrow 3)| + |\Delta x(3 \rightarrow 4)| = \\ = 78.21 + 12.27 + 22.06 = 112.54$$

Esta se calculó de los valores $x_1 = 70$, $x_2 = -8.21$, $x_3 = 4.06$ y $x_4 = -18$.

En la Fig. E9b se muestran superpuestos los gráficos de posición y velocidad contra el tiempo. Se advierte que cuando la velocidad es máxima la aceleración es cero, y que cuando la velocidad es cero la posición tiene un máximo o un mínimo.

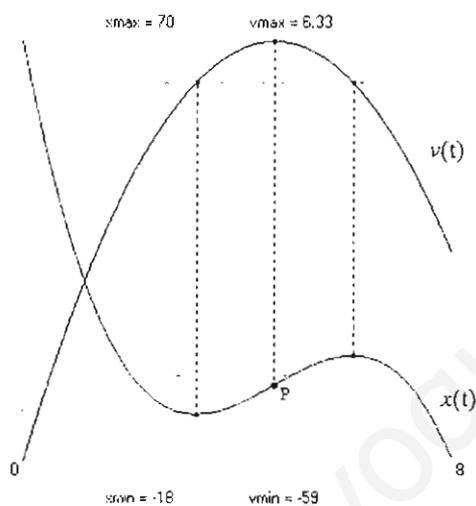


Fig. E9b

Ejemplo 10. Una partícula ejecuta un movimiento de acuerdo con la ecuación

$$x = 3t^2 e^{-2t}$$

(x en metros, t en segundos)

Graficar la ecuación. Calcular la velocidad y aceleración para cualquier tiempo t , y los tiempos en que estas cantidades son cero.

El gráfico x vs t se muestra en la Fig. E10.

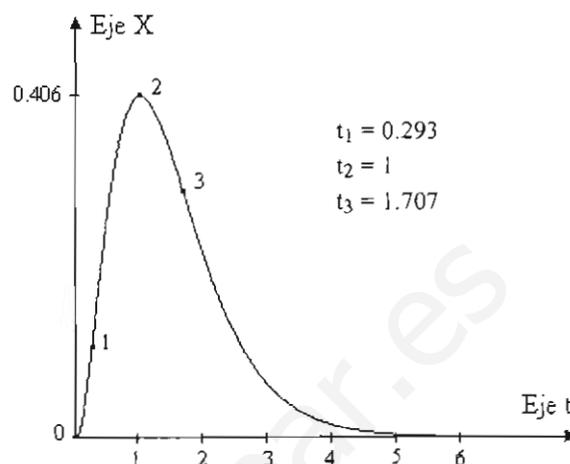


Fig. E10

Se tiene

$$v = \frac{dx}{dt} = 6e^{-2t}(t - t^2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6e^{-2t}(1 - 4t + 2t^2)$$

La velocidad es cero en $t = 0$ y en $t = 1$ (el máximo absoluto de $x(t)$).

La aceleración es cero en $t = 0.293$ y $t = 1.707$, correspondientes a los puntos 1 y 3 del gráfico, donde la pendiente pasa de ser creciente a decreciente o viceversa.

La rapidez del móvil aumenta en los lapsos $[0, 0.293]$ y $[1, 1.707]$, y disminuye en los lapsos $[0.293, 1]$ y $[1.707, \infty)$.

En la vecindad de los puntos 1 y 3 la curva x vs t se asemeja mucho a una recta. La razón es que muy cerca de estos puntos la aceleración es casi cero, o sea el movimiento es prácticamente uniforme allí, y como sabemos, el gráfico x vs t de un movimiento uniforme es una recta.

Ejemplo 11. Un oscilador armónico simple tiene por ecuación de movimiento la siguiente:

$$(r1) \quad x = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde ω y δ son constantes (positivas o negativas). Demostrar que:

(a) La velocidad varía periódicamente entre los valores límites $-\omega A$ y ωA .



2893936

(b) Se cumple la siguiente relación entre la posición y la aceleración:

$$a = -\omega^2 x$$



Fig. E10

Derivemos $x(t)$ para obtener $v(t)$:

$$v = -\omega A \text{ sen}(\omega t + \delta)$$

Como la función "seno" varía periódicamente entre los valores -1 y $+1$, la velocidad variará entre los valores $-\omega A$ y ωA .

Volvamos a derivar para obtener la aceleración,

$$a = -\omega^2 A \text{ cos}(\omega t + \delta)$$

Comparando (r2) con (r1) tenemos que

$$a = -\omega^2 x$$

Nota. De acuerdo con la segunda ley de Newton, $F = ma$, la fuerza sobre el oscilador es $F = -m\omega^2 x$, o bien $F = -kx$, donde k es la constante $m\omega^2$.

2.11*. Representaciones alternativas del movimiento.

La ecuación de movimiento, $x = x(t)$, contiene información completa sobre el movimiento. De ella podemos calcular la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

Existen otros modos de determinar un movimiento. Podríamos especificar la velocidad v como función del tiempo, o bien como función de la posición. También podríamos dar la aceleración como función de una cualquiera de t , x ó v .

Cantidad	Función de
x	t
v	t ó x
a	t , x ó v

En forma todavía más general, la velocidad puede darse

como función de ambas t y x , o sea $v = v(t, x)$, y la aceleración como función de las tres: $a = a(t, x, v)$. Sin embargo, no trataremos estos casos aquí.

Veamos algunos ejemplos.

Dada $x(t)$, sabemos como pasar a $v(t)$, y de ésta a $a(t)$: derivamos con respecto al tiempo. El proceso inverso, o sea pasar de $a(t)$ a $v(t)$ y de ésta a $x(t)$, se efectúa mediante la operación de "integración".

Para obtener $v(t)$ a partir de $a(t)$ es preciso conocer el valor " v_n " de la velocidad para algún tiempo particular " t_n ".

Ejemplo 12. La aceleración de un móvil como función del tiempo viene dada por la expresión

$$a(t) = 4 - t + 5t^2$$

Dado que en $t = 2$ la velocidad es $v = 6$, obtener $v(t)$.

He aquí un procedimiento formal para resolver. Partimos de la definición de aceleración como la derivada de la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = 4 - t + 5t^2$$

Luego "separamos las variables":

$$dv = (4 - t + 5t^2) dt$$

Seguidamente integramos en ambos lados de la última relación:

$$\int_6^v dv = \int_2^t (4 - t + 5t^2) dt$$

Fíjese en los límites de la integral. Los límites superiores son valores indefinidos (" v " y " t ") de las respectivas variables de integración. Los límites inferiores son valores particulares "apareados" de dichas variables (al límite $t = 2$ le corresponde el límite $v = 6$, según el dato).

Finalmente efectuamos las integrales definidas:

$$\{v\}_6^v = \left[4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 \right]_2^t$$

$$v - 6 = 4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 - \left[4(2) - \frac{1}{2}(2^2) + \frac{5}{3}(2^3) \right]$$

$$\Rightarrow v = -\frac{40}{3} + 4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3$$

Los pasos seguidos en este ejemplo para obtener $v(t)$ a partir de $a(t)$ los podemos resumir en esta fórmula:

Obtener $v(t)$ a partir de $a(t)$

$$(20) \quad v(t) = v_n + \int_{t_n}^t a(t) dt \quad \text{donde } v_n = v(t_n)$$

Para obtener $x(t)$ a partir de $v(t)$ es preciso conocer el valor " x_n " de la posición para algún instante particular " t_n ".

Ejemplo 13. Para el móvil del ejemplo anterior, obtener $x(t)$ sabiendo que en $t = 1$, $x = -3$.

El procedimiento es análogo al del ejemplo 11.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{40}{3} + 4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3$$

$$dx = \left(-\frac{40}{3} + 4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 \right) dt$$

$$\int_{-3}^x dx = \int_1^t \left(-\frac{40}{3} + 4t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 \right) dt$$

$$[x]_{-3}^x = \left[-\frac{40}{3}t + 2t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{12}t^4 \right]_1^t$$

$$\Rightarrow x = 130 - \frac{40}{3}t + 2t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{12}t^4$$

El procedimiento de este ejemplo se resume así:

Obtener $x(t)$ a partir de $v(t)$.

$$(21) \quad x(t) = x_n + \int_{t_n}^t v(t) dt \quad \text{donde } x_n = x(t_n)$$

Ejemplo 14. Dada la aceleración como función del tiempo en la forma

$$a = \frac{4}{(9-t)^2} \quad (t \in [0, 5])$$

obtener $v(t)$ y $x(t)$, con los siguientes datos adicionales:

$$x(t=0) = 5 \quad v(t=0) = -8$$

De acuerdo con (20), pongamos como integrando la expresión de $a(t)$:

$$v(t) = -8 + \int_0^t \frac{4}{(9-t)^2} dt = -8 + \left[\frac{4}{9-t} \right]_0^t$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{76}{9} + \frac{4}{9-t}$$

Usemos ahora la fórmula (21) para calcular $x(t)$:

$$x(t) = 5 + \int_0^t \left(-\frac{76}{9} + \frac{4}{9-t} \right) dt$$

$$x(t) = 5 + \left[-\frac{76}{9}t - 4 \ln(9-t) \right]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = 5 - \frac{76}{9}t - 4 \ln \frac{9-t}{9}$$

Como sabemos, la aceleración viene dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Existe otra fórmula, muy útil, que se obtiene aplicando la regla de la cadena en la siguiente forma:

$$(22) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

La aplicaremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15. Un punto se mueve a lo largo del Eje X de acuerdo con la ley

$$v = 2x + 3$$

En $t = 1$ el punto pasa por el origen. ¿Cuánto vale su aceleración entonces? ¿Cuánto tiempo le lleva desplazarse desde el origen hasta el punto $x = 13.5$?

Calculemos la aceleración usando la relación

$$a = v \frac{dv}{dx} :$$

$$a(v) = v \frac{dv}{dx} = (2x + 3) \cdot 2 = 4x + 6$$

En el origen ($x = 0$) la aceleración vale 6.

Para obtener la relación entre la posición y el tiempo, usamos la definición de velocidad $v = dx/dt$ e integramos. Pongamos $t_1 \equiv$ (tiempo cuando el punto está en $x = 13.5$).

$$v = \frac{dx}{dt} = 2x + 3$$

$$\frac{dx}{2x+3} = dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{13.5} \frac{dx}{2x+3} = \int_1^{t_1} dt$$

(Observe la correspondencia de valores en los límites de las integrales: cuando $t = 1$, $x = 0$, y cuando $t = t_1$, $x = 13.5$).

Encontramos

$$t_1 - 1 = \frac{1}{2} \ln(2x+3) \Big|_0^{13.5} =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(2 \cdot 13.5 + 3) - \ln(3)] = \frac{1}{2} \ln(10) = 1.151$$

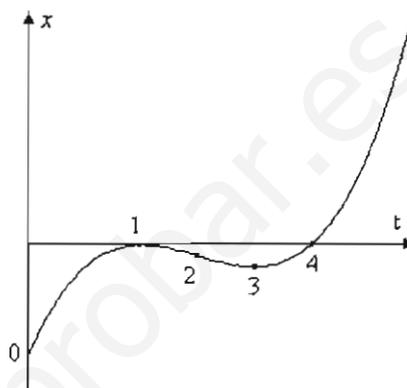
2.12. Problemas

1. Para un movimiento uniforme se sabe que el móvil se halla en $x = 3 \text{ m}$ en $t = 5 \text{ s}$, y en $x = 8 \text{ m}$ en $t = 2.5 \text{ s}$. ¿Dónde se encontrará en $t = 5 \text{ s}$?

2. Un movimiento se rige por la ecuación

$$x = (t - 2)^2(t - 5)$$

cuyo gráfico se muestra abajo.



¿En cuál de los puntos 1,2,3,4 la pendiente pasa de creciente a decreciente o viceversa (punto donde la aceleración es cero)? ¿En qué puntos es nula la velocidad? ¿La posición?

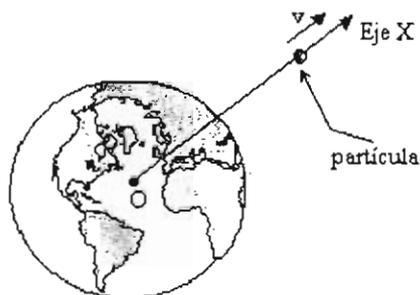
3. Analice el movimiento descrito por la ecuación

$$x = t^3 - 18t^2 - 67t - 60$$

tal como se hizo en el Ejemplo 9 en la página 18.

4*. La aceleración de una partícula que está cayendo en línea recta hacia el centro de la Tierra es $a = -\frac{GM_T}{x^2}$,

donde $G = 6.673(10^{-11})$ es la constante de gravitación universal, $M_T \approx 5.976(10^{24})$ es la masa de la Tierra y x es la distancia de la partícula al centro de la Tierra (o igualmente la coordenada x relativa al eje mostrado en la figura). Los valores están en unidades S.I.



Calcular la velocidad de escape de la partícula, esto es, la velocidad mínima con que debe proyectarse desde la superficie terrestre para que ya no regrese a ésta.

Sugerencia. Use $a = v(dv/dx)$ para encontrar v como función de x . Defina $v_e \equiv$ velocidad de escape. Para $x =$ radio de la Tierra $= R \approx 6.378(10^3)$, $v = v_e$, y para $x = \infty$, $v = 0$.

Resp. $v_e = 11.2 \text{ km/s}$.

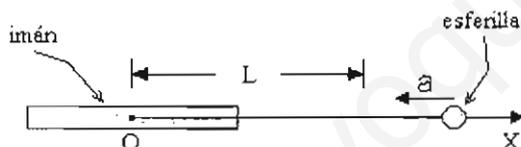
5*. Un punto se mueve a lo largo del eje X con una velocidad dada por $v = 3x^2$. En el instante $t = 0$, se encuentra en $x = 2$. Hallar el tiempo que requiere para llegar a $x = 3$, y la aceleración en este punto.

Resp. $1/18$; 486 .

6*. Una esferilla de acero es atraída en línea recta por un imán con una fuerza que depende del cubo de la distancia al centro del imán. La aceleración resultante de la esferilla es $a = -\frac{c}{x^3}$, donde c es una constante.

Determinar la velocidad de la esferilla a una distancia L del imán, si parte del reposo desde $x = 2L$.

Resp. $\sqrt{\frac{3c}{4L^2}}$.



7*. La aceleración de un movimiento viene dada por la función

$$a = 2t^3 - 8t + 12 \quad (\text{t en s, } a \text{ en m/s}^2)$$

Se sabe que $x(t = 0) = -5 \text{ m}$, y que $v(0) = 10 \text{ m/s}$. Calcular la velocidad y la posición como funciones del tiempo.

Resp. $v = \frac{1}{2}t^4 - 4t^2 + 12t + 10$

$$x = \frac{1}{10}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 6t^2 + 10t - 5$$

8*. La aceleración de una partícula que cae verticalmente dentro de un medio viscoso está dada en términos de la velocidad por

$$a = 5 - 2v$$

Partiendo la partícula del reposo, ¿cuánto tiempo invierte en adquirir una velocidad de 1.25 ?

Resp. $0.5 \ln 2 = 0.347$.

9*. Un punto material que se mueve a lo largo de una recta tiene una velocidad en metros por segundo dada por $v = 12 - 3t^2$, donde t está expresada en segundos. Calcular la distancia total D recorrida durante el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 3 \text{ s}$ y hallar el desplazamiento Δx durante el mismo intervalo.

Resp. $D = 23 \text{ m}$; $\Delta x = 9 \text{ m}$.

10*. La velocidad de un móvil viene dada en términos de la posición por

$$v = \frac{2}{(4+3x)^2} \quad x > -\frac{4}{3}$$

Dado que $x = -1$ en $t = 0$, hallar la posición en $t = 4$.

Resp. 0.06 .

CAPÍTULO 3

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

3.1. Introducción

Al movimiento uniforme le sigue en simplicidad el *movimiento uniformemente acelerado* (abreviado MUA), que es todo movimiento que tiene lugar con aceleración *constante*.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, si un cuerpo se mueve a lo largo de una recta bajo la acción de una fuerza constante entonces ejecuta un MUA. Este es el caso, en particular, de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba o abajo dentro del campo gravitatorio terrestre; la fuerza responsable es el peso del objeto, y la aceleración correspondiente es la *aceleración de caída libre* o *aceleración de la gravedad*, cuyo valor se denota con "g" y es aproximadamente igual a

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

3.2. Propiedades del movimiento

TRAYECTORIAS.

Hay dos clases de trayectorias posibles en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

(a) Si en un momento dado la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido la trayectoria es una recta simple (Fig. 14). El móvil se desplaza siempre en la misma dirección y su rapidez va aumentando indefinidamente.

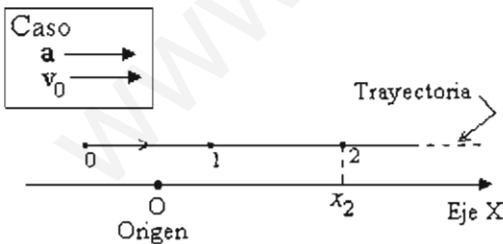


Fig. 14

(b) En cambio, si la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos (Fig. 15), la rapidez va disminuyendo hasta volverse nula en un *punto de retorno*, donde el móvil se detiene momentáneamente para luego invertir la dirección de su movimiento.

Después del punto de retorno se revierte al caso (a). La trayectoria consta de dos segmentos rectos solapados.

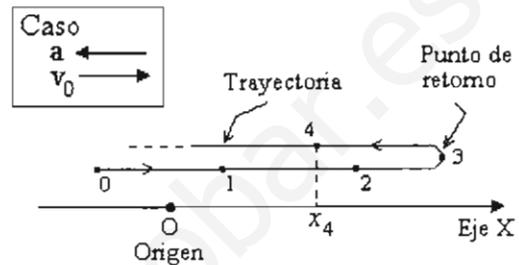


Fig. 15

En un tramo del movimiento donde la velocidad y la aceleración tengan sentidos opuestos se dice que el móvil está *desacelerado*. En estos casos a la aceleración se le suele llamar también *desaceleración*.

PUNTOS Y CANTIDADES CINEMÁTICAS.

Como ya explicamos en el Capítulo 2, los puntos de interés de un movimiento (como el punto inicial, el punto de retorno y otros puntos específicos del movimiento) se distinguen mediante un número secuencial 0, 1, 2, ..., etc. conforme a tiempos crecientes. Les llamaremos *puntos particulares* o *puntos relevantes*.

El *tiempo*, la *posición* (o coordenada), y la *velocidad* de un punto particular "n" se denotan con t_n , x_n y v_n , respectivamente. Estas son las *cantidades cinemáticas* del punto, y representan valores numéricos *fijos*. Por ejemplo, en la Fig. 15 las cantidades cinemáticas del punto 2 mostrado se denotarían con $\{t_2, x_2, v_2\}$.

El tiempo, posición y velocidad del *punto general* (arbitrario, variable) del movimiento se denotan con t , x y v , respectivamente. Estas cantidades son *variables*.

La aceleración del movimiento se denota con el símbolo "a".

El *punto inicial* del movimiento es el primer punto de interés. Corresponde al punto donde se inicia el movimiento o nuestra observación o estudio del mismo.

El punto inicial se designa siempre como "punto número 0", y *usualmente* se fija $t \equiv 0$ allí, esto es, el reloj se echa a andar cuando el móvil está en el punto inicial, de tal manera que $t_0 = 0$. Sin embargo, estamos en libertad de fijar el valor de t_0 arbitrariamente, y en algunos casos tiene, o le asignamos, un valor distinto de cero (Consulte el ejemplo 22 en la página 38).

SIMETRÍAS CON RESPECTO AL PUNTO DE RETORNO.

De existir un punto de retorno, el movimiento es simétrico con respecto a él. Refiriéndonos a la Fig. 16, consideremos cuatro puntos denominados 1, 2, 3 y 4, tales que 1 y 2 se encuentran de un lado del punto de retorno y 3 y 4 del otro lado del mismo. Supongamos que $x_4 = x_1$ y $x_3 = x_2$. Entonces,

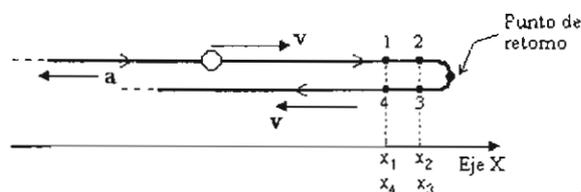


Fig. 16

El tiempo que invierte el móvil en desplazarse de 1 a 2 es el mismo que de 3 a 4:

$$t_2 - t_1 = t_4 - t_3$$

Las velocidades en puntos a la misma distancia del punto de retorno, antes y después del mismo, se diferencian solamente en el signo algebraico:

$$v_4 = -v_1 \quad v_3 = -v_2$$

En los ejemplos usaremos estas propiedades sin demostrarlas.

Las propiedades anteriores se pueden demostrar mediante las ecuaciones de movimiento, que daremos a continuación.

3.3. Ecuaciones de movimiento

La forma más general de las ecuaciones de movimiento es la siguiente:

Ecuaciones generales

$$(23a) \quad x = x_n + v_n(t - t_n) + \frac{1}{2} a (t - t_n)^2$$

$$(23b) \quad v = v_n + a (t - t_n)$$

$$(23c) \quad v^2 = v_n^2 + 2 a (x - x_n)$$

a es la aceleración, y t_n , x_n y v_n son el tiempo, posición y velocidad de cualquier punto "n" particular del movimiento.

El punto particular "n" que se escoge para plantear estas ecuaciones se denomina "*punto base*" de las mismas.

Solamente dos de estas ecuaciones son independientes. (La tercera se puede obtener de las dos primeras eliminando el tiempo.)

Las ecuaciones se simplifican algo si se toma como punto base el punto inicial "0" del movimiento, donde suponemos que se ha definido $t_0 \equiv 0$. Se tiene la siguiente forma:

Ecuaciones simplificadas

$$(24a) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$(24b) \quad v = v_0 + a t$$

$$(24c) \quad v^2 = v_0^2 + 2 a x_0$$

Existe una tercera forma de las ecuaciones.

Sean "i" y "f" dos puntos particulares cualesquiera. Definamos las siguientes diferencias o "deltas":

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta v = v_f - v_i$$

$$\Delta v^2 = v_f^2 - v_i^2$$

que indican respectivamente la *duración* del intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$, el *desplazamiento* efectuado durante el intervalo anterior, y la *variación de velocidad* en el

mismo. Se cumplen las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de intervalo

(25a) $\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$

(25b) $\Delta v = a \Delta t$

(25c) $\Delta v^2 = 2 a \Delta x$

Esta forma de las ecuaciones es sumamente útil. Note que en la ecuación Δx aparece la velocidad " v_i " propia del punto *inicial* del intervalo considerado. Así por ejemplo, si se aplican las ecuaciones entre los puntos "2" y "3", digamos, tomarían esta forma desarrollada:

$$x_3 - x_2 = v_2(t_3 - t_2) + \frac{1}{2} a (t_3 - t_2)^2$$

$$v_3 - v_2 = a (t_3 - t_2)$$

$$v_3^2 - v_2^2 = 2a (x_3 - x_2)$$

3.4. Plantear las ecuaciones de movimiento.

En los problemas sobre MUA debemos tener la mira puesta en obtener las ecuaciones de movimiento, ya que con ellas podemos deducir todas las características del movimiento. Distinguiremos dos casos, que ejemplificamos a continuación.

CASO 1. Se conoce la aceleración y un punto cuyo tiempo, posición y velocidad son datos del problema.

Ejemplo 16. En un MUA con aceleración $a = -2 \text{ m/s}^2$ se sabe que en $t = 1 \text{ s}$, $x = 10 \text{ m}$ y $v = 8 \text{ m/s}$. Calcular la posición y velocidad en $t = 7 \text{ s}$.

Hagamos un diagrama como el de la Fig. E16.

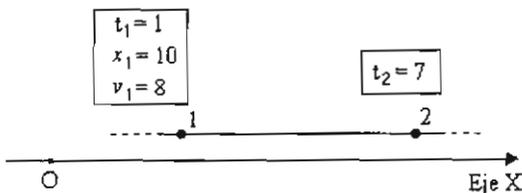


Fig. E16

Tomemos como punto base el punto 1 en la ecuación general (23a), o sea en la ecuación

$$x = x_n + v_n(t - t_n) + \frac{1}{2} a (t - t_n)^2$$

En otras palabras, tomemos aquí $n = 1$, dando la ecuación

$$x = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a (t - t_1)^2$$

Con los datos $a = -2$, $t_1 = 1$, $x_1 = 10$, y $v_1 = 8$ tenemos

$$x = 10 + 8(t - 1) + \frac{1}{2} (-2)(t - 1)^2$$

que se reduce a

(r1)
$$x = 1 + 10t - t^2$$

Derivando $x(t)$ con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

(r2)
$$v = 10 - 2t$$

Unas ecuaciones como (r1) y (r2), en las que figuran las variables t , x y v junto con términos o factores numéricos solamente, las llamaremos **ecuaciones sin parámetros**.

Ahora podemos calcular la posición y velocidad en el "punto 2" que definimos en la Fig. E16. Poniendo $t_2 = 7$ en la ecuación (r1) tenemos

$$x_2 = 1 + 10(7) - (7)^2 = 22$$

(Nota que esta es la relación $x_2 = 1 + 10t_2 - t_2^2$).

Análogamente la ecuación (r2) da, aplicada al punto 2,

$$v_2 = 10 - 2(7) = -4$$

(Esa es la relación $v_2 = 10 - 2t_2$)

Nota. Recuerde que *cualquier* punto particular del movimiento conduce a las *mismas* ecuaciones de movimiento. Así, sustituyendo en la ecuación general (23a) los valores correspondientes al punto 2, o sea $t_2 = 7$, $x_2 = 22$ y $v_2 = -4$, arribamos a la misma ecuación:

$$x = 22 - 4(t - 7) + \frac{1}{2} (-2)(t - 7)^2$$

$\Rightarrow x = 1 + 10t - t^2$

CASO 2. No se cuenta con ningún punto base completamente conocido (o sea no se conocen *las tres* cantidades t_n , x_n , v_n para ningún punto).

En este caso conviene escoger como punto base uno cuyo tiempo y posición se conozcan, con objeto de obtener ecuaciones de movimiento no muy complicadas. Tome en cuenta que muchas veces estamos en libertad de escoger el origen de coordenadas del Eje X, y de definir $t \equiv 0$ en algún punto conveniente. Esto lo podemos aprovechar para conseguir un punto cuyo tiempo y posición estén determinados.

Ejemplo 17. Se observa que en un momento dado un automóvil en MUA, cuya aceleración es 5 m/s^2 , cubre una distancia directa de 50 metros en 2 segundos. ¿Qué distancia cubrirá a los 4 segundos?

El primer punto de interés, o "punto 0", corresponde al punto a partir del cual el móvil recorre 50 m en 4 s. Definiremos allí $t_0 \equiv 0$ y $x_0 \equiv 0$, como vemos en la Fig. E17.

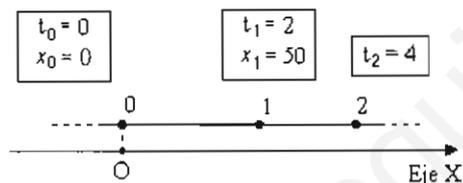


Fig. E17

Definiremos el "punto 1" tal que $t_1 = 2 \text{ s}$ y $x_1 = 50 \text{ m}$. Finalmente, el "punto 2" es el que se alcanza a los 4 segundos. Se desea calcular la distancia entre los puntos 0 y 2, o sea " x_2 ".

Notemos que no se conoce la velocidad en ninguno de los puntos. Podemos escoger como punto base ya sea el punto 0 o el punto 1. Escogiendo el primero, la ecuación general (23a)-p25 se vuelve

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} (5) t^2$$

$$(r1) \quad x = v_0 t + 2.5 t^2$$

Derivando $x(t)$ con respecto al tiempo,

$$(r2) \quad v = v_0 + 5 t$$

En las ecuaciones de movimiento (r1) y (r2) aparece el

parámetro " v_0 " (por ello las llamaremos *ecuaciones con parámetros*). Para determinar v_0 empleamos los demás datos, referentes al punto 1. Sustituyendo $t_1 = 2$ y $x_1 = 40$ en la ecuación (r1):

$$50 = v_0 (2) + 2.5 (2)^2$$

de donde

$$v_0 = 20$$

Por lo tanto la ecuación $x(t)$ se vuelve

$$(r3) \quad x = 20 t + 2.5 t^2$$

Para $t_2 = 4$ nos da

$$x_4 = 20 (4) + 2.5 (4)^2 = 120$$

Con esto se ha resuelto el problema.

También podríamos haber escogido como punto base el punto 1. Conduciría a la ecuación de movimiento

$$(r4) \quad x = 50 + v_1 (t - 2) + \frac{1}{2} (5) (t - 2)^2$$

Poniendo en ella los datos $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$ tenemos

$$0 = 50 + v_1 (-2) + 2.5 (-2)^2$$

de donde sacamos que

$$v_1 = 30$$

Sustituyendo este valor de v_1 en (r4) se llega a la misma expresión (r3) para $x(t)$. Derivando (r3) con respecto al tiempo,

$$v = 20 + 5 t$$

de donde, sustituyendo $t_0 = 0$,

$$v_0 = 20$$

Cuando los datos no conducen directamente a unas ecuaciones sin parámetros, se procura que figuren a lo más los parámetros " v_n " y " a ", donde " n " es usualmente el "punto 0", aunque puede ser cualquier otro punto particular (este fue el caso del punto 1 en la ecuación (r4) del presente ejemplo).

3.5. Gráficos de posición y velocidad contra tiempo

Las ecuaciones sin parámetros tienen la siguiente estructura algebraica:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad v = v_0 + a t$$

donde x_0 , v_0 y a son números y el "punto 0" corresponde a $t = 0$. Por ejemplo, la ecuación

$$x = 3 - 4 t + 5 t^2$$

nos revela que

$$x_0 = 3, \quad v_0 = -9 \quad \text{y} \quad a = 10$$

El gráfico x vs t es un arco de parábola, cuyas características dependen de los signos de la velocidad inicial v_0 y la aceleración a .

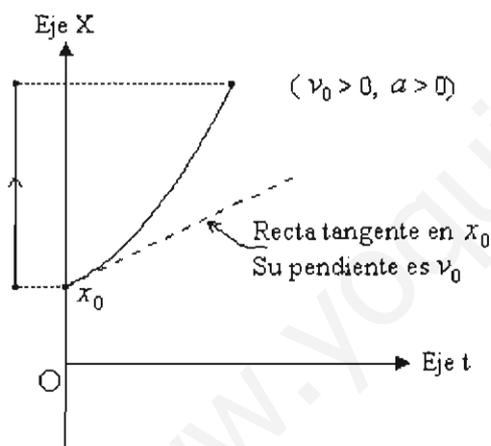


Fig. 17

La parábola corta al Eje X en el punto $x = x_0$. La tangente a la parábola en este punto es igual a v_0 ; si $v_0 > 0$ la tangente corre de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, como en la Fig. 17. Si $a > 0$ la parábola "se abre hacia arriba". Si $a < 0$, hacia abajo.

En la Fig. 18 se muestra un gráfico en el que $x_0 < 0$, $v_0 > 0$ y $a < 0$. No pierda de vista que el móvil se imagina desplazándose a lo largo del Eje X. A la izquierda del Eje X se muestra la trayectoria, que posee un punto de retorno.

Note que la trayectoria es una especie de "achataamiento horizontal" de la curva $x(t)$.

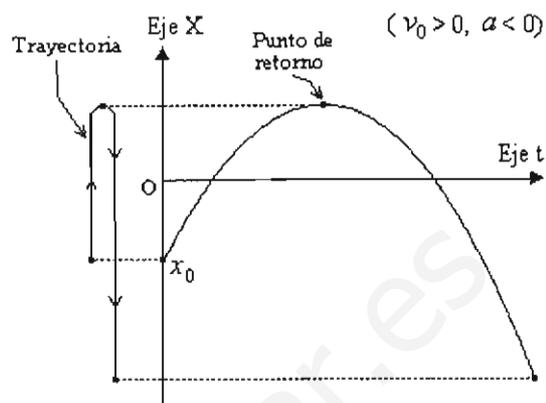


Fig. 18

El gráfico v vs. t es una recta que corta al Eje X en el valor v_0 , correspondiente a $t = 0$ (Fig. 19). La pendiente de esta recta es la aceleración a .

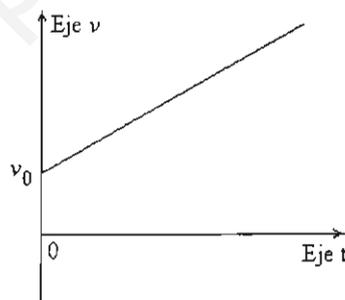


Fig. 19

El área bajo la recta v vs t representa el desplazamiento Δx . Las áreas se consideran positivas arriba del Eje X, y negativas por debajo, como indica la Fig. 20.

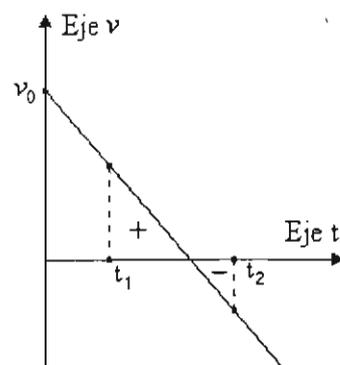


Fig. 20

3.6. Estrategia de resolución de problemas sobre MUA

La estrategia para resolver problemas incluye varias tareas que son comunes a muchas clases de problemas de física en general. Héla aquí:

- Estudiar con cuidado el enunciado del problema.
- Hacer una figura clara del problema.
- Escoger unos ejes y origen apropiados.
- Expresar los datos del problema en forma de relaciones matemáticas, usando los símbolos de las variables y cantidades cinemáticas propias del problema.
- Plantear las ecuaciones de movimiento. Si estas ecuaciones contienen parámetros (por ejemplo v_0 y a), centrarse en calcular estos parámetros antes que otra cosa.
- Aplicar las ecuaciones para calcular las demás incógnitas del problema.
- Verificar que los resultados tengan sentido físico.

Comentarios sobre las tareas anteriores:

Obviamente el enunciado del problema se lee con calma. Aquí es bueno apuntar por separado (o subrayar) todos los valores numéricos dados en el enunciado, con objeto de verificar, durante la resolución, que todos estén tomados en cuenta.

Haga un esbozo de la situación. Bosqueje la trayectoria del móvil, incluyendo unos croquis de los objetos circundantes como parques, bardas, pozos, etc. El esbozo le permite visualizar el problema rápidamente.

Si no tiene suficiente información para dibujar la trayectoria (por ejemplo, no sabe si tiene o no punto de retorno, o las posiciones relativas de dos puntos, etc.), haga una hipótesis de trabajo: supóngala de alguna forma y prosiga. Una vez resuelto el problema podrá verificar si su hipótesis fue correcta o no.

Trace el Eje X paralelamente a la trayectoria. Póngalo "a un ladito", para no confundir ésta con aquél. Eseeja el origen y el sentido del Eje X.

Marque sobre la trayectoria los *puntos relevantes* del movimiento, numerándolos en sucesión 0, 1, 2, ...etc. de tiempos crecientes. Estos son puntos particulares relacionados con los datos e/ó incógnitas del problema, es decir, puntos acerca de los cuales se posee o desea información relativa a tiempos, posiciones y/o velocidades.

Los "errores de signo" son comunes, así que es sumamente importante advertir que:

– La ubicación del origen determina los *signos de las posiciones* del móvil.

– El sentido del Eje X es el que determina los *signos de la aceleración y de las velocidades* del móvil. Por ejemplo, en un problema de caída libre, la aceleración vale 9.8 si el Eje X se dirige verticalmente hacia abajo, o -9.8 si hacia arriba.

Solamente después de haber completado las tareas anteriores es que puede pasar a la tarea clave de traducir los datos e incógnitas del problema a relaciones matemáticas. Estas son relaciones en las que aparecen los símbolos algebraicos propios de los tiempos, posiciones y velocidades *de los puntos relevantes*.

Los datos podrían darse de diversas formas:

Forma 1. Se proporciona directamente el tiempo, la posición y/o la velocidad de algunos puntos relevantes. Por ejemplo,

$$x_3 = -20 \text{ m}, t_4 = 5 \text{ s}, \text{ etc.}$$

Forma 2. El dato es un "dato-delta", es decir, se refiere a la duración de un lapso de tiempo, o al desplazamiento o variación de velocidad en un lapso. Por ejemplo, el dato

$$\Delta t = 15 \text{ s} \text{ entre los puntos 2 y 3"}$$

$$\text{(mismo dato que "t}_3 - t_2 = 15 \text{ s")}$$

significa que el móvil tarda 3 segundos en pasar del punto 2 al punto 3.

El punto final asociado con un dato-delta se toma siempre posterior al punto inicial, es decir, Δt es positivo siempre, pero Δx y Δv pueden ser positivos o negativos. Para evitar un error de signo al asentar un dato- Δx es conveniente trazar el vector-separación que une los puntos inicial i y final f (trace una flecha que vaya del uno al otro, o imagínese). Si este vector apunta en el mismo sentido que el Eje X, entonces la Δx es positiva, y es negativa en caso contrario. Por ejemplo, en la Fig. 21 la distancia entre los puntos 3 y 4 es de 24 m; pero el desplazamiento entre ambos es negativo (-24 m), porque la flecha que representa al vector desplazamiento entre 3 y 4 tiene sentido opuesto al del Eje X.

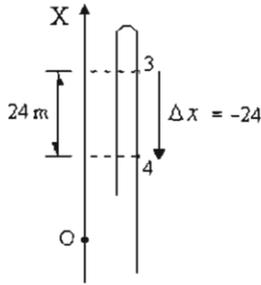


Fig. 21

Forma 3. Existe una relación multiplicativa entre cantidades cinemáticas correspondientes a dos puntos relevantes. Por ejemplo, el dato

"La velocidad en la estación A es el doble de la velocidad de partida."

se traduce en la relación

$$v_4 = 2 v_0$$

en la que hemos supuesto que la estación A es el punto 4 y el punto de partida, como siempre, es el punto 0.

También las incógnitas deben expresarse en términos de los símbolos usados. Por ejemplo, alguna incógnita puede expresarse como " $-x_4$ ", o bien como el tiempo necesario para desplazarse entre dos puntos "3" y "5", es decir, " $t_5 - t_3$ ".

Una vez traducidos los datos e incógnitas a relaciones matemáticas, se procede a aplicar las ecuaciones del MUA. El criterio para aplicar ya sea las ecuaciones generales, o bien las ecuaciones simplificadas, o bien las ecuaciones de intervalo, dadas por las fórmulas (23a-c), (24a-c) y (25a-c) se desprende de la forma misma de las ecuaciones. Expliquemos lo que queremos decir con esto, tomando por caso las ecuaciones de intervalo, reproducidas a continuación:

$$[(25a)] \quad \Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

$$[(25b)] \quad \Delta v = a \Delta t$$

$$[(25c)] \quad \Delta v^2 = 2 a \Delta x$$

La ecuación (25a) nos podría servir para calcular la velocidad " v_i " en el punto inicial "i" de un segmento del movimiento, determinado por dos puntos particulares "i" y "f". Ello si contamos con los datos " a ", Δt y Δx .

La ecuación (25c) se aplicaría por ejemplo a un escenario en que se conocieran Δx y las velocidades v_i y v_f , y se quisiera calcular la aceleración a .

Se comprende, pues, la idea: hay que buscar una ecuación de la cual podamos despejar una incógnita en términos de cantidades conocidas. Si esto no es posible con las ecuaciones de intervalo, entonces plantearíamos las ecuaciones generales con base en algún punto particular cuyo tiempo y posición sean conocidos.

Ilustraremos la estrategia en algunos ejemplos.

Ejemplo 18. Intervalos.

En problemas muy simples, donde existan sólo dos (o quizás tres) puntos relevantes, no hay necesidad de plantear las ecuaciones de movimiento, porque las ecuaciones de intervalo podrían conducir rápidamente a la solución. Reunimos varios casos en este ejemplo.

Caso 1. Un móvil reduce uniformemente su velocidad del valor 9 m/s al valor 1 m/s durante un lapso de 2 s. ¿Cuánto vale su aceleración?

El dato "durante un lapso de 2 s" es un "dato-delta". Denotemos con "i" y "f" los puntos donde las velocidades valen 9 y 1, respectivamente. Entonces podemos escribir los datos así:

$$v_i = 9 \quad v_f = 1 \quad \Delta t = 2$$

Aplicando la ecuación de intervalo $\Delta v = a \Delta t$ tenemos

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{1 - 9}{2} = -4 \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Caso 2. En un momento dado un móvil en MUA horizontal posee una velocidad de 8 m/s hacia la derecha. La aceleración es -6 m/s^2 . ¿Cuál es el desplazamiento del móvil en un lapso subsecuente de 3 s?

Llamemos "i" al punto inicial dado y apliquemos la ecuación de intervalo Δx con los datos (en unidades S.I.)

$$v_i = 8 \quad \Delta t = 3 \quad a = -6$$

Obtenemos (en metros)

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = 8(3) + \frac{1}{2} (-6)(3^2) = -3$$

Dado que Δx es negativo, al término del lapso el móvil está a la izquierda de su posición al inicio del lapso, es decir, entre los puntos i y f considerados hay un punto de retorno.

Caso 3. Un móvil en MUA parte del reposo y tarda 5 segundos en recorrer una distancia de 40 metros. ¿Cuánto vale su aceleración?

En el punto de partida, denotado con "i", la velocidad es $v_i = 0$. Por otra parte, tenemos los datos $\Delta t = 5 \text{ s}$ y $\Delta x = 40 \text{ m}$.

Apliquemos la ecuación Δx :

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

Como $v_i = 0$, se reduce a

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

Despejando la aceleración,

$$a = \frac{2\Delta x}{\Delta t^2}$$

Sustituyendo los datos,

$$a = \frac{2 \cdot 40}{5^2} = 3.2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Caso 4. Un móvil reduce uniformemente su velocidad del valor 12 m/s al valor 3 m/s en un trayecto de 24 m . (a) ¿Cuánto vale su aceleración? (b) ¿Cuánto tiempo le tomará reducir su velocidad hasta cero desde el primer valor dado?

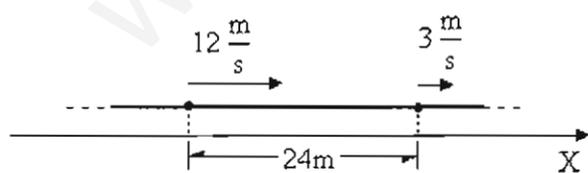


Fig. E18

Apliquemos la ecuación de intervalo $\Delta v^2 = 2 a \Delta x$, con los valores

$$v_i = 12 \quad v_f = 3 \quad \Delta x = 12$$

Obtenemos

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} = \frac{3^2 - 12^2}{2 \cdot 24} = -2.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Usando ahora la ecuación de intervalo $\Delta v = a \Delta t$ con los valores

$$a = -2.81 \quad v_i = 12 \quad v_f = 0$$

obtenemos

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{0 - 12}{-2.81} = 4.27 \text{ (s)}$$

Caso 5. La aceleración de un móvil es $a = 5 \text{ m/s}^2$. Dado que recorre un tramo de 30 m en 1.5 segundos, calcular su velocidad al inicio y término de este tramo.

Los datos son la aceleración y dos "deltas", a saber,

$$a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \Delta x = 30 \text{ m} \quad \Delta t = 1.5 \text{ s}$$

Estos datos nos permiten calcular las velocidades en los puntos extremos del intervalo considerado. Dado que las expresiones resultantes son muy útiles en otros problemas, las deduciremos en general:

De la ecuación Δx , a saber,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

obtenemos, despejando v_i ,

$$(26) \quad \text{Ecuación } v_i: \quad v_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{1}{2} a \Delta t$$

Luego la ecuación Δv nos da $v_f = v_i + a \Delta t$, o sea, sustituyendo la expresión anterior para v_i ,

$$(27) \quad \text{Ecuación } v_f: \quad v_f = \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2} a \Delta t$$

Las ecuaciones v_i , v_f también las consideraremos como "ecuaciones de intervalo".

Apliquemos las ecuaciones v_i , v_f al problema presente:

$$v_i = \frac{30}{1.5} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1.5 = 20 - 3.75 = 16.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_f = \frac{30}{1.5} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1.5 = 20 + 3.75 = 23.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A manera de comprobación,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{23.75 - 16.25}{1.5} = \frac{7.5}{1.5} = 5$$

Ejemplo 19. Ilustrar las ecuaciones generales.

Un avión suelta un paquete desde una altura de 1300 metros. Durante los primeros 5 segundos el paquete cae libremente. Entonces se abre un paracaídas, cayendo ahora el paquete con aceleración de 6 m/s^2 dirigida hacia arriba (este es ya el efecto combinado de la gravedad y la resistencia del aire). Cuando la velocidad del paquete ha disminuído hasta 3 m/s , conserva este valor constante hasta llegar al suelo. ¿Cuánto tarda en tocar tierra?

(Nota. El paquete abandona el avión con una componente horizontal de velocidad. Para simplificar el análisis, hemos abstraído el movimiento horizontal.)

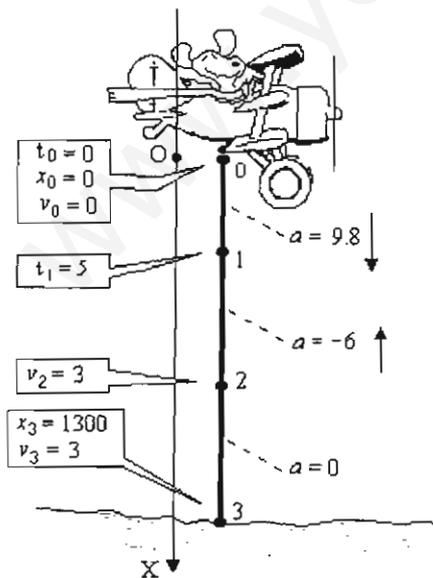


Fig. E19a

Fijémonos bien en los datos consignados en la Fig. E19a. El problema tiene 4 puntos relevantes:

Punto 0. El punto donde el paquete abandona el avión.

Punto 1. A los 5 s de haber abandonado.

Punto 2. Donde la velocidad llega al valor de 3 m/s .

Punto 4. Tierra.

El eje X se escogió hacia abajo, de modo que la aceleración de la gravedad es positiva, $a = 9.8$, y la aceleración en el tramo intermedio es negativa, $a = -6$. La aceleración en el último tramo es cero, ya que se verifica a velocidad constante.

Advierta que en todo momento las posiciones y velocidades son positivas.

El movimiento del paquete es una combinación de dos movimientos uniformemente acelerados y uno uniforme (éste en el tercer tramo, donde la aceleración es cero), de tal modo que existirán tres ecuaciones de movimiento distintas, una para cada tramo, 0-1, 1-2 y 2-3.

La forma general de la ecuación de movimiento $x(t)$, válida en todos los tramos, es la ecuación

$$x = x_n + v_n(t - t_n) + \frac{1}{2} a (t - t_n)^2$$

donde t_n , x_n y v_n son las cantidades cinemáticas de cualquier punto relevante del tramo considerado, y a es la aceleración vigente en dicho tramo.

En el trayecto de 0 a 1, tomemos como punto base "n" el punto 0. Es decir, sustituyamos en la ecuación $x(t)$ los valores

$$t_n = t_0 = 0, \quad x_n = x_0 = 0$$

$$v_n = v_0 = 0, \quad a = 9.8$$

Obtenemos la ecuación de movimiento

$$x = 4.9 t^2$$

y de aquí, derivando con respecto a "t",

$$v = 9.8 t$$

Poniendo $t_1 = 5$ en estas ecuaciones sacamos

$$x_1 = 4.9(5)^2 = 122.5 \text{ m}$$

$$v_1 = 9.8(5) = 49 \text{ m/s}$$

El punto 1 pertenece también al tramo intermedio 1-2 y puede tomarse como punto base para obtener las ecuaciones de movimiento en dicho tramo. Sustituyendo entonces en la ecuación $x(t)$ los valores correspondientes al punto 1, o sea

$$t_n = t_1 = 5, \quad x_n = x_1 = 122.5,$$

$$v_n = v_1 = 49$$

con $a = -6$, resultan

$$x(t) = -197.5 + 79t - 3t^2$$

$$v(t) = 79 - 6t$$

Del dato $v_2 = 3$, aplicando la ecuación $v(t)$ al punto 2, obtenemos

$$3 = 79 - 6t_2$$

o sea

$$t_2 = 12.667 \text{ s}$$

Para obtener x_2 utilizamos el valor conocido de t_2 en la ecuación $x(t)$:

$$\begin{aligned} x_2 &= -197.5 + 79(12.667) - 3(12.667)^2 = \\ &= 321.83 \text{ m} \end{aligned}$$

Pasemos al tercero y último tramo. La aceleración ahora es igual a cero. Basando las ecuaciones en el punto 2, es decir, poniendo en la ecuación $x(t)$ los valores

$$t_n = t_2 = 12.667, \quad x_n = x_2 = 321.83,$$

$$v_n = v_2 = 3$$

con $a = 0$, obtenemos

$$x = 283.83 + 3t$$

$$v = 3$$

Sabemos que $x_3 = 1300$, de modo que

$$1300 = 283.83 + 3t_3$$

$$t_3 = 338.72 \text{ s} \approx 5 \text{ min } 39 \text{ s}$$

Este es lo que tarda el paquete en tocar tierra. La mayor parte del tiempo el paquete se mueve con velocidad constante.

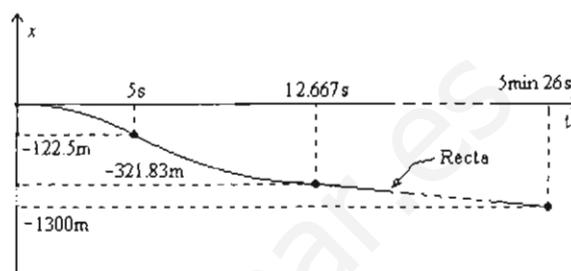


Fig. E19b

Discusión.

Es fácil equivocarse en los cálculos numéricos. Por ello se recomienda verificar, en lo posible, que los signos de las cantidades calculadas concuerden con los esperados, y que los valores calculados no estén disparatados.

Algunos estudiantes adolecen de una propensión a designar con los símbolos "t", "x" y "v" las cantidades cinemáticas de *todos* los puntos que consideran. Es una práctica que debe evitarse a toda costa. Los símbolos citados están reservados para cantidades *variables*. Si revisa los cálculos de este problema aceptará que es fácil que otra persona los entienda, debido a que se ha utilizado una notación consistente para las cantidades cinemáticas de todos los puntos relevantes del problema.

Como vimos, las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado también son aplicables al caso especial en que la aceleración es nula (o sea al llamado movimiento uniforme).

Finalmente note que para poder calcular t_3 (el tiempo cuando el paquete toca tierra) fue necesario calcular algunas otras cantidades "intermedias".

Un mismo problema se puede resolver de distintas maneras, como ilustraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 20. Varios métodos de resolución.

Se desea ilustrar en este ejemplo que existen diversos modos de resolver un mismo problema.

Se lanza una piedra hacia arriba. A los 4 segundos vuelve a pasar de bajada por el punto de lanzamiento, y prosigue hacia dentro de un pozo de 10 m de profundidad. ¿Cuánto tarda en llegar al fondo del pozo?

Observe la Fig. 20a, que muestra la trayectoria. Aunque el problema no pide nada acerca del punto de máxima altura, siempre es buena idea incluirlo como punto relevante.

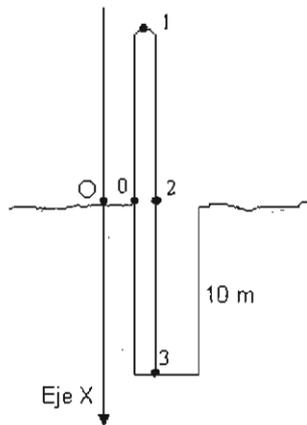


Fig. E20a

Muchilanga lo resolvió como sigue. Escogió el eje X dirigido hacia abajo, de modo que la aceleración es positiva:

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Con ello, las velocidades serán positivas si apuntan hacia abajo, negativas si hacia arriba, de tal manera que la velocidad de lanzamiento (v_0) es negativa.

Colocó el origen del Eje X junto al punto inicial y estableció allí $t_0 = 0$.

He aquí los datos traducidos a relaciones matemáticas:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0$$

$$t_2 = 4, \quad x_2 = 0$$

$$x_3 = 10$$

Usó las propiedades de simetría con respecto al punto

de retorno para agregar estos otros datos:

$$t_1 = 2, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = -v_0$$

(Nota. No confunda el significado de la variable tiempo. t_2 es el tiempo desde el momento de partida hasta que el móvil llega al punto 2. t_3 es el tiempo desde el momento de partida hasta que el móvil llega al punto 3, etc.)

Planteó la ecuación $x(t)$ tomando como base el punto 0, con $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = ?$, y $a = 9.8$ (Véase la ecuación (24a)-p25):

$$(r1) \quad x = v_0 t + 4.9 t^2$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$(r2) \quad v = v_0 + 9.8 t$$

Para calcular el parámetro " v_0 " utilizó los datos del punto 1 ($t_1 = 2$, $v_1 = 0$); (r2) da entonces

$$0 = v_0 + 9.8 (2)$$

o sea

$$v_0 = -19.6$$

Entonces las ecuaciones sin parámetros son

$$(r3) \quad x = -19.6 t + 4.9 t^2$$

$$(r4) \quad v = -19.6 + 9.8 t$$

Calculó t_3 del dato $x_3 = 10$; de (r3) obtuvo

$$10 = -19.6 t_3 + 4.9 t_3^2$$

Esta es una ecuación cuadrática para t_3 , cuyas soluciones son

$$t_3 = 4.458 \quad \text{y} \quad t_3 = -0.458$$

Desecha la segunda solución, ya que debe ser $t_3 > 0$.

Por lo tanto, la piedra tarda $\approx 4.46 \text{ s}$ en llegar al fondo del pozo.

Método alternativo.

A Burundanga le gustan mucho las ecuaciones de intervalo, así que él resolvió como sigue:

Aplica la ecuación de intervalo $\Delta v = a \Delta t$ al intervalo 0-1 (Note que $\Delta v = v_1 - v_0$):

$$v_1 - v_0 = a \Delta t$$

$$\Rightarrow 0 - v_0 = 9.8 (2) = 19.6$$

de donde $v_0 = -19.6$. Note que entonces será $v_2 = -v_0 = 19.6$.

El problema pide el valor de t_3 , que es lo que dura el movimiento desde el punto de partida 0, cuando se empieza a medir el tiempo, hasta el punto 3, cuando el reloj marca " t_3 ".

Aplica la ecuación Δx entre los puntos 2 y 3, con $t_2 = 4$, $v_2 = 19.6$ y $\Delta x = 10$:

$$(r5) \quad \Delta x = v_2 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow 10 = 19.6 (t_3 - 4) + \frac{1}{2} (9.8) (t_3 - 4)^2$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para la incógnita " $t_3 - 4$ " encuentra la raíz aceptable $t_3 - 4 = 0.458$, de donde

$$t_3 = 0.46 + 4 = 4.458 \text{ (s)}$$

Esto es lo que tarda la piedra en completar su viaje.

Nota. En lugar de (r5) podría haber aplicado alternativamente la ecuación Δv^2 entre los puntos 2 y 3, o sea

$$v_3^2 - v_2^2 = 2a \Delta x$$

Como el desplazamiento de 2 a 3 va hacia abajo, en el mismo sentido que el Eje X, se tiene que $\Delta x = 10$.

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + 2a\Delta x}$$

$$v_3 = \sqrt{(-19.6)^2 + 2(9.8)(10)} = \pm 24.1$$

Mire la Fig. 20a y dése cuenta que v_3 es positiva, de tal modo que $v_3 = 24.1$. Luego aplicó la ecuación Δv a los puntos 2 y 3:

$$\Delta v = a \Delta t$$

Despejando Δt y sustituyendo valores,

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{v_3 - v_2}{a}$$

$$t_3 - 4 = \frac{24.1 - (-19.6)}{9.8}$$

De aquí obtuvo, como antes, $t_3 = 4.46$ s.

Ejemplo 21. Hipótesis falsa.

Un móvil cuya aceleración (constante) es $a = 4 \text{ m/s}^2$ se desplaza 12 m entre los tiempos $t = 3$ s y $t = 7$ s. ¿Cuál es su velocidad en $t = 0$?

Hagamos una figurilla que muestre los puntos correspondientes a $t = 3$ y $t = 7$, como la Fig. 21a. Ahora bien, el punto correspondiente a $t = 0$ (nombrado "punto 0" en la figura) puede caer a la izquierda, entre, o a la derecha de los puntos 1 y 2. Hagamos la hipótesis de que cae a la izquierda, como se muestra.

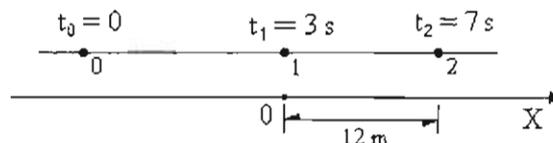


Fig. E21a

Para el tramo 1-2 conocemos $\Delta t = 4$ s y $\Delta x = 12$ m. Además tenemos la aceleración $a = 4 \text{ m/s}^2$, por lo que podemos obtener las velocidades v_1 y v_2 aplicando las "ecuaciones v_i, v_f "

$$v_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{1}{2} a \Delta t = \frac{12}{4} - \frac{1}{2} (4)(4) = -5$$

$$v_f = \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2} a \Delta t = \frac{12}{4} + \frac{1}{2} (4)(4) = 11$$

Con esto ya conocemos todas las cantidades cinemáticas del punto 1, y podemos obtener las ecuaciones de movimiento tomando como base el punto 1 en la ecuación $x(t)$, con $t_1 = 3$, $x_1 = 0$, $v_1 = -5$:

$$x = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a(t - t_1)^2$$

$$x = -5(t-3) + 2(t-3)^2 = 33 - 17t + 2t^2$$

$$\Rightarrow v = -17 + 4t$$

Para el punto 0 tenemos

$$x_0 = x(0) = 33 \text{ m}$$

y la velocidad por la que pregunta el enunciado es

$$v_0 = v(0) = -17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Deseamos ahora averiguar si nuestra hipótesis sobre las ubicaciones relativas de los puntos 1, 2 y 3 fue correcta.

Dado que $x_1 = 0$, $x_2 = 12$ y x_0 resultó ser 33, el punto 0 queda a la derecha del punto 2. Además, como $v_0 = -17$, el móvil empieza moviéndose hacia la izquierda. Finalmente, la velocidad del móvil se vuelve nula, de acuerdo con la ecuación $v = -17 + 4t$, en

$$t = 17/4 = 4.25$$

o sea entre los tiempos $t_1 = 0$ y $t_2 = 3$ correspondientes a los puntos 1 y 2.

De tal manera que la situación real es la que vemos en la Fig. E21b.

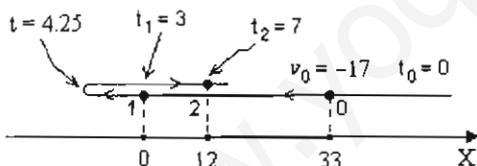


Fig. E21b

3.7. Problemas

1. Un móvil cuya aceleración es $a = -5 \text{ m/s}^2$ se encuentra en $x = 4 \text{ m}$ cuando $t = 5 \text{ s}$, y su velocidad allí vale $v = -6 \text{ m/s}$. Obtener su ecuación de movimiento. ¿En qué tiempo y posición su velocidad vale 4 m/s ?

Resp. $x = -28.5 + 19t - 2.5t^2$; en $t = 3 \text{ s}$; $x = 6 \text{ m}$.

2. ¿Qué características tiene un MUA descrito por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad v = a t \quad (v^2 = 2 a x) \quad ?$$

3. Un automóvil posee en cierto lugar "A" una velocidad de $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y aceleración constante de $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. ¿A

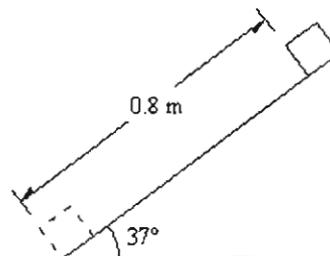
qué distancia de "A" alcanza una velocidad de $27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Resp. 72.5 m.

4. Un automóvil viaja en línea recta con una velocidad constante de 22.22 m/s (equivalentes a 80 km/h). Con objeto de rebasar a camión el conductor le imprime a su automóvil una aceleración de 5 m/s^2 durante 10 segundos, tras los cuales desacelera a razón de 6 m/s^2 durante 7 segundos, manteniendo luego la velocidad alcanzada entonces. Tomando el origen de coordenadas en el punto donde empieza a acelerar, y definiendo $t \equiv 0$ allí, obtenga las ecuaciones de movimiento válidas en los lapsos $[0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$, $[10 \text{ s}, 17 \text{ s}]$ y $t > 17 \text{ s}$. ¿Cuánto vale la posición en $t = 8 \text{ s}$ y en $t = 25 \text{ s}$? ¿Cuál es la velocidad en $t = 14 \text{ s}$?

Resp. 337.8 m, 959.3 m, 48.2 m/s.

5. Un bloque se deja ir del reposo desde lo alto de un plano inclinado a 37° . Se sabe que la aceleración del bloque es $a = g \sin \theta$, donde g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo del plano.



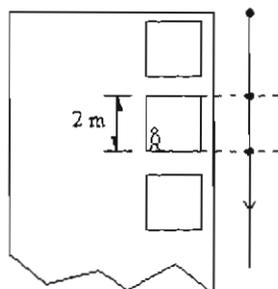
¿Cuánto tarda el bloque en llegar al pie del plano?

¿Cuál es su velocidad allí?

Resp. 0.52 s; 3.1 m/s.

6. Desde la azotea de un edificio se deja caer un objeto desde el reposo. Un muchacho ve pasar el objeto frente a la ventana de su departamento. El campo visual del muchacho se extiende solamente desde el borde superior de la ventana hasta su borde inferior (entre los puntos señalados en la figura). El tiempo que el objeto está a la vista del muchacho es de 0.2 s y la altura de la ventana es de 2 m . ¿Desde qué altura, medida sobre el borde superior de la ventana, se lanzó el objeto?

Resp. 4.1 m.



7. Un móvil parte del reposo con aceleración constante $a = 5 \text{ m/s}^2$. ¿Qué distancia recorre en 6 segundos? ¿Cuál es su velocidad entonces?

Resp. 90 m; 30 m/s.

8. La velocidad de un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado se incrementa desde 4 m/s hasta 12 m/s en un trayecto de 20 m. ¿Cuánto vale su aceleración?

Resp. 32 m/s^2 .

9. La velocidad de un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado pasa del valor -4 m/s al valor 12 m/s durante un lapso de 5 s. ¿Qué distancia recorre el cuerpo en dicho lapso?

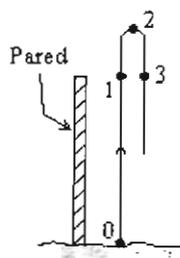
(Sugerencia. Necesitará obtener el punto de retorno)

Resp. 3.2 m/s^2 ; 25 m.

10. Un móvil cuya aceleración (constante) vale -4 m/s^2 efectúa a partir de cierto punto P un desplazamiento de 18 m en un tiempo de 4 segundos. ¿Cuál es su velocidad en dicho punto?

Resp. 12.5 m/s.

11. Una pared vertical tiene 16 m de altura. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde la base de la pared, con una velocidad inicial de 18 m/s. ¿Cuánto tiempo dura la pelota por encima de la pared?

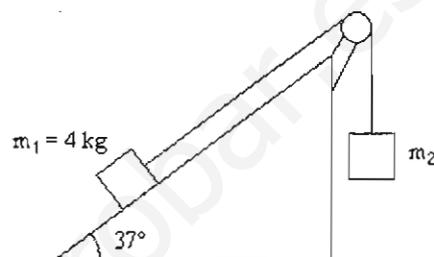


(Sugerencia. Establezca el Eje X y su origen O. Ello fija los signos de la aceleración y de la velocidad

inicial. Calcule la velocidad y el tiempo del punto 1. Calcule el tiempo del punto de retorno.

Resp. 0.66 s.

12. Los bloques del sistema mostrado tienen una aceleración común, cada cual a lo largo de su recta de movimiento. Se observa que, liberado el sistema desde el reposo, el bloque de masa m_1 recorre 0.8 m en 2 s.



Dado que la aceleración común viene dada por

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_1 + m_2} \cdot g$$

¿cuánto vale la masa m_2 ?

Resp. 2.67 kg.

13. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba llega a su punto de altura máxima en $t = 2 \text{ s}$. Calcular la aceleración de la gravedad del dato de que la velocidad de la piedra en $t = 2.003 \text{ s}$ es 0.0294 m/s .

Resp. 9.8 m/s^2 .

14. Bosqueje el gráfico $x(t)$ de un movimiento uniformemente acelerado con las siguientes características (el punto 0 corresponde a $t = 0$, $x = x_0$ y $v = v_0$):

(a) $x_0 < 0$, $v_0 > 0$, $a > 0$

(b) $x_0 > 0$, $v_0 = 0$, $a > 0$

(c) $x_0 = 0$, $v_0 < 0$, $a < 0$

(d) $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a > 0$

15. Un coche parte del reposo con aceleración constante de 1.2 m/s^2 .

(a) ¿A qué distancia del punto de partida alcanza una velocidad de 16 m/s ?

(b) ¿Cuánto tarda en alcanzar dicha velocidad?

(c) ¿Entre qué posiciones recorre 10 m en 1 segundo?

Resp. 106.6 m; 13.3 s; entre 36.8 m y 46.8 m.

3.8. Más ejemplos

Ejemplo 22. Sobre un movimiento con aceleración constante se sabe que (en unidades S.I.):

En $t = 1$ la posición es $x = 0$.

En $t = 3$ la posición es $x = 14$.

En $t = 5$ la velocidad es $v = 25$.

¿Cuánto valen la posición y la velocidad en $t = 10$?

En la Fig. E22 mostramos los datos del problema. Note que no estamos en libertad de elegir el instante $t \equiv 0$.

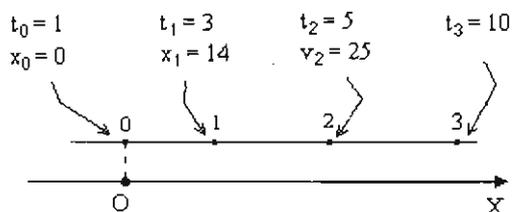


Fig. E22

Como ve, no conocemos la aceleración, ni hay punto alguno con todas sus cantidades cinemáticas conocidas.

Planteemos las ecuaciones de movimiento tomando como base el punto 0 (observe que $t_0 \neq 0$):

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

\Rightarrow

$$(r1) \quad x = v_0(t - 1) + \frac{1}{2} a(t - 1)^2$$

$$(r2) \quad v = v_0 + a(t - 1)$$

Pongamos en la ecuación (r1) los datos $t_1 = 3$ y $x_1 = 14$.
Obtenemos

$$(r3) \quad 14 = 2v_0 + 2a$$

Pongamos en la ecuación (r2) los datos $t_2 = 5$ y $v_2 = 25$.
Obtenemos

$$(r4) \quad 25 = v_0 + 4a$$

Resolviendo simultáneamente (r3) y (r4),

$$v_0 = -5, \quad a = 6$$

de tal modo que, sustituyendo en (r1) y (r2), las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$x = 2 - 5t + 3t^2 \quad v = -5 + 6t$$

Por lo tanto, en $t_3 = 10$ la posición es $x_3 = 252$ y la velocidad es $v_3 = 55$.

Ejemplo 23. Un automóvil va reduciendo uniformemente su velocidad. Se observa que recorre *directamente* un tramo AB de 30 m en 2 s, y que a 10 m después de B llega al reposo. Calcular su desaceleración.

Aplicamos primero la máxima:

Buena figura = menos problemas

(Estudie con cuidado la Fig. E23a):

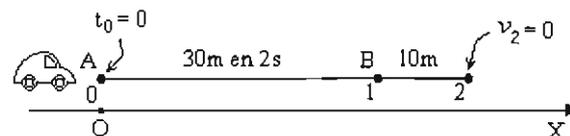


Fig. E23a

Basemos las ecuaciones de movimiento en el punto 0, con $t_0 \equiv 0$, $x_0 = 0$:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a x$$

Aplicamos la primera al punto 1, con $x_1 = 30$ y $t_1 = 2$:

$$30 = v_0(2) + \frac{1}{2} a(2^2)$$

$$\Rightarrow \underline{v_0 + a = 15}$$

Aplicamos la tercera al punto 2, con $x_2 = 40$ y $v_2 = 0$:

$$0 = v_0^2 + 2a \cdot 40$$

$$\Rightarrow \underline{v_0^2 + 80a = 0}$$

Eliminando v_0 de las dos ecuaciones subrayadas se llega a la ecuación cuadrática

$$a^2 + 50a + 225 = 0$$

cuyas soluciones son

$$a = -5 \quad \text{y} \quad a = -45$$

¿Cuál de estas dos soluciones es la correcta? Para decidir tome en cuenta que la primera conduce a los valores

$$v_0 = 20, \quad t_2 = 4$$

y la segunda a

$$v_0 = 60, \quad t_2 = 1.33$$

Es instructivo examinar los gráficos $x(t)$ correspondientes a las dos soluciones (Fig. E23b).

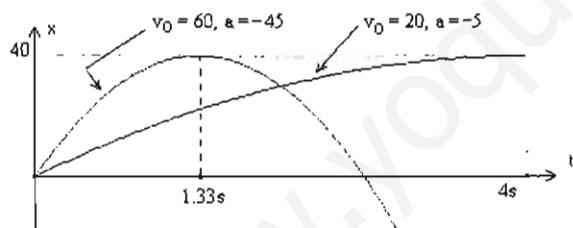


Fig. E22b

Ejemplo 24. Un móvil uniformemente acelerado recorre 21 m en el lapso [2 s, 3 s] y 93 m en el lapso [6 s, 9 s]. Calcular su velocidad en el instante $t = 4.5$ s.

En la Fig. E24a se muestra nuestra elección del sentido y origen del Eje X y se anotan los datos del problema.

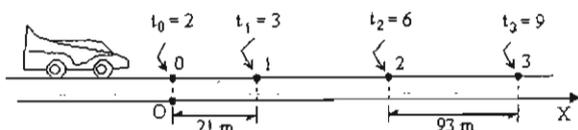


Fig. E23

La meta es obtener la ecuación de movimiento y luego particularizarla para el instante $t = 4.5$ s. En las ecuaciones generales tomemos como punto base "n" el punto 0, con $t_0 = 2$, $x_0 = 0$ y $v_0 =$ parámetro. Obtenemos.

$$x = v_0(t - 2) + \frac{1}{2}a(t - 2)^2$$

Hay que calcular v_0 y a . Aplicando esta ecuación al punto 1, con $x_1 = 21$ y $t_1 = 3$,

$$21 = v_0(3 - 2) + \frac{1}{2}a(3 - 2)^2$$

o sea

$$(r1) \quad \underline{21 = v_0 + \frac{1}{2}a}$$

Volvamos a aplicar (1) a cada uno de los puntos 2 y 3. Obtenemos

$$(r2) \quad x_2 = v_0 \cdot 4 + \frac{1}{2}a \cdot 4^2$$

$$(r3) \quad x_3 = v_0 \cdot 7 + \frac{1}{2}a \cdot 7^2$$

Todavía no hemos utilizado el dato de que la distancia entre los puntos 2 y 3 vale 93 m. Este dato lo podemos expresar así:

$$(r4) \quad x_3 - x_2 = 93$$

Examinando (r2), (r3) y (r4) vemos que podemos eliminar x_2 y x_3 restando miembro a miembro las ecuaciones (r2) y (r3) y luego usando (r4). Llegamos a

$$93 = 3v_0 + \frac{33}{2}a$$

o bien

$$(r5) \quad \underline{31 = v_0 + \frac{11}{2}a}$$

Hemos obtenido así un sistema de dos ecuaciones, la (r1) y la (r5), con dos incógnitas, v_0 y a . Resolviendo el sistema,

$$v_0 = 20, \quad a = 2$$

Las ecuaciones del movimiento son entonces

$$x = -36 + 16t + t^2$$

$$v = 16 + 2t$$

En $t = 4.5$ s tenemos

$$v(t = 4.5) = 16 + 2(4.5) = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 25. Una pelota recorre la tercera parte de su distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento a partir del reposo. Calcular la altura desde la que se dejó caer y el tiempo total de caída.

Sea "h" la distancia total de caída. Tomando el Eje X como se ve en la Fig. E25 tendremos que la aceleración es positiva e igual a

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

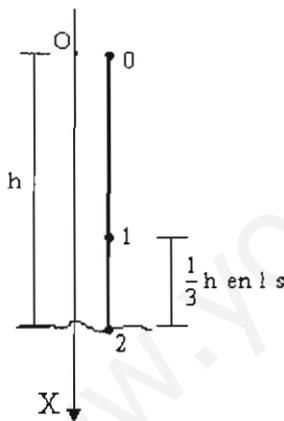


Fig. E25

Entre los puntos 1 y 2 tenemos $\Delta x = \frac{1}{3}h$ y $\Delta t = 1$. Aplicando la ecuación v_i a dichos puntos,

$$v_1 = v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{1}{2}a\Delta t = \frac{\frac{1}{3}h}{1} - \frac{1}{2}(9.8)(1)$$

$$\Rightarrow \quad (r1) \quad \underline{v_1 = \frac{1}{3}h - 4.9}$$

Por otra parte, apliquemos la ecuación Δv^2 entre los puntos 0 y 1, con $v_0 = 0$, $\Delta x = \frac{2}{3}h$,

$$\Delta v^2 = 2a\Delta x$$

$$(r2) \quad \underline{v_1^2 = 19.6 \left(\frac{2}{3}h\right) \approx 13h}$$

Elevando la ecuación (r1) al cuadrado y luego sustituyendo el valor de v_1^2 dado por (r2) tenemos

$$v_1^2 = \frac{1}{9}h^2 - \frac{9.8}{3}h + 24$$

$$\Rightarrow \quad 13h = \frac{1}{9}h^2 - \frac{9.8}{3}h + 24$$

Simplificando se llega a una ecuación cuadrática para h:

$$0.111h^2 - 16.266h + 24 = 0$$

cuyas raíces son

$$h \approx 145.5 \text{ m y } h \approx 1.5 \text{ m.}$$

La raíz 1.5 m se desecha porque corresponde a un valor negativo de v_1 , como se saca de (r1). La respuesta es pues

$$h \approx 145.5 \text{ m}$$

Esta corresponde, como es fácil determinar, a

$$t_1 = 4.45 \text{ s, } x_1 = 97 \text{ m, } v_1 = 43.6 \text{ m/s, y a .}$$

$$t_2 = 5.45 \text{ s, } x_2 = 145.5 \text{ m, } v_2 = 53.4 \text{ m/s.}$$

Ejemplo 26. Run the boo (Encuentro).

Dos móviles parten el uno hacia el otro a lo largo de la misma recta, desde dos puntos separados 400 m. El primer móvil se mueve hacia la derecha con velocidad inicial de 20 m/s y aceleración 2 m/s² dirigida hacia la izquierda. El segundo móvil parte 3 segundos después que el primero, moviéndose hacia la izquierda desde el reposo y con aceleración 4 m/s² dirigida hacia la izquierda. ¿En qué punto se encuentran los móviles y cuáles son sus velocidades allí?

En vista de que intervienen dos móviles, es necesario distinguir bien las cantidades cinemáticas de cada uno. Usaremos $\{x, v, a\}$ para el primer móvil, y $\{x', v', a'\}$ para el segundo (obviamente, no hay necesidad de distinguir el tiempo t, que es una variable común).

La meta consiste en obtener las ecuaciones de movimiento de los móviles, $x = x(t)$ y $x' = x'(t)$, y luego imponer la condición de encuentro, $x(t) = x'(t)$, que nos dará el tiempo en que ocurre.

Las trayectorias de los móviles tienen dos puntos interesantes cada una: el punto inicial de cada móvil, y el punto donde se encuentra con el otro; hemos designado estos puntos por "punto 0" y "punto 1" para el primer móvil y "punto A" y "punto B" para el segundo (Fig. E26a). Según los datos, tenemos que $t_0 = 0$ s y que $t_A = 3$ s.

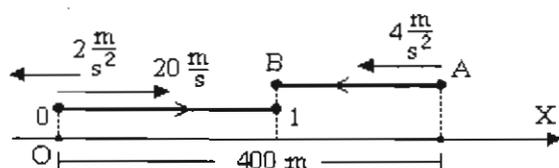


Fig. E26a

Hemos incluido en la figura los vectores correspondientes a la velocidad inicial del primer móvil y a las aceleraciones. Escogemos un eje X hacia la derecha, con su origen en el punto 0.

Plantearémos las ecuaciones de movimiento de los móviles. Para el primer móvil basamos la ecuación general $x(t)$ en el punto 0, con

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad v_0 = 20, \quad a = -2$$

(Ojo con los signos). Obtenemos la ecuación

$$x = 20t - t^2$$

Para el segundo móvil, la ecuación $x'(t)$ basada en el punto A es

$$x' = x'_A + v'_A(t - t_A) + \frac{1}{2} a' (t - t_A)^2$$

Sustituyendo los datos

$$t'_A = 3, \quad x'_A = 400, \quad v'_A = 0, \quad a' = -4$$

Resulta

$$x' = 382 + 12t - 2t^2$$

La condición $x = x'$ conduce a la ecuación

$$t^2 + 8t - 382 = 0$$

cuya solución positiva es $t = 15.95$ s. Por lo tanto, los móviles se encuentran en

$$x(15.95 \text{ s}) = x'(15.95 \text{ s}) = 64.6 \text{ m.}$$

Las velocidades en el punto de encuentro las calculamos de las expresiones

$$v = 20 - 2t \quad y$$

$$v' = 12 - 4t.$$

Para el primer móvil,

$$v_1 = v(t_1) = v(t = 15.95) = -11.9 \text{ m/s}$$

Para el segundo,

$$v_B = v(t_B) = v(t = 15.95) = -51.8 \text{ m/s}$$

Ambas velocidades son negativas, por lo que ambos móviles se están moviendo en la dirección $-X$ en el momento del encuentro.

Los gráficos x vs t se muestran en la figura. E26b. A la izquierda del eje X se muestran las trayectorias.

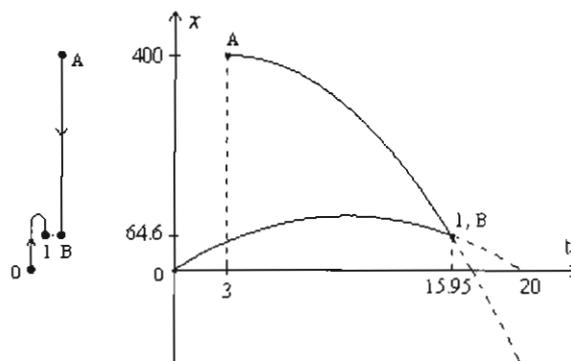


Fig. E26b

Ejemplo 27. Un elevador va ascendiendo con una aceleración de 1 m/s^2 . En cierto momento, cuando la velocidad del elevador es "V", se desprende un perno del techo del elevador. La distancia de techo a piso es de 2.6 m. Calcular el tiempo que tarda el perno en chocar con el piso del elevador. Analizar el problema para diversos valores del parámetro "V".

Nos interesan los movimientos del **perno** y del **piso** del elevador. Hallaremos sus ecuaciones $x = x(t)$ y $x' = x'(t)$ y calcularemos dónde chocan imponiendo la condición $x = x'$.

No es necesario conocer las trayectorias exactas del perno y del piso. Podemos hacer esta hipótesis: el perno encuentra al piso cuando viene ya en su movimiento de bajada. Después de resolver el problema esta hipótesis puede validarse o invalidarse.

Vamos a colocar el eje X con su origen frente al piso del elevador en el momento en que se desprende el perno ($t = 0$). La dirección del eje X la ponemos hacia arriba (con lo que $a = 1$ para el piso y $a' = -9.8$ para el perno). Inicialmente el techo y el perno están en sus respectivos puntos "0". La velocidad del perno cuando se separa del techo es la misma que la del elevador entonces: $v_0 = v'_0 = V$.

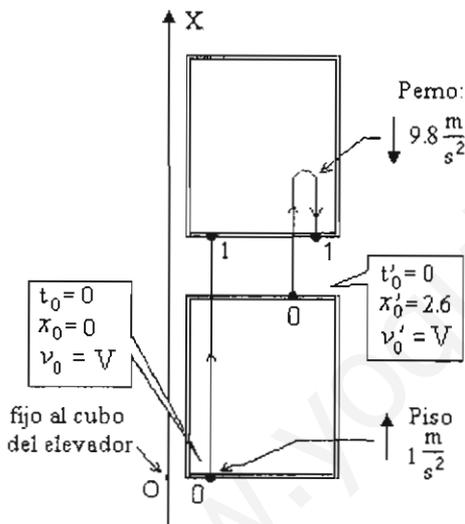


Fig. E27a

Cuando chocan, el piso y el perno se encuentran en sus respectivos puntos "1".

La ecuación $x(t)$ para el piso, basada en su punto 0 es, con $t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 = V$ y $a = 1$:

Piso: $x = Vt + 0.5t^2$

La ecuación análoga para el perno, basada en su punto 0 con $t'_0 = 0, x'_0 = 2.6, v'_0 = V$ y $a' = -9.8$ es:

Perno: $x' = 2.6 + Vt - 4.9t^2$

La ecuación $x = x'$ tiene la solución positiva

$t = 0.694 \text{ s} = t_1$, Note que no depende de V. La posición común en el momento del choque es $x(t_1) = x'(t_1)$ o sea

(r1) $x_1 = x'_1 = 0.24 + 0.694V$

La velocidad del piso en este momento es

(r2) $v_1 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_1} = V + 0.694$

y la del perno es

(r3) $v'_1 = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=t_1} = V - 6.801$

Ejemplo numérico

Si el elevador tiene velocidad $V = 3 \text{ m/s}$ en el momento del desprendimiento, entonces en el momento del choque $x_1 = x'_1 = 2.32 \text{ m}$ y las velocidades de piso y perno son respectivamente $v_1 = 3.694 \text{ m/s}$ y $v'_1 = -3.801 \text{ m/s} < 0$. Como la del perno es negativa, encuentra al piso en su movimiento de bajada. Observe los gráficos $x(t)$ y $x'(t)$ correspondientes en la figura E27b. Se ha incluido el gráfico del movimiento del techo, para comparación.

La distancia neta que ha recorrido el perno relativa al cubo del elevador es de 0.28 m hacia abajo.

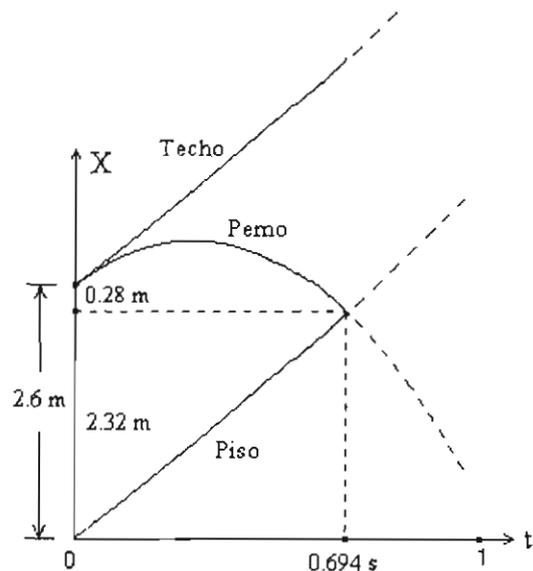


Fig. E27b

Para una velocidad $V = 8 \text{ m/s}$, el perno no tendría tiempo de llegar a su punto de retorno y encontraría al elevador en su movimiento de subida (Fig. E27c).

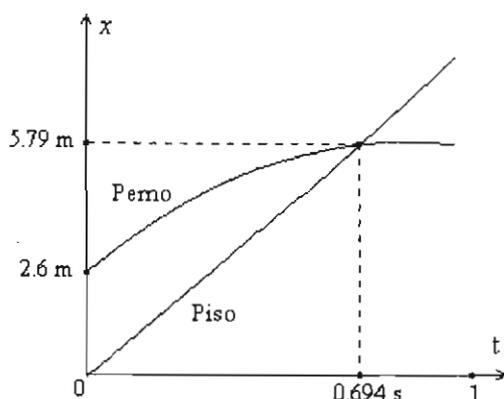


Fig. E27c

3.9. Problemas

1. Un móvil realiza la primera parte de su movimiento desde el reposo con aceleración uniforme B , y la segunda parte con aceleración uniforme $2B$. Dado que la distancia total viajada es de 729 m y que el tiempo total del movimiento es 30 s , calcular el valor de B .

Resp. 2.43 m/s^2 .

2. Un tren se desplaza con velocidad de 20 m/s . En cierto momento desacelera uniformemente durante 40 segundos a razón de 0.25 m/s^2 . A continuación desacelera uniformemente a otra tasa durante 50 s hasta llegar al reposo. ¿Cuánto vale la desaceleración en este último tramo?

Resp. -0.2 m/s^2 .

3. Un globo asciende desde el suelo con una aceleración de 0.5 m/s^2 , partiendo del reposo. Cuando ha subido una altura de 120 m se desprende de él una bolsa de lastre. Calcular el tiempo que le toma a la bolsa caer al suelo desde el momento en que se desprende.

Resp. 28.1 s .

4. Una partícula parte en $t = 0$ con velocidad inicial y aceleración desconocidas. Se observa que entre $t = 3 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$ recorre 42 m , y que en $t = 10 \text{ s}$ su posición es $x = 19 \text{ m}$. Calcular la aceleración.

Resp. -19.1 m/s^2 .

5. Un móvil cuya aceleración es $a = -5 \text{ m/s}^2$ se encuentra en $x = 4 \text{ m}$ cuando $t = 5 \text{ s}$, y su velocidad allí vale $v = -6 \text{ m/s}$. Obtener su ecuación de movimiento. ¿En qué tiempo y posición su velocidad vale 4 m/s ?

Resp. $x = -28.5 + 19t - 2.5t^2$; en $t = 3 \text{ s}$; $x = 6 \text{ m}$.

6. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba llega a su punto de altura máxima en $t = 2 \text{ s}$. Calcular la aceleración de la gravedad del dato de que la velocidad de la piedra en $t = 2.003 \text{ s}$ es 0.0294 m/s .

Resp. 9.8 m/s^2 .

7. Bosqueje el gráfico $x(t)$ de un movimiento uniformemente acelerado con las siguientes características (el punto 0 corresponde a $t = 0$, $x = x_0$ y $v = v_0$):

(a) $x_0 < 0$, $v_0 > 0$, $a > 0$

(b) $x_0 > 0$, $v_0 = 0$, $a > 0$

(c) $x_0 = 0$, $v_0 < 0$, $a < 0$

(d) $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a > 0$

8. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 19.6 m/s . Hallar su posición y velocidad al cabo de 3 segundos, y la distancia total que ha recorrido entonces. Suponiendo que la pelota rebasa el punto de lanzamiento, prosiguiendo hacia dentro de un pozo de profundidad 15 m , calcular cuánto tarda en llegar al fondo.

Resp. 14.7 m ; 24.5 m .

9. Desde una banqueta se lanza una piedra verticalmente hacia arriba. Un muchacho detrás de una ventana de 2 m de alto observa la piedra durante 0.8 s , desde que aparece frente a él de subida hasta que vuelve a desaparecer en el movimiento de bajada. El campo de visión frontal del muchacho no se extiende verticalmente más allá de los bordes superior e inferior de la ventana. ¿Qué distancia alcanza a subir la piedra sobre el borde superior de la ventana?

Resp. 0.47 m

10. Desde un punto "P" se proyecta una partícula A hacia arriba, con una velocidad de 49 m/s . Al mismo tiempo se deja caer una partícula B desde un punto "Q" verticalmente arriba de P. Las partículas se encuentran en el instante cuando la velocidad ascendente de A es igual a la velocidad descendente de B. Calcular la altura h del punto Q sobre el punto P.

Resp. $h = 122.5 \text{ m}$.

11. Una pelota recorre la mitad de su distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento a partir del reposo. Calcular la altura desde la que se dejó caer y el tiempo total de caída.

Resp. 57.12 m, 3.41 s.

12. Un coche parte del reposo con aceleración constante de 1.2 m/s^2 .

(a) ¿A qué distancia del punto de partida alcanza una velocidad de 16 m/s ?

(b) ¿Cuánto tarda en alcanzar dicha velocidad?

(c) ¿Entre qué posiciones recorre 10 m en 1 segundo?

Resp. 106.6 m; 13.3 s; entre 36.8 m y 46.8 m.

13. Un tren se desplaza en línea recta con desaceleración uniforme. El tren tarda 80 s en viajar de A a B, y 120 s en viajar de B a C, con $AB = BC = 3 \text{ km}$.

(a) Hallar la desaceleración del tren.

(b) Hallar la distancia desde C hasta el punto donde se detiene.

Resp. 0.125 m/s^2

14. Entre los instantes $t = 2 \text{ s}$ y $t = 3 \text{ s}$ un móvil recorre 16 m, y entre $t = 5 \text{ s}$ y $t = 6 \text{ s}$ recorre 28 m. Suponiendo que el móvil se mueve con aceleración constante, calcular:

(a) La aceleración.

(b) La distancia total que recorre en 9 segundos desde el inicio del movimiento en $t = 0$.

Resp. 4 m/s^2 ; 196 m.

15. Para un movimiento uniformemente acelerado se tienen los siguientes datos

Tiempo t (s)	Posición x (m)
0	-3
1	3
2	17

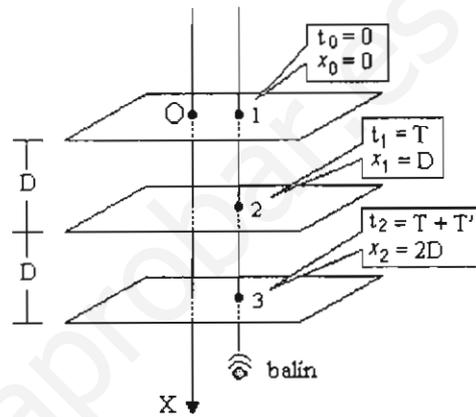
¿Cuánto vale la posición en $t = 3 \text{ s}$?

Resp. 39 m.

16. Se desea medir la aceleración de la gravedad mediante el siguiente arreglo experimental: se deja caer desde cierta altura un balín de plomo; el balín perfora tres hojas paralelas muy delgadas, cuya separación mutua es D, sin afectar apreciablemente su velocidad;

se miden los tiempos que invierte el balín entre la primera y segunda hojas, y entre la segunda y tercera. Sean éstos respectivamente T y T'. Hallar la aceleración en función de D, T y T'.

Resp. $a = \frac{2D(T-T')}{TT'(T+T')}$



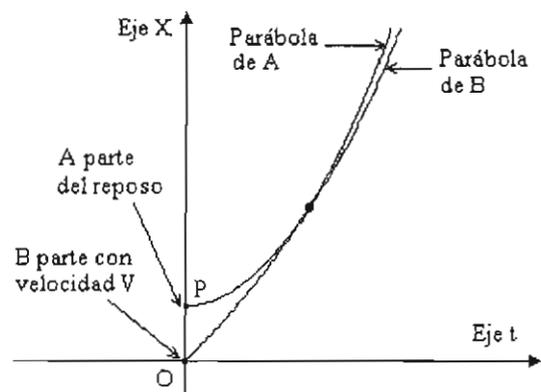
17. Demostrar la ecuación delta

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} \cdot \Delta t$$

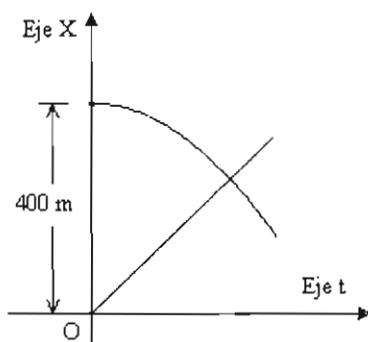
18. Un móvil A parte del reposo desde cierto punto P con una aceleración de 4 m/s^2 . A ese mismo instante detrás de él y a una distancia de 400 m, parte en su persecución otro móvil B con velocidad V y aceleración constante de 2 m/s^2 . ¿Cuál es el valor mínimo de V que permitirá a B dar alcance a A?

Sugerencia. Obtenga las ecuaciones de movimiento ($x_A = 400 + 2t^2$ y $x_B = Vt + t^2$) relativas al Eje X mostrado en la figura.

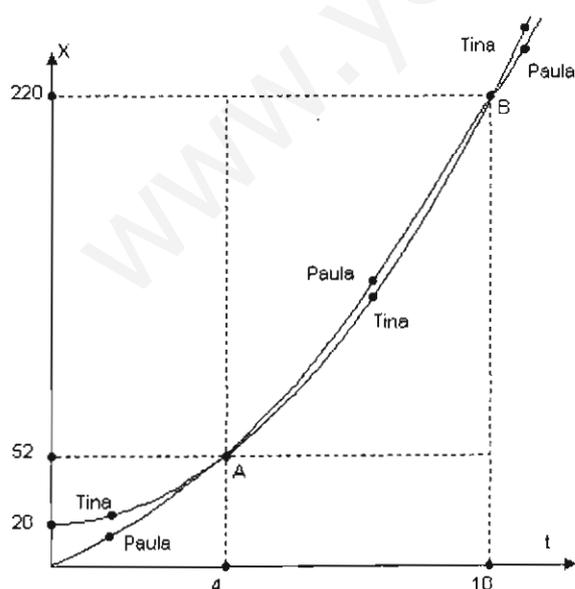
Resp. 40 m/s.



19. Dos móviles parten simultáneamente el uno hacia el otro a lo largo de la misma recta, desde dos puntos separados 400 m. El primero se mueve hacia la derecha con velocidad uniforme de 15 m/s desde el inicio. El segundo se mueve hacia la izquierda partiendo del reposo y con aceleración constante de 5 m/s². ¿En qué punto se encuentran y cuáles son sus velocidades entonces? Resp. En $x = 150$ m.

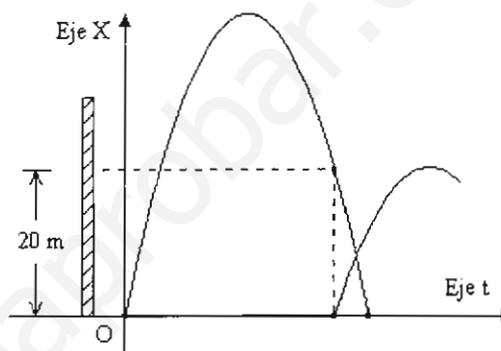


21. Las liebres Paula y Tina van a jugar carreras. Tina parte del reposo desde un punto distante 20 m de Paula, con una aceleración de 4 m/s². Paula parte simultáneamente con una velocidad inicial de 7 m/s y aceleración de 3 m/s². ¿Cuánto tarda en alcanzar Paula a Tina? ¿Cuánto tarda luego en alcanzar Tina a Paula? Resp. Observe los gráficos $x(t)$ de los movimientos de las liebres (son biónicas).



20. Una pared tiene 30 m de altura. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la base de la pared. El tiempo que la pelota está por sobre la pared es de 2 s. ¿Con qué velocidad fue lanzada?

Cuando la pelota va bajando y se encuentra a una altura de 20 m sobre el suelo, se lanza una segunda pelota hacia arriba desde el suelo con velocidad inicial de 20 m/s. ¿En qué punto se encuentran ambas pelotas? Resp. A 9.39 m sobre el suelo.



21. Se arroja una piedra desde una azotea verticalmente hacia abajo, con una velocidad inicial de 12 m/s. El sonido de la piedra al golpear la banqueta se oye 2 s más tarde. Calcular la altura de la azotea. Tome la velocidad del sonido igual a 340 m/s. Resp. 39.95 m.

22. Un móvil uniformemente acelerado recorre dos tramos contiguos de longitudes D y $2D$ en lapsos de mismas duraciones de T segundos. Hallar su aceleración en términos de D y T . Resp. $a = D/T^2$.

23. Un móvil realiza la primera parte de su movimiento desde el reposo con aceleración uniforme B , y la segunda parte con aceleración uniforme $2B$. Dado que la distancia total viajada es de 729 m y que el tiempo total del movimiento es 30 s, calcular el valor de B . Resp. 2.43 m/s².

24. Suponer que se ha planteado la ecuación de un móvil cuya aceleración es desconocida, hallándose la ecuación

$$x = 4 - 5t + \frac{1}{2} a t^2$$

Explicar cómo calcular la aceleración si se tienen

adicionalmente los siguientes datos:

- (a) El tiempo y la posición en algún punto específico, $\{t_n, x_n\}$.
- (b) El tiempo y la velocidad en algún punto específico, $\{t_n, v_n\}$.
- (c) La posición y la velocidad en algún punto específico, $\{x_n, v_n\}$.
- (d) Los valores t_n , t_m y Δx propios de algún segmento del movimiento.
- (e) Los valores x_n , x_m y Δt propios de algún segmento del movimiento.

25. Hacer lo mismo que en el problema 24 para el caso que se tenga una ecuación de la forma

$$x = 4 + v_0 t + 6 t^2$$

26. Una piedra es proyectada verticalmente hacia arriba. Pasa por un punto a una altura de "h" metros a los 3 segundos de ser lanzada, y pasa por el mismo punto de bajada después de 2 segundos adicionales. Calcular la altura h y la velocidad con que se lanzó.
Resp. 73.5 m; 39.2 m/s.

27. Una partícula A pasa cierto punto P con velocidad v_p . Tres segundos más tarde otra partícula B pasa por el mismo punto P con velocidad $(1/3)v_p$. La partícula B alcanza a la A cuando sus velocidades son respectivamente 9.3 y 8.1 m/s. Calcular v_p y la aceleración de A. Ambas partículas se mueven con movimiento uniformemente acelerado; la aceleración de B es $4/3$ la de A.
Resp. 0.9 m/s; 0.15 m/s².

CAPÍTULO 4

MOVIMIENTO PLANO. DESCRIPCIÓN EN LA BASE NATURAL

4.1. Conceptos básicos. Extensión al plano

Camino y trayectoria.

Consideraremos una partícula que se mueve en un plano. El **camino** de la partícula es el conjunto continuo de los puntos del espacio por los que transita la partícula. En general, el camino será una *curva* contenida en el plano de movimiento.

A veces el camino está prefijado, como en el movimiento a lo largo de:

- Una carretera.
- Un carril de una pista de carreras.
- Una montaña rusa.
- Un tramo de vías férreas.
- Una tubería de gas o agua
- Etc.

Un mismo camino puede ser recorrido de muchas maneras. La **trayectoria** de la partícula se refiere ya al modo particular o "itinerario" de movimiento de la partícula a lo largo del camino

En este capítulo supondremos que *el camino y la trayectoria están especificados de antemano.*

Posición o coordenada "s".

Observemos la Fig. 22. Figurémonos que el eje recto X (que usamos para describir el movimiento rectilíneo) fuese un alambre delgado. Doblémoslo, dándole la forma de un camino curvo. El eje X se transforma así en una especie de "eje curvo" que nombraremos "Eje S". Sobre este eje curvo se define un origen O y una escala de longitud. La abscisa "x", medida a lo largo del eje X, se vuelve la coordenada "s", medida a lo largo del eje S. El movimiento *rectilíneo* a lo largo del eje X se vuelve un movimiento a lo largo del camino curvo o eje S.

Al igual que en el movimiento rectilíneo, podemos pensar que el "camino" y el "eje" son la misma cosa.

Definición. La **coordenada o posición** del móvil P, denotada con "s", es la distancia directa desde el origen O hasta P, medida a lo largo del Eje S. El origen O divide el eje S en dos segmentos que corresponden a

valores negativos y positivos de s. La coordenada s es lo que se llama "*longitud de arco*" en la teoría de curvas.

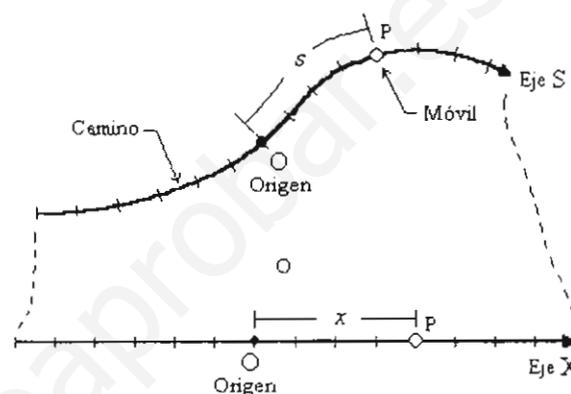


Fig. 22

Ecuación de movimiento.

A cada tiempo t la partícula se encuentra en uno y sólo un punto del camino, es decir, la posición es una función del tiempo:

$$(28) \quad s = s(t)$$

La ecuación (28) es la "*ecuación de movimiento*" de la partícula.

La ecuación de movimiento describe en qué lugar del camino se encuentra la partícula en todo momento. El movimiento de una partícula viene determinado por *dos* elementos:

- La forma del camino o eje S (por dónde se mueve la partícula).
- La ecuación de movimiento (dónde está la partícula a cada instante).

Como veremos, todas las particularidades del movimiento (distancias recorridas, velocidades, aceleraciones, etc.) se pueden obtener a partir de estos dos elementos.

Gráfico s vs t .

Para darse una idea global del movimiento uno se auxilia de dos figuras. Una de ellas es el camino (Fig. 23); la otra es el gráfico de la posición s contra el tiempo t (Fig. 24).

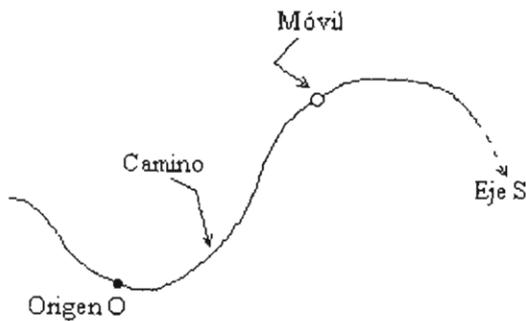


Fig. 23

(El papel representa el espacio físico)

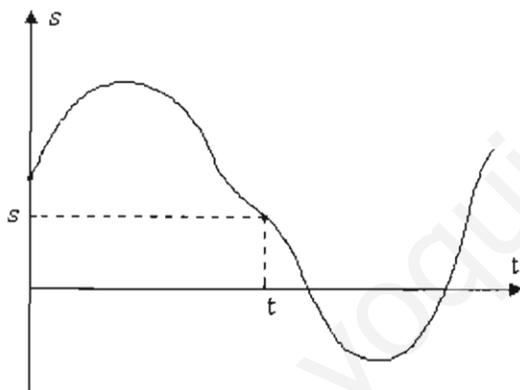


Fig. 24

(gráfico en un espacio cartesiano abstracto s - t)

Debe distinguir claramente ambos elementos gráficos. Daremos un ejemplo al respecto.

Ejemplo 28. Una partícula recorre el camino en forma de rizo mostrado en la Fig. E28a, de acuerdo con la "ley" (o ecuación de movimiento)

$$(r1) \quad s = -120 + 94t - 19t^2 + t^3$$

(s en metros, t en segundos)

donde suponemos que el tiempo t se restringe al intervalo $[0 \text{ s}, 13 \text{ s}]$. Analizar el movimiento.

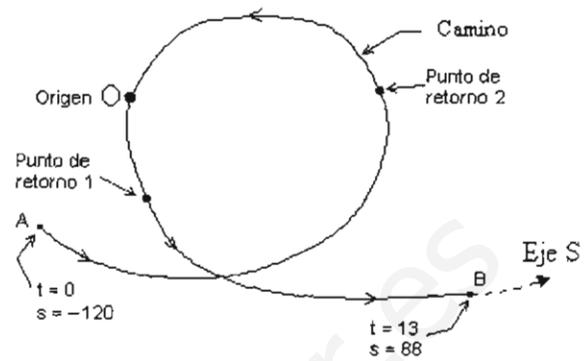


Fig. E28a

El gráfico s vs. t , mostrado en la Fig. E28b, proporciona una vista global del movimiento.

Vemos que la función $s(t)$ tiene un máximo en $t = 3.37 \text{ s}$ y un mínimo en $t = 9.30 \text{ s}$. En el primero de estos valores la distancia al origen, $|s|$, pasa de ser creciente a decreciente, y viceversa en el segundo valor. Es decir, la partícula invierte entonces la dirección de su movimiento. Estos son *puntos de retorno* del movimiento.

Observa bien cómo se corresponden los puntos de la Fig. E28b con los de la Fig. E28a.

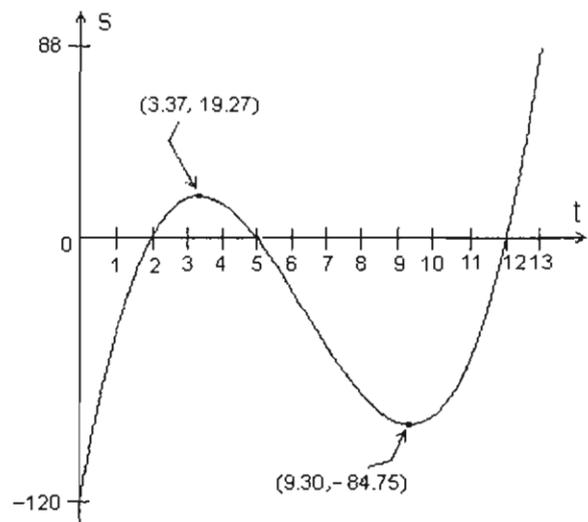


Fig. E28b

En $t = 0$ la partícula se encuentra en la parte negativa del Eje S, a 120 metros del origen O.

En $t = 13$ se halla a 88 metros del origen, en la parte positiva. Estas ubicaciones corresponden a los

puntos terminales A y B, respectivamente.

La partícula parte de A y se desplaza directamente hasta el "Punto de retorno 1", el cual alcanza en $t = 3.37$. Allí se detiene momentáneamente y regresa por donde mismo hasta el "Punto de retorno 2" llegando allí en $t = 9.30$, momento cuando vuelve a invertir su movimiento, hacia B.

Notemos que el móvil pasa tres veces por el origen.

Para mejor visualización del movimiento a lo largo de este camino, en la Fig. E28c hemos indicado las direcciones en que se recorren los diversos tramos $A \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow B$ del rizo. Esta figura es el recorrido específico o trayectoria de la partícula a lo largo del rizo.

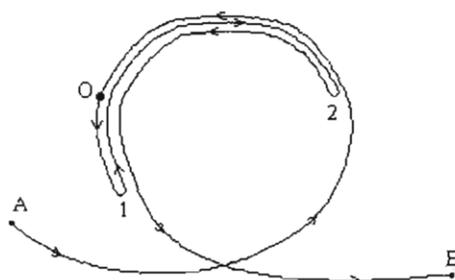


Fig. E28c

Desplazamiento y distancia recorrida.

Los conceptos de desplazamiento y distancia recorrida, en el movimiento plano, se corresponden estrechamente con los mismos conceptos introducidos en relación con el movimiento rectilíneo.

La diferencia de posiciones (esto es, coordenadas "s") correspondientes a dos valores del tiempo, t_1 y t_2 , se denomina el "desplazamiento" efectuado por la partícula al cabo del intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$. Denotando el desplazamiento con Δs tenemos

$$(29) \quad \Delta s \equiv s(t_2) - s(t_1)$$

La *distancia recorrida* por el móvil en el lapso $[t_1, t_2]$, que denotaremos con "D", es lo que marcaría el odómetro entre t_1 y t_2 , si suponemos que la partícula es un automóvil.

La distancia recorrida se mide a lo largo de la trayectoria, independientemente del sentido de movimiento. Es una cantidad siempre positiva por definición.

Por otra parte, el desplazamiento en el intervalo $[t_1, t_2]$ es una cantidad algebraica que nos dice cómo están las posiciones del móvil al inicio y término del intervalo. Mirando en el sentido del eje S tenemos que si Δs es positivo, la posición en t_2 está detrás de la posición en t_1 ; si es negativo, la posición en t_2 está delante de la posición en t_1 .

Ejemplo 29. Utilicemos el movimiento del ejemplo precedente para cuantificar la distinción entre desplazamiento y distancia recorrida.

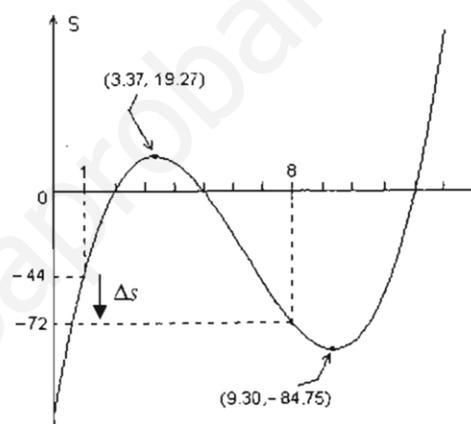


Fig. E29a

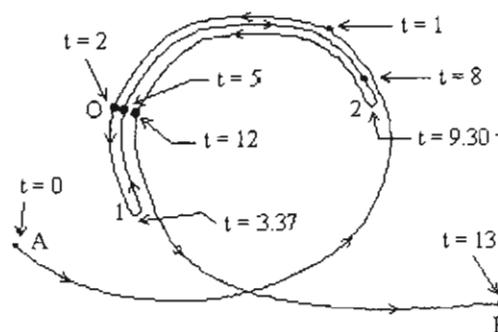


Fig. E29b

Tomemos algún intervalo de tiempo, digamos $[1, 8]$, y comparemos el valor del desplazamiento con la distancia recorrida en este intervalo. Para calcular el desplazamiento no es necesario conocer los detalles del gráfico s vs. t . Basta sustituir en la ecuación $s = s(t)$ los valores dados $t = 1$ y $t = 8$ para obtener las respectivas posiciones, y calcular su diferencia. Así, el desplazamiento en el lapso $[1, 8]$ es

$$\Delta s = s(8) - s(1) = -72 - (-44) = -28$$

Este desplazamiento corresponde a un pequeño segmento del Eje S en el gráfico s vs. t , como vemos en la Fig. E29a. Localice en la Fig. E29b los puntos correspondientes a $t = 1$ y $t = 8$. La diferencia de sus posiciones es 28 m, pero la distancia recorrida por el móvil en $[1, 8]$ obviamente no es 28 m.

Para calcular la distancia recorrida en un intervalo necesitamos averiguar si existen puntos de retorno dentro de dicho intervalo. Refiriéndonos a la Fig. E29b vemos que el intervalo $[1, 8]$ contiene un punto de retorno en $t = 3.37$. Entonces dividimos el tramo de movimiento en dos porciones, una de $t = 1$ hasta $t = 3.37$, y la otra de $t = 3.37$ hasta $t = 8$. En cada una de estas dos porciones el desplazamiento es *directo*, esto es, se lleva a cabo sin que la partícula invierta la dirección de su movimiento. En un desplazamiento directo el valor absoluto del desplazamiento sí es igual a la distancia recorrida. Calculando los desplazamientos en los lapsos $[1, 3.37]$ y $[3.37, 8]$ tenemos

$$s(3.37) - s(1) = 19.27 - (-44) = 63.27$$

$$s(8) - s(3.37) = -72 - 19.27 = -91.27$$

La distancia recorrida en $[1, 8]$ es la suma de los valores absolutos de estos dos desplazamientos directos:

$$D = 63.27 + 91.27 = 154.54 \text{ m}$$

Velocidad.

Las definiciones son análogas a las del movimiento rectilíneo. La *velocidad media* durante algún intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, la cual denotaremos con " v_m ", se define como el cociente del desplazamiento efectuado durante este intervalo, Δs , y la duración del mismo, Δt :

$$(30) \quad v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{Velocidad media})$$

La *velocidad (instantánea)* se define por

$$(31) \quad v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Si la velocidad es positiva (o sea $ds > 0$), el móvil se desplaza en el instante considerado en la

misma dirección que la del eje S. Si es negativa, lo hace en la dirección contraria.

La magnitud de la velocidad, $|v| \equiv v$, se denomina la *rapidez* del móvil.

La *rapidez media* es

$$(32) \quad \text{rapidez media} = R_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

Un movimiento plano se denomina *uniforme* si es rectilíneo y ocurre a velocidad constante. Su ecuación de movimiento es

$$(33) \quad s = s_0 + v(t - t_0) \quad (s_0, v, t_0 \text{ constantes})$$

Si en esta ecuación sustituimos t por t_0 encontraremos que $s = s_0$; es decir, la ecuación (33) representa un movimiento uniforme para el cual el móvil está en s_0 en el instante t_0 .

4.2. Problemas.

1. En una hoja de papel trace un camino curvo como desee. Suponga que un móvil describe este camino de acuerdo con la ecuación de movimiento

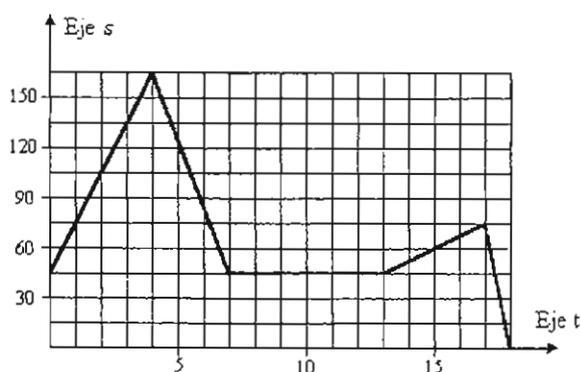
$$s = 2t^2 - 21t + 40$$

- Ponga marcas en el camino, que muestren la escala de longitud. Señale con "puntos gruesos" las posiciones correspondientes a $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 unidades de tiempo (a ojo de buen cubero). Elija apropiadamente el origen del Eje S de modo que se vean todas estas posiciones en el dibujo.
- Haga el gráfico s vs t del movimiento. ¿Existe algún punto de retorno? En caso afirmativo localícelo en la trayectoria.
- Haga otra figura de la trayectoria a la manera de la Fig. E29b de la página 50, donde se vean las direcciones de recorrido de la trayectoria.
- Calcule el desplazamiento en los intervalos de tiempo $[0, 4]$ y $[5, 6]$.
- Calcule la distancia recorrida en el lapso $[1, 5]$.
- Obtenga la velocidad media en el intervalo $[3, 3 + \Delta t]$.
- Obtén la velocidad instantánea como función del tiempo.

2. Una partícula ejecuta un movimiento uniforme. Se sabe que en $t = 6$ s su posición es $x = -10$ m.

La velocidad del movimiento es $v = 7 \text{ m/s}$. Obtener la ecuación de movimiento y graficarla en el espacio cartesiano $t-x$.

3. La figura es el gráfico s vs t de un movimiento. Los tiempos están en segundos y las posiciones en metros. Todos los segmentos del gráfico son líneas rectas entre puntos de coordenadas enteras (t, s) . ¿Qué puede decir sobre el movimiento y sus velocidades?



4. Obtener por derivación con respecto al tiempo las velocidades de los movimientos descritos por las ecuaciones

(a) $s = \frac{2t}{1+4t}$

(b) $s = s_0 e^{-bt}$ s_0 y b constantes

(c) $s = 5 \sin(2t^2 - 1)$

(d) $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ $(s_0, v_0, a \text{ constantes})$

4.3. Base ortonormal natural

De acuerdo con la primera ley de Newton, los cuerpos tienden a la tendencia natural de conservar su rapidez y su dirección de movimiento. Es decir, el movimiento "natural" de un cuerpo es un movimiento uniforme, en línea recta y con velocidad constante. Para sacar a un cuerpo de su movimiento uniforme es necesario aplicarle fuerzas. Las fuerzas modifican la velocidad, es decir, producen una "aceleración".

En el módulo de dinámica estudiaremos más a fondo cómo es que las fuerzas aplicadas sobre un móvil alteran su velocidad. Previamente debemos estudiar cómo se describen las variaciones de velocidad, cosa

que haremos a partir de esta sección.

Hasta ahora conocemos la velocidad como una cantidad algebraica. Procederemos a definirla ya del modo más general como una cantidad *vectorial*. La velocidad tendrá así una magnitud y una dirección, y un cambio de velocidad implicará cambios tanto de su magnitud como de su dirección. Hacia este objetivo introduciremos ahora una base ortonormal muy adecuada, relacionada de manera natural y directa con el camino del móvil.

Consideremos un movimiento a lo largo de un camino o eje S (Fig. 25).

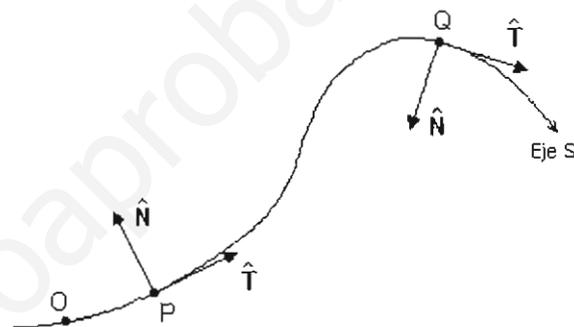


Fig. 25

La *base ortonormal natural* se compone de dos vectores unitarios, denotados con T y N . A cada punto de la trayectoria le corresponde una base local $[T, N]$, "anclada" en él. Esta base se erige en cada punto de la siguiente manera:

- El vector unitario tangencial T es tangente a la trayectoria en el punto considerado, y apunta hacia donde *crece* la coordenada s .
- El vector unitario normal N es perpendicular al tangencial T . Se dirige hacia la parte cóncava de la trayectoria en el punto considerado. Dicho de otra manera, apunta hacia el centro de curvatura local, como explicaremos un poco más adelante.

En la Fig. 25 se muestran las bases correspondientes a dos puntos P y Q de la trayectoria. Se trata de una base *variable*, como vemos, pues aunque las magnitudes de T y N no varían, sí lo hacen sus direcciones. Es de notarse que si se invierte la dirección del Eje S , automáticamente se invierte la dirección de T , no así la de N .

Imaginando que el móvil es un vehículo, el versor tangencial T apunta en la línea visual del conductor, hacia el frente; el normal N apunta hacia la izquierda o derecha del conductor, según el vehículo esté virando hacia la izquierda o la derecha, respectivamente.

Conforme la partícula se desplaza a lo largo de su trayectoria, los vectores T y N que la “acompañan” van rotando. La curvatura de la trayectoria es una medida de qué tan rápido rotan los vectores de la base conforme se gana terreno. La curvatura es una propiedad *local*, o sea, definida en cada punto de la trayectoria.

En la analogía del vehículo y el conductor, una curva muy pronunciada (de gran curvatura) es una donde el vehículo (o la base $[T, N]$) debe virar un ángulo grande en una distancia corta.

Expresaremos a continuación la noción de curvatura en una forma matemática precisa.

4.4. Curvatura y radio de curvatura

Refiriéndonos a la Fig. 26, sean P y Q dos puntos muy próximos, separados espacialmente por cierto desplazamiento directo Δs y temporalmente por cierta duración Δt . Si P es el punto general de coordenada s y tiempo t , entonces Q tendrá coordenada $s + \Delta s$ y tiempo $t + \Delta t$. Tendremos además que $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Tracemos los versores tangenciales en P y Q , denotados con $T(t)$ y $T(t + \Delta t)$, respectivamente. Tracemos además los segmentos PC_m y QC_m perpendiculares a estos versores. C_m es el punto donde se intersecan.

El ángulo $\Delta\theta$ entre estos segmentos es el mismo que entre los versores $T(t)$ y $T(t + \Delta t)$, de modo que al desplazarse la partícula de P a Q , la dirección del versor tangencial cambia en $\Delta\theta$. Ahora bien, consideremos P fijo y hagamos tender $\Delta s \rightarrow 0$ (o lo que es lo mismo, $\Delta t \rightarrow 0$); es decir, acerquemos cada vez más Q a P . Entonces,

- El punto C_m tiende a cierto punto C denominado el *centro de curvatura* correspondiente a P .
- La longitud PC_m (o bien QC_m) tiende a cierto valor ρ denominado el “*radio de curvatura*” de la trayectoria en P .

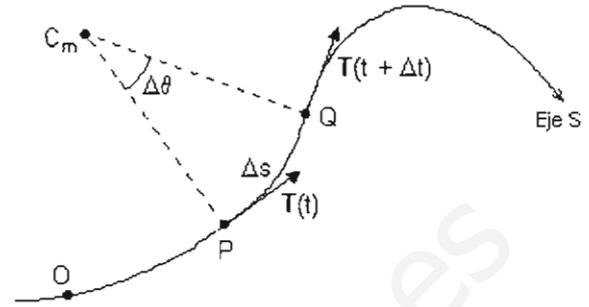


Fig. 26

- El cociente $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ tiende a lo que se denomina la *curvatura* κ de la trayectoria en P ,

$$(34) \quad \kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

(En vista de que $\Delta\theta$ es el ángulo que rota el vector T , la curvatura es la tasa de variación de la dirección tangencial con la distancia a lo largo de la curva.)

- Resulta además que el radio de curvatura ρ es el recíproco de la curvatura κ ,

$$(35) \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

Combinando las igualdades

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

tenemos que

$$(36) \quad ds = \rho d\theta$$

Es decir, el arco ds es igual al radio ρ por el ángulo $d\theta$, lo cual trae a la memoria la relación análoga entre un arco de circunferencia s , el ángulo θ que subtende este arco en el centro de la circunferencia, y el radio r de la misma (Fig. 27, lado izquierdo).

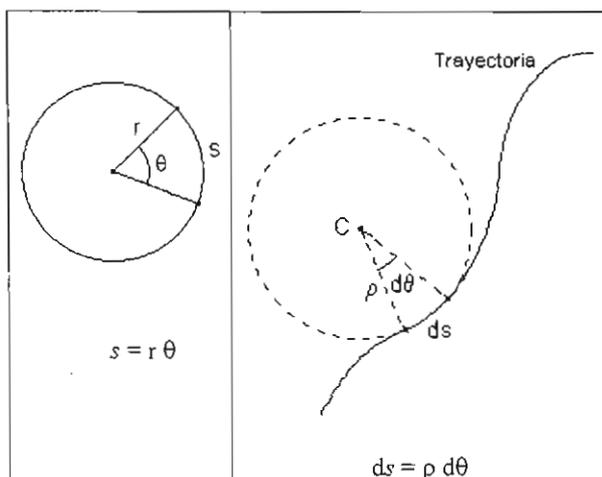


Fig. 27

Efectivamente, si el tramo de trayectoria ds es muy pequeño (Fig. 27, lado derecho), podemos suponer que es un arco de circunferencia, con centro en el centro de curvatura C , y radio igual al radio de curvatura ρ .

Necesitamos obtener todavía otro resultado matemático antes de entrar a los conceptos vectoriales de velocidad y aceleración.

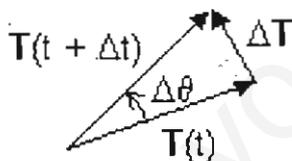


Fig. 28

Partiendo de un mismo punto, dibujemos los versores tangenciales $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}(t + \Delta t)$, como vemos en la Fig. 28. Dibujemos también el vector diferencia

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)$$

Conforme Δt tiende a cero, el ángulo entre los vectores \mathbf{T} y $\Delta \mathbf{T}$ tiende a 90° , de tal modo que la dirección de $\Delta \mathbf{T}$ tiende a coincidir con la del versor normal \mathbf{N} . Por otra parte, la magnitud de $\Delta \mathbf{T}$ se aproxima cada vez más a la de un arco de circunferencia de radio $|\mathbf{T}(t)| = 1$, que subtende un ángulo $\Delta \theta$, es decir,

$$|\Delta \mathbf{T}| = \text{“radio} \times \text{ángulo”} = 1 \cdot \Delta \theta = \Delta \theta$$

Haciendo los cambios formales $\Delta \mathbf{T} \rightarrow d\mathbf{T}$ y $\Delta \theta \rightarrow d\theta$ tenemos entonces, en magnitud y dirección,

$$(37) \quad d\mathbf{T} = d\theta \mathbf{N}$$

Usaremos esta expresión en la siguiente sección.

4.5. Velocidad como vector

Hasta ahora hemos manejado la velocidad como una cantidad algebraica. Definiremos ahora la velocidad como vector, del siguiente modo (mire la Fig. 29):

La *velocidad* del móvil es un vector definido en cada punto (o a cada instante del movimiento) mediante

$$(38) \quad \mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$$

En cada punto P de la trayectoria, el vector velocidad es paralelo a \mathbf{T} , es decir, \mathbf{v} es tangente a la trayectoria.

El factor de \mathbf{T} en la relación (38), es decir la cantidad $\frac{ds}{dt}$, es la *componente* de la velocidad \mathbf{v} a lo largo de \mathbf{T} . Ya la hemos denotado anteriormente con el símbolo “ v ”.

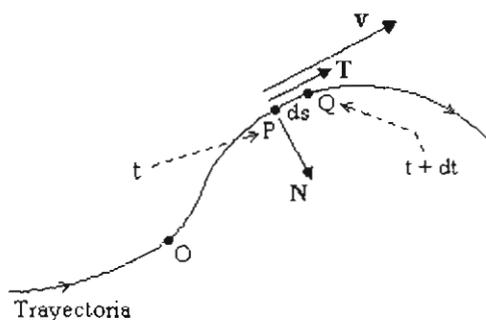


Fig. 29

$$(39) \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Expresando el vector velocidad como “componente \times vector unitario paralelo”,

$$(40) \quad \mathbf{v} = v \mathbf{T}$$

La magnitud del vector velocidad \mathbf{v} se denomina la *rapidez* del móvil. Se denota con el símbolo " v ":

$$(41) \quad v \equiv |\mathbf{v}| = |\nu \mathbf{T}| = |\nu| |\mathbf{T}| = |\nu|$$

La componente ν de la velocidad puede ser positiva, negativa o cero. La rapidez v es siempre no-negativa.

Un valor negativo de ν indica que la coordenada " s " va disminuyendo con el tiempo, es decir, que en el punto considerado el móvil se está moviendo en la dirección opuesta a la del Eje S (o lo que es lo mismo, a la de \mathbf{T}). Si $\nu > 0$, el móvil se mueve en la dirección del Eje S (o sea en la dirección de \mathbf{T}).

Cuando se usa el término "velocidad" en el habla informal uno puede estar refiriéndose realmente a la rapidez " v ", o a la componente " ν ", o al vector velocidad " \mathbf{v} ". Pero debe ser inmediato averiguar del contexto cuál es la intención del término. Así, cuando decimos por ejemplo "el móvil se mueve en un círculo con velocidad constante" no podemos estar refiriéndonos al *vector* velocidad, sino a su rapidez o a su componente ν , puesto que si el móvil describe una *curva* su vector velocidad necesariamente *varía*, al menos en dirección.

4.6. Aceleración

Si la velocidad de un móvil cambia, el móvil está *acelerado*.

La *aceleración* se define como la tasa de variación de la velocidad con el tiempo. La denotaremos con el símbolo vectorial " \mathbf{a} ":

$$(42) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Aquí, " $d\mathbf{v}$ " es el cambio de velocidad ocurrido en el tiempo " dt ".

Poniendo el vector velocidad en la forma

$$\text{Velocidad:} \quad \mathbf{v} = \nu \mathbf{T}$$

vemos que puede variar ya sea porque

- Varíe solamente su magnitud $|\mathbf{v}|$ (o equivalentemente su componente ν), o
- Varíe solamente su dirección \mathbf{T} , o
- Varíen ambos la magnitud y la dirección.

De acuerdo con el cálculo diferencial, si la componente ν varía en $d\nu$ y la dirección \mathbf{T} varía en $d\mathbf{T}$, la variación de \mathbf{v} se saca de la relación $\mathbf{v} = \nu\mathbf{T}$ aplicando la fórmula de la diferencial de un producto:

$$d\mathbf{v} = d\nu \mathbf{T} + \nu d\mathbf{T}$$

Usando aquí la relación (37), $d\mathbf{T} = d\theta \mathbf{N}$, tenemos

$$d\mathbf{v} = d\nu \mathbf{T} + \nu d\theta \mathbf{N}$$

Dividiendo por dt obtenemos la aceleración en la forma

$$\mathbf{a} = \frac{d\nu}{dt} \mathbf{T} + \nu \frac{d\theta}{dt} \mathbf{N}$$

Transformemos la derivada de θ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{\nu}{\rho}$$

$$\text{(Se usó } \kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \text{)}$$

Entonces,

$$(43) \quad \mathbf{a} = \frac{d\nu}{dt} \mathbf{T} + \frac{\nu^2}{\rho} \mathbf{N}$$

o bien

$$(44) \quad \mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

Como vemos, la aceleración \mathbf{a} tiene en general dos componentes (Fig. 30):

La componente tangencial, denotada con a_T y denominada *aceleración tangencial*, es

$$(45) \quad a_T = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La componente normal, denotada con a_N y llamada *aceleración normal*, es

$$(46) \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

En general, entonces

$$(47) \quad \mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

La magnitud de la aceleración es

$$(48) \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Representación Gráfica de la Relación

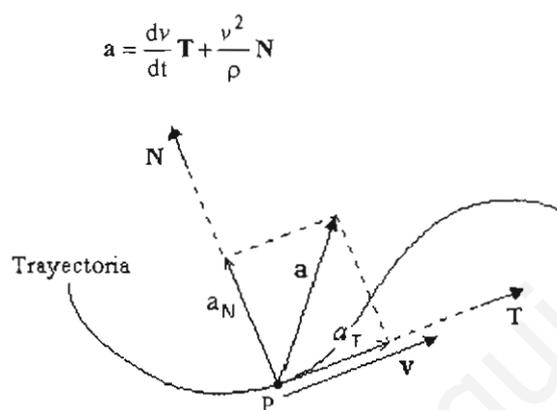


Fig. 30

La aceleración tangencial a_T puede ser positiva, negativa o cero. Si a_T y v tienen el mismo signo, entonces la aceleración tangencial tiene la misma dirección que la velocidad (Fig. 31, lado izquierdo). En este caso la rapidez va aumentando. Si a_T y v tienen signos distintos (Fig. 31, lado derecho), la velocidad y la aceleración tangencial se contraponen y la rapidez va disminuyendo.

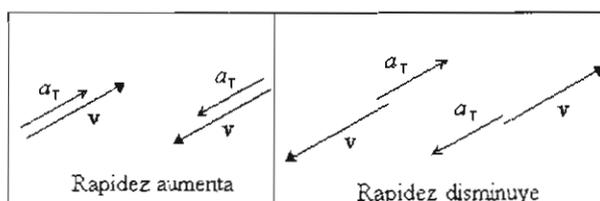


Fig. 31

La componente normal a_N siempre es positiva

(o cero), por lo que tiene invariablemente la misma dirección que \mathbf{N} , hacia la parte cóncava o centro de curvatura.

Ejemplo 30. En cierto punto P de su trayectoria, una partícula tiene una velocidad de magnitud $v = 12 \text{ m/s}$ y una aceleración de magnitud $a = 5 \text{ m/s}^2$, con las direcciones dadas en la Fig. E30.

- La rapidez del móvil en P, ¿está aumentando o disminuyendo?
- ¿A qué ritmo aumenta la velocidad v ?
- ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria en P?
- ¿Cuánto vale la curvatura en P?

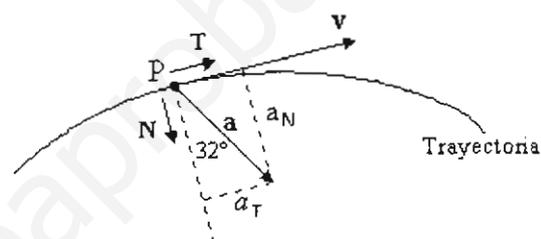


Fig. E30

(a) En vista de que la componente tangencial de la aceleración tiene la misma dirección que la velocidad v , la rapidez va aumentando.

(b) El ritmo de variación de la velocidad v es precisamente la aceleración tangencial.

$$\frac{dv}{dt} = a_T = 5 \cdot \sin 32^\circ = 2.65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La velocidad v aumenta a razón de $2.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ cada segundo.

(c) El radio de curvatura ρ lo obtenemos de su relación con la aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Despejando ρ y evaluando a_N obtenemos

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(12)^2}{5 \cdot \cos 32^\circ} = 33.96 \text{ (m)}$$

(d) La curvatura κ es el recíproco del radio de curvatura ρ ,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = 0.029 \frac{1}{\text{m}} \quad (\text{o bien } \kappa = 0.029 \frac{\text{rad}}{\text{m}})$$

La dirección de la velocidad tiende a girar a razón de 0.029 rad (o sea 1.66°) por metro recorrido (en el punto P considerado).

4.7. Cálculo de la curvatura

Imagine una partícula que se mueve a lo largo de una curva cuya ecuación, en coordenadas cartesianas, es (Fig. 32)

$$(49) \quad y = y(x)$$

La dirección de movimiento es la de la tangente a la curva. El versor tangencial \mathbf{T} apunta a lo largo de esta tangente, en el sentido hacia donde crece la coordenada x . Conforme la partícula se desplaza, la dirección de la tangente va variando. Digamos que en dos puntos P y Q, éste distanciado en "ds" de aquel, la tangente forme ángulos θ y $\theta + d\theta$ con el eje X, como vemos en la figura 32. Entonces entre estos dos puntos la dirección de la tangente ha variado en $d\theta$.

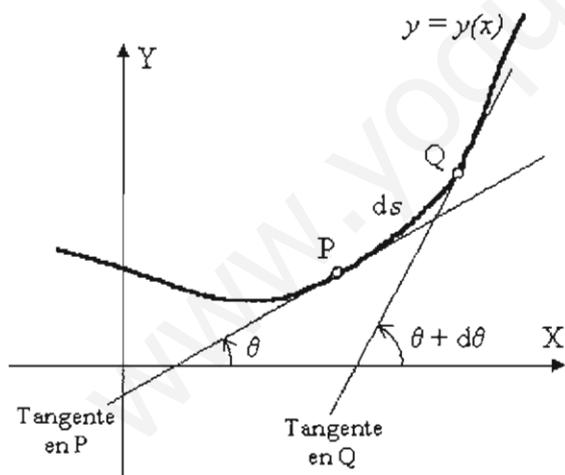


Fig. 32

La curvatura en el punto P es la tasa de variación de la dirección θ con la distancia recorrida s a lo largo de la curva,

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

Ahora bien, el ángulo θ que forma la tangente con el eje X viene dado por

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \quad d\theta = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

y la longitud de arco "ds" por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

de tal manera que

$$(50) \quad \kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo 31. Calcular la curvatura de

- (a) La recta $y = ax + b$.
- (b) La parábola $y = cx^2$.
- (c) El círculo $x^2 + y^2 = R^2$.

Para la recta $y = ax + b$ tenemos que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

por lo que su curvatura es cero en todo punto. El radio de curvatura de la recta es indeterminado ($\rho = \infty$)

Para la parábola tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2c$$

por lo que

$$\kappa = \frac{2c}{\left(1 + 4c^2x^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

La curvatura es máxima en el origen $x = 0$, y va disminuyendo con x .

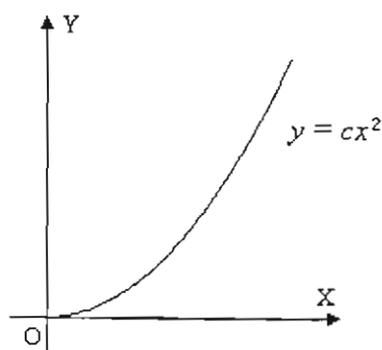


Fig. E31

Para $4c^2x \gg 1$ podemos despreciar el "1" en el denominador, obteniendo

$$\kappa \cong \frac{1}{4c^2x^3} \quad (\rho \approx 4c^2x^3)$$

Para el círculo la curvatura es constante, igual a

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

El radio de curvatura es R , igual al radio del círculo.

4.8. Aceleración y fuerza

Para comprender mejor la relación entre los vectores velocidad y aceleración nos valdremos de la segunda ley de Newton,

$$(51) \quad \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

En palabras: si se aplica a una partícula de masa m una fuerza \mathbf{F} , ésta le imprime una aceleración \mathbf{a} cuya dirección es la misma que la de la fuerza, y cuya magnitud es proporcional a la fuerza.

Aplicar una fuerza \mathbf{F} a una partícula libre de moverse es comunicar a esta una aceleración \mathbf{a} en la misma dirección que la fuerza. Entonces podemos basarnos en nuestra noción intuitiva del efecto de las fuerzas con el fin de averiguar el "efecto" de la aceleración \mathbf{a} sobre la velocidad \mathbf{v} . Así como pensamos en la fuerza como un jalón o empujón, también podemos pensar en la aceleración como un "jalón" o "empujón" que modifica la dirección (y en general también la magnitud) del vector velocidad \mathbf{v} .

Si damos a un móvil un impulso en la misma dirección en que se está moviendo, provocamos que aumente su rapidez. Si el impulso es en dirección contraria a la velocidad \mathbf{v} , el móvil disminuye su rapidez (es frenado). Por otra parte, para hacer que el móvil se desvíe de un camino recto, ello sin que la rapidez aumente ni disminuya, debemos jalar o empujar el móvil *transversalmente* (en dirección perpendicular a su velocidad).

Observemos la Fig. 33. El móvil tiene velocidad \mathbf{v} y está sujeto a una fuerza \mathbf{F} , la cual hemos descompuesto en componentes F_{\parallel} y F_{\perp} , la primera paralela a la velocidad, la segunda perpendicular. Estas son las componentes tangencial y normal de la fuerza en el punto de la trayectoria considerado.

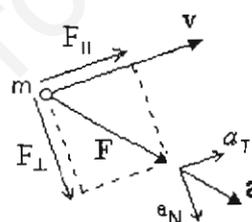


Fig. 33

El efecto de F_{\parallel} es modificar la rapidez exclusivamente.

El efecto de F_{\perp} es modificar la dirección de la velocidad exclusivamente.

En lugar de hablar sobre el "efecto" de la fuerza \mathbf{F} podemos hablar equivalentemente sobre el "efecto" de la aceleración \mathbf{a} , dada la relación de proporcionalidad $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Si en la Fig. 33 descomponemos la aceleración \mathbf{a} en dos componentes, una paralela a la velocidad (es decir, la componente tangencial a_T) y la otra perpendicular (o sea la componente normal a_N), los efectos de estas componentes son los mismos que los de las respectivas componentes de la fuerza: la componente tangencial a_T afecta la magnitud de la velocidad pero no su dirección; la componente normal a_N afecta la dirección de la velocidad pero no su magnitud.

En particular, si la fuerza aplicada sobre un móvil siempre está en la misma dirección que su velocidad (Fig. 34), entonces el móvil efectúa un movimiento rectilíneo, puesto que para desviarlo de su camino recto se requeriría una componente de fuerza perpendicular a la velocidad, que suponemos no existe.

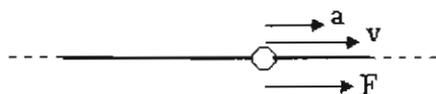


Fig. 34

A la inversa, si un cuerpo efectúa un movimiento rectilíneo, entonces su aceleración es un vector dirigido siempre a lo largo de la recta del movimiento.

Por otra parte, supongamos que un móvil recorra una trayectoria de tal modo que su aceleración siempre sea perpendicular a su velocidad (Fig. 35). Como en este caso no existe componente tangencial de aceleración que modifique la magnitud de la velocidad, entonces el móvil recorre su trayectoria con rapidez constante. La curvatura de esta trayectoria variará según los valores de $|a| = |a_N|$.

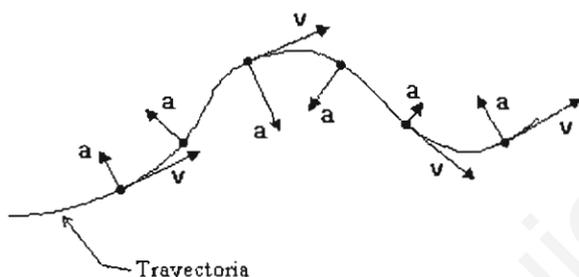


Fig. 35 ($a \perp v \Rightarrow v = |v| = \text{constante}$)

Lo único que "hace" la aceleración en este caso es desviar al móvil de un camino recto. Un caso particular importante de esta situación es el movimiento circular uniforme, en el que el móvil describe una circunferencia con rapidez constante (Fig. 36). La fuerza (o aceleración) necesaria para ello debe estar dirigida en todo momento hacia el centro del círculo.

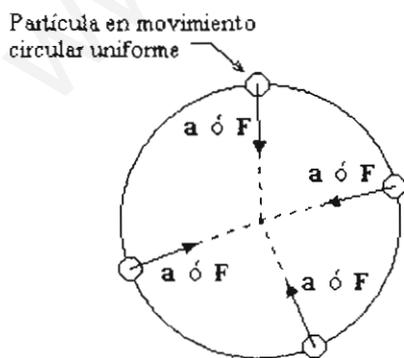


Fig. 36

Lo anterior es consistente, naturalmente, con las expresiones matemáticas de las aceleraciones tangencial y normal. Si un movimiento es rectilíneo, la curvatura de la trayectoria es 0 y el radio de curvatura es ∞ . Entonces la aceleración normal vale cero:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$$

La aceleración del móvil es puramente tangencial, es decir, a lo largo del movimiento.

Por otra parte, si el móvil recorre una trayectoria curva con rapidez constante, entonces $v = \text{constante}$ y por lo tanto $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$. Es decir, la aceleración del móvil es puramente normal (perpendicular a la velocidad y dirigida hacia el centro de curvatura correspondiente a cada punto).

Ejemplo 32. Una partícula se mueve en línea recta con velocidad constante $v = 4 \text{ m/s}$. ¿Qué aceleración debe comunicársele para que:

- (a) aumente su velocidad uniformemente al valor $v = 10 \text{ m/s}$ en un lapso de 3 segundos sin alterar la dirección de su movimiento? (Fig. E32a).
- (b) la partícula vire a lo largo de un arco de círculo de radio 5 metros sin alterar su velocidad v ? (Fig. E32b).

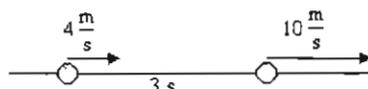


Fig. E32a

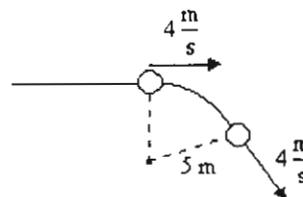


Fig. E32b

De acuerdo con lo que discutimos en las páginas precedentes, en el primer caso debe aplicarse a la partícula una fuerza en la misma dirección que la velocidad (Fig. E32c). Hablando en términos de aceleraciones, debe darse a la partícula una aceleración en la misma dirección que su velocidad.

El valor de esta aceleración (puramente tangencial) se obtiene de la relación $a_T = \frac{dv}{dt}$ en la forma

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-4}{3} = 2 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

(La derivada dv/dt es igual al cociente de incrementos $\Delta v/\Delta t$ porque aquí a_T es constante).

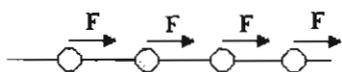


Fig. E32c

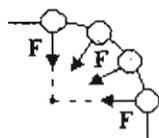


Fig. E32d

Para hacer que la partícula cambie solamente de dirección sin alterar su rapidez, debe aplicársele una fuerza que sea en todo momento perpendicular a la velocidad v (Fig. E32d). Lo que es lo mismo, debe imprimirsele una aceleración puramente normal. Para que el radio sea $\rho = 5 \text{ m}$ tenemos, de la ecuación $a_N = v^2/\rho$, que la aceleración normal debe ser

$$a_N = \frac{4^2}{5} = 0.8 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

4.9. Problemas

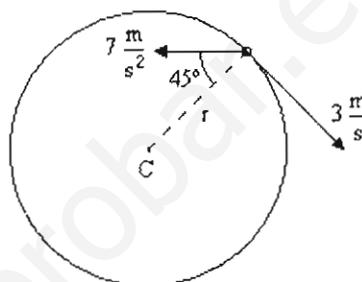
1. En una hoja de papel trace una trayectoria curva como desee. Escoja arbitrariamente 4 puntos de esta trayectoria.

- (a) En el punto #1, dibuje un posible vector velocidad y trace un posible vector aceleración de modo que en este punto la rapidez del móvil esté aumentando.
- (b) Ídem en el punto #2, ahora con la rapidez disminuyendo.
- (c) Ídem en el punto #3, ahora con velocidad v instantánea nula.

2. Una partícula describe una circunferencia. En cierto momento su velocidad y aceleración están como se indica en la figura.

- (a) ¿Cuánto vale el radio "r" de la circunferencia?
- (b) ¿A qué ritmo está disminuyendo la rapidez del móvil?

Resp. (a) 1.82 m; (b) a razón de 4.95 m/s cada segundo.



3. Un automóvil se mueve con velocidad constante $v = 15 \text{ m/s}$ en línea recta. Se le va a someter a una aceleración de *magnitud* constante $a = 5 \text{ m/s}^2$. ¿Cómo debe "aplicarse" esta aceleración para que el automóvil

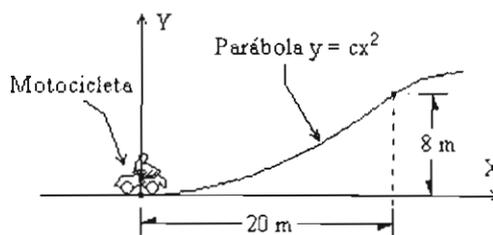
- (a) Incremente su velocidad v lo más posible? ¿Cuál será la velocidad del automóvil después de 2 segundos de aplicada la aceleración de esta manera?
- (b) Vire lo más posible? ¿Cuál es el radio de la curva descrita?

Resp. (a) 25 m/s; (b) 45 m.

4. Utilice la expresión de la curvatura de una parábola, dada en el ejemplo 31 de la página 56, para resolver este problema.

Un motociclista asciende por un cerro cuyo perfil se puede aproximar por una parábola $y = cx^2$. En $x = 10 \text{ m}$ la velocidad del motociclista es $v = 8 \text{ m/s}$ y está aumentando a razón de 2 m/s^2 . ¿Cuánto vale la aceleración $|a|$ del motociclista allí?

Resp. 2.86 m/s^2 .



5. Una partícula se mueve según la ecuación de movimiento

$$s = -\frac{3t}{4+t} \quad (s \text{ en metros, } t \text{ en segundos})$$

Supongamos que en el instante $t = 2 \text{ s}$ la partícula se encuentra en un punto donde el radio de curvatura vale 6 m . Calcular para este punto:

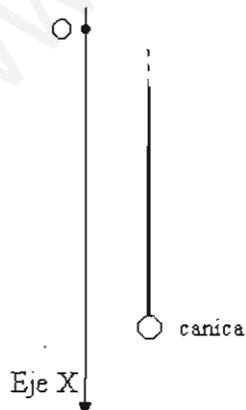
- Las aceleraciones tangencial y normal.
- La magnitud de la aceleración.
- En el punto considerado, ¿a qué tasa está rotando la partícula la dirección de su movimiento por metro recorrido? (Expresarla en radianes por metro y en grados por metro).
- ¿A qué ritmo está variando la velocidad v de la partícula en dicho punto? (expresarlo en m/s^2).

Resp. (a) 0.111 m/s^2 , 0.018 m/s^2 ; (b) 0.112 m/s^2 ; (c) 0.167 rad/m ; $9.57^\circ/\text{m}$; (d) 0.018 m/s^2 .

6. Una canica cae en $t = 0$ verticalmente desde cierta altura. Colocando el Eje X como se ve en la figura a la derecha, la ecuación de movimiento de la canica es

$$x = 4 + t + 4.9 t^2 \quad (x \text{ en m, } t \text{ en s})$$

- La canica ¿cae desde el reposo o con velocidad inicial distinta de cero?
- ¿Es constante la velocidad de la canica?
- Demostrar que $x = 4 + \frac{1}{2} v_m t$, donde v_m es la velocidad media en el intervalo $[0, t]$.



CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN EN LAS BASES CARTESIANA Y POLAR

5.1. Introducción

La base ortonormal natural $\{T, N\}$ que empleamos en el capítulo anterior conduce a unas expresiones para la velocidad v y la aceleración a en términos de la longitud de arco "s", a saber,

$$v = \frac{ds}{dt} T \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} T + \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 N$$

Estas expresiones son muy útiles cuando se conoce la ecuación de movimiento $s = s(t)$ y la forma de la trayectoria.

Sin embargo, en general resulta más útil descomponer los vectores velocidad y aceleración en componentes relativas a la base cartesiana o la base polar, principalmente. Este es el programa que emprenderemos en este capítulo.

5.2. Ecuaciones paramétricas de la trayectoria

En el espacio cartesiano XY, una trayectoria curva se describe a través de una función de la forma $y = y(x)$. Pero tal función no da información sobre los tiempos del movimiento. Por esta razón se prefiere describir la trayectoria mediante unas ecuaciones paramétricas de la forma

$$(52) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto variable de la curva, y el parámetro "t" es el tiempo. La curva $y = y(x)$ se obtiene eliminando el tiempo de estas dos ecuaciones. Las ecuaciones (52) matan dos pájaros de un tiro: constituyen las "ecuaciones de movimiento" y a la vez determinan la forma de la trayectoria. De ellas se extrae toda la información sobre el movimiento.

Dado un valor del tiempo t, estas ecuaciones nos permiten calcular una pareja de valores (x, y) que corresponde a un punto del plano, aquel donde se encuentra la partícula en el instante t.

Un valor del tiempo "t + dt" dará un punto muy cercano ("infinitesimalmente próximo") al que

corresponde al valor "t". Las coordenadas de este punto cercano son $(x + dx, y + dy)$, donde las diferenciales se obtienen de (52) en la forma

$$(53) \quad dx = \frac{dx}{dt} dt \quad dy = \frac{dy}{dt} dt$$

El vector de posición r de la partícula, en la base ortonormal cartesiana $\{i, j\}$, es

$$(54) \quad r = (x, y) = x i + y j$$

El vector de posición de la partícula en t + dt es

$$(55) \quad r + dr = (x + dx, y + dy) = (x + dx) i + (y + dy) j$$

Aquí, dr es el desplazamiento de la partícula en el intervalo infinitesimal $\{t, t + dt\}$:

$$(56) \quad dr = (dx, dy) = dx i + dy j$$

En la Fig. 37 se muestran estos vectores gráficamente.

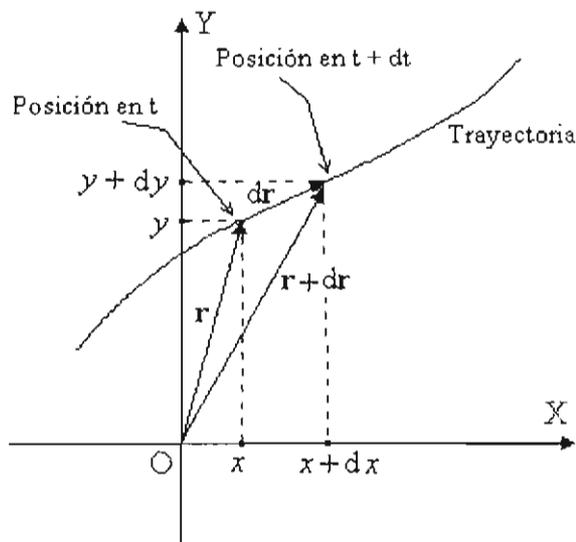


Fig. 37

5.3. Velocidad en componentes cartesianas

Podemos traducir fácilmente la expresión de la velocidad, $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$, a la base cartesiana. Basta observar que el desplazamiento infinitesimal de la partícula, $d\mathbf{r}$, tiene por magnitud precisamente la longitud de arco " $|ds|$ ", y por dirección la del versor tangencial \mathbf{T} (Fig. 38).

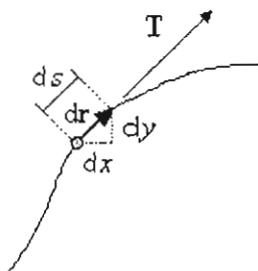


Fig. 38

Es decir,

$$(57) \quad d\mathbf{r} = ds \mathbf{T}$$

Por lo tanto, sustituyendo el producto " $ds \mathbf{T}$ " por $d\mathbf{r}$ en la expresión $\mathbf{v} = (ds/dt) \mathbf{T}$ obtenemos para la velocidad la expresión:

$$(58) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

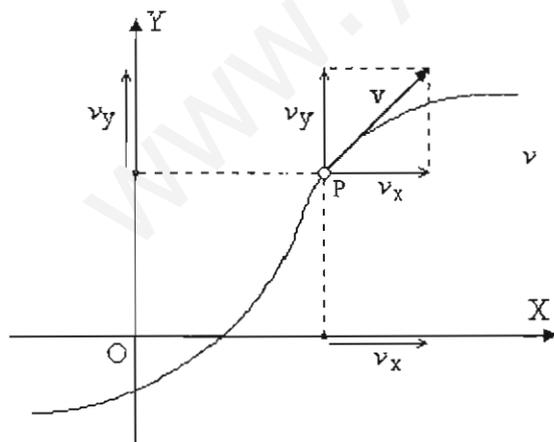


Fig. 39

En la base cartesiana, la velocidad se puede poner en general

$$(59) \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

donde las componentes v_x y v_y son

$$(60) \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Estas componentes tienen una interpretación simple. Proyectemos la partícula sobre los ejes X y Y (Fig. 39); conforme la partícula se mueve a lo largo de su trayectoria con velocidad \mathbf{v} , su proyección sobre el Eje X se mueve a lo largo de este eje con velocidad v_x , y su proyección sobre el Eje Y lo hace con velocidad v_y .

Entonces podemos visualizar el movimiento de la partícula en el plano XY como la combinación de dos movimientos rectilíneos: aquellos de sus proyecciones sobre los ejes coordenados. Cuando la partícula se desplaza " $d\mathbf{r}$ " a lo largo de su trayectoria, su proyección sobre el eje X se desplaza " dx " y su proyección sobre el eje Y se desplaza " dy ". Existe la relación (Fig. 38)

$$(61) \quad |d\mathbf{r}| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

La rapidez se obtiene directamente de las expresiones (59) y (60) en la forma

$$(62) \quad v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} v = |\mathbf{v}| &= \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{|ds|}{dt} = \\ &= \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 33. Consideremos el movimiento descrito por las ecuaciones paramétricas (unidades S.I.):

$$x = 1 - 2t \quad y = -3 + t^2$$

La Fig. E33 muestra el tramo de trayectoria correspondiente al intervalo de tiempo $[0 \text{ s}, 5 \text{ s}]$.

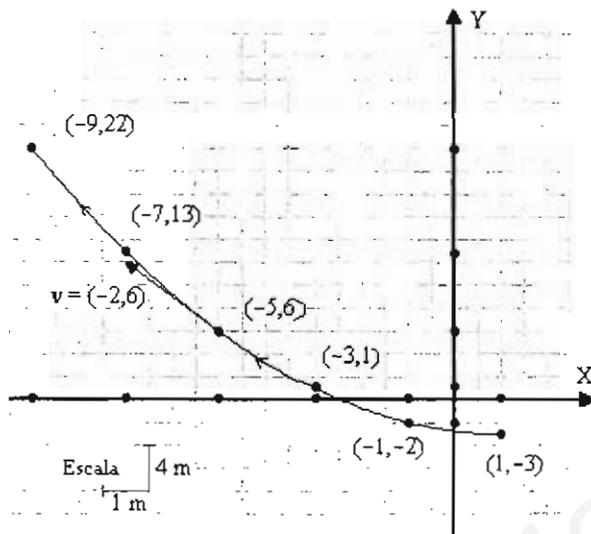


Fig. E33

Despejemos el tiempo de la ecuación $x(t)$, o sea $t = (x - 1)/2$, y sustituyamos en la ecuación $y(t)$. Llegamos a la ecuación de la trayectoria:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$$

que es una parábola con su vértice en el punto $(1, -3)$, correspondiente a $t = 0$.

El vector velocidad para cualquier instante es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2 \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = (v_x, v_y) = (-2, 2t)$$

La velocidad en $t = 0$ es un vector paralelo al Eje X: $\mathbf{v}(0) = (-2, 0)$.

Observe en la Fig. E33 las posiciones de las proyecciones de la partícula sobre los ejes.

Un método vectorial para obtener las relaciones de velocidad consiste en partir del vector \mathbf{r} y derivar con respecto al tiempo:

$$\mathbf{r} = (1 - 2t, -3 + t^2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-2, 2t)$$

5.4. Componentes de la aceleración en la base cartesiana

En la base cartesiana, la aceleración \mathbf{a} viene dada por

$$(63) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

o sea,

$$(64a) \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

con

$$(64b) \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{y} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Un objeto que se mueve en un plano vertical bajo la acción de la gravedad terrestre posee una aceleración constante dada por

$$(65) \quad \mathbf{a} \equiv \mathbf{g} = (0, -g)$$

o bien

$$\mathbf{a} = (0, -9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = (0, -9.8) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ello si suponemos que el eje X apunta horizontalmente y el eje Y verticalmente hacia arriba.

Para el móvil considerado en el Ejemplo anterior encontramos que la velocidad es

$$\mathbf{v} = (-2, 2t) = -2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

La aceleración de este móvil resulta constante, igual a

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-2, 2t) = \left(\frac{d(-2)}{dt}, \frac{d(2t)}{dt} \right) = (0, 2)$$

Ejemplo 34. Estudiemos el movimiento descrito por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = -2(1 - \operatorname{cos} t)$$

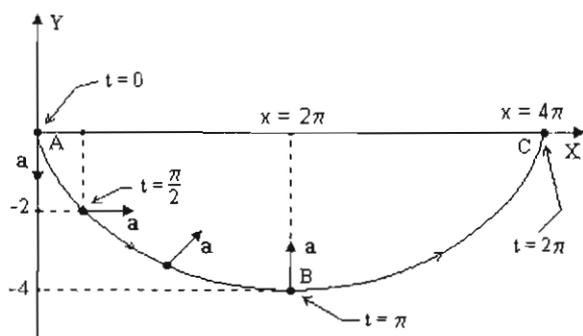


Fig. E34

La trayectoria es una curva denominada *cicloide* (Fig. E34).

Durante el lapso $t \in [0, 2\pi]$, el móvil recorre su trayectoria en el sentido $A \rightarrow B \rightarrow C$. La velocidad viene dada por

$$\mathbf{v} = (2 - 2 \operatorname{cos} t, -2 \operatorname{sen} t)$$

El móvil parte en $t = 0$ del origen y desde el reposo: $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}(0) = (0, 0)$. Su velocidad vuelve a hacerse cero en $t = 2\pi$, en el punto C.

La aceleración es

$$\mathbf{a} = (2 \operatorname{sen} t, -2 \operatorname{cos} t)$$

En el origen O la aceleración es $\mathbf{a} = (0, -2)$.

Se advierten las siguientes propiedades del movimiento:

– La rapidez se puede escribir en la forma

$$v = 2\sqrt{|y|}$$

– La magnitud de la aceleración es constante:

$$a = |\mathbf{a}| = 2$$

Ejemplo 35. Escribir las expresiones vectoriales del vector de posición y la velocidad para

- (a) el movimiento uniforme en un plano.
(b) el movimiento uniformemente acelerado en un plano.

(a) Sea \mathbf{v} la velocidad constante de la partícula. Su vector de posición depende del tiempo en la forma simple

$$(r1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t$$

donde \mathbf{r}_0 es el vector de posición en $t = 0$. Si en $t = t_1$ la posición es \mathbf{r}_1 , la ecuación se convierte en

$$(r1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v} (t - t_1)$$

(b) Sea \mathbf{a} la aceleración constante de la partícula. Sean \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 la posición y velocidad en $t = 0$. Entonces,

$$(r2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

$$(r3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t$$

Si en $t = t_1$ la posición y la velocidad son \mathbf{r}_1 y \mathbf{v}_1 , respectivamente, entonces

$$(r4) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} \mathbf{a} (t - t_1)^2$$

$$(r5) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a} (t - t_1)$$

Notemos que estas fórmulas se reducen a las del movimiento uniforme cuando $\mathbf{a} = 0$.

Todas estas ecuaciones se pueden expresar por componentes. Así tenemos que (r4) y (r5) equivalen a estas:

$$x = x_1 + v_{1x} (t - t_1) + \frac{1}{2} a_x (t - t_1)^2$$

$$v_x = v_{1x} + a_x (t - t_1)$$

$$y = y_1 + v_{1y} (t - t_1) + \frac{1}{2} a_y (t - t_1)^2$$

$$v_y = v_{1y} + a_y (t - t_1)$$

5.5. Velocidad y aceleración en la base polar

Cuando no convenga la base cartesiana $\{i, j\}$ para la descripción del movimiento, una alternativa es usar la base polar $\{e_r, e_\theta\}$, sobre todo cuando el movimiento es a lo largo de un círculo.

Revisemos los conceptos de posición, velocidad y aceleración en el sistema de coordenadas polares.

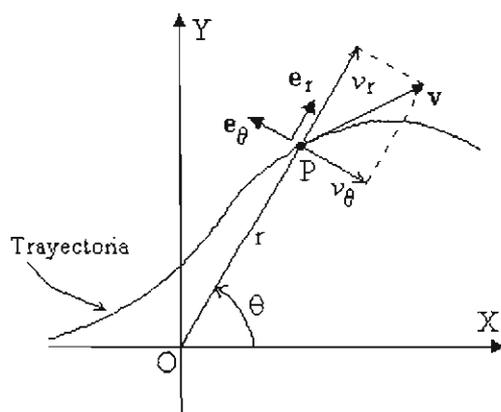


Fig. 40

En la Fig. 40 se representa una partícula P que describe cierta trayectoria. Las coordenadas polares de P son (r, θ) , definidas en la forma conocida. La base polar $\{e_r, e_\theta\}$ se construye así:

- El vector unitario radial e_r está en dirección desde el origen O hacia la posición presente de la partícula (esto es, "radialmente hacia fuera").
- El vector unitario azimutal o angular e_θ es perpendicular a e_r , y se dirige hacia donde crece la coordenada θ .

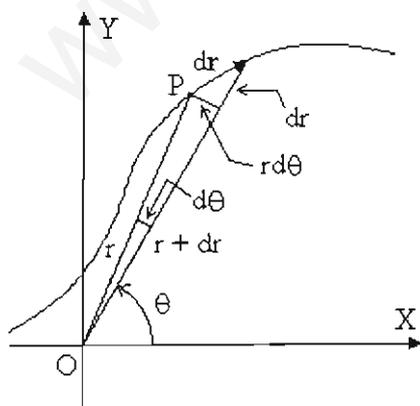


Fig. 41

A diferencia de la base cartesiana $\{i, j\}$, formada por vectores constantes i y j , la base polar es una base *variable*. Aunque las magnitudes de e_r y e_θ siempre valen la unidad, sus *direcciones* varían con el punto considerado en el plano.

El vector de posición de la partícula P tiene una expresión muy simple en la base polar:

$$(66) \quad \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

(magnitud r , dirección radial e_r)

Obtendremos el vector velocidad geométrica y analíticamente. En el método geométrico observamos que las componentes radial y azimutal del desplazamiento vectorial $d\mathbf{r}$ son " dr " y " $r d\theta$ ", respectivamente (Fig. 41), de modo que

$$(67) \quad d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta$$

Dividiendo $d\mathbf{r}$ por dt obtenemos la velocidad:

$$(68) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

En la base polar la velocidad se escribe

$$(69) \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

Sus componentes radial y azimutal son entonces

$$(70) \quad v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

También podemos obtener la velocidad analíticamente derivando el vector \mathbf{r} con respecto al tiempo. Partiendo de (58) tenemos

$$(71) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

Ahora bien, son válidas las relaciones

$$(72) \quad \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r$$

Sustituyendo la derivada de e_r en (71) por la primera de estas relaciones obtenemos (68).

Es fácil interpretar las componentes de la velocidad:

Imagine un observador situado en el origen de coordenadas O, mirando el movimiento de la partícula P. La componente radial de la velocidad de P, o sea $v_r = \frac{dr}{dt}$, es la velocidad con que el observador percibe

que la partícula se acerca o aleja de él. La componente azimutal, $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad con que el observador percibe que la partícula P se desplaza transversalmente a su línea visual OP.

La aceleración \mathbf{a} no es tan fácil de obtener geoméricamente. Sin embargo, tenemos el método analítico: derivando la expresión (68) de la velocidad,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \right) =$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \right)$$

Usando (72) obtenemos

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \right) + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \left(-\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r \right) \right)$$

o bien,

$$(73) \quad \mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta$$

Las expresiones generales obtenidas para la velocidad y la aceleración se pueden poner en una forma más compacta. En primer lugar notemos que la derivada $\frac{d\theta}{dt}$ es la rapidez con que gira la línea visual

OP; se le denomina *velocidad angular* de la línea OP, o bien "*velocidad angular de la partícula P*", y se denota con

$$(74) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La derivada temporal de ω es la llamada "*aceleración angular*" de la línea OP o de la partícula P². Se denota con " α ",

$$(75) \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Quedan así

$$(76) \quad \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + \omega r \mathbf{e}_\theta$$

$$(77) \quad \mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \right) \mathbf{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \omega + r \alpha \right) \mathbf{e}_\theta$$

5.6. Movimiento circular

Una aplicación muy importante de las fórmulas de velocidad y aceleración en coordenadas polares es al movimiento circular del punto.

En la Fig. 42 se muestra una partícula cuya trayectoria es una circunferencia de radio "r". La forma general de las ecuaciones paramétricas del movimiento es

$$r = \text{constante}$$

$$\theta = \theta(t)$$

En otras palabras, solamente la coordenada θ (llamada *posición angular* de la partícula) es la que varía con el tiempo.

² Las partículas no pueden rotar, sólo pueden trasladarse. El objeto geométrico más simple susceptible de rotación es el segmento recto. Al moverse la partícula P, lo que está rotando no es ella sino el segmento radial OP. Sin embargo, se ha generalizado el uso de "*velocidad angular de la partícula*" y nosotros lo adoptaremos, con las reservas del caso.

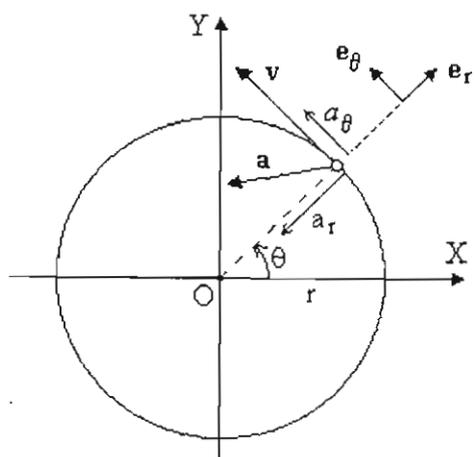


Fig. 42

Como "r" es constante, todas sus derivadas son nulas. Por lo tanto, las expresiones (76) y (77) se reducen a

$$(78) \quad \mathbf{v} = \omega r \mathbf{e}_\theta$$

(velocidad en el movimiento circular)

$$(79) \quad \mathbf{a} = -\omega^2 r \mathbf{e}_r + r \alpha \mathbf{e}_\theta$$

(aceleración en el movimiento circular)

La velocidad obviamente es tangente a la circunferencia. Su componente (única) es

$$(80) \quad v = \omega r$$

En cuanto a la aceleración, en general posee dos componentes:

- La componente tangencial a la circunferencia,

$$(81) \quad a_\theta = r \alpha = r \frac{d\omega}{dt}$$

llamada *aceleración tangencial*.

- La componente radial, dirigida hacia el centro de la circunferencia

$$(82) \quad a_r = -\omega^2 r = -\frac{v^2}{r}$$

Se le llama *aceleración radial o centrípeta*.

Ejemplo 36. Una partícula describe una circunferencia de radio $r = 4 \text{ m}$ de acuerdo con la ley

$$\theta(t) = 5t - \text{sen } 2t^2$$

t en segundos, θ en radianes

Calcular su velocidad y aceleración cuando $t = 5 \text{ s}$.

Apliquemos las fórmulas

$$v = \omega r \quad a_r = -\omega^2 r \quad a_\theta = \alpha r$$

con

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(5t - \text{sen } 2t^2) = 5 - 4t \cos 2t^2$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(5 - 4t \cos 2t^2) = -4 \cos 2t^2 + 16t^2 \text{sen } 2t^2$$

En $t = 5$ tenemos (todo en unidades S.I.):

$$\omega(t = 5) = 5 - 4(5) \cos(50) = -14.3$$

$$\alpha(t = 5) = -4 \cos 50 + 16(25) \text{sen } 50 = -108.0$$

Entonces,

$$v = -14.3(4) = -57.2$$

$$a_r = -(-14.3)^2(4) = -817.96$$

$$a_\theta = -432$$

La velocidad y la aceleración son entonces, en $t = 5 \text{ s}$ y en unidades S.I.,

$$\mathbf{v} = -57.2 \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -817.96 \mathbf{e}_r - 432 \mathbf{e}_\theta$$

$$|\mathbf{a}| = 925$$

5.7. Tiro parabólico

El problema general.

“Se lanza un proyectil dentro del campo gravitatorio de la Tierra, con una velocidad inicial v_0 que forma un ángulo θ con la horizontal. Analizar el movimiento”.

Propiedades del movimiento.

Fijemos el origen del sistema de coordenadas XY en el punto de lanzamiento. Definamos $t = 0$ como el instante cuando se lanza el proyectil.

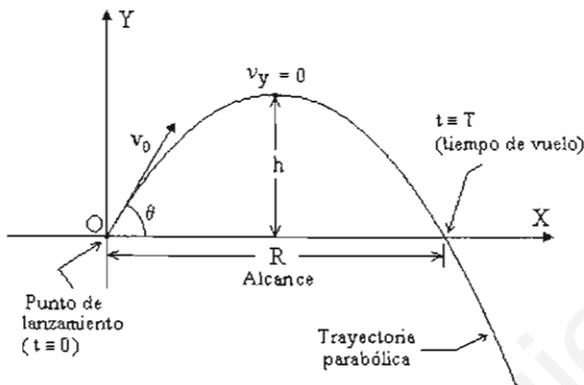


Fig. 43

La aceleración del proyectil es

$$\mathbf{a} = (0, -g) = -g \mathbf{j} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La velocidad inicial (en $t = 0$) es el vector

$$\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$$

donde v_0 es la magnitud de v_0 .

Alcance

El *alcance* R es la distancia que alcanza el proyectil horizontalmente, es decir, medida al mismo nivel que el punto de lanzamiento.

Tiempo de vuelo

El *tiempo de vuelo* T es la duración del movimiento entre el punto de lanzamiento y el punto al mismo nivel que éste (donde $x = R$).

Ecuaciones de movimiento:

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Si el origen se coloca en el punto (x_0, y_0) , cámbiense x y y por $x - x_0$ y $y - y_0$.

Velocidad en función del tiempo:

$$v_x = v_0 \cos \theta = \text{constante}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - g t$$

Ecuación de la trayectoria

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

[Si parte de (x_0, y_0) , cambiar x por $x - x_0$ y y por $y - y_0$]

Fórmulas para el alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

He aquí otras propiedades del movimiento:

- El movimiento es una superposición de dos movimientos rectilíneos a lo largo de los ejes X y Y. El movimiento en X se verifica a velocidad constante igual a $v_0 \cos \theta$. El movimiento en Y tiene lugar con aceleración uniforme igual a “-g”.
- Las velocidades de puntos situados a la misma altura son iguales en magnitud, diferenciándose solamente en su componente Y.

- El máximo alcance R se obtiene cuando el proyectil se lanza a 45° con la horizontal.
- En el punto de altura máxima h la componente Y de la velocidad es cero.

Ejemplo 37. Se lanza una pelota con una velocidad cuya componente horizontal es 15 m/s , desde un punto a 2 m por arriba del suelo. La pelota apenas libra una pared que se halla a 10 m del punto de lanzamiento y que tiene una altura de 18 m . ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

Tenemos tres puntos relevantes del movimiento (Fig. E37):

Punto # 0: Punto de lanzamiento.

Punto # 1: En lo alto de la pared.

Punto # 3: Suelo.

Situamos el origen del sistema XY en el punto de lanzamiento.

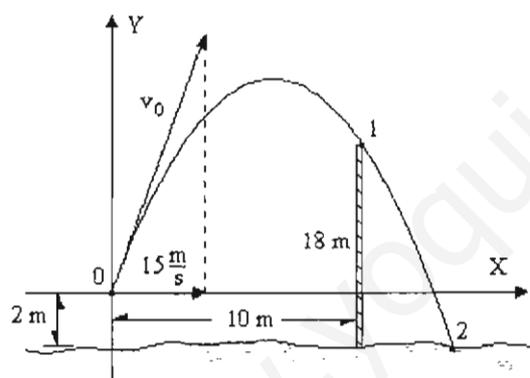


Fig. E37

Expresemos los datos e incógnitas en términos de los símbolos apropiados. Se desea calcular t_2 .

Punto 0	Punto 1	Punto 2
$t_0 = 0$	$x_1 = 10$	$y_2 = -2$
$x_0 = 0$	$y_1 = 16$	
$y_0 = 0$		
$v_{0x} = 15$		

En la ecuación de la trayectoria,
 $y = \tan \theta \cdot x - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$, sustituimos las coordenadas $(10, 16)$ del punto 2 y el dato $v_0 \cos \theta = v_{0x} = 15$:

$$16 = \tan \theta \cdot 10 - \frac{9.8(10)^2}{2(15)^2}$$

$$\theta = \arctan(1.8177) = 61.2^\circ$$

Ahora, de $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ o sea $15 = v_0 \cos 61.2^\circ$ obtenemos

$$v_0 = 31.14 \text{ m/s}$$

Finalmente, aplicando la ecuación $y(t)$ al punto 2, con $y_2 = -2$ obtenemos

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-2 = 31.14 \sin 61.2^\circ t_2 - 4.9 t_2^2$$

$$4.9 t_2^2 - 27.3 t_2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = 5.64 \text{ s.}$$

Ejemplo 38. Una partícula se proyecta desde un punto de un plano de inclinación 30° , con una velocidad de 6 m/s que forma un ángulo de 80° con el plano. Calcular el alcance D sobre el plano.

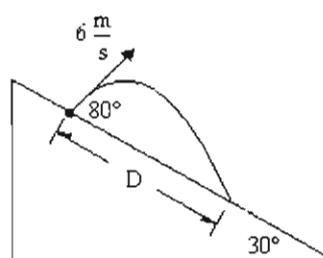


Fig. E38

La ecuación de la trayectoria es

$$y = \tan 50^\circ \cdot x - \frac{9.8 x^2}{2(6 \cos 50^\circ)^2}$$

$$\Rightarrow y = 1.192 x - 0.329 x^2$$

Esta ecuación la satisface el punto 1, cuyas coordenadas son $(D \cos 30^\circ, -D \sin 30^\circ)$. Sustituyendo éstas en la ecuación de la trayectoria,

$$-0.5 D = 1.192 (0.866 D) - 0.329 (0.866 D)^2$$

$$0.247 D^2 - 1.532 D = 0$$

$$D = 6.2 \text{ m}$$

Ejemplo 39. Un proyectil que se lanza con velocidad de 30 m/s tiene un alcance de 20 m. Calcular la altura máxima que alcanza.

Utilizaremos las fórmulas

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Despejemos $\sin \theta$ de la segunda:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$$

Sustituimos esta expresión en la primera y despejemos $\cos \theta$;

$$\cos \theta = \frac{R}{2v_0} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Para eliminar el ángulo imponemos la condición

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

que arroja la ecuación

$$16gh^2 - 8v_0^2 h + gR^2 = 0$$

Sustituyendo los datos del problema, esta ecuación se reduce a

$$156.8 h^2 - 7200 h + 3920 = 0$$

que tiene las soluciones

$$h_1 = 45.37 \text{ m} \quad h_2 = 0.55 \text{ m}$$

(¿Por qué dos soluciones?)

Ejemplo 40. Se lanza una piedra horizontalmente desde lo alto de una torre de 55 m de altura, con una velocidad de 16 m/s. Simultáneamente se lanza otra piedra en el mismo plano vertical, desde la base de la torre, con una velocidad de 32 m/s y a un ángulo de 60°. Demostrar que las piedras se encuentran, y hallar el punto donde se encuentran.

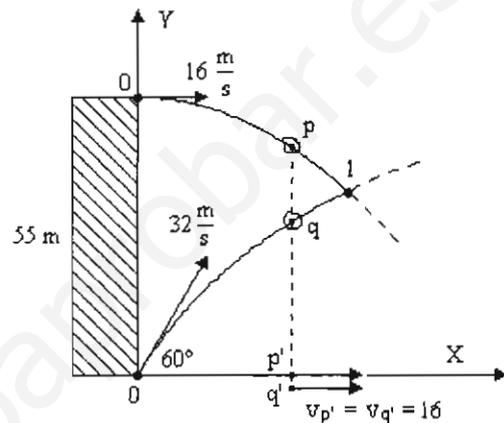


Fig. E40

Cada piedra parte de su respectivo "punto 0", marcado en la Fig. E40. Se supone que se encuentran en el punto 1. El origen del sistema XY se ha tomado en la base de la torre.

Denominemos con "p" y "q" las piedras. Sean p' y q' las proyecciones de las piedras sobre el eje X. Durante el movimiento parabólico de p y q, sus proyecciones p' y q' efectúan sendos movimientos rectilíneos con la misma velocidad $v_{p'} = v_{q'} = 16 \text{ m/s}$. Esto es, sus coordenadas X siempre coinciden. Por otra parte, es obvio que sus coordenadas Y llegarán a coincidir, esto es, las piedras efectivamente chocan.

Las ecuaciones de movimiento son

Piedra lanzada desde arriba

$$y = 55 - \frac{9.8x^2}{2(16)^2} = 55 - 0.019x^2$$

Piedra lanzada en la base de la torre

$$y = (\tan 60^\circ)x - \frac{9.8x^2}{2(32 \cos 60^\circ)^2} = 1.732x - 0.019x^2$$

(La fórmula dada anteriormente para la trayectoria debió ajustarse en el caso de la piedra lanzada desde arriba de la torre, pues ésta no parte del origen sino del punto $y_0 = 40$ m).

Igualando las y 's obtenemos

$$55 = 1.732 x_1 \Rightarrow x_1 = 31.75 \text{ m}$$

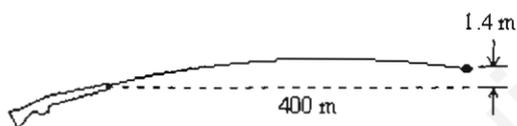
$$\Rightarrow y_1 = 55 - 0.019x_1^2$$

$$y_1 = 55 - 0.019(31.75)^2 = 35.85 \text{ m}$$

5.8. Problemas

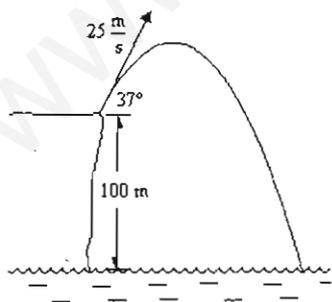
1. Se dispara una bala con una velocidad cuya componente horizontal es 500 m/s . ¿A qué ángulo debe dispararse para que dé en una marca situada a 1.4 m por arriba del punto de proyección, a una distancia de 400 m ?

Resp. 0.65° .



2. Una partícula es proyectada desde lo alto de un acantilado a 100 m sobre el nivel del mar, con una velocidad de 25 m/s y a un ángulo de 37° con la horizontal. Calcular qué tan lejos de la base del acantilado golpea la superficie del mar.

Resp. 126 m .

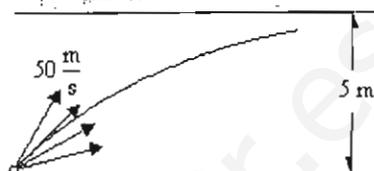


3. Un niño puede lanzar una piedra, lo más lejos óptimamente, hasta una distancia de 40 m . ¿Con qué velocidad la lanza y cuánto tarda la piedra en el aire?

Resp. 19.8 m/s ; 1.69 s .

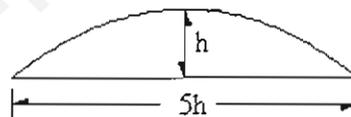
4. Se proyecta una partícula hacia adentro de un túnel horizontal de 5 m de alto, con una velocidad de 50 m/s . ¿Cuál es el mayor alcance posible?

Resp. 99 m .



5. Un cuerpo es lanzado bajo un ángulo tal que su alcance horizontal es cinco veces su máxima altura. Calcular el ángulo al que se lanzó. Para un alcance de 200 m , hallar la velocidad inicial y el tiempo de vuelo correspondientes.

Resp. $\arctan(4/5)$; 44.8 m/s .



6. El máximo alcance de un rifle es 25 km . Hallar la velocidad de salida de la bala y la altura de la misma después de que ha viajado 6.4 km horizontalmente.

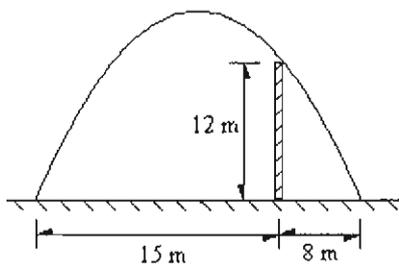
Resp. 0.495 km/s ; 4.8 km .

7. Se desea que el alcance de un proyectil sea R , y que su tiempo de vuelo sea T . Demostrar que el ángulo de lanzamiento debe ser

$$\theta = \arctan\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$$

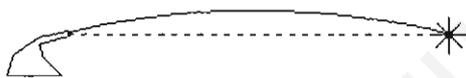
8. ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener un proyectil para poder librar una pared de 12 m de altura, distante 15 m , y pegar en el plano horizontal de la base de la pared a una distancia de 8 m más allá de la misma? El punto de lanzamiento está al mismo nivel que la base de la pared.

Resp. 16.1 m/s .



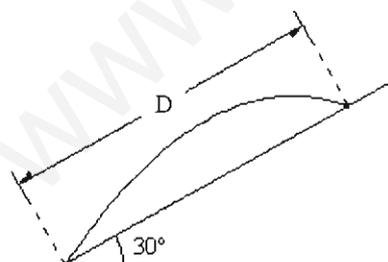
9. Una bala de cañón explota en un punto al mismo nivel del cañón, a los 10 s de haber sido disparada. El sonido de la explosión llega al cañón después de un lapso adicional de 3 s. Hallar el ángulo de elevación del cañón y la velocidad inicial de la bala. (Tome la velocidad del sonido igual a 335 m/s).

Resp. $\arctan(0.49)$; 111.8 m/s.



10. Se lanza un proyectil con una velocidad de 245 m/s bajo un ángulo de 60° con la horizontal, desde el pie de un plano de inclinación 30° . Hallar el alcance D sobre el plano inclinado y el tiempo para el impacto.

Resp. 4083 m; 25.5 s.



Módulo II

CINÉTICA DE LA PARTÍCULA

CAPÍTULO 6

LAS LEYES DE NEWTON DE LA MECÁNICA

6.1. Enunciados de las leyes de Newton.

He aquí los enunciados de las leyes de Newton, tal como fueron dados originalmente en 1687:

Primera ley

- Todo cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea obligado a cambiar este estado por la aplicación de una fuerza externa no balanceada.

Segunda ley

- La fuerza neta externa (no balanceada) que actúa sobre un cuerpo material es directamente proporcional a, y está en la misma dirección que, la aceleración del cuerpo.

Tercera ley

- A toda acción siempre se le opone una reacción igual, o: las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en sentidos opuestos.

Las leyes de Newton están formuladas para partículas, esto es, cuerpos muy diminutos en comparación con el ámbito espacial donde se desarrollan sus movimientos. Estas leyes se pueden extender a cuerpos rígidos (cuerpos extendidos), para los cuales las dimensiones geométricas son relevantes. La posición de una partícula en el plano XY corresponde a la de un punto de dicho plano, y se da mediante una pareja de coordenadas, que podrían ser las cartesianas (x, y) , las polares (r, θ) , etc.

Presentaremos a continuación una discusión didáctica de las leyes de Newton.

6.2. Sobre la primera ley de Newton

La primera ley proporciona un criterio para reconocer *cualitativamente* la presencia de una fuerza no balanceada, a saber: si se observa que, en un momento dado, una partícula que se venía moviendo en línea recta con velocidad constante experimenta una desviación de esta línea recta, entonces se puede concluir que en dicho momento entró en operación una fuerza no balanceada sobre la partícula. La fuerza no balanceada es pues la "causa" del cambio de velocidad, es decir, de la aceleración que experimenta la partícula.

De acuerdo con la primera ley, los cuerpos oponen una resistencia a cambiar su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, en el sentido de que es necesaria una influencia *externa* (una fuerza no balanceada) para sacarlos de dicho estado. Esta propiedad de los cuerpos se denomina *inercia*.

Por la primera ley, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo están balanceadas, esto es, la suma vectorial de todas estas fuerzas es igual a cero:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0$$

La ecuación (1) es la ecuación fundamental de la estática de la partícula. Dado que no excluye el caso en que el cuerpo se mueve con movimiento uniforme, la condición (1) es solamente *necesaria* (no es suficiente) para el equilibrio estático (el estado de reposo).

Demos un ejemplo de "equilibrio dinámico". Una gota de lluvia se forma en la nube y desciende,

supongamos que verticalmente, con la aceleración de caída libre inicialmente. Conforme la gota adquiere velocidad experimenta una fuerza de resistencia del aire. Esta resistencia va aumentando con la velocidad, y va provocando que la aceleración de la partícula vaya disminuyendo desde su valor inicial "g". Llega un momento en que la resistencia R se hace igual al peso de la partícula, mg. En este momento las fuerzas están balanceadas, de tal modo que a partir de entonces la velocidad de la gota permanece constante (su movimiento es uniforme desde entonces).

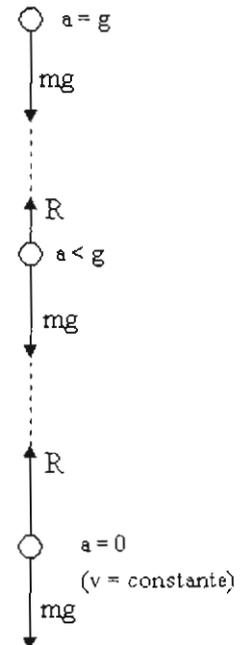


Fig. 1

6.3. Sobre la segunda ley de Newton

De acuerdo con la segunda ley, la fuerza F_{neta} sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración a :

$$(2) \quad F_{\text{neta}} \propto a$$

Evidentemente, el factor de proporcionalidad debe ser constante, y una propiedad exclusivamente del cuerpo considerado. Se le llama a este factor la *masa* del cuerpo, de tal modo que (2) se escribe en la forma

$$(3) \quad F_{\text{neta}} = m a$$

La masa "m" de un cuerpo es una medida cuantitativa de su inercia puesto que, por (3), si consideramos dos cuerpos A y B, el segundo con el doble de masa que el primero, entonces para producir una misma aceleración a ambos cuerpos es necesario aplicar el doble de fuerza al cuerpo con la doble masa. Este último cuerpo "tiene mayor inercia" que el primero, se resiste más a ser acelerado.

La segunda ley introduce así dos conceptos nuevos: el de fuerza y el de masa. Para poder obtener una medida cuantitativa de cualquiera de estas cantidades es menester contar previamente con un método para medir la otra. Lo que se hace es lo siguiente:

Se escoge un cuerpo especial, único, como el estándar universal de masa. A este cuerpo, denominado el *kilogramo patrón*, se le asigna así una masa unitaria cuyo valor se define como un *kilogramo* (1 kg). El kilogramo patrón es un cilindro compuesto de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, un suburbio de París.

Ya con esta referencia podemos medir fuerzas. El procedimiento consistiría en aplicar la fuerza a medir al kilogramo patrón, y medir la aceleración que le produce. Daremos a continuación una manera de hacerlo, valiéndonos de un arreglo idealizado.

Colocamos el kilogramo patrón sobre una superficie horizontal lisa (esto es, fricción insignificante). Sujetamos este cuerpo a un resorte muy ligero, no calibrado, y jalamos el cuerpo horizontalmente, como vemos en la Fig. 2. En este escenario la única fuerza no balanceada es la fuerza del resorte (ya que si damos un impulso al cuerpo estando sólo, se moverá con velocidad constante —supuestamente— a lo largo de la mesa lisa).

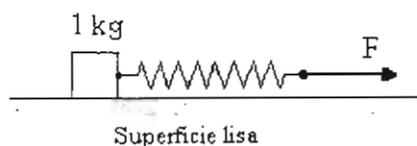


Fig. 2

Si el jalón se controla de modo que la configuración del resorte se mantenga invariable, entonces la fuerza es constante¹, y la aceleración es por lo tanto también constante. La medida de la aceleración nos da la medida de la fuerza. Por ejemplo, si se observa que el cuerpo adquiere una aceleración de 2 m/s^2 , entonces la fuerza del resorte es

$$F = m a = 1 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \text{ N}$$

donde hemos definido la unidad de fuerza

$$(4) \quad 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv 1 \text{ N} = 1 \text{ newton}$$

De esta manera podemos calibrar un resorte para medir fuerzas en algún rango de valores, construyendo así un *dinamómetro*.

De hecho, el dinamómetro nos permite luego medir masas. Para ello aplicamos una fuerza conocida, medimos la aceleración resultante, y aplicamos la relación (3). De esta manera la segunda ley de Newton y la elección arbitraria del estándar de masa determinan la unidad de fuerza, y nos facilitan asimismo un método operacional para medir masas.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, *toda aceleración es debida a una fuerza* (no balanceada). Podemos producir aceleraciones jalando o empujando cuerpos mediante contacto directo con otros cuerpos, como resortes, cuerdas, etc. Pero también podemos acelerar un cuerpo simplemente dejándolo caer cerca de la superficie terrestre. El cuerpo experimenta en este caso una aceleración que se denota con la letra "g", cuyo valor es aproximadamente

$$(5) \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

¹ De acuerdo con la ley de Hooke para cuerpos elásticos, si se repite la experiencia, elongando al resorte en la misma cantidad, se obtendrá el mismo valor medido para la aceleración. En otras palabras, la fuerza del resorte se puede suponer constante si la deformación es la misma. La experiencia es perfectamente reproducible en el laboratorio.

La "g" se denomina *aceleración de caída libre* o *aceleración de la gravedad*. Su valor depende de la localidad terrestre y varía a lo más en un 0.5 % sobre todo el planeta.

La fuerza responsable de la aceleración de caída libre se denomina el *peso* del objeto (o también *fuerza gravitatoria*), y es una fuerza debida a la Tierra.

La existencia de la fuerza gravitatoria, junto con la primera ley de Newton, nos proporcionan un método alternativo para medir masas, como se explica a continuación.

Tomemos un resorte calibrado en unidades de fuerza, como explicamos anteriormente, y sujetemos en su extremo un cuerpo cuya masa deseamos medir. Dispongamos el resorte verticalmente, como se muestra en la Fig. 3, y dejemos que el sistema llegue al reposo.

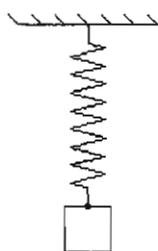


Fig. 3

Por la primera ley de Newton tendremos que la fuerza neta sobre el cuerpo es cero, es decir, la fuerza ejercida hacia arriba por el resorte es igual al peso del cuerpo, ejercido por la Tierra hacia abajo. Dividamos la fuerza del resorte por la aceleración de la gravedad en la localidad presente. Obtenemos así la masa del cuerpo. Esto constituye un *método estático* para medir masas (en contraposición al método dinámico mencionado anteriormente).

Sin embargo, ¿realmente estamos midiendo con este método aquello que hemos definido antes como la masa del cuerpo? Veamos.

En el método dinámico para medir masas (con el arreglo experimental de la Fig. 2) el cuerpo es acelerado por el jalón de la fuerza aplicada, y la masa así determinada es verdaderamente una medida de la inercia del cuerpo. Aquí no entra para nada la fuerza de atracción gravitatoria Tierra-Cuerpo. De hecho el experimento puede realizarse en un lugar del espacio exterior donde las fuerzas gravitatorias sean prácticamente inexistentes. Por otra parte, *el método estático no podría llevarse a cabo sin la existencia de la fuerza*

gravitatoria. En este caso el método depende de una propiedad de los cuerpos materiales, *muy distinta* de la propiedad de inercia, a saber, *la de ser atraídos por la Tierra* (tómese aquí un tiempicillo para convencerse de esta afirmación). Aquí la propiedad de inercia no interviene: el cuerpo no está siendo acelerado.

Demos en este punto una analogía. Digamos que medimos la distancia entre dos puntos A y B mediante dos procedimientos distintos. En el primer procedimiento tendemos una cinta métrica a lo largo de todo el camino entre A y B. En el segundo mandamos una señal acústica que se hace reflejar en B y regresa a A después de cierto tiempo t_R , y calculamos la distancia AB mediante la expresión

$$AB = \frac{1}{2} v t_R$$

donde "v" es la velocidad del sonido. Estrictamente estaríamos midiendo dos cantidades *conceptualmente distintas*. Podríamos llamarlas digamos "distancia métrica" y "distancia acústica". Sin embargo, ambas medidas arrojan el mismo valor de AB, gracias a una ley física concerniente a la propagación del sonido. Por esta razón denominamos "distancia" al resultado de un u otra medición, fundiendo ambos conceptos de "distancia" en uno sólo.

La analogía no es perfecta, pero da una idea de lo que queremos decir. Con el método dinámico estamos midiendo una propiedad de los cuerpos que se denomina *masa inercial*; con el método estático estamos midiendo una cantidad distinta que se denomina *masa gravitatoria*.

Ahora bien, es un hecho sorprendente que el resultado es el mismo con ambos métodos de medición (de nuevo, tómese un momento para convencerse de que no necesariamente ambos métodos deberían arrojar el mismo valor de la "masa"). Esto viene confirmado experimentalmente con una precisión extraordinaria. Es decir,

La masa inercial es igual a la masa gravitatoria

Semejante igualdad no es accidental, sino que tiene un significado muy profundo, pero no nos corresponde en este curso introductorio ir más allá de lo que hemos expuesto.

No habrá necesidad, pues, de distinguir entre masa inercial y masa gravitatoria; ambos conceptos los fundimos en uno sólo: la masa del objeto, a secas.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el peso de un cuerpo, o fuerza gravitatoria, denotado con "W", es igual al producto

$$(6) \quad W = m g$$

donde "g" es la aceleración de caída libre en el lugar terrestre considerado. Notemos que el peso varía ligeramente con el lugar, y es una fuerza asociada con el planeta Tierra.

El peso de un mismo cuerpo es distinto en distintos planetas, dado que la aceleración de caída libre es distinta en cada caso. La masa, sin embargo, es una propiedad universal, y es la misma en cualquier lugar del espacio físico.

La segunda ley de Newton no especifica cuál es la fuerza en una situación dada. Esto es algo que debe investigarse por separado. Para aplicar la segunda ley de Newton es necesario investigar las fuerzas, cuyas expresiones matemáticas podrían deducirse teóricamente, o de las observaciones experimentales, o bien "fenomenológicamente" (empíricamente), como es el caso de la fuerza de fricción einética, cuya expresión,

$$f = \mu N$$

(μ = coeficiente de fricción, N = fuerza normal) se saca de mediciones en el laboratorio.

Otra fuerza común es la que ejerce un resorte elástico lineal. Si x es la deformación del resorte, entonces esta fuerza puede ponerse en la forma

$$F = -k x$$

donde "k" es la constante elástica del resorte. (El origen del Eje X se toma en el punto donde el resorte no está deformado.)

El mismo Newton, basándose en datos obtenidos observacionalmente por Kepler, dedujo la expresión de la fuerza de atracción gravitatoria.

6.4. Ley de gravitación universal de Newton

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es una fuerza de magnitud

$$(7) \quad F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$

(Véase la Fig. 4). G es la llamada *constante de*

gravitación universal, y "d" es la distancia entre ambas partículas.

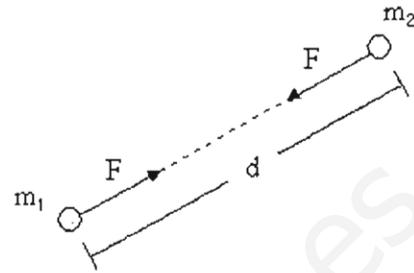


Fig. 4

El valor experimental de G es, con tres decimales,

$$G = 6.672 (10^{-11}) \text{ (unidades S.I.)}$$

La fuerza es *central*, es decir, está dirigida a lo largo de la línea recta determinada por ambas partículas.

Se puede demostrar con los métodos del cálculo integral que la expresión (7) también es aplicable al caso en que una de las partículas se cambia por una esfera homogénea (Fig. 5).

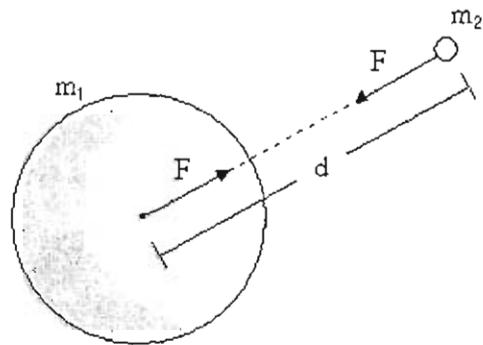


Fig. 5

En este caso la distancia "d" se mide desde el centro de la esfera hasta la partícula.

Se deduce que (7) también da la fuerza entre dos esferas uniformes. La distancia "d" sería ahora la que hay entre los centros de las esferas.

Apliquemos la ley de gravitación al caso especial de la fuerza entre la Tierra (masa M_T) y un objeto de masa "m" situado cerca de su superficie.

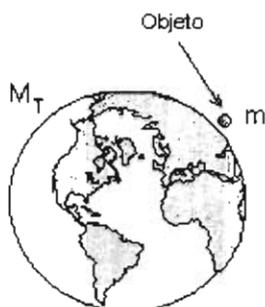


Fig. 6

Dado que la distancia entre el centro de la Tierra y el objeto es prácticamente igual al radio de la Tierra, R , tenemos que (7) se vuelve

$$(8) \quad F = \frac{GM_T m}{R^2}$$

Calculemos el factor de "m" (unidades S.I.):

$$\frac{GM_T}{R^2} = \frac{6.672(10^{-11}) \cdot 5.97(10^{24})}{[6.37(10^6)]^2} \approx 9.81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Este valor es precisamente lo que hemos denotado antes con "g", de tal modo que (8) se puede poner también en la forma

$$(9) \quad F = m g$$

la cual, naturalmente, coincide con la expresión general del peso dada en (5).

En la tabla que sigue damos los valores de la aceleración de la gravedad para algunos cuerpos del sistema solar. Todos los valores son relativos a los terrestres.

Cuerpo	Masa	Radio	g
Luna terrestre	0.0123	0.25	0.19
Mercurio	0.05	0.38	0.35
Júpiter	317.9	11.23	2.58
Sol	332,831.3	109.2	27.9

En la Tierra, el peso de un cuerpo cuya masa es 1 kg es

$$(10) \quad W = mg = 1 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.8 \text{ N}$$

En Júpiter, un cuerpo de masa de 1 kg tendría un peso 2.58 veces mayor que en la Tierra (25.28 N).

6.5. Sobre la tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton expresa que:

Si un cuerpo A ejerce una fuerza F_{AB} sobre un cuerpo B, entonces éste ejerce sobre el primero una fuerza F_{BA} igual a $-F_{AB}$, es decir,

$$(11) \quad F_{BA} = -F_{AB}$$

Cualquiera de estas fuerzas se nombra la *acción*, y la otra recibe automáticamente el nombre de *reacción*, de tal manera que

$$\text{acción} = \text{reacción}$$

No se implica aquí una relación causa-efecto: la "acción" no es la causa de la "reacción"; son solamente nombres.

La tercera ley de Newton nos permite entender cómo se "transmiten" las fuerzas de cuerpo a cuerpo. Veamos.

La noción básica de fuerza se remonta a la acción de nuestros músculos: al jalar o empujar un objeto estamos ejerciéndole una fuerza.

Las fuerzas se caracterizan por dos efectos:

- Pueden *deformar* cuerpos restringidos a no moverse.
- Pueden *acelerar* cuerpos libres de moverse (es decir, modificarles su velocidad).

Al jalar un resorte sujeto a una pared (Fig. 7), el resorte se deforma, aumentando de longitud. El efecto de la fuerza ejercida por el brazo es *deformativo*.



Fig. 7

No es el resorte el único cuerpo que se deforma; también la pared sufre una deformación (casi imperceptible, pero mensurable), así como los dedos de la persona que jala el resorte. Los tres cuerpos encerrados en la Fig. 7 se ejercen fuerzas mutuamente.

Una *situación estática* es aquella donde todos los cuerpos considerados están inmóviles o “en reposo”. Se dice que estos cuerpos están en *equilibrio*. En una *situación dinámica* los cuerpos están en movimiento, sea éste acelerado o no.

En una situación estática, fuerzas que actúan sobre cuerpos conectados en cadena lineal por cuerdas y/o resortes en tensión se transmiten de cuerpo a cuerpo. Así, en la Fig. 7 la mano ejerce cierta fuerza F sobre el resorte, y el resorte a su vez ejerce la misma fuerza F sobre la pared. Para reconocer esta transmisión podemos hacer el experimento indicado en la Fig. 8: al jalar el resorte derecho observamos que el resorte izquierdo (que eseogemos idéntico al anterior) se deforma lo mismo una vez que el bloque se mantie en reposo. La fuerza de la mano aplicada sobre el resorte derecho se transmite al bloque, y de este cuerpo al resorte izquierdo y finalmente a la pared.

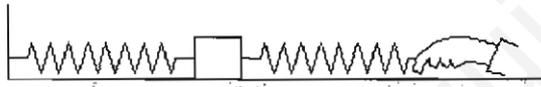


Fig. 8

En un sistema en equilibrio, en general todos sus elementos se ejercen fuerzas mutuas. Gracias a la tercera ley, el equilibrio del sistema garantiza el de todos y cada uno de sus elementos. Todos ellos “coexisten pacíficamente” en equilibrio, y es válida una ecuación del tipo “ $\Sigma \mathbf{F} = 0$ ” para cada elemento, o combinación de éstos, o todo el sistema completo.

Al colocar un bloque sobre una mesa (Fig. 9), la mesa se deforma. Se deduce que el bloque está ejerciendo una fuerza sobre la mesa². Recíprocamente la mesa ejerce una fuerza sobre el bloque (que también lo deforma), la cual evita que el bloque acelere hacia abajo.

² Sería un error afirmar que la Tierra es la que deforma la mesa. Si no estuviera el bloque sobre la mesa, ésta no sufriría la deformación. Así pues, el bloque es el responsable directo de la deformación de la mesa, a través de una fuerza de contacto denominada “fuerza normal”.

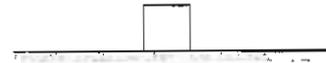


Fig. 9

Efectivamente, por una parte la Tierra atrae al bloque con una fuerza que es el peso del bloque; por otra parte el bloque ejerce sobre la mesa una fuerza de contacto deformativa (llamada fuerza normal), la cual por razones de equilibrio es precisamente igual al peso del bloque. La fuerza de la Tierra sobre el bloque la, transmite el bloque a la mesa.

En una situación dinámica las fuerzas ya no se “transmiten” con su mismo valor. Veamos.

En la situación dinámica (acelerada) representada en la Fig. 10 la mano empuja con cierta fuerza F_A al bloque A. Por su parte, el bloque A empuja con cierta fuerza F_B al bloque B. Resulta que $F_A \neq F_B$: la fuerza de la mano ya no se transmite al bloque B con el mismo valor. Entran en juego aquí las propiedades inerciales de los bloques (sus masas): el bloque B “capta” solamente la fuerza F_B necesaria para igualar su aceleración con la del bloque A, de modo que los dos se muevan juntos. Esta fuerza es menor que la que F_A que necesita ejercer la mano sobre el bloque A para acelerar al conjunto {A, B}, cuya masa es mayor.

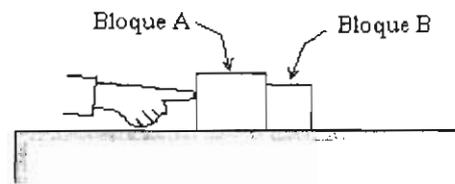


Fig. 10

La tercera ley de Newton permite asimismo un “escalamiento” de la expresión $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, como explicaremos a continuación.

Consideremos un cuerpo rígido extendido. Las moléculas del cuerpo se ejercen mutuamente fuerzas (predominantemente de tipo eléctrico), que se denominan fuerzas internas. Supongamos que exista una fuerza externa F_{ext} no balanceada sobre el cuerpo. Se puede demostrar que la siguiente relación es válida:

$$(12) \quad F_{ext} = M a_G$$

donde M es la masa del cuerpo y a_G es la aceleración de un punto especial del mismo, "G", denominado *centro de masa*.

Vemos que la ecuación (12) tiene la misma forma que la segunda ley de Newton, ecuación (3). Sin embargo, (12) se refiere no a una partícula, como aquella, sino a un cuerpo extendido.

6.6. Principio de superposición de las fuerzas

El efecto (deformativo o acelerador) de una fuerza depende no solamente de la intensidad o magnitud de la fuerza, sino también de su dirección. Supongamos que un bloque se jalara con un resorte inclinado con respecto a la horizontal, como vemos en la Fig. 11. Observaríamos que la aceleración producida es menor que la correspondiente a si se jalara horizontalmente. Esto se explica asociando a la fuerza del resorte una dirección: precisamente la dirección del eje longitudinal del resorte (en el sentido bloque \rightarrow resorte).

Las fuerzas son vectores. Según las leyes de Newton, en la Fig. 11 es la componente horizontal de la fuerza del resorte la que produce la aceleración horizontal del bloque. La componente vertical de esta fuerza no produce aceleración horizontal, sino que sirve para contrarrestar la presión del bloque sobre la mesa.

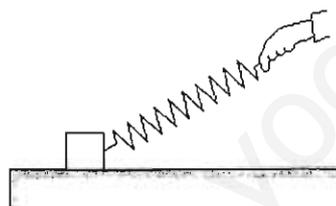


Fig. 11

¿Qué pasa si aplicamos al bloque dos fuerzas F_1 y F_2 simultáneamente, contenidas en el plano de la mesa? (Véase la Fig. 12.)

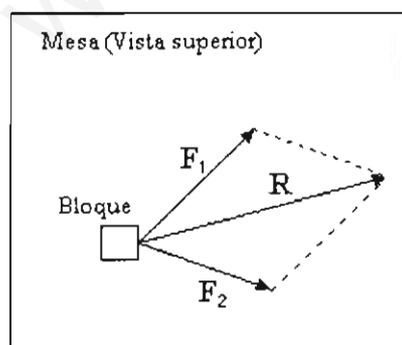


Fig. 12

Encontraríamos que el efecto acelerador conjunto de las fuerzas F_1 y F_2 sería el mismo que el que produciría una sola fuerza R igual a la suma vectorial de las dos fuerzas dadas,

$$R = F_1 + F_2$$

Esta regla para combinar fuerzas se denomina *principio de superposición* de las fuerzas. El efecto de una fuerza sobre un cuerpo no depende de la existencia de otras fuerzas que actúen sobre él.

6.7. Marcos de referencia inerciales

Las leyes de Newton no son válidas en todo marco de referencia. Es fácil darse cuenta de ello, como veremos a continuación.

Consideremos una partícula en movimiento uniforme con respecto a un observador A. Supongamos válidas las leyes de Newton para este observador, y además que según él no existan fuerzas no balanceadas sobre la partícula (o no existan fuerzas en absoluto). Por otra parte, sea B otro observador apostado sobre un marco de referencia giratorio con respecto al marco de A (sobre un carrusel, como se muestra en la Fig. 13).

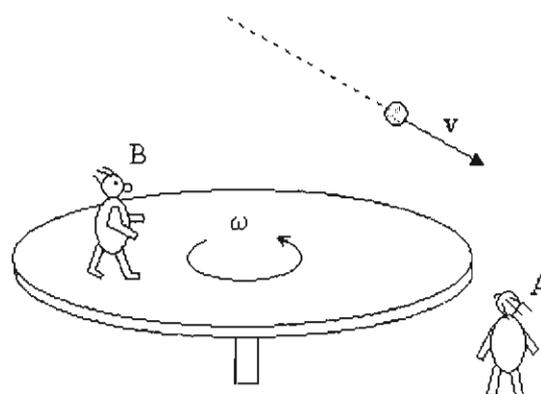


Fig. 13

El movimiento de la partícula, visto por B, ya no será uniforme. Con respecto a él la partícula describe una espiral con velocidad variable. Pero el sólo hecho de cambiar el marco de referencia no introduce fuerzas nuevas sobre la partícula. Es decir, tanto el observador A como el B detectan las mismas fuerzas sobre la partícula. Sin embargo, la primera ley de Newton no es válida para B, puesto que el movimiento de la partícula no es uniforme a pesar de que no existen fuerzas no balanceadas sobre ella.

Un gran triunfo de las leyes de Newton, junto con la ley de gravitación universal, consistió en explicar el movimiento de los planetas y lunas del sistema solar. El marco de referencia subyacente fue el Sol junto con algunas de las llamadas "estrellas fijas"³. Con ayuda de estos objetos celestes se puede construir un sistema de coordenadas (p.ej. uno de los ejes puede dirigirse desde el Sol hacia una estrella determinada), con ayuda del cual se puede registrar el movimiento de los planetas y demás cuerpos celestes como asteroides, lunas y cometas.

En lo tocante al movimiento de cuerpos materiales cerca de la superficie terrestre y en el sistema solar, las leyes de Newton son válidas (con asombrosa precisión) en tal marco de referencia, denominado el *marco de las estrellas fijas*. Esto viene corroborado por el experimento.

Las leyes de Newton también son válidas con respecto a cualquier otro marco de referencia que se traslade con velocidad (vectorial) constante (movimiento uniforme) con respecto al marco de las estrellas fijas. La razón es que en ambos marcos se mide la misma aceleración para toda partícula, de tal manera que la expresión de la segunda ley, $F = ma$, contiene cantidades del mismo valor en uno y otro marco.

Se da el nombre de *marco de referencia inercial* a estos marcos donde valen las leyes de Newton.

La Tierra no es un marco de referencia inercial, pues no se mueve con velocidad constante con respecto al marco de las estrellas fijas. De hecho, el Sol tampoco, sino que describe una órbita dentro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, invirtiendo unos 250 millones de años en completar una revolución.

Sin embargo, si consideramos tiempos no muy grandes, podemos suponer para fines prácticos que el Sol y la Tierra son marcos inerciales. Veamos.

En el lapso de un año, digamos, el movimiento del Sol con respecto a las estrellas fijas se lleva a cabo prácticamente en línea recta y con velocidad constante. Por esta razón podemos considerar como inercial al marco del Sol. Es más, podemos extender a muchísimo más de un año esta consideración.

En lo que respecta a la Tierra, sabemos que describe una elipse alrededor del Sol, y que además gira

en torno a su eje norte-sur, completando un giro cada día (es un carrusel celeste). Ahora bien, al analizar desde el marco Tierra el movimiento de una partícula, podemos aplicar las leyes de Newton al movimiento siempre y cuando el periodo de observación no se extienda durante un tiempo prolongado (que puede ser, de segundos, minutos e incluso horas, según el tipo de movimiento en consideración y el grado de precisión deseado).

La segunda ley de Newton se puede formular de tal manera que sea aplicable a marcos de referencia no inerciales. Su expresión ya no sería simplemente la que conocemos, $F = m a$, sino que figurarían más términos, que contendrían la velocidad y la aceleración del marco no inercial considerado con respecto a un marco de referencia inercial. Sin embargo, no entraremos a este asunto en este curso introductorio.

³ Las estrellas fijas son algunas estrellas especiales de las más lejanas a la Tierra. Dada su lejanía, estas estrellas parecen ocupar puntos fijos en la esfera celeste durante siglos.

CAPÍTULO 7

LEYES DE NEWTON. FUERZAS CONSTANTES

7.1. El problema general.

El problema general que abordaremos en este capítulo se puede formular así:

Un cuerpo, que suponemos es una *partícula*, se halla sometido a varias fuerzas *constantes*, de tal manera que su aceleración también es *constante*. La partícula está restringida a moverse en *línea recta* mediante superficies y otros apoyos. Se trata de calcular la aceleración y las fuerzas de restricción desconocidas. El problema puede implicar varias partículas que interactúan mediante contacto simple, cuerdas inextensibles, varillas ligeras, etc.

Un cuerpo se puede modelar como “partícula” cuando:

– Las fuerzas que actúan sobre él son todas concurrentes: sus líneas de acción se intersecan en un punto.

– Aun si las fuerzas no son concurrentes, son tales que no producen movimiento de rotación del cuerpo, y por otra parte nos interesa solamente el movimiento traslacional, lo cual significa en particular que en el problema no intervienen los puntos de aplicación de las fuerzas.

Hay casos en que un conjunto de cuerpos (en contacto simple o unidos mediante cuerdas tensas, varillas rígidas, etc.) se puede tratar como si fuese una partícula. Esto se puede hacer cuando el conjunto es *rígido* como un todo, de tal manera que todos los cuerpos del conjunto se mueven con la misma aceleración. La fuerza sobre esta “partícula” sería la fuerza *externa* total sobre el conjunto de cuerpos (Consulte los ejemplos 1, 2, 4 un poco más adelante).

7.2. Método para resolver el problema general

El procedimiento para resolver el problema general incluye las siguientes tareas:

1. Hacer los diagramas de cuerpo libre (DCL's) de todas y cada una de las partículas implicadas. Incluir aquí las hipótesis pertinentes.

2. Escoger un sistema de ejes cartesianos X-Y para cada partícula. Fijar el origen del tiempo.
3. Aplicar a cada partícula la segunda ley de Newton (o sea, *plantear la ecuación de movimiento* de cada partícula).
4. Hacer un recuento de incógnitas y ecuaciones.
5. Tomar en cuenta cualesquiera condiciones cinemáticas o dinámicas aplicables al problema.
6. Los pasos 3 y 5 producen un sistema de ecuaciones que debemos resolver para las incógnitas.

Para recordar estas etapas en la resolución del problema le daremos a este método un nombre muy fácil de recordar: *método DELIRO*. Está sugirido no por experiencias personales en el aula sino por el siguiente acróstico:

D iagramas de cuerpo libre
E jes y referencia de tiempo
L eyes de movimiento
I ncógnitas y datos
R elaciones cinemáticas y/o dinámicas
O peraciones matemáticas

Comentarios sobre las etapas del método.

• Diagramas de cuerpo libre.

En esta primera etapa se identifican todas las fuerzas que actúan sobre la partícula considerada. Este análisis de fuerzas se presenta en el diagrama de cuerpo libre, un método gráfico muy poderoso para visualizar la relación fuerzas-movimiento y para plantear las ecuaciones de movimiento.

Es muy importante señalar que en el DCL vienen incorporadas las hipótesis que se adoptan tanto para hacer manejable matemáticamente el problema como para estudiar condiciones particulares del movimiento.

Entre las hipótesis más comunes tenemos las siguientes:

- (a) Cuerdas inextensibles y sin masa (“ligeras” o “ingrávidas”).
- (b) Poleas lisas y ligeras (sin masa).

- (c) Varillas rígidas y sin masa.
 - (d) Existencia o no de fricción en el contacto de un cuerpo sobre otro.
 - (e) Cuerpo a punto de deslizarse (o "en movimiento inminente") sobre otro cuerpo móvil o superficie fija.
 - (f) Situación exacta en la que dos cuerpos dejan de hacer contacto.
 - (g) Igualdad de aceleraciones de dos cuerpos conectados.
- Etc.
- Las hipótesis (e), (f) y (g) dan lugar a relaciones matemáticas. Al respecto, en los DCL's usaremos la siguiente notación:

Coefficiente de fricción estática: μ
 Fuerza de fricción estática
 (menor que la máxima): f
 Fuerza de fricción estática máxima: $f_m = \mu N$

 Coeficiente de fricción cinética: μ_c
 Fuerza de fricción cinética: $f_c = \mu_c N$.

Recuerde, entonces, que la fricción cinética y su coeficiente correspondiente llevan el subíndice "c".

En los DCL's a veces incluiremos el vector aceleración, si bien dibujándolo con trazos a rayas, para no confundirlo con una fuerza, así:

-----→

- Ejes y referencia de tiempo.

Dado que el movimiento es rectilíneo, conviene usar unos ejes cartesianos X-Y. En la mayoría de los ejemplos situaremos el Eje X de modo que apunte en la dirección supuesta de la aceleración.

- Leyes de movimiento.

A cada partícula se le aplican las ecuaciones

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y$$

- Incógnitas y datos.

Obviamente, desde el principio debemos saber cuáles son los datos del problema, y cuáles las incógnitas. De todas maneras, en esta etapa conviene hacer un recuento de datos e incógnitas, con objeto de averiguar si ya se tiene un sistema completo y consistente de ecuaciones. En caso de faltar ecuaciones, se obtendrán en la siguiente etapa del método.

- Relaciones cinemáticas y dinámicas.

Las *relaciones cinemáticas* son ecuaciones entre las *aceleraciones* de dos o más cuerpos interconectados.

Las *relaciones dinámicas* son ecuaciones en las que figuran *fuerzas*. Por ejemplo, una ecuación del tipo " $f_c = \mu_c N$ " es una relación dinámica. Otra de este tipo sería " $N = 0$ " (que corresponde al caso en que un cuerpo deja de hacer contacto con otro, de modo que la fuerza normal de contacto, N , se vuelve nula).

- Operaciones matemáticas.

Las dos etapas anteriores deben proporcionar un sistema completo y consistente de ecuaciones.

Hasta aquí los comentarios sobre el método DELIRO. Ilustraremos el método en los ejemplos.

Ahora bien, el método DELIRO describe solamente el aspecto de mecanización en la resolución del problema. Sirve principalmente como recordatorio de unas etapas que no hay que pasar por alto. De mayor importancia son los siguientes puntos:

- Antes de atacar el problema debemos formarnos una idea de cómo se moverá el sistema. A este respecto ayuda el darle valores exageradamente pequeños o grandes a los parámetros; analizar un problema similar pero simplificado, etc.

En otras palabras, hay que tener cierta idea de qué clase de solución esperamos. Esto se adquiere con bastante práctica.

Conforme vamos resolviendo problemas vamos aprendiendo nuevas formas de "pensar físicamente", y adquiriendo más confianza en la aplicación de las leyes físicas. Ello nos permite desarrollar nuestra capacidad de análisis e intuición física.

Los problemas no siempre arrojarán resultados que concuerden con nuestra intuición. En estos casos debemos ajustarla. Una intuición física bien desarrollada nos permite describir y analizar nuevos problemas en los términos más simples a nuestro alcance, y ser capaces de predecir el comportamiento mecánico sin necesidad de hacer muchos cálculos o resolver detalladamente el problema.

- En la primera etapa, la de los DCL's, enunciamos y aplicamos las hipótesis bajo las cuales resolveremos el problema.

Una vez resuelto el problema, cualquier hipótesis que se haya formulado de partida debe validarse a la luz de la solución del problema. Si alguna de las hipótesis no se cumple la solución obtenida no es válida, y el problema debe resolverse otra vez desde el principio, adoptando otras hipótesis.

Algunas de las hipótesis son cosas sobreentendidas, que no es necesario mencionar explícitamente. Este es el caso, por ejemplo, para las hipótesis:

$$T \geq 0 \quad N \geq 0$$

que indican que la tensión T de una cuerda no puede ser negativa, lo mismo que la fuerza normal de contacto N entre dos cuerpos. Dada la expresión matemática de T ó N , deben obtenerse los valores límites de los parámetros, por encima o debajo de los cuales estas fuerzas se vuelven negativas. Análogamente, en algunos casos se trabaja con una aceleración que no puede ser negativa, lo cual también da lugar a valores límites de los parámetros.

- En muchos problemas lo realmente interesante no es el proceso de llegar a la solución en sí, sino lo que la solución expresa. Después de resolver el problema debemos hacer un *análisis de la solución*. A veces no "entendemos" bien la situación física en tanto no hayamos examinado la solución obtenida. A este respecto conviene resolver los problemas usando valores paramétricos para las cantidades relevantes. Esto nos permite estudiar la solución en cuanto a casos particulares, valores límites, rango de validez de la solución, etc. No menos importante es que también nos permite detectar errores algebraicos, que usualmente vienen revelados por valores absurdos de alguna cantidad ("masas negativas", "denominadores que pueden valer 0 sin razón física alguna", "valores imaginarios de alguna cantidad", etc.). En esta actividad de "variación de parámetros" es útil hacer gráficos de cómo varían algunas cantidades al variar otras de las que dependen.

En los primeros 4 ejemplos no describiremos con detalle las etapas del método DELIRO. Dejamos al lector la tarea de identificar estas etapas durante la resolución de cada uno de estos ejemplos.

7.3. Combinar varias partículas en una sóla

Ejemplo 1. Dos bloques, de masas 3 y 9 kg, se ponen en contacto sobre una superficie horizontal lisa, como en la Fig. E1a. Se aplica al conjunto una fuerza de 48 N. Calcular la aceleración de cada bloque y la fuerza de interacción entre los bloques.



Fig. E1a

Resolveremos primeramente con todo detalle. Empezamos por trazar los diagramas de cuerpo libre (DCL's) individuales de los bloques, que se muestran en la Fig. E1b. "N" es la fuerza de contacto (o fuerza de interacción) entre los bloques.

A continuación planteamos las ecuaciones de movimiento para cada bloque. Según el sistema de ejes propuesto en la Fig. E1b obtenemos:

Bloque 1

$$F - N = m_1 a \quad N_1 - m_1 g = 0$$

Bloque 2

$$N = m_2 a \quad N_2 - m_2 g = 0$$

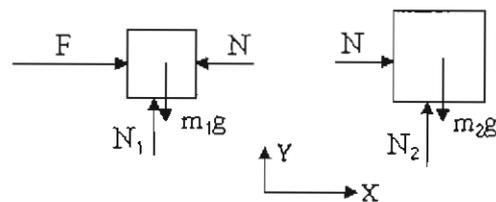


Fig. E1b

En estas 4 ecuaciones figuran 4 incógnitas: N , a , N_1 y N_2 . La solución del sistema es

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad N_1 = m_1 g$$

$$N = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \quad N_2 = m_2 g$$

Notemos que la fuerza de contacto N es proporcional a la masa m_2 del *segundo* bloque.

Con los valores dados ($m_1 = 3$, $m_2 = 9$, $F = 48$, en unidades SI) obtenemos

$$a = 4 \text{ m/s}^2, \quad N = 36 \text{ N}, \quad N_1 = 29.4 \text{ N}, \quad N_2 = 88.2 \text{ N}$$

Resolvamos ahora este mismo problema con un método alternativo, como se describe a continuación. Sería el método de un "ducho" en estos menesteres; en él no hay necesidad de hacer los DCL's, y los cálculos se pueden hacer mentalmente.

Es obvio que ambos bloques poseen la misma aceleración. Es como si fueran *un sólo bloque* de masa 12 kg, sometido a la fuerza de 48 N. De ahí que la aceleración valga

$$a = \frac{48 \text{ N}}{12 \text{ kg}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

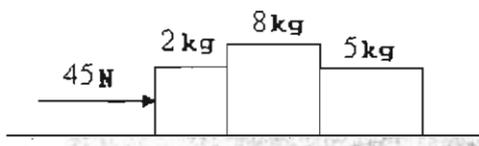
Para calcular la fuerza de contacto entre ambos bloques notamos que el bloque de masa 9 kg es acelerado *solamente* por la fuerza de contacto "N" con que lo empuja el bloque de 3 kg. Entonces, la segunda ley de Newton aplicada a este bloque da

$$N = 9 \text{ kg} \times 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 36 \text{ N}$$

Podemos verificar este cálculo haciendo un análisis similar para el bloque de 3 kg. Éste sufre una fuerza *positiva* de 48 N, y una *negativa* (la reacción "N" del bloque mayor) de 36 N, o sea en total 12 N. Como su masa es de 3 kg, su aceleración será de 4 m/s^2 , mismo valor encontrado anteriormente.

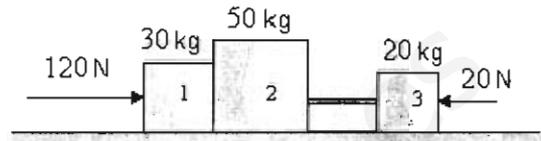
Ejercicio 1a. Tres bloques, de masas 2, 8 y 5 kg, son empujados por una fuerza de 45 N, como se muestra en la figura. Intente calcular mentalmente la aceleración común del conjunto, así como las fuerzas de contacto entre los bloques. No hay fricción en ningún lado.

Resuelva de nuevo el problema "a pie", haciendo los DCL's de cada bloque y trabajando con valores paramétricos m_1 , m_2 , m_3 para las masas y para la fuerza aplicada.



Resp. 3 m/s^2 ; 39 N; 15 N.

Ejercicio 1b. Los bloques 2 y 3, de masas 50 y 20 kg, respectivamente, están unidos por una varilla rígida ligera. Calcular la fuerza de compresión de la varilla si se aplican las dos fuerzas mostradas. Suponer que la superficie horizontal es lisa.



Resuelva a partir de los DCL's de los bloques, o bien como sigue: trate el sistema de 3 bloques junto con la varilla como si fuesen una sólo partícula. ¿Cuál sería la fuerza *externa* total sobre esta "partícula"? Seguidamente calcule la fuerza de compresión de la varilla aplicando la segunda ley de Newton al bloque 3. Etc.

Resp. 40 N.

Ejercicio 1c. Un tren tiene una locomotora de 40 Mg de masa (1 megagramo = $10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg}$), que jala cuatro vagones de masas iguales de 10 Mg. Calcular las fuerzas en los acoplamientos de la locomotora con el primer vagón, y en los de vagón con vagón, suponiendo que el tren rueda con aceleración de 1 m/s^2 .

Resp. 40, 30, 20 y 10 MN (meganewton).

Ejemplo 2. Una caja de masa 50 kg es transportada en un camión. En cierto momento el camión aplica los frenos de modo que su desaceleración es constante, de magnitud 6 m/s^2 . El coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma del camión es suficiente para que la caja no resbale.

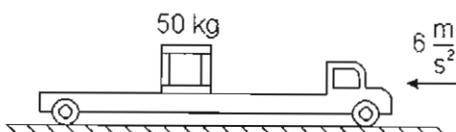


Fig. E2

¿Qué tipo de fuerza es la que desacelera la caja, y cuánto vale? Calcular el coeficiente de fricción suponiendo que la caja está a punto de resbalar.

Resolveremos este problema sin necesidad de hacer los DCL's. Nuestra hipótesis es que la caja no resbala.

Si la caja no resbala podemos tratar ambos cuerpos, caja y camión, como si fueran uno sólo. Entonces la caja también tiene aceleración de -6 m/s^2 , de donde la fuerza horizontal "f" que desacelera la caja tiene magnitud

$$f = |50 \text{ kg} \times (-6 \text{ m/s}^2)| = 300 \text{ N}$$

Esta fuerza, "f", no es otra que la fuerza de fricción estática sobre la caja debida a la plataforma.

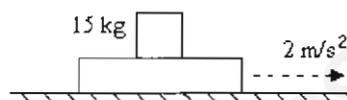
¿Es válida nuestra hipótesis?

Para validar o invalidar la hipótesis necesitamos acotar el coeficiente de fricción estática caja-plataforma, que denotaremos con " μ ". Ahora bien, para que la caja no resbale es necesario que en el contacto caja-plataforma se genere una fuerza de fricción estática suficiente para poder frenar la caja con la desaceleración supuesta. Pero la fricción estática no puede rebasar su valor máximo " $f_m = \mu N$ ", que es igual a " 490μ " (ya que la normal N es el peso de la caja, igual a $50 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$). Debemos tener entonces que $|f| \leq f_m$, es decir,

$$300 \leq \mu 490 \quad \text{o sea} \quad \mu \geq 0.6$$

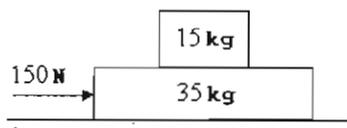
Si $\mu < 0.6$ la caja resbala, pues no hay suficiente fricción como para desacelerarla en 6 m/s^2 . Si $\mu = 0.6$ la caja está a punto de resbalar.

Ejercicio 2a. Se comunica al sistema de dos bloques una aceleración de 2 m/s^2 . ¿Cuál es el mínimo valor del coeficiente de fricción estática entre los bloques para que no haya deslizamiento del bloque superior?



Note que no se requiere la masa del bloque inferior.
Resp. $\mu = 0.2$.

Ejercicio 2b. Se empuja un bloque de 35 kg con una fuerza de 150 N, como se muestra en la figura. Sobre este bloque descansa otro bloque de 15 kg. El conjunto se mueve sobre una superficie lisa, sin que el bloque de arriba se deslice. Calcular la fuerza de fricción estática entre ambos bloques. ¿Puede calcular el coeficiente de fricción con estos datos?



Resp. 45 N; No.

7.4. Acelerómetro

Ejemplo 3. Un vagón de ferrocarril viaja en línea recta con aceleración constante a . Del techo del vagón cuelga una bola de masa m atada a un hilo, como vemos en la Fig. E3a. ¿Qué ángulo θ forma el hilo con la vertical para una aceleración dada?

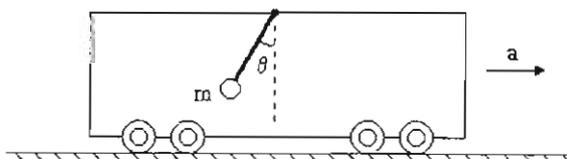


Fig. E3a

Observe el DCL de la bola y nuestra elección de ejes en la Fig. E3b.

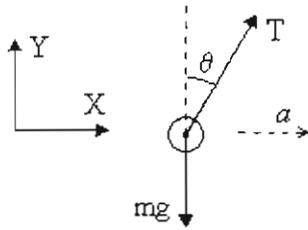


Fig. E3b

Aplicando las ecuaciones

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y$$

y notando que las componentes de la aceleración son $a_x = a$ y $a_y = 0$, obtenemos las relaciones

$$(r1) \quad T \sin \theta = ma \quad (\text{ya que } a_x = a)$$

$$(r2) \quad T \cos \theta - mg = 0 \quad (\text{ya que } a_y = 0)$$

Eliminemos la tensión T de las ecuaciones (r1) y (r2), dividiéndolas miembro a miembro:

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{ma}{mg}$$

=>

$$(r3) \quad a = g \tan \theta$$

A mayor aceleración, mayor es el ángulo de inclinación del hilo. Cuando la aceleración tiende a infinito, dicho ángulo tiende a 90° , que correspondería a la posición horizontal del hilo.

El conjunto {hilo + bola} sirve como "acelerómetro". Una persona que viaje en el vagón puede obtener la aceleración midiendo el ángulo θ . En particular tenemos que si el ángulo vale 45° , entonces la aceleración es $a = g$. Si $\theta = 0$, el movimiento del vagón es uniforme.

Calculemos la tensión en función de la aceleración. De las ecuaciones (r1) y (r2), o sea $T \sin \theta = ma$ y $T \cos \theta = mg$ tenemos

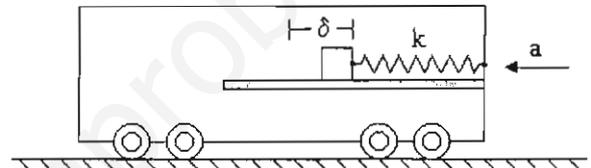
$$T^2 \sin^2 \theta + T^2 \cos^2 \theta = (ma)^2 + (mg)^2$$

Usando $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ hallamos

$$(r4) \quad T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

Ejercicio 3. Un vagón de ferrocarril que viaja con velocidad constante empieza a desacelerar uniformemente. Dentro del vagón está un sistema formado por un bloque y un resorte que antes de la desaceleración se hallaba en su configuración no deformada. Se observa que mientras el vagón desacelera, el resorte mantiene una compresión δ . Dada la constante elástica del resorte (lineal), $k = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, la masa del bloque, $m = 4 \text{ kg}$, y la desaceleración $a = -5 \text{ m/s}^2$, calcular la compresión del resorte.

Suponga que no existe fricción entre el bloque y su guía horizontal.



Resp. $\delta = 20 \text{ mm}$.

7.5. Ojo con las hipótesis

Ejemplo 4. El obrero Alán Tigüita, de masa M, sentado sobre el andamio de masa m, jala la cuerda con una fuerza F tal que genera una aceleración "a" del conjunto hacia arriba. Calcular F en términos de las masas y la aceleración supuesta.

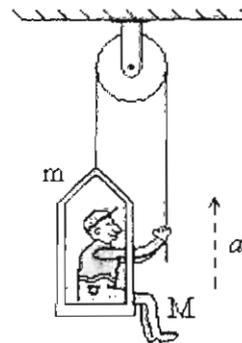


Fig. E4a

Hipótesis: *ambos cuerpos tienen la misma aceleración (que denotaremos con "a").*

Bajo esta hipótesis la solución se puede obtener rápidamente considerando al obrero junto con el andamio como una sola partícula, de masa " $M + m$ ". El DCL de esta "partícula" sería el que vemos en la siguiente figura:

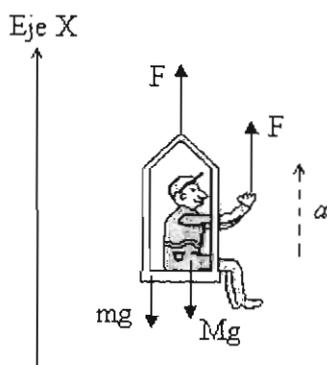


Fig. E4b

Estudie bien el DCL:

– La tensión de la cuerda es la fuerza F que le aplica el obrero en su extremo.

– El DCL incluye solamente las fuerzas *externas* sobre el conjunto. (Existe una fuerza interna que es la de interacción obrero \leftrightarrow andamio.)

Escogiendo un Eje X como se muestra, la segunda ley de Newton conduce a la ecuación

$$2F - Mg - mg = (M + m)a$$

de donde

$$(r1) \quad F = \frac{1}{2}(M+m)(g+a)$$

Si se deseara calcular la fuerza de contacto " N " entre el obrero y el andamio, tendríamos que hacer el DCL de alguno de estos cuerpos. En la Fig. E4c se muestran los DCL's de ambos.

Las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

Obrero:

$$F + N - Mg = M a$$

Andamio:

$$F - N - mg = m a$$

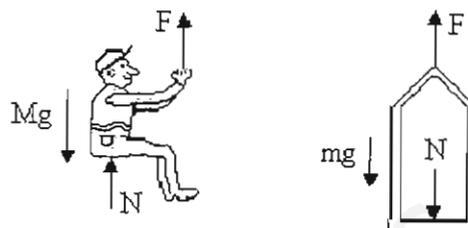


Fig. E4c

Resolviéndolas se halla

$$(r2) \quad N = \frac{1}{2}(M - m)(g + a)$$

así como el valor (r1) de F ya encontrado.

Examinemos la solución.

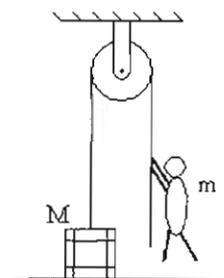
Para $M = m$ obtenemos de (r2) que

$$N = 0 \quad a = \frac{F}{m} - g = \frac{F}{M} - g$$

En este caso el obrero y el andamio se comportan como partículas independientes, de la misma masa y sometidas a la misma fuerza F . (En la Fig. E4c suprima la fuerza N en ambos diagramas e imagine $m = M$.)

Por otra parte, si $m > M$ (andamio pesa más que obrero) obtenemos que N es negativa. Esto es absurdo, de modo que la solución obtenida no es válida para $m > M$. Lo que ocurre es que esto viola la hipótesis. Revisela y explique qué ocurre con el sistema Alán-Andamio cuando $m > M$ (Sugerencia. Si no logra averiguarlo pase al ejercicio 4a y regrese aquí).

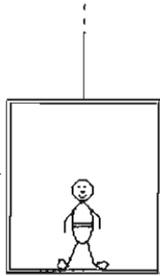
Ejercicio 4a. Alán (masa m) desea trepar por la cuerda con una aceleración " a ", sin que la caja de masa M se separe del piso. ¿Cuál es la máxima aceleración que puede lograr?



$$\text{Resp. } a = \frac{M - m}{m} g$$

Ejercicio 4b. Una persona de masa m se encuentra dentro de un elevador de masa M . ¿Cuánto vale la fuerza de contacto persona-elevador si el elevador está acelerando (a) hacia arriba; (b) hacia abajo, con aceleración “ a ”?

En el DCL del elevador no incluya las fuerzas laterales debidas al cubo.



¿Cuánto vale la fuerza P que ejerce el cable para acelerar al conjunto? ¿En qué caso se tendría que la fuerza de contacto es igual a cero?

Resp. $N = m(g + a)$, $P = (M + m)(g + a)$

7.6. Sistemas con aceleración común

Observe los sistemas ilustrados en la Fig. 14. Dejados en libertad de moverse, todos los bloques recorren distancias iguales en tiempos iguales, a lo largo de sus respectivas rectas de movimiento. Como las cuerdas se suponen inextensibles, las velocidades son iguales en todo momento: $v_1(t) = v_2(t) = \dots$. También las aceleraciones tienen el mismo valor, el cual llamaremos *aceleración del sistema*. Denotando con a_1, a_2, \dots las componentes (únicas) de las aceleraciones a lo largo de la respectiva dirección de movimiento, tendremos que se cumple la siguiente “relación cinemática”:

$$a_1 = a_2 \quad \text{para el caso (a)}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 \quad \text{para los casos (b), (c) y (d)}$$

Denotaremos con “ a ” la aceleración común ($a_1 = a_2 = \dots = a$).

Generalmente se conocen las masas de los bloques (m_1, m_2, \dots) y la “geometría” del problema, es decir, las longitudes relevantes, los ángulos de los planos inclinados, etc. Las poleas se consideran “ideales”, esto es, lisas e ingravidas. Se trata de calcular la aceleración “ a ” del sistema y las fuerzas de reacción

desconocidas, que son las tensiones de los cables y las fuerzas normales y de fricción en los planos.

Resolveremos unos ejemplos de esta clase de sistemas. En ellos iremos describiendo paso a paso las diversas etapas del método DELIRO.

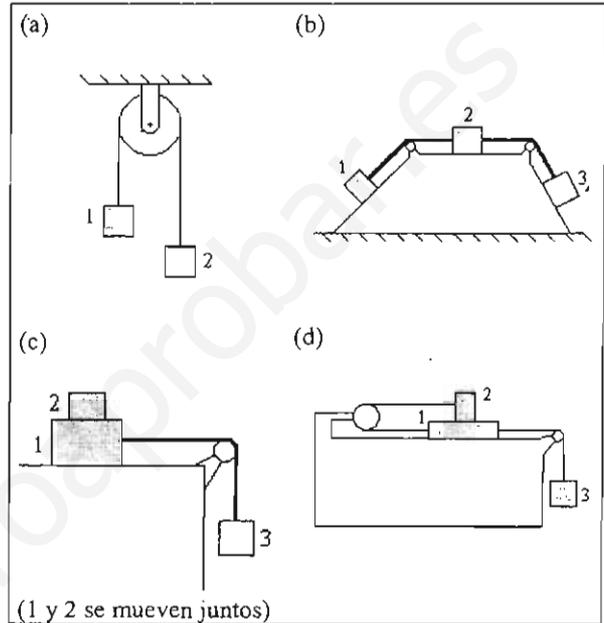


Fig. 14

Ejemplo 5. Consideremos el sistema mostrado en la Fig. E5a. Los datos son las masas m_1, m_2 y m_3 de los bloques y los ángulos α y β . Supondremos que todas las superficies son lisas.

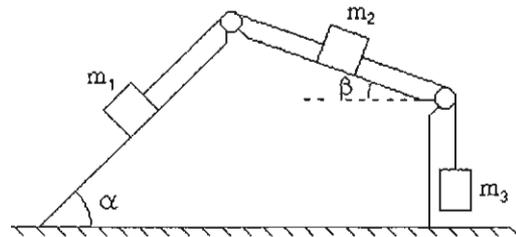


Fig. E5a

DELIRO

↑ Diagramas de cuerpo libre

El sistema tiene dos modos de movimiento: que el bloque m_3 esté acelerado hacia arriba o hacia abajo. Supondremos la segunda posibilidad.

Conviene hacer el DCL de *cada bloque separadamente*. Estos diagramas se muestran en la Fig. E5b. Hemos incluido los vectores aceleración en los DCL's.

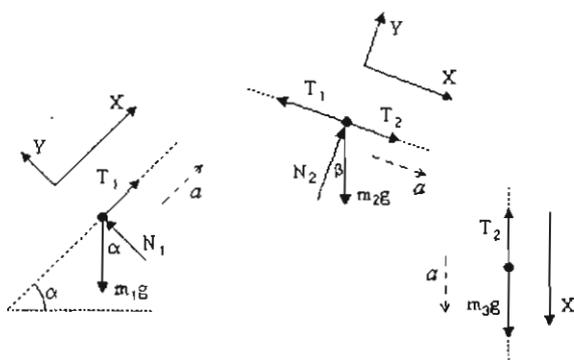


Fig. E5b

Hemos representado cada bloque por un punto "•" con objeto de facilitar la obtención de las componentes de las diversas fuerzas. Notemos que las tensiones son iguales a ambos lados de cada polea fija, debido a que éstas son lisas por hipótesis.

DELIRO

↑ Ejes y referencia de tiempo

Con el fin de facilitar la expresión matemática de las relaciones cinemáticas, así como las operaciones matemáticas, conviene escoger para cada bloque uno de los dos ejes *en la misma dirección que su correspondiente aceleración*. Este eje lo hemos designado "Eje X" en todos los casos. El otro eje, designado "Y", se traza perpendicularmente al eje X.

Entonces, de acuerdo con la hipótesis de que el bloque 3 baja, trazamos los ejes tal como vemos en la Fig. E5b, de tal modo que para cada bloque el eje X apunte en la dirección de movimiento, misma en este caso que la de cada aceleración. En virtud de nuestra elección de ejes, los vectores aceleración de las partículas, a_1 , a_2 y a_3 , tendrán componentes *positivas* (por hipótesis) a lo largo del correspondiente eje X.

DELIRO

↑ Leyes de movimiento

Aplicamos la segunda ley de Newton a cada bloque. Las ecuaciones $\sum F_x = m a_x$ y $\sum F_y = m a_y$ dan

Bloque 1

$$(r1) \quad T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a$$

$$(r2) \quad N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

Bloque 2

$$(r3) \quad T_2 - T_1 - m_2 g \sin \beta = m_2 a$$

$$(r4) \quad N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$

Bloque 3

$$(r5) \quad m_3 g - T_2 = m_3 a$$

Observaciones. Las aceleraciones de los bloques son a_1 , a_2 y a_3 ; sin embargo, ya hemos tomado en cuenta que las tres son una misma y hemos designado esta aceleración común con "a". Debemos tener cuidado con los signos de las componentes, los cuales vienen determinados por las direcciones de los ejes. Así, en el caso del Bloque 3, el peso $m_3 g$ es positivo y la tensión T_2 es negativa, puesto que el eje X para este bloque apunta hacia abajo.

DELIRO

↑ Incógnitas y datos

Tenemos 5 incógnitas, T_1 , a , N_1 , T_2 y N_2 , y 5 ecuaciones. No faltan ni sobran ecuaciones.

DELIRO

↑ Relaciones cinemáticas
y/o dinámicas.

Las relaciones cinemáticas son ecuaciones entre las aceleraciones de los distintos cuerpos, o condiciones iniciales sobre posiciones y velocidades. En este problema son las relaciones $a_1 = a_2 = a_3 = a$, que ya han sido consideradas en las ecuaciones.

DELIRO

↑ Operaciones matemáticas

Se recomienda obtener primeramente la aceleración, "eliminando las tensiones". Para ello se suman miembro a miembro las tres ecuaciones que contienen tensiones ((r1), (r3) y (r5)):

$$(T_1 - m_1 g \sin \alpha) + (T_2 - T_1 - m_2 g \sin \beta) = m_3 g - T_2 =$$

$$= m_1 a + m_2 a + m_3 a$$

Como vemos, las tensiones se cancelan. Despejando la aceleración obtenemos

$$(r6) \quad a = \frac{m_3 g + m_2 g \sin \beta - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Ahora, para calcular las tensiones T_1 y T_2 sustituimos este valor de "a" en las ecuaciones. Encontramos

$$(r7) \quad T_1 = \frac{m_1 m_3 (1 + \sin \alpha) + m_1 m_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

$$(r8) \quad T_2 = \frac{m_1 m_3 (1 + \sin \alpha) + m_2 m_3 (1 - \sin \beta)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Análisis de la solución.

- La aceleración "a" resulta negativa si

$$(r9) \quad m_3 + m_2 \sin \beta < m_1 \sin \alpha$$

Si se cumpliera esta desigualdad nuestra hipótesis de que el bloque 3 baja no sería cierta. El bloque 3 subiría. Pero la solución obtenida es válida en ambos casos.

- Observemos el numerador de la expresión (r6) para la aceleración. Es la suma algebraica de las componentes de las fuerzas a lo largo de las respectivas direcciones de movimiento de los bloques, como vemos en la Fig. E5c. Esta suma la llamaremos la "fuerza impulsora" del sistema, y escribiremos

$$(13) \quad \text{Aceleración} = \frac{\text{Fuerza impulsora}}{\text{Masa del sistema}}$$

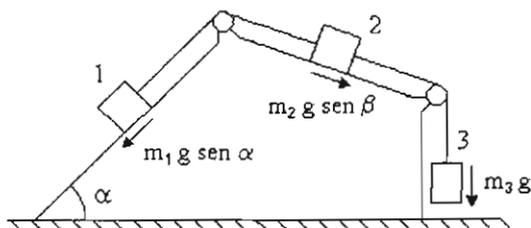


Fig. E5c

La masa del sistema es su masa total, igual a $m_1 + m_2 + m_3$. Las fuerzas de tensión no figuran en (13) porque son fuerzas *internas* del sistema formado por los tres bloques y las cuerdas. Tampoco figuran en (13) las fuerzas normales, cuya función es guiar los bloques y no afectan la magnitud de la aceleración. Note que la componente " $m_1 g \sin \alpha$ " se opone a las otras dos; por eso aparece con signo negativo en (r6).

- La Figs. E5d y E5e muestran unos casos particulares del sistema.

El de la Fig. E5d se obtiene poniendo $m_3 = 0$. La expresión (r6) de la aceleración se reduce a

$$(r10) \quad a = \frac{(m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha) g}{m_1 + m_2}$$

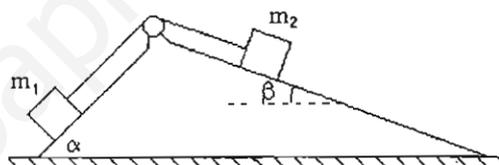


Fig. E5d

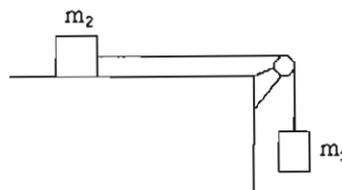


Fig. E5e

El de la Fig. E5e se obtiene poniendo $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$ y $m_1 = 0$. Resulta

$$(r11) \quad a = \frac{m_3 g}{m_2 + m_3}$$

Si no existiera el bloque 2 (o sea $m_2 = 0$), entonces el bloque 3 caería con la aceleración de la gravedad ($a = g$). Por otra parte, si $m_3 = 0$, el bloque m_2 no se movería ($a = 0$).

En la expresión simple (r11) el peso del bloque 3, $m_3 g$, es la única fuerza impulsora del sistema. Esta es la fuerza que acelera a *ambos* bloques.

Ejercicio 5a.

Aplique la idea expresada en la fórmula (13) a los dos sistemas mostrados en las Figs. A y B. Suponga que no hay fricción en ninguna parte. Compruebe que la aceleración de cada sistema tiene el valor dado, de acuerdo con los datos propuestos.

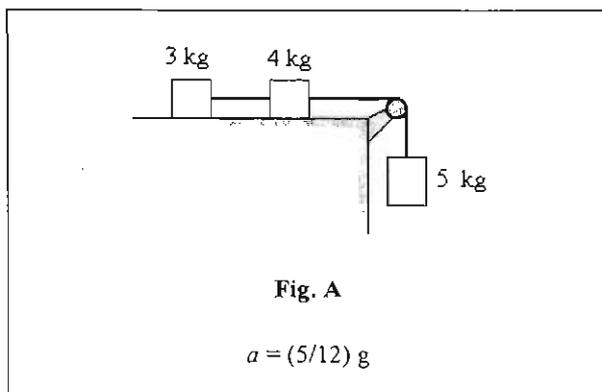


Fig. A

$$a = (5/12) g$$

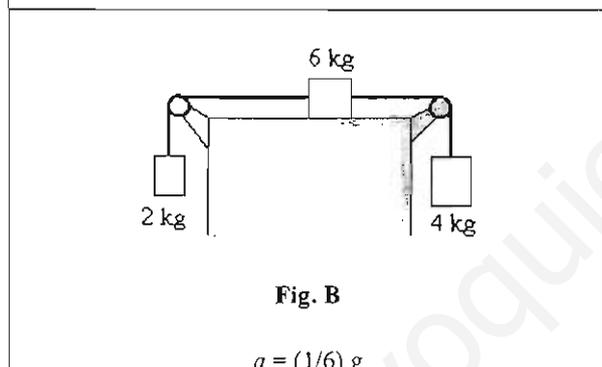
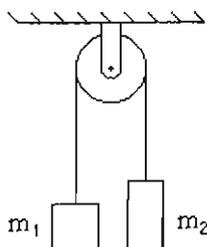


Fig. B

$$a = (1/6) g$$

Ejercicio 5b. El sistema de la figura se denomina "Máquina de Atwood". Demuestre que la aceleración común de los bloques es

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

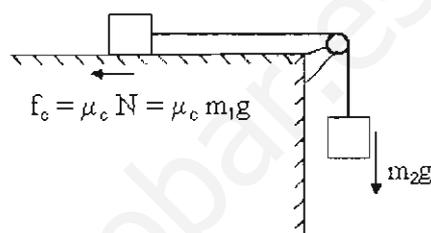


Ejercicio 5c. Considere el sistema de la figura. Suponga que existe fricción cinética de coeficiente μ_c

entre el bloque m_1 y la mesa. Resuélvalo con el método DELIRO y llegue a la siguiente expresión de la aceleración:

$$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g$$

Exámínela a la luz de la ecuación (13).



Ejercicio 5d. Resolver con el método DELIRO el sistema (b) de la Fig. 14, página 18. Suponga masas m_1 , m_2 , m_3 , ángulos α a la izquierda y β a la derecha, y coeficientes de fricción cinética μ_{c1} , μ_{c2} y μ_{c3} . Resp.

$$a = \frac{m_3 \sin \beta - m_1 \sin \alpha - \mu_{c3} m_3 \cos \beta - \mu_{c2} m_2 - \mu_{c1} m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Ejemplo 6. En el sistema mostrado en la Fig. E6a existe fricción entre el bloque 1 y el 2, de coeficiente cinético μ_c y entre el bloque 2 y la mesa, de coeficiente cinético μ_c' . Calcular la aceleración del sistema.

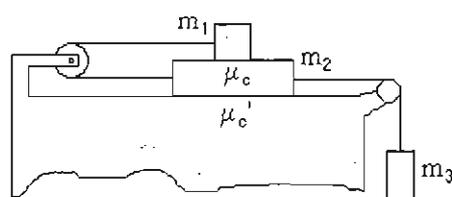


Fig. E6a

Hipótesis.

El sistema está acelerado (la aceleración del bloque m_3 está obviamente hacia abajo).

Diagramas de cuerpo libre.

Observe en la Fig. E6b el DCL de cada bloque. En los recuadros después de esta figura se detalla el origen de cada una de las fuerzas sobre el respectivo bloque encerrado entre llaves "{ }".

El recuadro correspondiente al Bloque 3 es evidente y lo hemos suprimido. Existen dos cuerdas en el sistema, denominadas Cuerda 1 y Cuerda 2; sus tensiones son T_1 y T_2 , respectivamente. Observe en los dos recuadros las fuerzas normales y de fricción Bloque 1 ↔ Bloque 2. La fuerza de fricción mutua entre los bloques 1 y 2 se opone al movimiento de los mismos.

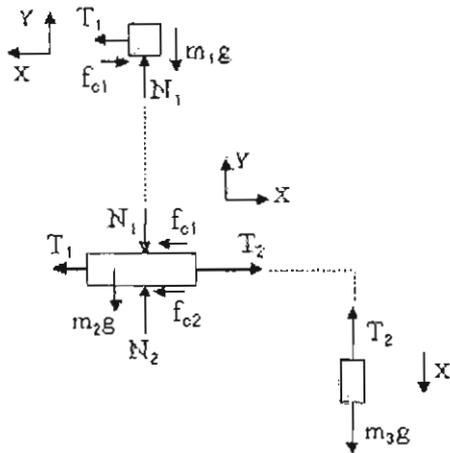


Fig. E6b

{Bloque 1}	
Tierra	$m_1 g$
Cuerda 1	T_1
Bloque 2	N_1, f_{c1}

{Bloque 2}	
Tierra	$m_2 g$
Cuerda 1	T_1
Cuerda 2	T_2
Bloque 1	N_1, f_{c1}
Mesa	N_2, f_{c2}

Ejes y referencia de tiempo.

El sistema se mueve de tal manera que el bloque 3 desciende. Por lo tanto, el eje X para este bloque se escogió hacia abajo. Por otra parte, el bloque 2 se mueve hacia la derecha y el bloque 1 hacia la izquierda. En tales direcciones se toman sus respectivos ejes X.

Leves de movimiento.

Bloque 1

(r1) $T_1 - f_{c1} = m_1 a$

(r2) $N_1 - m_1 g = 0$

Bloque 2

(r3) $-T_1 - f_{c1} - f_{c2} + T_2 = m_2 a$

(r4) $-N_1 - m_2 g + N_2 = 0$

Bloque 3

(r5) $m_3 g - T_2 = m_3 a$

Favor de observar que en el caso del bloque 1, que se mueve hacia la izquierda, el eje X apunta hacia la izquierda por lo que T_1 es positiva y f_1 negativa. Análogamente, sobre el bloque 3 el peso $m_3 g$ es positivo y la tensión T_2 negativa.

Incógnitas y datos.

Tenemos 7 incógnitas, $T_1, f_1, a, N_1, T_2, f_2$ y N_2 , y 5 ecuaciones. Las dos ecuaciones faltantes provienen del siguiente paso.

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

En el presente problema ya hemos tomado en cuenta que todos los bloques poseen la misma aceleración "a" (o sea $a_1 = a_2 = a_3 \equiv a$).

Las "relaciones dinámicas" se refieren a fuerzas. En el problema presente existen dos relaciones dinámicas, que expresan que las fricciones son las máximas, puesto que existe deslizamiento:

(r6) $f_{c1} = \mu_c N_1$

(r7) $f_{c2} = \mu_c' N_2$

Estas dos ecuaciones complementan las 5 anteriores, por lo que ya podemos resolver.

Operaciones matemáticas.

Eliminemos las tensiones, sumando miembro a miembro las ecuaciones que las contienen. Obtenemos la ecuación

(r8) $-2 f_{c1} - f_{c2} + m_3 g = m_1 a + m_2 a + m_3 a$

Ahora bien, las fuerzas normales son

$$N_1 = m_1 g$$

$$N_2 = (m_1 + m_2) g$$

y las fricciones,

$$f_{c1} = \mu N_1 = \mu_c m_1 g$$

$$f_{c2} = \mu' N_2 = \mu_c' (m_1 + m_2) g$$

Sustituyéndolas en la ecuación (r8) resulta

$$(r9) \quad a = \frac{-2\mu_c m_1 g - \mu_c' (m_1 + m_2) g + m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Ya conociendo la aceleración, las demás incógnitas se encuentran fácilmente.

Análisis de la solución.

Remitiéndonos a la Fig. E6a:

Según nuestra intuición, si m_1 es muy pesado y el coeficiente de fricción μ_c (o bien μ_c') muy grande, es posible que el sistema no se mueva. ¿Cuál sería la condición para que el sistema se mueva aceleradamente? Veamos.

De (r9), la condición $a > 0$ equivale a la condición

$$(r10) \quad m_3 g > 2\mu_c m_1 g + \mu_c' (m_1 + m_2) g$$

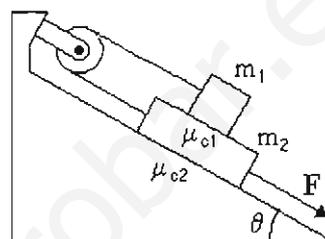
Sin embargo, el sistema debe vencer la fricción *estática* para poderse mover, por lo que (r10) no es correcta, sino que debe sustituirse por esta otra:

$$(r11) \quad m_3 g > 2\mu m_1 g + \mu' (m_1 + m_2) g$$

en la que figuran los coeficientes de fricción estática μ y μ' . El miembro derecho de (r11) es mayor que el correspondiente de (r10) (los coeficientes de fricción cinética son grosso modo un 25% menores que los de fricción estática).

Nota. Si la desigualdad ">" en (r11) se cambia por una igualdad, el sistema está en equilibrio, y su movimiento es inminente.

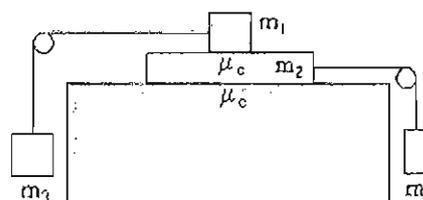
Ejercicio 6a. Calcular la aceleración del sistema de dos bloques mostrado, al aplicar la fuerza constante F a lo largo del plano inclinado. Existe fricción de coeficientes cinéticos μ_{c1} entre ambos bloques y μ_{c2} entre el bloque inferior y el plano. Calcular la aceleración del sistema. Tome el eje X para m_2 hacia abajo del plano.



Resp.

$$a = \frac{F - [2\mu_{c1} m_1 + \mu_{c2} (m_1 + m_2)] g \cos \theta + (m_2 - m_1) g \sin \theta}{m_1 + m_2}$$

Ejercicio 6b. Hallar las aceleraciones de los 4 bloques del sistema mostrado en la figura, suponiendo que m_1 está acelerado hacia la izquierda y m_2 lo está hacia la derecha.



Resp.

$$a_1 = \frac{m_3 - \mu_c m_1}{m_1 + m_3} g, \quad a_2 = \frac{m_4 - \mu_c (2m_1 + m_2)}{m_2 + m_4} g$$

7.7. Sistemas con una polea móvil

Mire los sistemas ilustrados en la Fig. 15.

En todos ellos existe una polea móvil (denominada "P"), sobre la que corre un cable. Uno de los extremos de este cable está fijo (el extremo "F"), y el otro extremo remata en un bloque (el extremo "B").

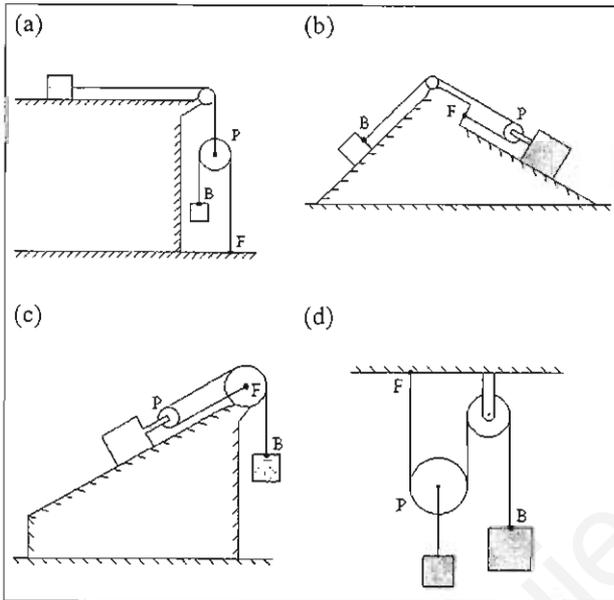


Fig. 15

La relación cinemática que aplicaremos en esta clase de sistemas es esta: $a_B = 2a_P$, o sea, el bloque B es más rápido que la polea móvil P (puede llegar a alcanzarla).

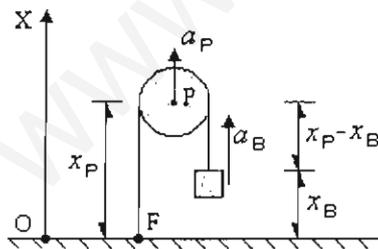


Fig. 16

Demostración. Como la cuerda es inextensible, la suma de las longitudes de los tramos de cuerda a uno y otro lado de la polea móvil permanece constante. Entonces, $x_P + (x_P - x_B) = \text{constante}$, o sea $2x_P - x_B = \text{constante}$. Derivando con respecto al tiempo tenemos $2v_P - v_B = 0$.

Volviendo a derivar,

$$a_B = 2 a_P \quad \text{QED}$$

Ejemplo 7. Resolvamos el sistema de la Fig. E7a. Existe fricción entre los bloques y los planos inclinados, de coeficiente cinético común μ_c . Se desprecia la masa de la polea móvil.

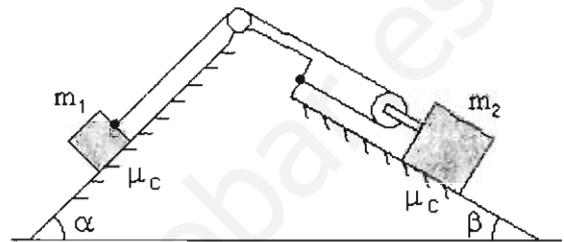


Fig. E7a

Hipótesis.

Polea ingrávida. Bloque m_2 acelerado hacia abajo.

Diagramas de cuerpo libre.

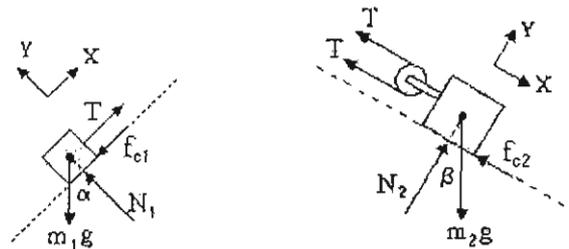


Fig. E7b

Como el bloque 2 baja, las fuerzas de fricción actúan como vemos en los DCL's de la Fig. E7b.

Ejes de refereneia.

El eje X se coloca para cada bloque en el mismo sentido que su aceleración.

Leyes de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento de los bloques son:

Bloque 1

$$(r1) \quad T - f_{c1} - m_1 g \text{ sen } \alpha = m_1 a_1$$

$$(r2) \quad N_1 - m_1 g \text{ cos } \alpha = 0$$

Bloque 2

$$(r3) \quad -2T - f_{c2} + m_2 g \sin \beta = m_2 a_2$$

$$(r4) \quad N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$

Incógnitas y datos.

En las ecuaciones anteriores aparecen las incógnitas T , f_{c1} , a_1 , N_1 , f_{c2} , a_2 y N_2 , siete en total. Nos faltan 3 ecuaciones, que obtendremos en el siguiente paso.

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

De acuerdo con lo discutido en la página precedente, existe la condición cinemática

$$(r5) \quad a_1 = 2 a_2$$

Además, en vista de que existe deslizamiento,

$$(r6) \quad f_{c1} = \mu_c N_1$$

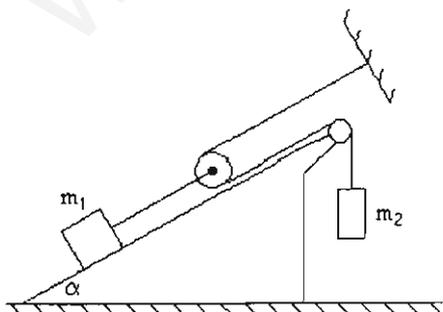
$$(r7) \quad f_{c2} = \mu_c N_2$$

Operaciones matemáticas.

Empecemos por eliminar la tensión T , multiplicando la ecuación (r1) por 2 y sumándola con la (r1). Luego sustituyamos las fricciones por sus expresiones dadas en (r6) y (r7). Despejemos las normales de las ecuaciones (r2) y (r4). Finalmente usemos la relación (r5). Llegaremos a

$$a = \frac{-2m_1 g (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) + m_2 g (\sin \beta - \mu_c \cos \beta)}{4m_1 + m_2}$$

Ejercicio 7. Resuelva el siguiente sistema. Suponer que la polea móvil no tiene masa y que no existe fricción.



Sugerencia. El sistema contiene dos cuerdas, con tensiones que denotamos con T_1 y T_2 . Al aplicar la segunda ley de Newton a la polea móvil tenemos que

$$T_1 - 2 T_2 = \text{masa} \times \text{aceleración} = 0$$

ya que la masa es cero. Se sigue que $T_1 = 2 T_2$. Por otra parte, la aceleración de la polea móvil es la misma que la del bloque m_1 .

Resp.

$$a_1 = \frac{2m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + 4m_2} \cdot g$$

7.8. Bloque sobre plano inclinado áspero

Ejemplo 8. Un bloque de masa m se coloca sobre un plano fijo, inclinado a un ángulo θ , con el que existe fricción de coeficiente estático μ y cinético μ_c . ¿Bajo qué condiciones se mueve el bloque y cuál es su aceleración?

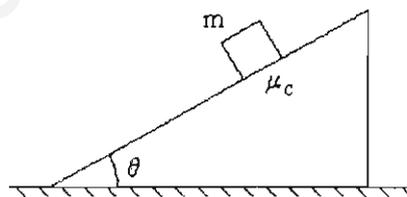


Fig. E8a

Supongamos que el bloque se desliza aceleradamente. Entonces su DCL es el mostrado en la Fig. E8b, donde f_c es la fricción cinética bloque-plano.

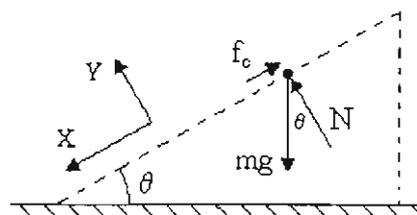


Fig. E8b

Observe que el ángulo entre la normal N y el peso mg es el mismo que el del plano, θ , y que hemos escogido el eje X hacia abajo, en la misma dirección que la aceleración del bloque.

De la condición de equilibrio podremos averiguar las condiciones para que efectivamente haya

deslizamiento. Claramente, si hay mucha fricción y/o el ángulo θ muy pequeño, el bloque no se deslizará.

Las ecuaciones de movimiento del bloque son:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad mg \sin \theta - f_c = ma$$

$$\Sigma F_y = ma_y \quad N - mg \cos \theta = 0$$

A estas hay que añadir la condición de deslizamiento,

$$f_c = \mu_c N$$

Tenemos 3 incógnitas (f_c , a , N) y 3 ecuaciones. La solución es

$$(r1) \quad a = g \sin \theta - \mu_c g \cos \theta$$

$$(r2) \quad N = mg \cos \theta$$

$$(r3) \quad f_c = \mu_c mg \cos \theta$$

Analicemos la solución.

- Si no hubiese fricción ($\mu_c = 0$), el bloque descendería con una aceleración igual a $a = g \sin \theta$, la cual es obviamente menor que la de caída libre. Notemos que tal aceleración es independiente de la masa, tal como ocurre con la caída libre.
- La existencia de fricción reduce la aceleración libre en la cantidad $-\mu_c g \cos \theta$.
- Claramente, la solución obtenida no es válida para $\theta = 0$, porque en tal caso no existe fricción. Sí es válida hasta $\theta = 90^\circ$, ángulo para el que $a = g$, como era de esperarse.
- Para obtener la condición bajo la cual puede existir deslizamiento hacia abajo debemos resolver el problema de equilibrio en la situación de movimiento inminente. Obtenemos la condición

$$g \sin \theta \geq \mu g \cos \theta$$

o sea

$$(r4) \quad \tan \theta \geq \mu$$

(Esto equivale en este caso a poner $a \geq 0$ en (r1), y sustituir μ_c por μ , el coeficiente de fricción estático.)

Al igual que se hace en Estática, se define el **ángulo de fricción** " ϵ " del bloque de tal modo que

$$\tan \epsilon = \mu$$

Recopilemos los resultados:

La aceleración de un bloque a lo largo de un plano inclinado de ángulo θ , con el que existe fricción de coeficientes estático μ y cinético μ_c , viene dada por

$$(14a) \quad a = g \sin \theta - \mu_c g \cos \theta$$

Para que el bloque resbale es necesario que

$$(14b) \quad \epsilon \leq \theta$$

donde ϵ es el *ángulo de fricción* del bloque, definido por la relación

$$(14c) \quad \mu = \tan \epsilon \quad (\mu = \text{coef. estático.})$$

Ejemplo numérico.

Pongamos los valores $m = 3 \text{ kg}$, $\mu = 0.5$, $\mu_c = 0.4$ y $\theta = 30^\circ$. El ángulo de fricción del bloque es, de (14c),

$$\epsilon = \tan^{-1} \mu = \tan^{-1}(0.5) = 26.56^\circ$$

Como $\epsilon = 26.56^\circ < \theta = 30^\circ$, si hay movimiento acelerado. Usando (14a) la aceleración es, en m/s^2 ,

$$a = g \sin \theta - \mu_c g \cos \theta$$

$$= 9.8 \sin 30^\circ - 0.4 (9.8) \cos 30^\circ = 1.5$$

Si θ fuese exactamente igual al ángulo de fricción ($\theta = \epsilon = 26.56^\circ$), el bloque se mantendría en reposo o estaría a punto de resbalar. Tome en consideración, sin embargo, que los valores del coeficiente de fricción tienden a ser muy imprecisos; de hecho los decimales del ángulo 26.56° no son muy relevantes que digamos.

Ejercicio 8a. Para el movimiento del ejemplo anterior pongamos $\theta = 40^\circ$. ¿Cuál es el máximo coeficiente de fricción por debajo del cual hay movimiento acelerado del bloque?

Resp. $\mu = 0.8$

Ejercicio 8b. Para el movimiento del ejemplo anterior, dado un coeficiente de fricción $\mu = 0.3$ bloque-plano ¿por encima de qué ángulo se movería el bloque aceleradamente? ¿Puede calcular la aceleración del bloque con este dato?

Resp. 16.7° . No (Se necesita el coeficiente μ_c).

Ejercicio 8c. Se lanza un bloque de 5 kg hacia arriba de un plano inclinado a 42° grados, con una velocidad inicial de 3 m/s. El coeficiente de fricción cinética bloque-plano vale 0.25. ¿Qué distancia logra recorrer el bloque antes de detenerse?

Resp. 0.36 m.

Ejemplo 9. Dos bloques de masas m_1 y m_2 se abandonan desde el reposo sobre un plano inclinado a 36.87° , como se muestra en la Fig. E9. Los ángulos de fricción de los bloques son $\varepsilon_1 = 25^\circ$ y $\varepsilon_2 = 30^\circ$. ¿Cuánto tarda el bloque m_1 en alcanzar al bloque m_2 ?

Tome $\mu_{c1} = 0.4$ y $\mu_{c2} = 0.5$.

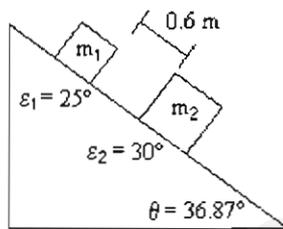


Fig. E9

Note que los datos ε_1 , ε_2 determinan los coeficientes de fricción estática entre los bloques y el plano inclinado, pues de la relación (14c), $\mu = \tan \varepsilon$, se sigue que

$$\mu_1 = \tan(25^\circ) \approx 0.46$$

$$\mu_2 = \tan(30^\circ) \approx 0.58$$

Como ambos ángulos de fricción ε_1 y ε_2 son menores que el ángulo θ del plano inclinado, ambos bloques se mueven aceleradamente hacia abajo con aceleraciones que según (14a) son, en m/s^2 ,

$$a_1 = g \sin \theta - \mu_{c1} \cos \theta = 2.74$$

$$a_2 = g \sin \theta - \mu_{c2} \cos \theta = 1.96$$

Dado que $a_1 > a_2$, el bloque superior alcanza al inferior (suponiendo, claro está, que el plano es lo suficientemente largo para que esto ocurra).

Ahora usaremos dos cosas:

– Primero: la siguiente ecuación del movimiento uniformemente acelerado, válida cuando el móvil parte del reposo:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

donde Δx es el desplazamiento en el tiempo Δt .

– Segundo: imaginamos el bloque 2 en reposo. Entonces el bloque 1 se le acerca con una aceleración “ $a_{1/2}$ ” dada por la fórmula de la aceleración relativa:

$$a_{1/2} = a_1 - a_2$$

El tiempo necesario para el alcance se obtiene de las dos ecuaciones anteriores como:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{1/2}}}$$

donde

$$a_{1/2} = a_1 - a_2 = 2.74 - 1.96 = 0.78 \quad (\text{m/s}^2)$$

Resulta

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{1/2}}} = \sqrt{\frac{2(0.6)}{0.78}} = 1.24 \quad (\text{s})$$

En este lapso la distancia recorrida por cada bloque es

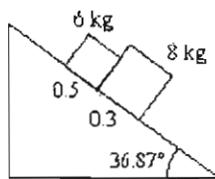
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 = 2.1 \quad (\text{m})$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 (\Delta t)^2 = 1.5 \quad (\text{m})$$

(Note que $\Delta x_1 - \Delta x_2 = 0.6 \text{ m}$, como debe.)

Ejercicio 9. Dos bloques de masas 6 kg y 8 kg se ponen en contacto sobre un plano inclinado a 36.87° y se dejan ir. Existe fricción con el plano, de coeficiente estático 0.6 y cinético 0.5 para el bloque de 6 kg y 0.4 y 0.3 para el de 8 kg. ¿Cuánto tardan los bloques en separarse 0.9 metros?

Resuelva sin hacer los DCL's, aplicando las fórmulas (14a,b,c)-p26 y las propiedades del movimiento uniforme-mente acelerado.



Resp. 1.07 s.

7.9. Otros movimientos con fricción

Ejemplo 10. En el sistema de la Fig. E10a hay fricción sólo entre los bloques de 4 y 8 kg, con coeficiente estático $\mu = 0.4$. Liberado el sistema, ¿se mueven juntos los bloques que están sobre la superficie horizontal?

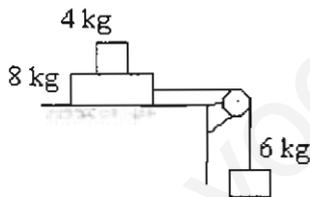


Fig. E10a

Preanálisis.

El bloque de 4 kg es acelerado hacia la derecha solamente por la fuerza de fricción debida al bloque de 8 kg. Ahora bien, para que ambos bloques en contacto se muevan juntos, o sea con la misma aceleración, tal fuerza de fricción debe ser la suficiente para dar al bloque superior la misma aceleración que la del bloque inferior. Tome en cuenta que si el coeficiente de fricción entre ambos bloques fuese muy pequeño, la fuerza de fricción máxima podría ser muy pequeña, no podría acelerar suficientemente al bloque superior y entonces éste se resazaría con respecto al inferior.

Resolución semiplaticada.

La fuerza impulsora es el peso del bloque

colgante, 6g. Si los 3 bloques se mueven juntos, los bloques en contacto se comportan como un sólo cuerpo. La masa del conjunto es entonces 18 kg y su aceleración es $a = 6g/18 = (1/3)g$. Para que el bloque de 4 kg se mueva con esta aceleración necesita actuar sobre él una fuerza de fricción "f" cuyo valor debe ser

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = 4 \cdot (1/3)g = 1.33g$$

Comparémosla con la máxima fricción, cuyo valor es $f_m = \mu N = 0.4(4g) = 1.6g$. Como $f < f_m$, sí se mueven juntos.

Para resolver con detalle estudie los DCL's de la Fig. E10b (Note las dos parejas acción-reacción f y N_1 entre ambos bloques en contacto). Plantee las ecuaciones de movimiento de cada bloque de acuerdo con los ejes X mostrados. Bajo la hipótesis de que existe una aceleración común, debe encontrar que

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

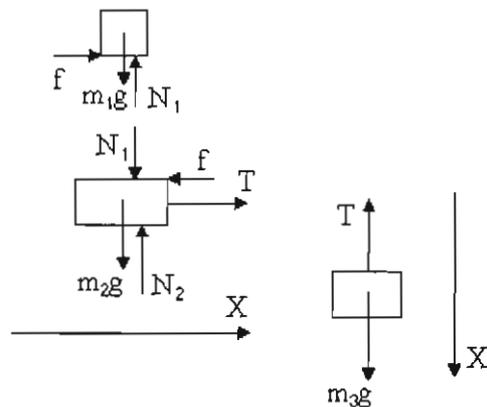
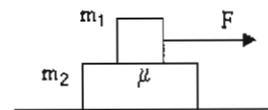


Fig. E10b

Ejercicio 10. ¿Cuál debe ser el mínimo coeficiente de fricción estático μ para que el bloque m_1 pueda arrastrar consigo, con la misma aceleración, al bloque m_2 ? Suponga que la superficie que sostiene los bloques es lisa. Tome $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 6$ kg, $F = 64$ N.



Resp. 0.24.

Ejemplo 11. El sistema de la Fig. E11a se deja caer desde el reposo, con la cuerda apenas tensa (tensión prácticamente igual a cero). Analizar el movimiento.

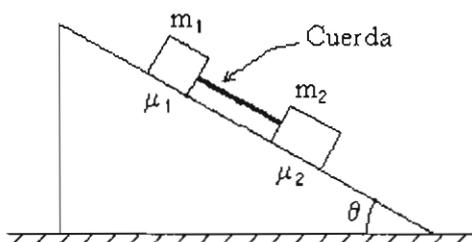


Fig. E11a

Preanálisis.

De acuerdo con lo que hemos discutido anteriormente, podemos distinguir estas situaciones:

(a) Los ángulos de fricción ϵ_1 y ϵ_2 ambos son menores que el ángulo θ .

En este caso ambos bloques tienden a deslizarse no bien soltados.

(b) $\epsilon_1 < \theta$ pero $\epsilon_2 > \theta$.

El bloque de arriba tiende a deslizarse y el de abajo no.

(c) $\epsilon_1 > \theta$ pero $\epsilon_2 < \theta$.

El bloque de arriba tiende a quedarse quieto y el de abajo a deslizarse.

(d) Ambos ángulos de fricción son menores que el ángulo θ .

En este caso los bloques permanecen donde están.

Los casos (a) y (c) pueden dar lugar a movimientos en que la cuerda permanece tensa.

Al resolver el problema encontraremos las condiciones cuantitativamente.

Hipótesis. El sistema se mueve con aceleración común "a" y con la cuerda en tensión ($T > 0$).

Resolución.

Los DCL's están en la Fig. E11b.

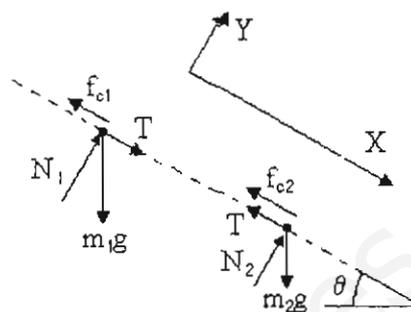


Fig. E11b

Como ejercicio, plantee las ecuaciones de movimiento y resuélvalas. Debe llegar a

$$(r1) \quad a = g \operatorname{sen} \theta - \bar{\mu}_c g \cos \theta$$

$$(r2) \quad T = \Delta \mu_c m_r g \cos \theta$$

donde hemos definido

$$(r3) \quad \bar{\mu}_c = \frac{m_1 \mu_{c1} + m_2 \mu_{c2}}{m_1 + m_2}$$

$$(r4) \quad m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masa reducida del sistema})$$

$$(r5) \quad \Delta \mu_c \equiv \mu_{c1} - \mu_{c2}$$

Note que $\bar{\mu}_c$ es el promedio pesado de los coeficientes μ_{c1} y μ_{c2} , con factores de peso iguales a las masas m_1 y m_2 . El valor de $\bar{\mu}_c$ está comprendido entre el más pequeño y el más grande de los valores μ_{c1} y μ_{c2} . La masa reducida, (r4), es menor que cualquiera de m_1 y m_2 .

Compare (r1) con la fórmula (14a)-p26.

Análisis de la solución.

Las hipótesis son:

$$(r6) \quad T > 0$$

(la cuerda se mantiene tensa)

$$(r7) \quad \text{El sistema está acelerado hacia abajo.}$$

La condición (r6) se traduce, por (r2) y (r5), en

$$(r8) \quad \mu_{c1} > \mu_{c2}$$

La condición (r7) se traduce, por (r1), en

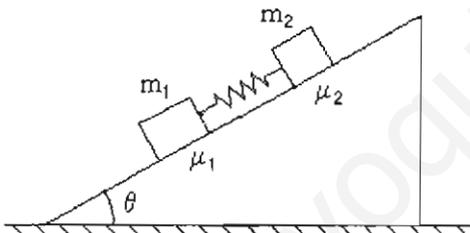
$$(r9) \quad \bar{\mu}_c < \tan \theta$$

Observación. Un valor negativo de la tensión T , aunque absurdo en el sistema considerado, de todas maneras posee una interpretación útil. Si en lugar de la cuerda los bloques estuvieran unidos por una varilla rígida, la tensión T podría ser negativa, en cuyo caso sería una compresión. La condición (r8) ya no sería necesaria, quedando solamente la (r9).

Ejercicio 11. El sistema de la figura está acelerado. Determinar si el resorte está en tensión o en compresión, usando los datos siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 \text{ kg}, & m_2 &= 8 \text{ kg} \\ \mu_{2c} &= 0.5, & \mu_{1c} &= 0.2 \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

Calcular la aceleración del sistema y la fuerza del resorte.



Resp. 2.22 m/s^2 , 7.83 N (Compresión)

Ejemplo 12. Se aplica una fuerza F a la cuña de masa $M = 20 \text{ kg}$. Sobre la cuña se halla un bloque de masa $m = 5 \text{ kg}$, y existe fricción bloque-cuña de coeficiente estático $\mu = 0.25$. La superficie horizontal es lisa. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener F para que el bloque no resbale hacia arriba?

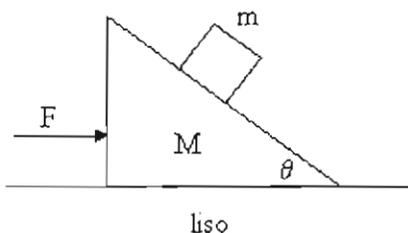


Fig. 12a

Hipótesis. Supondremos que el bloque está a punto de resbalar hacia arriba, lo cual corresponde al valor máximo de F .

Si el bloque m no resbala o está a punto de resbalar hacia arriba de la cuña, podemos tratar cuña y bloque como un sólo cuerpo de masa " $M + m$ ". La aceleración del conjunto sería entonces

$$(r1) \quad a = \frac{F}{M+m}$$

Pasemos a calcular esta aceleración.

Diagrama de cuerpo libre.

Estudie la Fig. E12b. Note que la aceleración del conjunto es horizontal hacia la derecha.

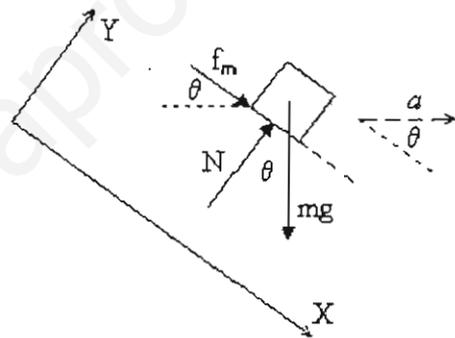


Fig. E12b

Las ecuaciones de movimiento son:

$$(r2) \quad f_m \cos \theta + mg \sin \theta = m a \cos \theta$$

$$(r3) \quad N - mg \cos \theta = m a \sin \theta$$

Además tenemos la condición de movimiento inminente:

$$(r4) \quad f_m = \mu N$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones hallamos

$$(r5) \quad a = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \cdot g$$

$$(r6) \quad N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

La fuerza que pide el problema es $F = (M + m) a$.

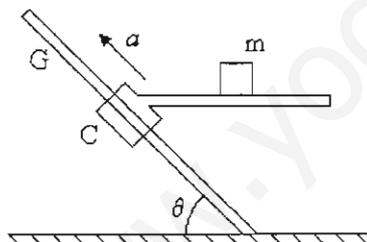
(r7) $f_m = \mu N$

Análisis de la solución.

Tanto la aceleración como la fuerza normal son funciones crecientes de θ : a mayor ángulo mayor debe ser la aceleración (y la fuerza F) para lograr que el bloque empiece a moverse hacia arriba. Mayor es entonces la fuerza normal y consiguientemente la fricción máxima.

Como debe ser $a > 0$ se sigue de (r5) que $\tan \theta < 1/\mu$ ó $\theta < \arctan(1/\mu)$. Por ejemplo, si $\mu = 0.4$, θ debe ser menor que 68.2° . Cuando θ crece digamos desde el valor de 30° y se acerca a 68.2° , tanto la aceleración como la fuerza normal tienden a infinito. Es decir, si $\theta > 68.2^\circ$ no es posible lograr que el bloque esté en movimiento inminente hacia arriba, no importa qué tan grande fuerza F se aplique (la fricción máxima crece con F a un ritmo tal que no es posible vencerla).

Ejercicio 12. En la figura, el collarín C se mueve a lo largo de la guía reeta inclinada G, con aceleración constante "a" dirigida como se muestra. Existe fricción de coeficiente μ entre el bloque de masa m y su apoyo horizontal, soldado al collarín. ¿Qué valor máximo puede tener la aceleración sin que el bloque se deslice? Tome el Eje X en la misma dirección que "a".



Interprete la solución.

Resp.

$$a = \frac{\mu g}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

7.10. ¿Hay deslizamiento o no?

En problemas donde puede existir o no deslizamiento de una partícula sobre otra, sin que se sepa a priori cuál de ambas condiciones ocurre, aplicamos el siguiente método:

- Resolvemos el problema bajo la hipótesis de que no hay deslizamiento.

En especial, calculamos la fuerza de fricción "f" entre ambas partículas. Recordemos que si no existe deslizamiento de un cuerpo sobre otro no podemos aplicar la fórmula $f = \mu N$ al contacto entre ambos cuerpos.

- Comparamos la fuerza de fricción que calculamos en el paso anterior, "f", con la máxima posible, " $f_m = \mu N$ ".

Si $f \leq f_m$ entonces no hay deslizamiento y el problema está resuelto. Si $f > f_m$ entonces se viola la hipótesis de no deslizamiento y la solución obtenida no es válida. En este caso hay que resolver de nuevo el problema desde el principio, ahora con el dato de que hay deslizamiento, por lo que es aplicable la relación " $f_c = \mu_c N$ ". La fricción tendrá la misma dirección que se calculó bajo la hipótesis de no-deslizamiento.

Ilustraremos el método en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Con respecto al sistema de dos bloques de la Fig. E13a, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar la fuerza F sin que se produzca deslizamiento del bloque superior? Si la fuerza rebasa dicho valor máximo, ¿cuál es la aceleración del bloque superior relativa al inferior?

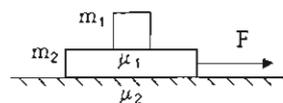


Fig. E13a

Hagamos los DCL's (Fig. E13b).

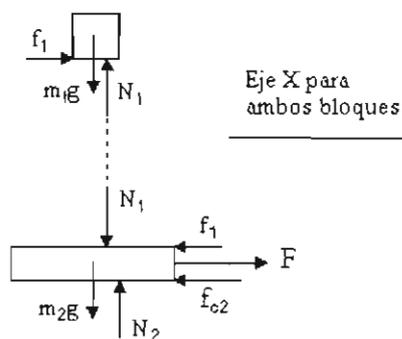


Fig. E13b

Notemos que la fuerza que mueve al bloque m_1 es la fricción debida al bloque m_2 . Por otra parte, el

bloque m_2 se desliza sobre la superficie, de modo que la fricción debida a ésta, denotada por " f_{c2} ", es la fricción cinética ($\mu_{c2}N_2$). En cuanto al bloque m_1 , la fricción estática f_1 *no es la máxima* (μ_1N_1) porque este bloque no se desliza sobre el bloque inferior, por hipótesis.

Como ambos bloques se mueven hacia la derecha, escogemos el Eje X como se ve en la figura.

Las ecuaciones de movimiento son, tomando en cuenta que se mueven juntos con aceleración " a ":

Bloque 1:

$$f_1 = m_1 a \quad N_1 - m_1 g = 0$$

Bloque 2:

$$F - f_1 - f_{c2} = m_2 a \quad N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

Tenemos en ellas 5 incógnitas (f_1 , a , N_1 , f_{c2} , N_2). Falta una ecuación, que es la condición dinámica

$$f_{c2} = \mu_{c2} N_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se halla:

$$(r1) \quad a = \frac{F - \mu_{c2}(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}$$

$$(r2) \quad f_1 = m_1 a = m_1 \left[\frac{F - \mu_{c2}(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} \right]$$

Para que m_1 no se deslice debe cumplirse que

$$f_1 \leq \mu_1 N_1 \quad \text{o sea} \quad f_1 \leq \mu_1 m_1 g$$

que se transforma, usando (r2), en

$$(r3) \quad F \leq (\mu_1 + \mu_{c2})(m_1 + m_2)g$$

Veamos un ejemplo numérico antes de continuar. Pongamos

$$F = 70 \text{ N}, m_1 = 3 \text{ kg}, m_2 = 7 \text{ kg}$$

$$\mu_1 = 0.2, \mu_{c1} = 0.15, \mu_{c2} = 0.3$$

Entonces la condición (r3) no se cumple, pues $F = 70$ y

$$(\mu_1 + \mu_{c2})(m_1 + m_2)g = 0.5 (10) (9.8) = 49$$

En este caso *no son válidas* las soluciones (r1) y (r2), y el problema *debe resolverse de nuevo*, suponiendo ahora que existe deslizamiento *arriba y abajo*. Las ecuaciones aplicables a este nuevo caso son

Bloque 1:

$$f_{c1} = m_1 a_1 \quad N_1 - m_1 g = 0$$

Bloque 2:

$$F - f_{c1} - f_{c2} = m_2 a_2 \quad N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

junto con las condiciones

$$f_{c1} = \mu_{c1} N_1 \quad f_{c2} = \mu_{c2} N_2$$

Note los siguientes cambios en relación con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

- La fricción estática f_1 sobre el bloque superior se cambió por la fricción cinética f_{c1} .

- Los bloques tienen ahora distintas aceleraciones, que se denotaron con a_1 y a_2 .

- Se anexó la relación $f_{c1} = \mu_{c1} N_1$.

Note también que la fricción sobre m_1 sigue actuando hacia la derecha.

Ahora las incógnitas son 6, pero se adicionó una ecuación. La solución (parcial) del sistema es

$$a_1 = \mu_{c1} g \quad f_{c1} = \mu_{c1} m_1 g$$

$$a_2 = \frac{F - (\mu_{c2} + \mu_{c1})m_1 g - \mu_{c2}m_2 g}{m_2}$$

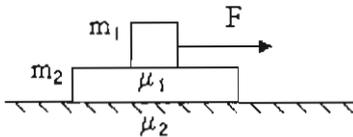
Sustituyendo los datos dados arriba encontramos

$$a_1 = 1.47 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = 5.17 \text{ m/s}^2$$

El bloque de arriba se va rezagando con respecto al de abajo.

Ejercicio 13a. Analice el movimiento del sistema mostrado en la figura. Suponga coeficientes de fricción estática y cinética μ_1 , μ_{c1} , μ_2 y μ_{c2} .



Sugerencias:

Resuelva bajo las siguientes hipótesis:

(A) m_1 se mueve pero m_2 queda en reposo.

$$a_1 \neq 0, a_2 = 0, \text{ símbolos: } f_{c1}, f_2$$

(B) m_1 y m_2 se mueven con la misma aceleración.

$$a_1 = a_2, \text{ símbolos: } f_1, f_{c2}$$

(C) m_1 y m_2 se mueven con distintas aceleraciones.

$$a_1 \neq a_2, \text{ símbolos: } f_{c1}, f_{c2}$$

Haga los DCL's correspondientes a cada una de las situaciones anteriores. Cuando haya deslizamiento denote la fricción respectiva con " f_{c1} " o " f_{c2} ", según el bloque; en caso negativo denótela por " f_1 " o " f_2 ".

Resp.

$$(A) \quad a_1 = \frac{F - \mu_{c1} m_1 g}{m_1}$$

$$F > \mu_{c1} m_1 g$$

$$(\mu_{c1} - \mu_2) m_1 < \mu_2 m_2$$

$$(B) \quad a = \frac{F - \mu_2 (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2}$$

$$F > \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 (m_1 + m_2)}{m_2} g$$

$$\mu_2 (m_1 + m_2) g < F < \frac{(\mu_{c1} - \mu_2) m_1 (m_1 + m_2) g}{m_2}$$

$$(\mu_{c1} > \mu_2 > 0)$$

$$(C) \quad a_1 = \frac{F - \mu_{c1} m_1 g}{m_1}$$

$$a_2 = \frac{(\mu_{c1} - \mu_{c2}) m_1 g - \mu_{c2} m_2 g}{m_2}$$

Esta condición es $a_1 > a_2$:

$$F > \frac{(\mu_{c1} - \mu_2) m_1 (m_1 + m_2) g}{m_2}$$

$$(\mu_{c1} - \mu_{c2}) m_1 > \mu_{c2} m_2$$

Ejercicio 13b. Resuelva el sistema del Ejemplo 13 en la página 31, con los siguientes parámetros:

$$m_1 = 4 \text{ kg} \quad m_2 = 10 \text{ kg}$$

$$\mu_1 = 0.5 \quad \mu_2 = 0.4$$

$$\mu_{c1} = 0.4 \quad \mu_{c2} = 0.3$$

$$F = 12 \text{ N}$$

7.11. Otros ejemplos.

Ejemplo 14. Un bloque tiene soldado un disco ranurado que sobresale de su cara frontal, como se ve en la figura. Se aplica una fuerza constante F en el extremo de una cuerda que pasa por la ranura del disco. La fuerza se mantiene siempre vertical. La masa del bloque junto con el disco es M . Calcular la fuerza F necesaria para producir una aceleración a hacia arriba. Suponer que no hay fricción en ninguna parte.

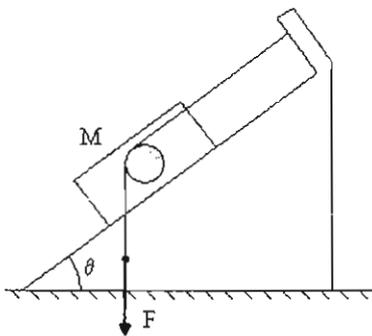


Fig. E14a

El DCL del bloque es la Fig. E14b. Note en especial cómo actúa la cuerda sobre el disco.

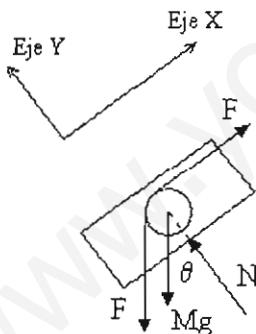


Fig. E14b

Supondremos que el bloque está acelerado hacia arriba, por lo que dirigimos el Eje X hacia arriba.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$F - F \sin \theta - Mg \sin \theta = M a$$

$$N - F \cos \theta - Mg \cos \theta = 0$$

La solución es

$$(r1) \quad F = \frac{Ma + Mg \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$(r2) \quad N = \frac{M(a + g) \cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

(Nota. En función de la fuerza F la aceleración y la normal son:

$$(r3) \quad a = \frac{F(1 - \sin \theta) - Mg \sin \theta}{M}$$

$$(r4) \quad N = (F + Mg) \cos \theta$$

Análisis de la solución.

Cuando $\theta \rightarrow 90^\circ$ la fuerza F tiende a infinito, lo mismo que la fuerza normal N , ya que

$$\lim_{\theta \rightarrow 90^\circ} \left(\frac{-\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 90^\circ} \left(\frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \right) = \infty$$

(Se derivó con respecto a θ el numerador y el denominador.) Se requiere cada vez mayor fuerza para acelerar al conjunto conforme el ángulo del plano es cada vez más grande.

Cuando $\theta \rightarrow 0^\circ$ tenemos que

$$F \rightarrow Ma$$

$$N \rightarrow F + Mg$$

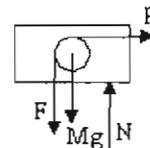


Fig. E14c

como era de esperarse (Vea la Fig. E14c).

De (r3) vemos que la fuerza tiene que cumplir la condición

$$F > \frac{Mg \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

para que el bloque esté acelerado hacia arriba ($a > 0$). Si esta condición no se cumple, el bloque está acelerado hacia abajo ($a < 0$).

Ejemplo 15. Un bloque de masa m se desliza sobre una cuña de masa M . La cuña no está fija al piso; calcular su aceleración suponiendo superficies lisas.

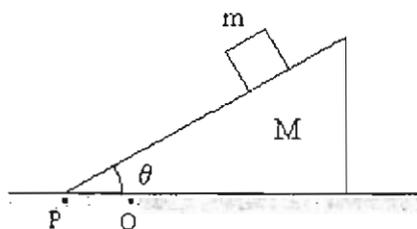


Fig. E15a

Diagramas de cuerpo libre.

Observe la Fig. E15b. En el DCL de la cuña no conocemos el punto de aplicación de la normal debida al piso, N' , pero esto no se requerirá en el cálculo.

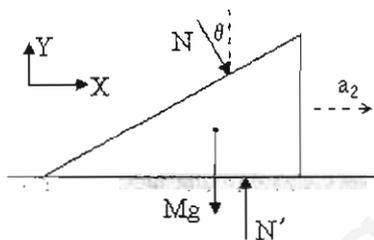


Fig. E15a. DCL de la cuña.

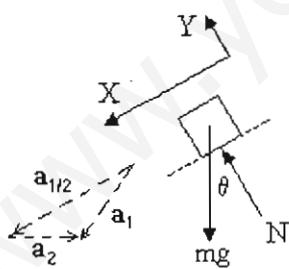


Fig. E15c. DCL del bloque.

Ejes de referencia.

Se muestran junto a los DCL's del bloque y de la cuña. Ambos sistemas de ejes están fijos a Tierra.

Leyes de movimiento.

En la Fig. E15a, P es el punto (de la superficie horizontal fija) al que arribaría el bloque si la cuña estuviese fija. Como la cuña se mueve aceleradamente

hacia la derecha, el bloque arribará a otro punto, Q, situado a la derecha de P. El desplazamiento del bloque es un vector hacia dicho punto Q, lo mismo que su aceleración. En la Fig. E15c hemos agregado todos los vectores aceleración con flechas punteadas: a_1 y a_2 son las aceleraciones del bloque y la cuña, respectivamente, con respecto a Tierra, y $a_{1/2}$ es la aceleración del bloque con respecto a la cuña.

Las ecuaciones del movimiento se plantean en el marco de referencia inercial "Tierra". Son éstas:

Bloque:

$$mg \sin \theta = m a_{1x}$$

$$N - mg \cos \theta = m a_{1y}$$

Cuña:

$$N \sin \theta = M a_2$$

$$-N \cos \theta - Mg + N' = 0$$

Incógnitas y datos.

5 incógnitas (a_{1x} , a_{1y} , N , N' , a_2), 4 ecuaciones.

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

La condición cinemática del problema es ésta:

"La aceleración $a_{1/2}$ está dirigida a lo largo de la cuña".

Expresémosla matemáticamente, usando los ejes X y Y definidos para el bloque (Fig. E15d).

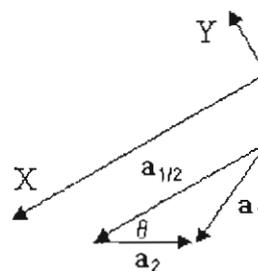


Fig. E15d

De la relación

$$a_{1/2} = a_1 - a_2$$

tenemos, tomando componentes Y,

$$0 = a_{1y} - a_{2y} = a_{1y} - (-a_2 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow a_{1y} = -a_2 \sin \theta$$

Operaciones matemáticas.

Con esta última relación ya podemos resolver el sistema de ecuaciones para la incógnita a_2 . Resulta

$$a_2 = \frac{mg \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{M + m \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Análisis de la solución.

Cuando $M \rightarrow \infty$ tenemos que $a_2 \rightarrow 0$, como debe ser.

Para $\theta = 0$ y $\theta = 90^\circ$ tenemos que $a_2 = 0$. La función tiene un máximo entre estos valores de θ . Lo entendemos como sigue:

La fuerza que acelera horizontalmente a la cuña es $N \operatorname{sen} \theta$. Para que a_2 sea grande conviene que N sea grande, lo cual viene favorecido por ángulos pequeños. Pero al disminuir el ángulo disminuye el factor $\operatorname{sen} \theta$. Existe pues un compromiso.

Como ejercicio, ponga $m = M$ y encuentre el máximo de a_2 al variar θ . Ocurre para (Fig. E15b):

$$\theta_m = \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 35.26^\circ$$

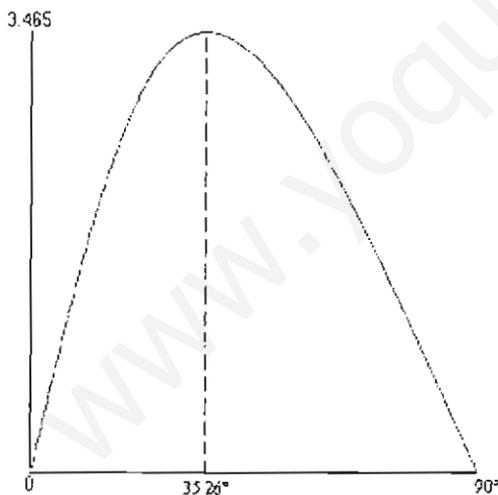


Fig. E15e

Ejemplo 16. Un collarín de 2 kg insertado en una guía vertical lisa es jalado hacia arriba por medio de una cuerda a la que se aplica una fuerza constante de 200 N, como se muestra en la figura. Calcular la aceleración del collarín y la fuerza normal de la guía sobre él cuando la cuerda forma un ángulo de 30° .

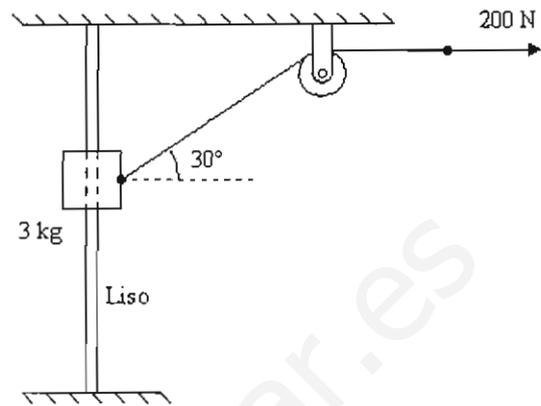


Fig. E16a

La Fig. E16b es el DCL del collarín.

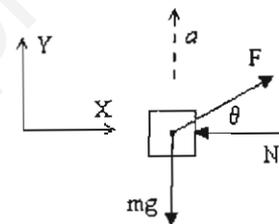


Fig. E16b

Plantearemos las ecuaciones de movimiento para el instante mostrado en esta figura:

$$\text{En X:} \quad F \cos \theta - N = 0$$

$$\text{En Y:} \quad F \operatorname{sen} \theta - mg = m a$$

La solución es

$$N = F \cos \theta = 200 \cos 30^\circ = 173 \text{ (N)}$$

$$a = \frac{F}{m} \operatorname{sen} \theta - g = (200/10) \operatorname{sen} 30^\circ - 9.8$$

$$= 0.2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

*7.12. Relaciones cinemáticas en general

Veremos ahora sistemas de cuerpos interconectados con cuerdas, que dan lugar a unas relaciones cinemáticas no tan simples que las tratadas hasta ahora. En esta sección reuniremos unas reglas para encontrar las relaciones entre las aceleraciones de los diversos cuerpos.

En la Fig. 17, parte izquierda, se muestra una polea en movimiento vertical acelerado. La aceleración de la polea es $a_p = 4$, relativa a un marco de referencia fijo (digamos Tierra) donde se ha fijado un eje vertical X. La polea impulsa dos bloques a través de una cuerda; se muestran también las aceleraciones de estos bloques *relativas a Tierra*, cuyos valores son digamos $a_1 = 6$ y $a_2 = 2$.

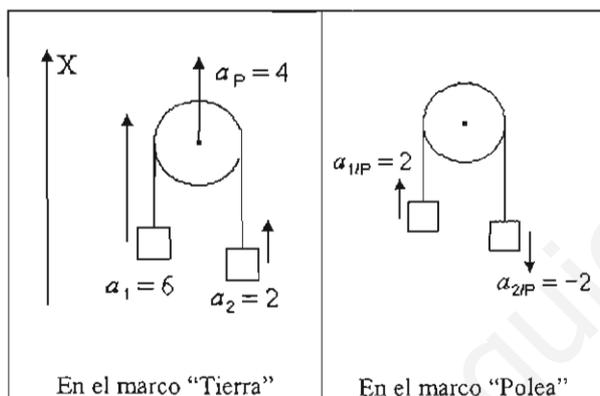


Fig. 17

¿Le parecen extraños los valores de a_1 y a_2 ? No lo son si calcula las aceleraciones de los bloques con respecto a la polea según las fórmulas de aceleración relativa:

$$(15a) \quad a_{1/P} = a_1 - a_p$$

$$(15b) \quad a_{2/P} = a_2 - a_p$$

Obtiene $a_{1/P} = 6 - 4 = 2$ y $a_{2/P} = 2 - 4 = -2$, como se muestra en la Fig. 17, parte derecha. Claramente se cumple la relación

$$(16) \quad a_{1/P} = -a_{2/P}$$

porque la cuerda es inextensible (por hipótesis).

Poniendo (15a,b) en (16) tenemos

$$a_1 - a_p = -(a_2 - a_p)$$

o bien

La aceleración de la polea es el promedio de las aceleraciones de los bloques.

$$(17) \quad a_p = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

Para evitar errores de signo al aplicar la relación cinemática (17), tenga presente que presupone *un mismo eje X* para los tres cuerpos (polea, bloque 1 y bloque 2).

Veremos a continuación cómo deducir relaciones cinemáticas en sistemas de cuerpos interconectados por cables. En el siguiente ejemplo exponemos un método.

Ejemplo 17. Deducir las relaciones entre las aceleraciones de los bloques B1 y B2 mostrados en la Fig. E17a.

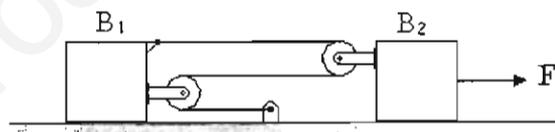


Fig. E17a

Tomemos un eje X fijo a Tierra y denotemos las posiciones de los bloques con x_1 y x_2 , como se muestra en la Fig. E17b. Si se da al bloque 2 un desplazamiento digamos hacia la derecha, entonces el desplazamiento del bloque 1 ya no se puede especificar arbitrariamente. En vista de que sólo uno de los desplazamientos (o velocidades, o aceleraciones) es independiente, decimos que el sistema tiene un *grado de libertad*.

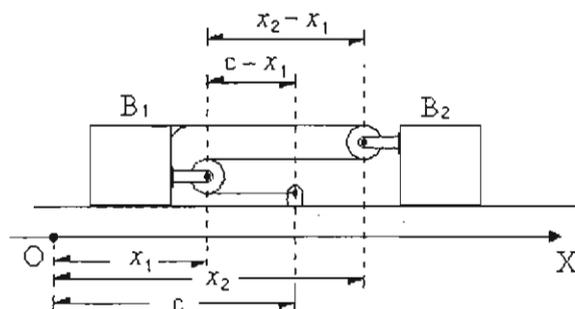


Fig. E17b

Para el sistema considerado la condición de que la longitud de la cuerda sea constante es

$$2(x_2 - x_1) + (c - x_1) = \text{constante}$$

donde c , la coordenada de la bisagra fija, es también constante. Es decir,

$$2x_2 - 3x_1 = \text{otra constante}$$

Como esta relación se cumple para todo tiempo, podemos derivarla con respecto al tiempo:

$$2v_2 - 3v_1 = 0$$

o sea

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1$$

Volviendo a derivar se tiene para las aceleraciones

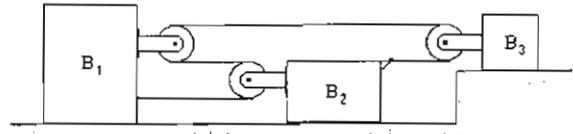
$$a_2 = \frac{3}{2}a_1$$

Dado un sistema, el número de grados de libertad se encuentra como sigue: como por hipótesis las cuerdas son inextensibles, sus longitudes permanecen constantes. Estas longitudes se pueden expresar en términos de las coordenadas x 's de los bloques, lo que lleva a una ligazón entre dichas coordenadas. Esta relación se deriva con respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades, la cual se puede usar para expresar alguna de ellas en términos de las demás, es decir, cada relación disminuye en uno el número de grados de libertad.

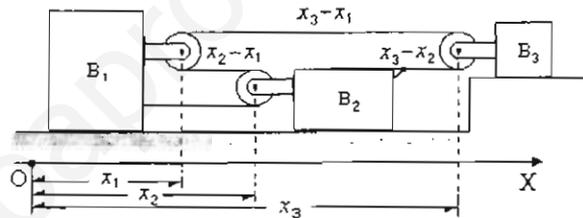
Ahora bien, el número de condiciones del tipo "Longitud = Constante" es igual al número de cuerdas, por lo que el número de grados de libertad será igual al número de bloques presentes menos el número de cuerdas que los enlazan.

En el ejemplo anterior tenemos 2 bloques y una cuerda, de modo que hay $2 - 1 = 1$ grado de libertad.

Ejercicio 17. Obtener las relaciones cinemáticas del sistema mostrado en la figura. Suponer que el bloque B3 está acelerado hacia la derecha.



Sugerencias. Hay tres bloques y una cuerda, de tal modo que los grados de libertad son $3 - 1 = 2$. Es decir, se pueden asignar posiciones arbitrarias a dos de los bloques, y la posición del tercero quedará ya determinada. Finque un eje X en Tierra y denote las coordenadas de los bloques digamos como en la siguiente figura:



Resp. Dos aceleraciones arbitrarias, y la otra dada por la relación $a_2 - 3a_1 + 2a_3 = 0$.

*7.13. Método turbo para obtener relaciones cinemáticas

El método turbo se basa en las siguientes reglas:

- (i) Todos los puntos de un tramo recto de cuerda que se mueva en la dirección determinada por el tramo mismo (o sea en su propia línea), poseen la misma velocidad. (Esto porque la cuerda se supone inextensible).
- (ii) La velocidad del centro de una polea es el promedio de las velocidades (paralelas por hipótesis) de los puntos de cuerda diametralmente opuestos donde la cuerda entra y sale de la polea (Ecuación (17)).
- (iii) La velocidad de los puntos de una cuerda no se altera (en magnitud) al bordear la cuerda una polea *fija*, perno *fijo* o superficie *fija*.

Aplicaremos este método en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18. Hallar las condiciones cinemáticas del sistema de bloques y poleas mostrado en la Fig. E18a.

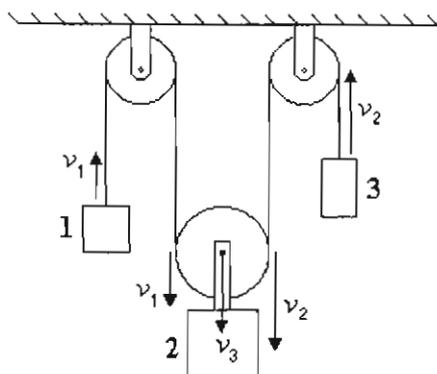


Fig. E18a

Son tres partículas y una cuerda, por lo que el sistema tiene 2 grados de libertad. Esto lo puede ver también así: fije el bloque 1 en alguna posición. Manteniéndolo fijo, puede bajar el conjunto central 2 hasta otra posición arbitraria. O sea que las posiciones de los bloques 1 y 2 son independientes, no así la posición del bloque 3.

Existe por lo tanto una relación entre las aceleraciones a_1 , a_2 y a_3 .

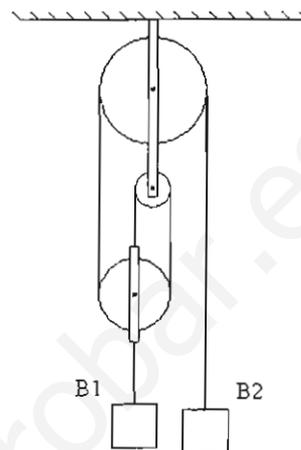
Por las reglas (i) y (iii), la velocidad del bloque izquierdo, v_1 , la tienen todos los puntos de la cuerda desde ese bloque hasta que entra en la polea móvil (esto se debe a que la polea fija superior izquierda simplemente redirige la velocidad v_1 , sin alterar su magnitud). Lo mismo podemos decir de la velocidad v_2 , que se puede "transportar" hasta la orilla derecha de la polea móvil. Ahora bien, por la regla (ii), la velocidad del centro de la polea móvil, que coincide con la del bloque 3, es el promedio de las velocidades v_1 y v_2 , o sea

$$v_2 = \frac{1}{2} (v_1 + v_3)$$

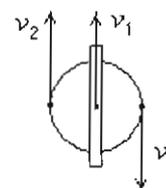
Derivando esta relación con respecto al tiempo obtenemos la relación buscada:

$$a_2 = \frac{1}{2} (a_1 + a_3)$$

Ejercicio 18. Encuentre la relación entre las aceleraciones de los bloques B1 y B2 mostrados en la figura.



Sugerencia. Suponga que B2 baja y denote las velocidades de B1 y B2 con v_1 y v_2 , respectivamente. Encuentre las velocidades de los puntos de la polea móvil dadas en la figura a la derecha. Aplique luego la regla (ii). Resp. $3a_1 = a_2$.



Ejemplo 19. En el sistema de la Fig. E19, supongamos conocidas las velocidades

$$v_2 = -4, \quad v_3 = 5$$

La siguiente figura muestra las velocidades de varios otros puntos del sistema.

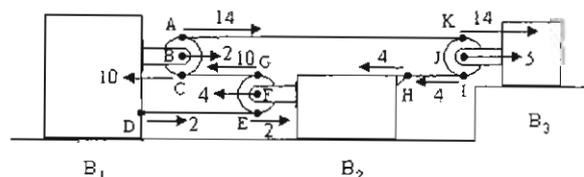


Fig. E19

Hemos hecho la asignación de velocidades tomando en cuenta las reglas (i), (ii) y (iii):

- Como B y D son puntos fijos del bloque 1 tenemos $v_B = v_D = v_1 = 2$.
- Como F y H son puntos fijos del bloque 2 tenemos $v_F = v_H = v_2 = -4$.
- El punto J es un punto fijo del bloque 3 por lo que $v_J = v_3 = 5$.
- En el sistema de la Fig. E19 identifiquemos 4 tramos de cuerda: AK, CG, HI y DE. Por la regla (i) tendremos $v_A = v_K$, $v_C = v_G$, $v_H = v_I$ y $v_D = v_E$.
- Por la regla (ii) tenemos

$$v_B = \frac{1}{2} (v_A + v_C)$$

$$v_F = \frac{1}{2} (v_G + v_E)$$

$$v_J = \frac{1}{2} (v_K + v_I)$$

de donde

$$v_K = 2v_J - v_I = 2(5) - (-4) = 14$$

$$\Rightarrow v_A = 14$$

$$v_G = 2v_F - v_E = 2(-4) - 2 = -10$$

$$\Rightarrow v_C = -10$$

$$v_B = 2v_D - v_C = 2(2) - (-10) = 14$$

Ejemplo 20. Consideremos el sistema de una polea fija y una móvil P, ilustrado en la Fig. E20a. Supondremos que las poleas son lisas y de masa despreciable. Deseamos obtener las aceleraciones de los 3 bloques, así como las tensiones en las cuerdas (serán 2 tensiones T_1 , T_2 , en vista de que existen dos cuerdas).

En la Fig. E20b están los DCL's. Hemos supuesto que la polea P *sube*, por lo que hemos escogido el eje X hacia arriba para la polea P y los bloques 1 y 2, y hacia abajo para el bloque 3. (Recuerde que conviene tomar un eje X común para los bloques m_1 , m_2 y la polea móvil).

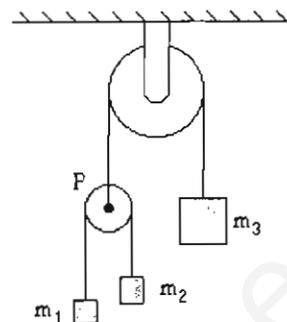


Fig. E20a

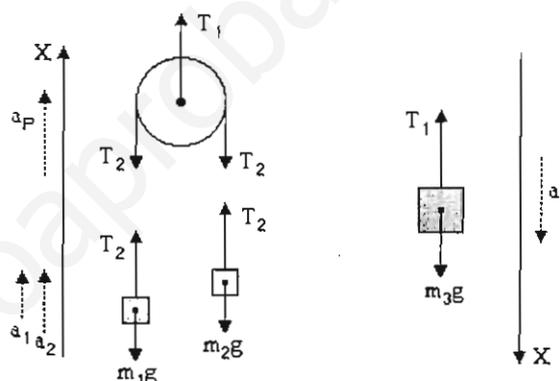


Fig. E20b

En cuanto a los bloques, no sabemos a priori hacia dónde estarán dirigidos sus vectores aceleración. La solución del problema lo dirá. Sin embargo, para aplicar la ecuación (17)-p37 tal como está, supondremos que a_1 y a_2 están en la misma dirección que a_P , como se muestra en la Fig. E20b.

He aquí las ecuaciones de movimiento:

Polea P:	Bloque 1:
(r1) $T_1 - 2 T_2 = 0$	(r3) $T_2 - m_1 g = m_1 a_1$
Bloque 2:	Bloque 3:
(r4) $T_2 - m_2 g = m_2 a_2$	(r5) $m_3 g - T_1 = m_3 a_3$

En las ecuaciones anteriores figuran 5 incógnitas: T_1 , T_2 , a_1 , a_2 , a_3 . Falta una ecuación.

Una de las relaciones cinemáticas de este problema es

$$a_3 = a_p$$

Pero debemos eliminar de aquí la aceleración a_p . Conocemos la relación entre la aceleración de la polea, a_p (igual a a_3) y las aceleraciones a_1 y a_2 de los bloques. Es la ecuación (17)-p37, que expresa en este caso que:

$$(r6) \quad a_3 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones procederemos así:

Restemos miembro a miembro las ecuaciones (r3) y (r4):

$$(r7) \quad -m_1 g + m_2 g = m_1 a_1 - m_2 a_2$$

Esta ecuación la juntamos con la ecuación (r6), escrita en la forma

$$(r6') \quad 2a_3 = a_1 + a_2$$

Resolvamos ahora (r7) y (r6') como un sistema de ecuaciones simultáneas para a_1 y a_2 en términos de a_3 :

$$(r8a) \quad a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + 2m_2 a_3}{m_1 + m_2}$$

$$(r8b) \quad a_2 = \frac{-(m_2 - m_1)g + 2m_1 a_3}{m_1 + m_2}$$

Usando (r1), escribamos (r5) en la forma

$$(r9) \quad m_3 g - 2T_2 = m_3 a_3$$

Despejemos T_2 de (r3) y sustituyamos en (r9):

$$m_3 g - 2(m_1 g + m_1 a_1) = m_3 a_3$$

Pongamos aquí el valor de a_1 en términos de a_3 , dado por (r8a). Obtenemos una ecuación con la sola incógnita a_3 . Resolviendo,

$$a_3 = \frac{m_3 - 4m_r}{m_3 + 4m_r} \cdot g$$

con

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Para $m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}$ y $m_3 = 100 \text{ kg}$ obtendríamos $a_3 = 0$. En este caso el bloque de 100 kg está en reposo o se mueve con velocidad constante. ¿Qué pasa con los otros dos? (Fig. E20c.)

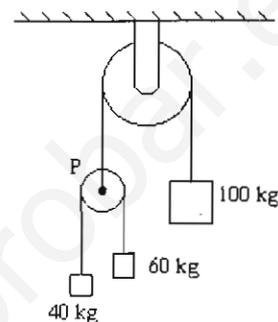
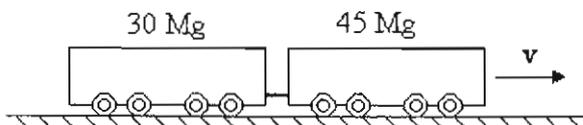


Fig. E20c

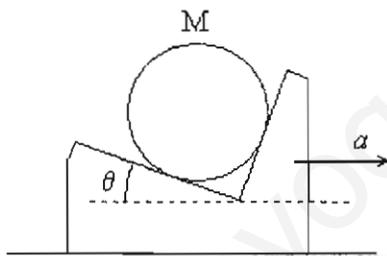
7.14. Problemas

1. Dos vagones con las masas indicadas se mueven hacia la derecha. Cada vagón tiene un sistema de frenos, los cuales se aplican simultáneamente, generándose una fuerza frenadora de 50 kN sobre cada vagón. ¿Cuánto vale la fuerza en el acoplamiento durante la desaceleración? ¿Es de tensión o de compresión? Repetir el problema intercambiando las masas de los vagones.



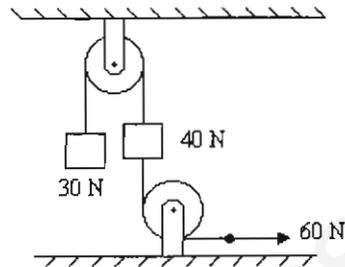
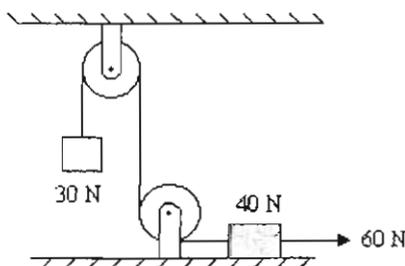
Resp. 10 kN (tensión). 10 kN (compresión).

2. Un cilindro de masa M descansa sobre dos superficies a ángulo recto como se muestra en la figura. No existe fricción en ninguna parte. ¿Para qué valor de la aceleración el cilindro está a punto de rodar hacia la izquierda?



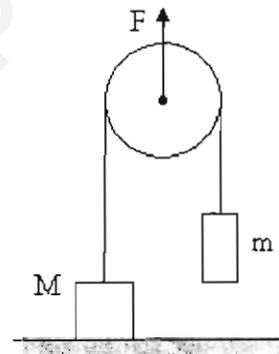
Resp. $g \tan \theta$.

3. Se aplica una fuerza constante F como se muestra en las figuras abajo. Las poleas son ideales y las superficies lisas. ¿Puede dar la aceleración del sistema en cada caso, sin necesidad de plantear las ecuaciones con detalle?



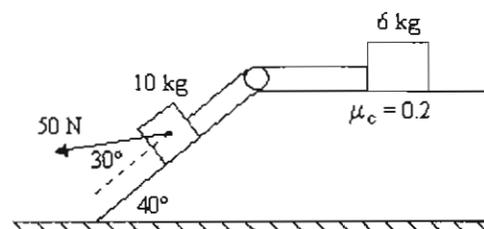
Resp. 4.2 m/s, 14 m/s.

4. Se aplica una fuerza F sobre una polea ligera y lisa, como se muestra en la figura. Calcular el valor máximo de F tal que el bloque M no se mueva, y la aceleración consiguiente del bloque m . Tomando F igual al doble de este valor máximo calcular las aceleraciones de los bloques.



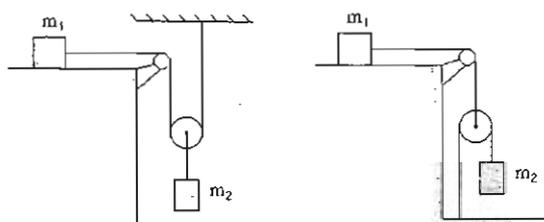
Resp. $F = 2Mg$, $a = \frac{(M - m)g}{m}$

5. Para el sistema mostrado en la figura, calcular las aceleraciones de los bloques y la tensión de la cuerda. No hay fricción para el bloque sobre el lado inclinado.



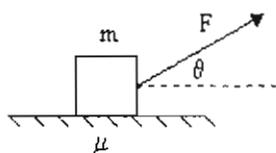
Resp. $a = 5.9 \text{ m/s}^2$.

6. Comparar las aceleraciones del bloque de masa m_1 en los dos casos mostrados.



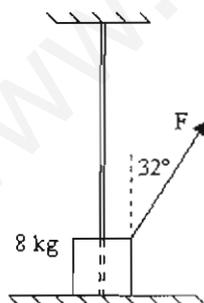
Resp. $a = \frac{2m_2g}{4m_1 + m_2}$, $a = \frac{2m_2g}{m_1 + 4m_2}$

7. Se quiere acelerar un bloque de masa m sobre una superficie horizontal relativa a la cual el coeficiente de fricción cinética es μ_c . ¿A qué ángulo θ debe aplicarse la fuerza para lograr la máxima aceleración?



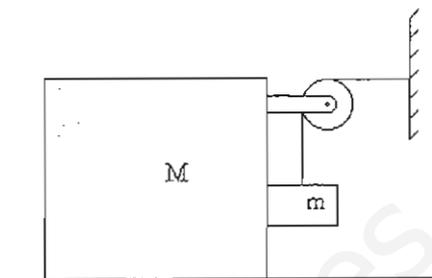
Resp. $\arctan(\mu_c)$.

8. Un bloque acanalado de masa 8 kg se mueve verticalmente en una guía lisa, mediante una fuerza constante F aplicada como se muestra. Calcular el valor de F que imprime una aceleración de 2 m/s^2 al bloque.



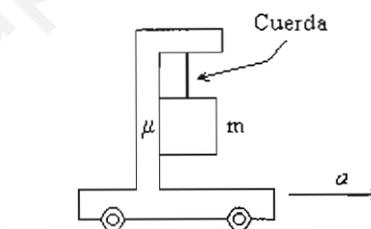
Resp. $F = 111.3 \text{ N}$.

9. Suponiendo que todas las superficies son lisas, que la cuerda es inextensible y que la polea es de masa insignificante, calcular la aceleración del bloque de masa M y la tensión de la cuerda.



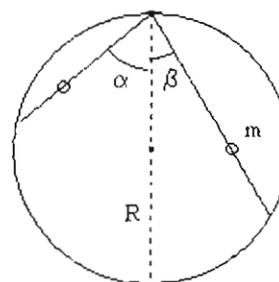
Resp. $a = \frac{mg}{M+2m}$

10. Sobre el carrito actúa una fuerza que le produce una aceleración " a ". En cierto momento se rompe la cuerda. Existe fricción entre el bloque de masa m y el carrito, de coeficiente estático μ . ¿Cuál es el mínimo valor de μ tal que el bloque no caiga?



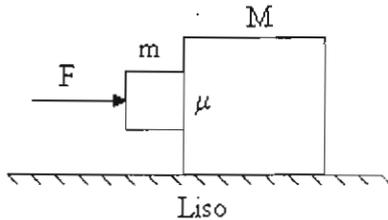
Resp. g/a .

11. Una chaquirita resbala sin fricción desde lo alto de un círculo cuyo plano es vertical, a lo largo de una cuerda que forma un ángulo α con la vertical. Calcular el tiempo necesario para que la chaquirita llegue al extremo inferior de la cuerda. Demostrar que el tiempo es el mismo para cualquier cuerda del círculo.



Resp. $t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$

12. Calcular el mínimo valor de la fuerza F tal que el bloque m no resbale hacia abajo. Calcular también la fuerza normal sobre el bloque M , debida al piso.

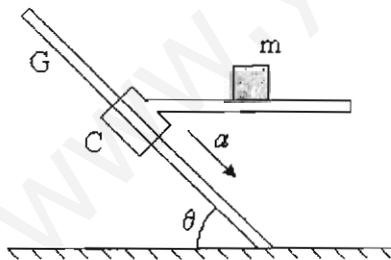


Resp. $F = \frac{m(m+M)g}{\mu M}$, $N = (m+M)g$

13. Resuelva el problema 12 con los bloques intercambiados (F aplicada sobre M , el bloque "m" haciendo contacto con la superficie derecha de M).

Resp. $F = \frac{(m+M)g}{\mu}$

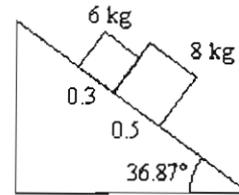
14. El collarín C se mueve a lo largo de la guía recta inclinada G , con aceleración constante " a " dirigida como se muestra. Existe fricción de coeficiente estático μ entre el bloque de masa m y su apoyo horizontal, soldado al collarín. ¿Qué valor máximo puede tener la aceleración sin que el bloque se deslice? Compare con el resultado obtenido en el Ejercicio 12 de la página 31. ¿Puede explicar físicamente la diferencia?



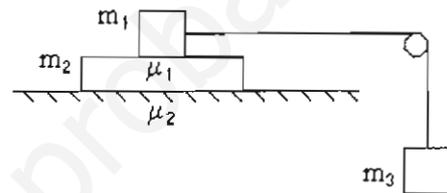
Resp. $a = \mu g / (\cos \theta + \mu \sin \theta)$

15. Dos bloques de masas 6 kg y 8 kg se ponen en contacto sobre un plano inclinado a 36.87° y se dejan ir. Existe fricción con el plano, de coeficiente 0.3 para el bloque de 6 kg y 0.5 para el de 8 kg . Calcular la aceleración de cada bloque y la fuerza de contacto entre ellos.

Resp. 2.63 m/s^2 ; 5.37 N .

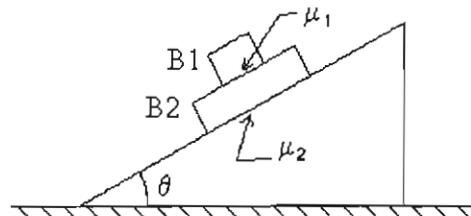


16. Analizar el movimiento del sistema mostrado en la figura. ¿Bajo qué condiciones se mueven juntos (como uno solo) los bloques m_1 y m_2 ?



Resp. $m_3 > \mu_1 m_1$
 $\mu_1 m_1 > \mu_2 (m_1 + m_2)$

17. Dos bloques $B1$ y $B2$ de la misma masa descansan sobre un plano inclinado fijo. Existe fricción entre el bloque $B1$ y el bloque $B2$, de coeficiente μ_1 , y entre el bloque $B2$ y el plano, de coeficiente μ_2 . Dejando el sistema en libertad, calcular las aceleraciones de los bloques.



¿Qué pasa si las superficies son lisas, o si $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 \neq 0$, o si $\mu_1 \neq 0$ y $\mu_2 = 0$?

¿Puede ser la aceleración del bloque superior mayor que la del inferior? ¿Menor?

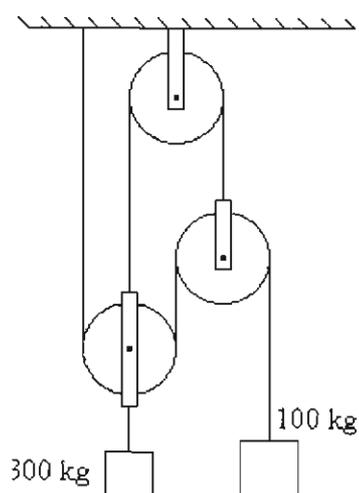
¿Puede el bloque superior estar acelerado y el inferior no?

¿Cuál es la solución para la aceleración cuando los dos bloques se mueven juntos?

¿Siempre se cumple que $f = \mu N$ para ambos bloques?

*18. Calcular la aceleración de cada bloque. Despreciar las masas de las poleas.

Sugerencia. Deduzca la condición $a_1 = (1/4) a_2$.



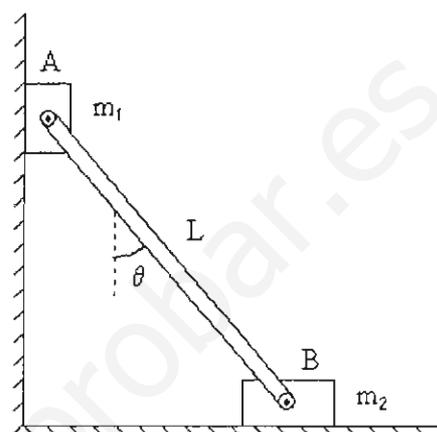
Resp. $a_1 = (4/19)g$

19. Una varilla de masa insignificante y longitud L porta en sus extremos sendos bloques A y B de masas m_1 y m_2 , respectivamente. La varilla descansa formando un ángulo θ con la vertical, con el bloque A contra un plano vertical liso y el bloque B contra un piso horizontal liso. El sistema se libera desde esta configuración. Calcular la aceleración del bloque A en este momento.

Datos: $m_1 = 75 \text{ kg}$, $m_2 = 50 \text{ kg}$, $L = 2 \text{ m}$, $\theta = 40^\circ$.

Sugerencia. Existe la siguiente relación cinemática en este problema:

“las aceleraciones a_1 y a_2 de los bloques A y B tienen en todo momento la misma componente a lo largo de la varilla”.



$$\text{Resp. } a_1 = \frac{m_1 g \tan \theta}{m_1 \tan \theta + m_2 \cot \theta} = 5.03 \text{ m/s}^2.$$

CAPÍTULO 8

LEYES DE NEWTON. MOVIMIENTO CIRCULAR

8.1. El problema general

Formulación del problema general que abordaremos en este capítulo:

Una partícula se halla sujeta a varias fuerzas, cuyo efecto conjunto es hacer que la partícula describa una trayectoria circular. Aplicar las leyes de Newton para deducir las propiedades del movimiento (Fig. 18).

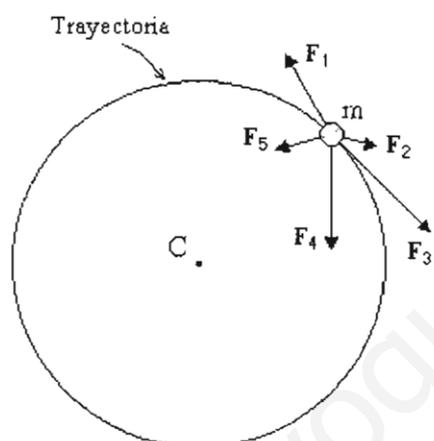


Fig. 18

8.2. Repaso de cinemática circular

Repasemos el aspecto cinemático. Para describir el movimiento circular se utiliza un sistema de coordenadas polares (r, θ) con base ortonormal $\{e_r, e_\theta\}$. Como la coordenada "r" es constante, basta con la función $\theta(t)$ para describir el movimiento. Los vectores de posición r , velocidad v , y aceleración a de la partícula toman esta forma general en la base polar:

$$(18) \quad r = r e_r$$

$$(19) \quad v = v e_\theta$$

$$(20) \quad a = -\frac{v^2}{r} e_r + \alpha e_\theta$$

Vea estos vectores en la Fig. 19.

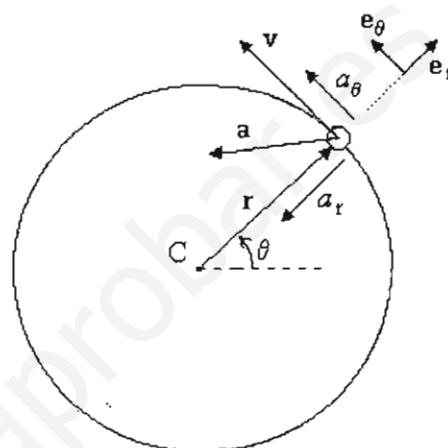


Fig. 19

El unitario e_r define la dirección *radial* en la localidad considerada, y e_θ define la dirección *tangencial*. El vector de posición de la partícula es puramente radial, el vector velocidad puramente tangencial. La aceleración tiene en general una componente radial a_r y una tangencial a_θ . La componente radial (llamada también *aceleración centrípeta*) siempre se dirige hacia el centro C de la trayectoria (por lo que siempre es negativa). La componente tangencial puede estar en la misma dirección o en dirección opuesta a la velocidad.

Denominaremos *plano de movimiento* al plano que contiene a la trayectoria circular.

Se denomina *fuerza centrípeta* al término $\sum F_r$, esto es, a la suma de las componentes radiales de *todas* las fuerzas existentes sobre la partícula. Es sólo un nombre. No es una fuerza debida a ningún cuerpo en especial, sino que todos los cuerpos activos presentes contribuyen a ella, cada cual a través de su componente radial.

Nota. Evite el error común de llamarle "fuerza centrípeta" al término

$$\frac{mv^2}{r}$$

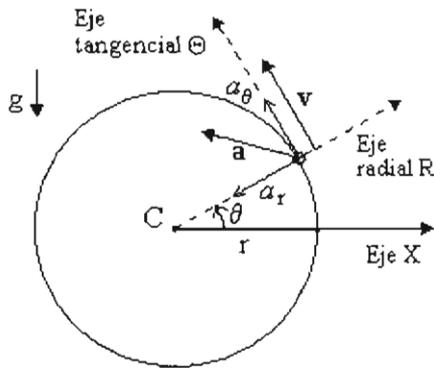


Fig. 23

- El *eje radial* R lo trazamos desde el centro C de la circunferencia, pasándolo por la posición actual de la partícula y prolongándolo "hacia fuera", esto es, en dirección *centrífuga*.
- El *eje tangencial* Θ es perpendicular al eje radial R. Este eje Θ se sitúa en el plano de la circunferencia, y su dirección es *hacia donde crece* la posición angular θ de la partícula.
- El *eje vertical* Z es perpendicular al plano de los ejes R y Θ. Al girar el eje R hacia el eje Θ se obtiene la dirección del eje Z por la regla del tirabuzón (La terna {RΘZ} es *derecha*).

La posición angular θ de la partícula se mide desde alguna dirección fija en el plano de movimiento. Tal dirección la tomaremos como la del eje X de un sistema cartesiano auxiliar, como vemos en las figuras anteriores.

Ahora bien, en el movimiento en un plano horizontal supondremos que la velocidad v (y con ello la velocidad angular ω) es constante. Es decir, no existirán fuerzas a lo largo de la dirección tangencial Θ, de tal modo que trabajaremos solamente con los ejes R y Z.

Por otra parte, en el movimiento en un plano vertical trabajaremos con los ejes R y Θ, como en la Fig. 23. Si tales ejes están en el plano del papel, cosa que supondremos en lo sucesivo, el eje Z apunta hacia (o contra) el lector. No existirán fuerzas a lo largo del eje Z.

En el movimiento en un plano horizontal son válidas las relaciones

$$(26a) \quad \sum F_{\Theta} = 0$$

$$(26b) \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

$$(26c) \quad v = \text{constante} = \omega r$$

$$(26d) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$

$$(26d) \quad a_{\Theta} = \alpha r = \frac{d\omega}{dt} r = 0$$

Esta clase de movimiento obedece las ecuaciones

Ecuaciones del movimiento en un plano horizontal

$$(27a) \quad \sum F_r = m \left(-\frac{v^2}{r} \right) = m(-\omega^2 r)$$

$$(27b) \quad \sum F_z = 0$$

En cuanto al movimiento en un plano vertical tendremos en general que la posición angular θ no variará linealmente con el tiempo t , como en (26b). Es decir, la función $\theta(t)$ no será tan simple, y velocidad angular ω será una función del tiempo, lo mismo que la aceleración angular α .

Las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

Ecuaciones del movimiento en un plano vertical

$$(28a) \quad \sum F_r = m \left(-\frac{v^2}{r} \right) = m(-\omega^2 r)$$

$$(28b) \quad \sum F_{\Theta} = m(\alpha r)$$

$$(28c) \quad \sum F_z = 0$$

El método general de resolución que emplearemos es el mismo método "DELIRO" empleado ya en el capítulo anterior. Explicaremos las particularidades de cada etapa del método en los primeros ejemplos.

8.4. Movimiento en un plano horizontal

Ejemplo 21. Observe la Fig. E21a. Una partícula de masa "m" está atada a un hilo y se apoya sobre una mesa horizontal lisa. La partícula describe una circunferencia de radio "r" con rapidez constante "v".

Se desea calcular las fuerzas debidas a la cuerda y a la mesa. ¿A qué velocidad pierde la partícula el contacto con la mesa?

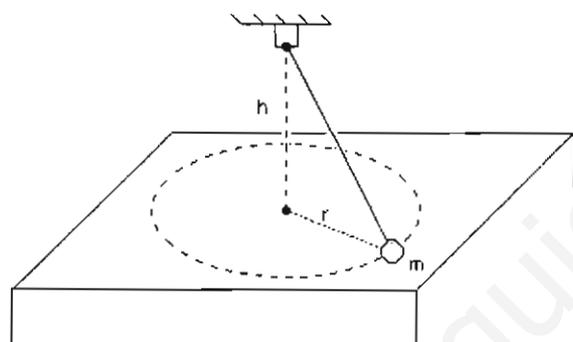


Fig. E21a

DELIRO

↑ Diagramas de cuerpo libre

Veamos la Fig. E21b. Se ha sombreado el plano vertical determinado por el eje vertical Z y la posición presente de la partícula. Es en este plano donde actúan todas las fuerzas sobre la misma, ya que por hipótesis no existen fuerzas tangentes a la trayectoria circular (fuerzas que serían perpendiculares al plano RZ). Es por ello que la rapidez y la velocidad angular son constantes. En vista de lo anterior conviene trazar el DCL en una figura bidimensional en la que el plano del papel sea el plano sombreado mencionado. El DCL luciría entonces como en la Fig. E21c.

Note que en esta figura el círculo descrito por la partícula se ve como una línea diametral de centro "C" (esta línea es la "traza" de la trayectoria en el plano vertical).

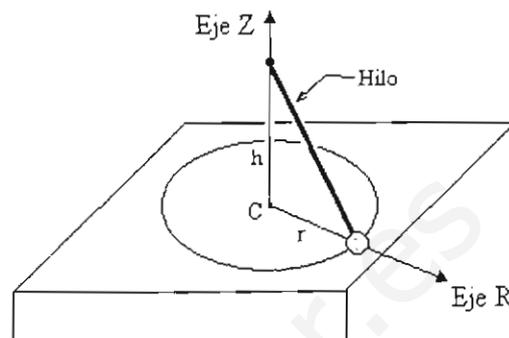


Fig. E21b

La partícula tiene contacto con la mesa (N) y con el hilo (T).

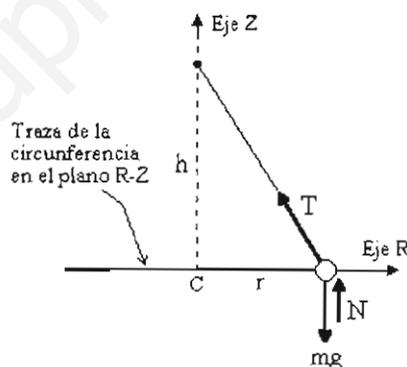


Fig. E21c

DELIRO

↑ Ejes y referencia de tiempo

Usaremos los ejes radial R y vertical Z mostrados en la Fig. E21c.

DELIRO

↑ Leyes de movimiento

En el movimiento horizontal las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones (27a) y (27b):

$$\sum F_r = m \left(-\frac{v^2}{r} \right) = m(-\omega^2 r)$$

$$\sum F_z = 0$$

Apliquemos estas ecuaciones:

$$\Sigma F_r = ma_r: \quad -T \cos \beta = m \left(-\frac{v^2}{r} \right)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad : \quad N + T \sin \beta - mg = 0$$

DE LIRO

↑ **Incógnitas y datos**

Datos: m, r, h, v . Con r y h se obtiene β ; con v y r se obtiene ω . Incógnitas (2): T, N . Tenemos 2 incógnitas y 2 ecuaciones y podemos proceder a resolverlas.

La etapa "Relaciones cinemáticas y/o dinámicas" no se necesita en este problema.

DE LIRO

↑ **Operaciones matemáticas**

Usemos

$$\cos \beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

y despejemos la tensión T de la primera ecuación:

$$T = mv^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}$$

Sustituyendo T en la segunda ecuación obtenemos la normal N :

$$N = m \left(g - \frac{v^2 h}{r^2} \right)$$

Discusión.

- La normal se hace cero cuando $v = r \sqrt{\frac{g}{h}}$. A esta velocidad y mayores se puede retirar la mesa horizontal y no pasa nada.

Ejemplo 22. Dos varillas ligeras están articuladas en un extremo común A a un objeto de masa M . Los otros extremos, B y C , están articulados a dos puntos fijos situados sobre una línea vertical. El ángulo $\angle (BAC)$ vale 90° . Dado que el sistema rota con velocidad angular constante ω alrededor de BC , calcular las fuerzas en las varillas. La longitud de la varilla BA es L , y el ángulo $\angle ABC$ es conocido, igual a β .

Diagrama de cuerpo libre.

Una varilla de masa insignificante solamente puede estar en tensión o en compresión simples.

Se advierte fácilmente que si la velocidad angular es muy pequeña, el objeto descansará sobre la varilla CA , por lo que esta varilla estará en compresión, a diferencia de la varilla BA que siempre está en tensión. Si ω es muy grande, ambas varillas estarán en tensión, lo cual hemos supuesto al trazar el DCL de la Fig. E22a.

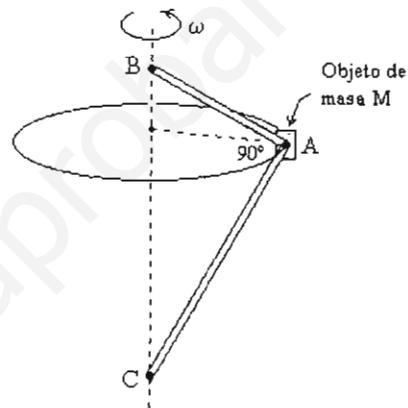


Fig. E22a

Ejes y referencia de tiempo.

En la Fig. E22b el centro del círculo que describe el objeto A es el punto O , y el radio " r " es la distancia OA .

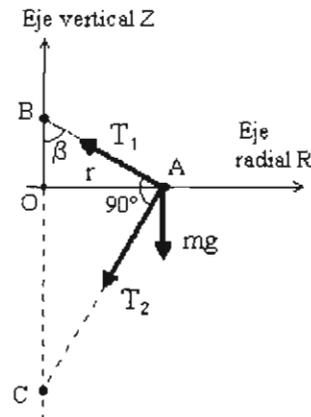


Fig. E22b

Leyes de movimiento.

$$\sum F_r = m a_r: \quad -F_1 \sin \beta - F_2 \cos \beta = m(-\omega^2 r)$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_1 \cos \beta - F_2 \sin \beta - mg = 0$$

Incógnitas y datos.

Datos: L, β, m, ω Incógnitas: T_1, T_2

Operaciones matemáticas.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones obtenemos

$$T_1 = m(\omega^2 r \sin \beta + g \cos \beta)$$

$$T_2 = m(\omega^2 r \cos \beta - g \sin \beta)$$

Poniendo $r = L \sin \beta$ vemos que T_2 es negativa

(compresión) si $\omega < \sqrt{\frac{g}{L \cos \beta}}$.

Ejemplo 23. Un carro para vías férreas, de masa M , viaja en una curva con forma de arco de circunferencia de radio R . Dada la velocidad V del carro, calcular el peralte β de la curva justo para que no haya fuerza transversal sobre los rieles a esa velocidad. Calcular la fuerza transversal en el caso que la velocidad del carro sea $2V$. Tratar el carro como si fuera una partícula.

<Nota. Para un tratamiento adecuado de este problema debe aplicarse la dinámica rotacional del cuerpo rígido. El resultado que obtendremos aquí es una buena aproximación cuando R es muy grande en comparación con las dimensiones del carro.>

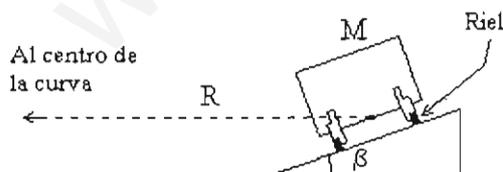
Diagrama de cuerpo libre.

Fig. E23a

Observe el DCL en la Fig. E23b. Se han descompuesto las reacciones en los rieles según una dirección a lo largo del plano inclinado y otra

perpendicular al mismo. Como el carro tiende a irse hacia fuera, hemos supuesto que la reacción del riel exterior es la única que posee componente "transversal", denotada con F . Alternativamente, F puede pensarse como la fuerza total transversal sobre ambos rieles, sin que se altere el resultado.

Ejes y referencia de tiempo.

El eje radial R es paralelo al terreno plano. El eje Z es vertical.

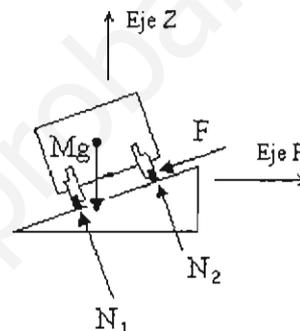


Fig. E23b

Leyes de movimiento.

La segunda ley de Newton proporciona las relaciones

$$\sum F_r = m a_r:$$

$$-N_1 \sin \beta - N_2 \cos \beta - F \cos \beta = -M \frac{V^2}{R}$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$N_1 \cos \beta + N_2 \sin \beta - F \sin \beta - Mg = 0$$

Incógnitas y datos.

Datos: M, V, R . Incógnitas (3): β, N_1, N_2 . Tenemos 2 ecuaciones. Falta una.

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

Se desea el valor del peralte β para el cual

$$F = 0$$

(esta es la ecuación faltante).

Operaciones matemáticas.

Las ecuaciones anteriores dan $\tan \beta = V^2/gR$. Para una velocidad $2V$ el problema debe resolverse de nuevo con β conocido y sin la condición $F = 0$. Se obtiene $F = 3 Mg \sin \beta$.

Ejemplo 24. Un automóvil de masa M toma una curva circular de radio r y peralte β . (a) Determinar la máxima velocidad a la que puede tomarla sin resbalar suponiendo que el coeficiente de fricción estática es μ . (b) Determinar el peralte mínimo para que no resbale si la toma con velocidad dada v .

Diagrama de cuerpo libre y Ejes de referencia.

Como el automóvil se considera una partícula, lo representamos por un punto en el DCL mostrado en la Fig. E24. Este DCL corresponde a fricción máxima f_m , que es la situación que nos interesa.

El eje radial viene desde el centro de la curva, situado a gran distancia "r" del automóvil.

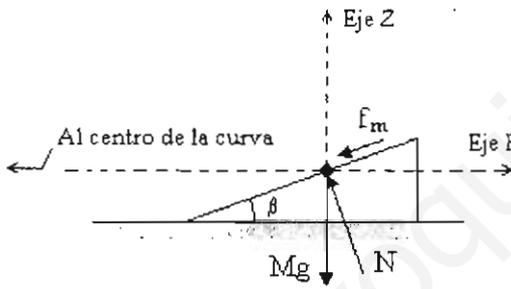


Fig. E24

Leyes de movimiento.

$\Sigma F_r = m a_r$:

(r1) $-N \sin \beta - f_m \cos \beta = -M \frac{v^2}{r}$

$\Sigma F_z = 0$:

(r2) $N \cos \beta - f_m \sin \beta - Mg = 0$

Incógnitas y datos.

Datos: M, r, μ , (a) β (b) v . 3

Incógnitas: (a) N, f_m, v (b) N, f_m, β . Falta una ecuación.

Relaciones cinemáticas v/o dinámicas.

Existe la condición dinámica de deslizamiento,

(r3) $f_m = \mu N$

Operaciones matemáticas.

Veamos las ecuaciones (r1) y (r2) como un sistema simultáneo para f_m y N . Resolviéndolas encontramos

$$f_m = \frac{Mv^2}{r} \cos \beta - mg \sin \beta$$

$$N = \frac{Mv^2}{r} \sin \beta + mg \cos \beta$$

De la condición $f_m = \mu N$ se saca

(a) $v = \sqrt{\frac{(\mu + \tan \beta)gr}{1 - \mu \tan \beta}}$

Despejando de la expresión anterior obtenemos

(b) $\tan \beta = \frac{v^2 - \mu gr}{\mu v^2 + gr}$

Ejemplo 25. Un bloque de peso W reposa sobre un plano inclinado liso soldado a una flecha que gira con velocidad angular ω . Calcular la ω necesaria para que la tensión de la cuerda sea igual al peso W .

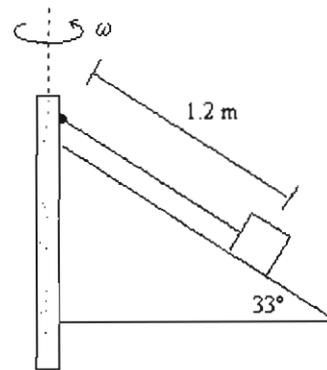


Fig. E25a

Diagrama de cuerpo libre y Ejes de referencia.

El DCL incluye las tres fuerzas mostradas en la Fig. E25b. Note cómo están colocados los ejes radial y vertical.

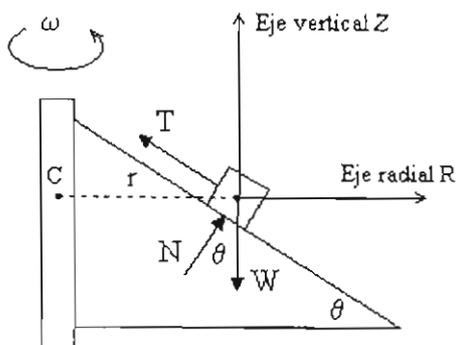


Fig. E25b

Leves de movimiento.

En la dirección radial,

$$(r1) \quad -T \cos \theta + N \sin \theta = m(-\omega^2 r)$$

En la dirección vertical,

$$(r2) \quad T \sin \theta + N \cos \theta - mg = 0$$

Se tiene también que

$$(r3) \quad r = L \cos \theta$$

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

Existe la condición de que la tensión de la cuerda sea igual al peso, o sea

$$(r4) \quad T = W$$

Operaciones matemáticas.

Poniendo (r3) y (r4) en las ecuaciones, despejando N de (r2) y sustituyéndola en (r1) encontramos que

$$\omega = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta}} \frac{g}{L}$$

Ejemplo 26. Una esferilla de masa m describe un círculo horizontal de radio 0.4 m dentro de una superficie lisa semiesférica de radio interno 0.5 m , colocada con su borde horizontal. Un hilo delgado atado a la esferilla pasa por un pequeño agujero en el fondo de la superficie y sostiene otra esferilla de la misma masa que cuelga en reposo. Calcular la velocidad de la primera esferilla.

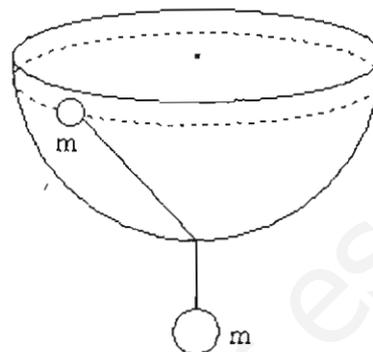


Fig. E26a

Diagramas de cuerpo libre y Ejes de referencia.

El DCL de la esferilla giratoria se traza en el plano vertical que contiene a dicha esferilla, al centro O de la copa, al centro C del círculo que describe la esferilla, y a la cuerda. Éste es el plano de los ejes radial y vertical (Véase la Fig. E26b).

Hemos introducido los ángulos auxiliares β y ϕ , y denotado los radios de la copa y de la trayectoria con R y r, respectivamente.

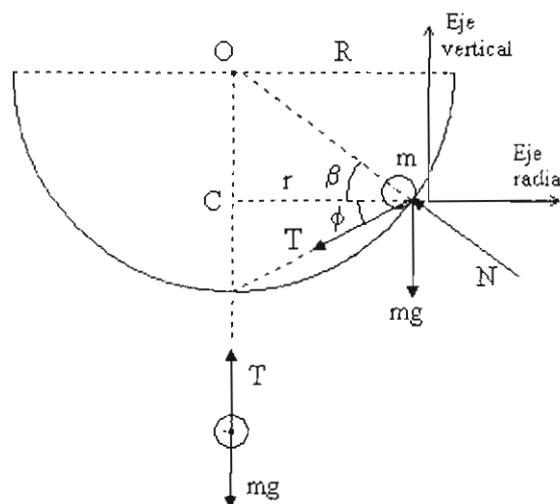


Fig. E26b

La esferilla giratoria tiene contacto con la copa y con la cuerda, de ahí las fuerzas N y T en el DCL. Note que la normal N, por ser perpendicular a la copa, apunta hacia el centro O de la misma.

Leves de movimiento.

Las ecuaciones de la esferilla giratoria son

$$\text{Radial:} \quad -N \cos \beta - T \cos \phi = m \left(-\frac{v^2}{r} \right)$$

$$\text{Vertical:} \quad N \sin \beta - T \sin \phi - mg = 0$$

y la ecuación de la esferilla colgante es

$$T - mg = 0$$

Incógnitas y datos.

En las ecuaciones anteriores aparecen las incógnitas N , T y ω . Se tienen pues tres ecuaciones con tres incógnitas.

Operaciones matemáticas.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a

$$v = \sqrt{\frac{\cos \phi (1 + \sin \phi + \cos \beta)}{\cos \beta} \cdot \frac{g}{r}}$$

Calculemos los ángulos β y ϕ . Refiriéndonos a la Fig. E26c, la línea OP es un radio de la copa, por lo que hemos puesto $OP = 0.5$. Por otra parte, del triángulo rectángulo OPC encontramos el cateto OC , que resulta ser de 0.3 . Entonces el segmento CB es la diferencia $0.5 - 0.3 = 0.2$.

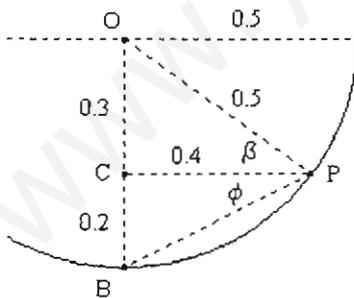


Fig. E26c

Por lo tanto,

$$\beta = \cos^{-1}(0.3 / 0.5) = 56.31^\circ$$

$$\phi = \tan^{-1}(0.2 / 0.4) = 26.56^\circ$$

Sustituyendo en la expresión encontrada para la velocidad "v" tenemos

$$v = 7.84 \text{ m/s.}$$

8.5. Movimiento en un plano vertical

En esta clase de movimiento, el campo gravitatorio terrestre está en el plano vertical de movimiento. De nuevo, explicaremos el método en los ejemplos.

Ejemplo 27. Una partícula de masa "m" resbala por una guía circular lisa de radio "r" en un plano vertical. La partícula parte del reposo en el extremo A de un diámetro horizontal. Calcular la reacción de la guía como función de la profundidad "h", así como la aceleración angular en el punto A y en el punto más bajo, C.

Una de las características que diferencian esta clase de movimiento del movimiento en un plano horizontal con velocidad constante, tratado en las páginas anteriores, es que la posición angular θ ya no variará linealmente en general, y la velocidad angular ω ya no será constante.

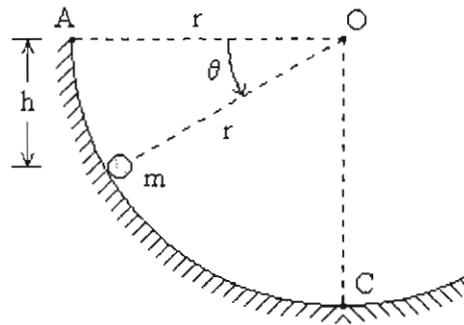


Fig. E27a

Diagrama de cuerpo libre.

El DCL es muy simple, incluye solamente la normal N y el peso "mg" (Fig. E27b).

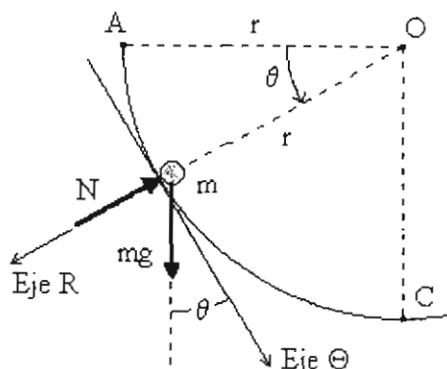


Fig. E27b

Ejes y referencia de tiempo.

No interviene aquí el eje Z, que estaría perpendicular al plano del papel en la Fig. E27b, apuntando hacia el lector. Intervienen los ejes radial R y tangencial Θ , situados en el plano de la trayectoria circular.

En esta clase de problemas la posición angular θ es una cantidad de interés, junto con su derivada la velocidad angular ω . La posición angular puede medirse desde cualquier dirección fija del plano de movimiento, y en sentido antihorario u horario, según convenga. En este ejemplo se ha escogido medirla desde la dirección OA en sentido antihorario. Para evitar errores de signo debemos tener cuidado al trazar el eje tangencial Θ . Recuerde que la regla es: *dirigirlo hacia donde crece la posición angular θ .*

<Nota. Si en la Fig. E27b hubiéramos definido la posición angular θ midiéndola desde la dirección vertical OC en sentido horario, el eje tangencial Θ apuntaría en la dirección contraria a la que tiene allí.>

Leyes de movimiento.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento son las ecuaciones (28a,b) de la página 48:

$$\sum F_r = m \left(-\frac{v^2}{r} \right) = m(-\omega^2 r)$$

$$\sum F_\theta = m \alpha r$$

Recordemos además las relaciones

$$v = \omega r$$

$$(29) \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Generalmente se trata de encontrar las funciones $\theta(t)$, $\omega(t)$ o bien $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$.

Apliquemos las ecuaciones:

$$\sum F_r = m a_r:$$

$$-N + mg \operatorname{sen} \theta = -m \omega^2 r$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta:$$

$$mg \cos \theta = m \alpha r$$

Incógnitas y datos.

Los datos del problema son m y r . En las ecuaciones anteriores aparecen adicionalmente las cantidades N , θ , ω y α . En vista de las relaciones (29), la segunda ecuación de movimiento es una ecuación diferencial para la variable θ . Resolviéndola hallaremos $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$, y luego sustituiremos en la primera ecuación de movimiento para calcular $N(\theta)$.

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

Tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$(30) \quad \theta = 0 \quad \text{y} \quad \omega = 0 \\ \text{en } t = 0, \text{ cuando la partícula parte de A.}$$

Operaciones matemáticas.

Consideremos la segunda ecuación de movimiento, que simplificamos a

$$\alpha = \frac{g}{r} \cos \theta$$

Como vemos, α es función de θ . El método matemático de integración que describiremos a continuación es aplicable a ecuaciones como la anterior, de la forma general $\alpha = f(\theta)$.

Tomemos la representación $\alpha = \omega(d\omega/d\theta)$ y pongámosla en la ecuación $\alpha = f(\theta)$,

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = f(\theta)$$

Separemos las variables e integremos entre $t = 0$ y un tiempo arbitrario t , correspondientes a valores θ_0 , ω_0 y θ , ω , respectivamente, de la posición y velocidad angulares,

$$\omega d\omega = f(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)d\theta$$

Esto es ya la velocidad angular ω como función de θ . Pongámosla como una fórmula general que podemos usar en otros problemas:

Primera integral de la ecuación diferencial

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = f(\theta)$$

$$(31) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2 \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)d\theta$$

En el problema actual tenemos

$$\alpha = f(\theta) = \frac{g}{r} \cos \theta$$

$$\theta_0 = 0 \quad \omega_0 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 2 \int_0^{\theta} \frac{g}{r} \cos \theta d\theta = \frac{2g}{r} \sin \theta$$

Una vez obtenida esta $\omega(\theta)$, otra integración nos conduciría a $\theta(t)$. Sin embargo, no la efectuaremos. Sustituyendo $\omega^2(\theta)$ en la primera ecuación de movimiento hallamos

$$N(\theta) = m\omega^2 r + mg \sin \theta =$$

$$= 3 mg \sin \theta = \frac{3mgh}{r}$$

La aceleración angular en términos de r y h es

$$\alpha = \frac{g}{r} \cos \theta = \frac{g\sqrt{r^2 - h^2}}{r^2}$$

En el punto superior A, $h = 0$ y $\alpha = g/r$ (la partícula empieza con una aceleración lineal igual a la de caída libre). En el punto más bajo C, $h = r$ y $\alpha = 0$ (la velocidad angular pasa de ir aumentando a ir disminuyendo).

Notemos que la velocidad cuando la partícula se halla a profundidad h es $v = \omega r = \sqrt{2gh}$.

Ejemplo 28. Un bloque de masa $m = 0.2 \text{ kg}$ se coloca sobre una tablita, con la que existe fricción de coeficiente estático $\mu = 0.4$. Mediante mecanismos no mostrados en la Fig. E28a, se comunica al conjunto un movimiento circular de radio $r = 0.5 \text{ m}$, con velocidad constante v en sentido horario. Analizar el movimiento.

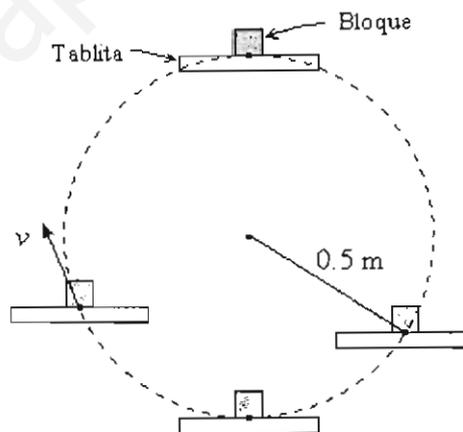


Fig. E28a

Si la velocidad v es pequeña la experiencia dicta que no pasa nada interesante, el bloque permanece en un mismo lugar.

Las fuerzas sobre el bloque son:

- El peso mg , el cual es *constante*.
- Las fuerzas debidas a la tabla, que son la normal N y la fricción f . Estas fuerzas son *variables*.

Escogeremos medir el ángulo θ a partir de la dirección vertical de la plomada, en sentido horario. Está claro que el eje tangencial Θ debe estar como se muestra en la Fig. E28b, hacia donde crece θ .

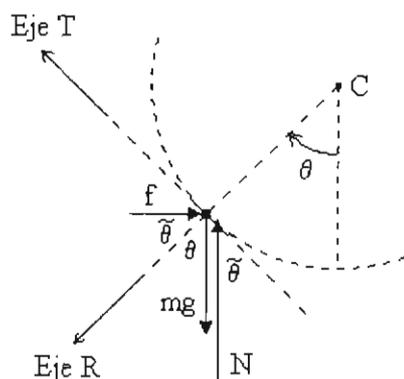


Fig. E28b

El objetivo es primeramente obtener N y f como funciones de v y θ y luego, dada una velocidad, calcular a qué ángulo empieza a deslizarse el bloque, si es que ello ocurre.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\Sigma F_r = ma_r:$$

$$(r1) \quad -f \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta - N \cos \theta = m \left(-\frac{v^2}{r} \right)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta:$$

$$(r2) \quad -f \cos \theta - mg \operatorname{sen} \theta + N \operatorname{sen} \theta = 0$$

Existe además la condición dinámica de deslizamiento inminente,

$$(r3) \quad f = \mu N$$

Resolvamos las ecuaciones (r1) y (r2) para N y f en términos de v y θ ; obtenemos

$$(r4) \quad f = \frac{mv^2}{r} \operatorname{sen} \theta$$

$$(r5) \quad N = mg - \frac{mv^2}{r} \cos \theta$$

La fricción es positiva en el viaje de subida desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 180^\circ$, de modo que estuvo correcto trazarla hacia la derecha en el DCL de la Fig. E28b (el bloque tiende a deslizarse hacia fuera, o sea hacia la izquierda, en este rango).

La condición de deslizamiento inminente, $f = \mu N$, conduce a la ecuación

$$(r5) \quad \operatorname{sen} \theta_d - \mu \cos \theta_d = \frac{\mu g r}{v^2}$$

Pongamos $v = 1.5 \text{ m/s}$. Obtenemos las soluciones

$$\theta_d = 75.86^\circ \text{ y } \theta_d = 147.74^\circ$$

Pongamos un valor muy pequeño de v , digamos $v = 0.2 \text{ m/s}$: la ecuación (r5) no tiene solución; no hay deslizamiento.

Una vez que el bloque empieza a deslizarse, el deslizamiento es intermitente.

Ejemplo 29. El péndulo simple.

Una masa m pende de un hilo inextensible de longitud L . La masa oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad. Estudiar el movimiento.

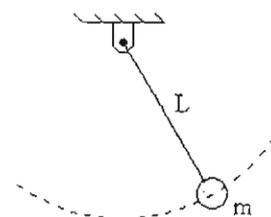


Fig. E29a

Diagrama de cuerpo libre.

Es la Fig. E29b.

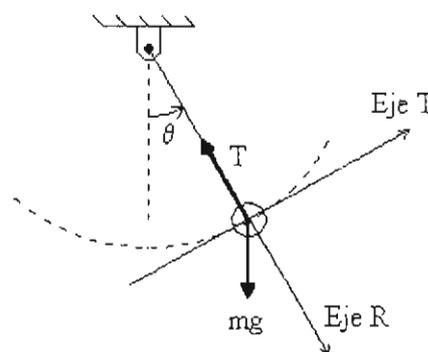


Fig. E29b

Ejes y referencia de tiempo.

Escogemos medir la posición angular θ a partir de la dirección de la plomada, en sentido antihorario. De ahí la dirección del eje T.

Leyes de movimiento.

$$\sum F_r = ma_r:$$

$$-T + mg \cos \theta = -m \omega^2 L$$

$$\sum F_t = ma_t:$$

$$-mg \sin \theta = m \alpha L$$

Incógnitas y datos.

De la segunda ecuación se obtiene $\omega(\theta)$ o bien $\theta(t)$. Luego, de la primera se obtiene la tensión como función de θ .

Relaciones cinemáticas y/o dinámicas.

Supondremos que el péndulo se abandona desde cierta posición angular inicial θ_0 :

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \omega(t=0) = 0$$

Operaciones matemáticas.

La aceleración angular es, de la segunda ecuación de movimiento,

$$(r1) \quad \alpha = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Aplicando el método descrito en el Ejemplo 27 (Ecuación (31)-p56) podemos calcular la velocidad angular como función de la posición angular:

$$\omega^2 = -\frac{2g}{L} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow$$

$$(r2) \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Según esta expresión debemos tener $\cos \theta \geq \cos \theta_0$, o sea $|\theta| \leq |\theta_0|$. El movimiento está confinado al intervalo $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. El signo positivo de ω vale en la fase oscilatoria antihoraria, el negativo cuando la oscilación es en sentido horario. La ω máxima ocurre

cuando $\alpha = d\omega/dt = 0$, o sea en $\theta = 0$, en la configuración vertical del péndulo.

Es difícil el problema matemático de obtener $\theta(t)$ a partir de la expresión $\omega(\theta)$. Conduce a unas funciones llamadas "elípticas", expresadas como integrales definidas.

El problema matemático es simple si suponemos que las oscilaciones son pequeñas ($\theta \ll 1$ radián). En (r2) pongamos $\alpha = d^2\theta/dt^2$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \sin \theta = 0 \quad \text{con} \quad k \equiv \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Para pequeñas oscilaciones aproximamos $\sin \theta \approx \theta$ y obtenemos la "ecuación del oscilador armónico simple",

$$(r3) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \theta = 0$$

La solución de esta ecuación para las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\omega(0) = 0$ es

$$(r4) \quad \theta(t) = \theta_0 \cos kt$$

El *período* τ del movimiento es el tiempo elapsado entre dos posiciones consecutivas iguales, o sea lo que tarda el péndulo en ejecutar una oscilación. Se saca de la condición

$$\cos(k(t + \tau)) = \cos kt$$

o sea $k\tau = 2\pi$. Despejando τ y sustituyendo k ,

$$(r5) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Un péndulo cuyo período sea de un segundo tendrá una longitud ≈ 25 cm.

La frecuencia ν de las oscilaciones es el número de oscilaciones ejecutadas por segundo. Es igual al inverso del período,

$$(r6) \quad \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Ejemplo 30. Una chaquirita de masa m está insertada en una guía semicircular lisa de radio r , y está sujeta a un resorte lineal de constante k . Calcular su aceleración angular cuando el resorte está horizontal. Datos: $m = 0.5 \text{ kg}$; $k = 30 \text{ N/m}$; $r = 0.8 \text{ m}$. Longitud natural del resorte $L_0 = 0.4 \text{ m}$.

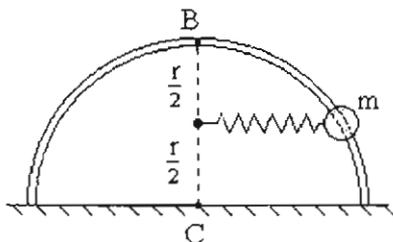


Fig. E30a

Diagrama de cuerpo libre.

La chaquirita tiene contacto con la guía (N) y con el resorte (R). En la posición de interés,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

La longitud del resorte es

$$L = r \cos 30^\circ = 0.693 \text{ m}$$

y su fuerza,

$$R = k(L - L_0) \approx 8.8 \text{ N.}$$

Ejes y referencia de tiempo.

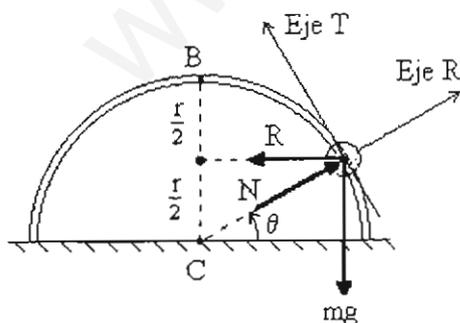


Fig. E30b

Observe que la posición angular θ se define desde la dirección horizontal derecha, en sentido antihorario.

Leyes de movimiento.

Las ecuaciones se plantearán para el instante particular considerado. No son válidas para posiciones arbitrarias de la chaquirita.

$$\sum F_r = ma_r: \quad N - R \cos \theta - mg \sin \theta = -m \omega^2 r$$

$$\sum F_t = ma_t: \quad R \sin \theta - mg \cos \theta = m \alpha r$$

Operaciones matemáticas.

Con los datos propuestos no podemos calcular N ni ω , pero sí la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{1}{mr} (R \sin \theta - mg \cos \theta) = 0.626 \text{ rad/s}^2$$

8.6. Movimientos de la Luna y la Tierra

El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, y el de ésta alrededor del Sol, se pueden analizar con muy buena aproximación suponiendo que las orbitas son circulares.

He aquí unos datos que usaremos:

Constante de gravitación: $G = 6.67 (10^{-11}) \text{ (S.I.)}$

Masa de la Tierra: $5.98 (10^{24}) \text{ kg}$

Masa de la Luna: $7.36 (10^{22}) \text{ kg}$

Masa del Sol: $1.99 (10^{30}) \text{ kg}$

Distancia media Tierra-Luna: $3.84 (10^8) \text{ m}$

Distancia media Tierra-Sol: $1.49 (10^{11}) \text{ m}$

Ejemplo 31. Calcular el período de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra, dada la masa de la Tierra y la distancia Tierra-Luna.

Denotemos con M_L y M_T las masas de la Luna y la Tierra, y con "d" la distancia mutua (Fig. E31a).

Supuesta la Tierra como marco de referencia inercial, las ecuaciones de movimiento de la Luna son

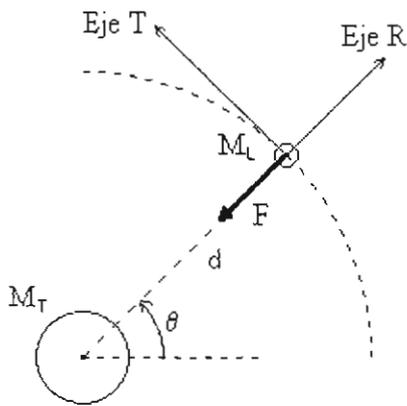


Fig. E31a

$$\Sigma F_r = m a_r:$$

$$(r1) \quad -F = -M_L \frac{v^2}{d}$$

$$\Sigma F_t = m a_t:$$

$$(r2) \quad 0 = m \alpha d$$

$$(\alpha = 0 \Rightarrow \omega = \text{constante})$$

donde F es la magnitud de la fuerza gravitatoria terrestre, dada por

$$(r3) \quad F = \frac{GM_T M_L}{d^2}$$

Sustituyendo este valor de F en la ecuación (r1) obtenemos la velocidad de la Luna, v , la cual de hecho no depende de su masa:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{d}} = \sqrt{\frac{6.67(10^{-11}) \cdot 5.98(10^{24})}{3.84(10^8)}}$$

$$= 1019 \text{ (m/s)}$$

El periodo de la Luna, τ , se saca de la relación

$$v \tau = 2 \pi d$$

Se obtiene

$$\tau = 27.3 \text{ día}$$

Ejemplo 32. Calcular la masa del Sol a partir de la masa de la Tierra y su período.

En forma completamente análoga al ejemplo anterior podemos deducir la relación

$$(r1) \quad v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{d}}$$

para la velocidad de la Tierra, v_T , en términos de la masa del Sol, M_S , y la distancia Sol-Tierra, d .

Por otra parte, el período de la Tierra, τ , se expresa en términos de su velocidad v_T como

$$(r2) \quad \tau = \frac{2\pi d}{v_T}$$

Despejando v_T de (r2) y sustituyendo en (r1),

$$\frac{2\pi d}{\tau} = \sqrt{\frac{GM_S}{d}}$$

Despejando ahora la masa del Sol,

$$(r3) \quad M_S = \frac{4\pi^2 d^3}{G\tau^2}$$

Sustituyendo los valores

$$G = 6.67(10^{-11}) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

$$d = 1.49(10^{11}) \text{ m}$$

$$\tau = 1 \text{ año} = 365.24 \text{ día} = 3.15(10^7) \text{ s}$$

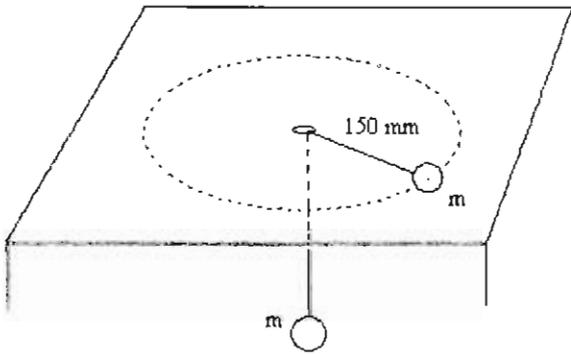
obtenemos

$$M_S = 1.96(10^{30}) \text{ kg}$$

valor bastante aproximado al valor real.

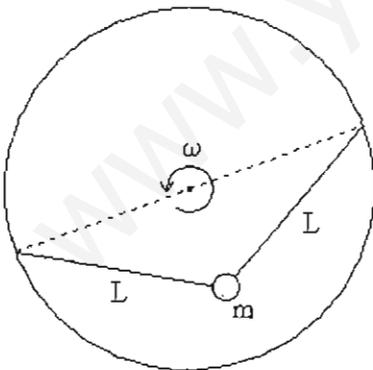
8.7. Problemas

1. Dos partículas iguales están conectadas por una cuerda que pasa a través de un agujero en una mesa lisa. Una de las partículas está sobre la mesa, y la otra por debajo. ¿Cuántas revoluciones por segundo debe dar la partícula sobre la mesa, en una circunferencia de radio 150 mm, para mantener a la otra partícula en reposo?



Resp. 1.28 rev/s.

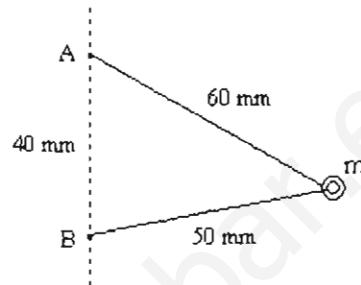
2. Una masa m sobre una mesa giratoria lisa está unida a los extremos de un diámetro mediante dos cuerdas iguales de longitud L . La mesa se hace girar con velocidad angular constante ω . Calcular la tensión en las cuerdas.



Resp. $(2/3)m\omega^2L$.

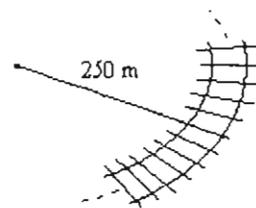
3. Un anillo liso puede deslizarse a lo largo de una cuerda de longitud 110 mm. Los extremos de la cuerda están fijos a dos puntos A y B situados en línea vertical

a distancia de 40 mm uno del otro. El sistema gira con velocidad angular constante, de tal modo que la distancia del anillo a A y B es 60 mm y 50 mm, respectivamente. Calcular la velocidad angular.



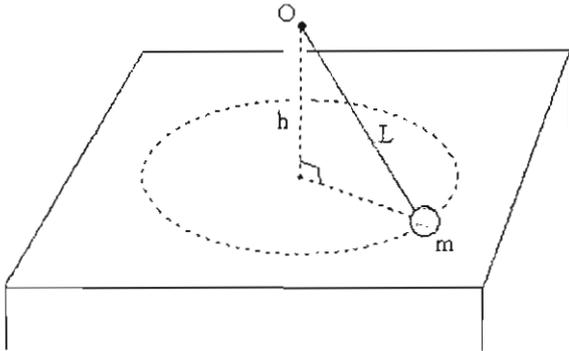
Resp. 0.9 rad/s.

4. Un carro de ferrocarril, de masa 3000 kg, se mueve a razón de 45 km/h en una curva circular de 250 m de radio. No hay peralte, es decir, el riel exterior no se levanta sobre el interior. Calcular la fuerza lateral que se ejerce sobre el riel exterior.



Resp. 1875 N.

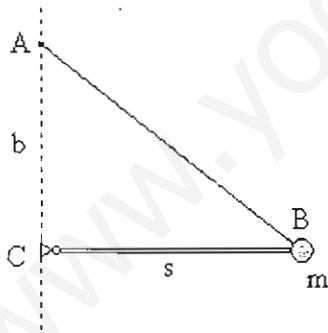
5. Una partícula de masa " m " está sujeta, a través de una cuerda inextensible de longitud L , a un punto fijo O situado a una altura " h " sobre una mesa horizontal lisa. La partícula describe un círculo sobre la mesa, con rapidez constante " v ". Calcular la fuerza ejercida por la mesa y la tensión en la cuerda.



Resp.

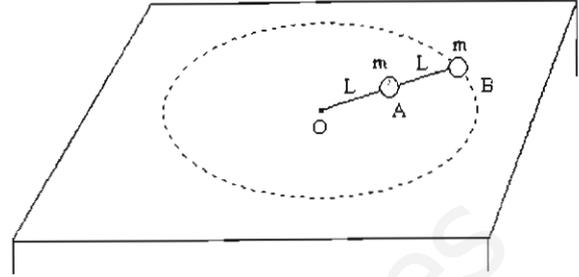
$$m \left(g - \frac{v^2 h}{\sqrt{L^2 - h^2}} \right), \quad \frac{mv^2 L}{\sqrt{L^2 - h^2}}$$

6. Una varilla ligera CB, de longitud "s", está pivoteada libremente en su extremo C, el cual está fijo, y porta en B una masa m. La varilla se mantiene en posición horizontal por medio de una cuerda atada a B y a un punto fijo A situado verticalmente sobre C a una distancia "b" de éste. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza de CB cuando CB rota alrededor de la vertical a "n" revoluciones por segundo.



Resp. $ms \left(4\pi^2 n^2 - \frac{g}{b} \right)$

7. Dos esferillas A y B de la misma masa "m", apoyadas sobre una mesa horizontal lisa, están atadas a cuerdas de la misma longitud L como se ve en la figura. El sistema rota alrededor de la vertical a través del punto fijo O de tal manera que las cuerdas OA y AB se mantienen colineales. Calcular las tensiones en las cuerdas.

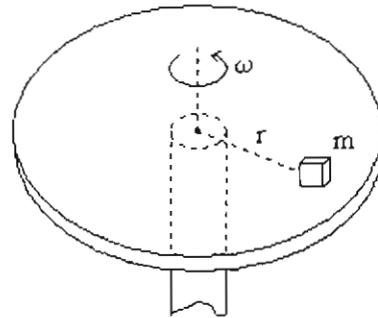


Resp. $3m\omega^2 L; \quad 2m\omega^2 L$

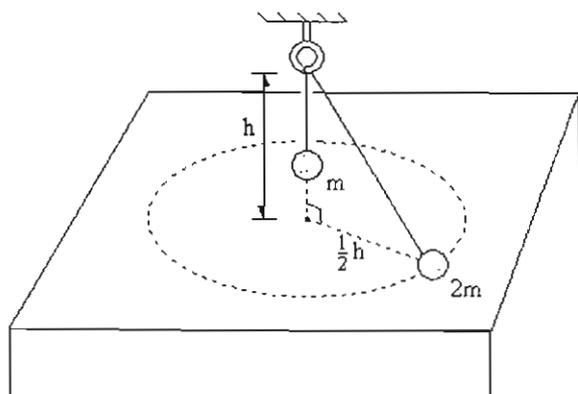
8. Una tornamesa rugosa puede girar alrededor de un eje vertical. Se coloca sobre ella una partícula de masa "m", a una distancia "r" del eje. Luego se hace girar la mesa aumentando gradualmente su velocidad angular. Demuestre que la partícula no se mueve relativamente a la mesa, a menos que el número de revoluciones por segundo exceda el valor

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

donde μ es el coeficiente de fricción estática partícula-mesa.

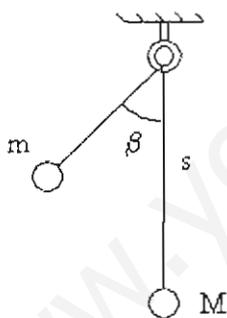


9. Una masa "2m" reposa sobre una superficie horizontal lisa, y está conectada con una masa "m" mediante una cuerda inextensible que pasar por un pequeño anillo liso y fijo a una altura "h" sobre la mesa. Dado que la masa 2m describe un círculo de radio (1/2)h y centro en la mesa verticalmente por debajo del anillo, calcular el tiempo necesario para una revolución.



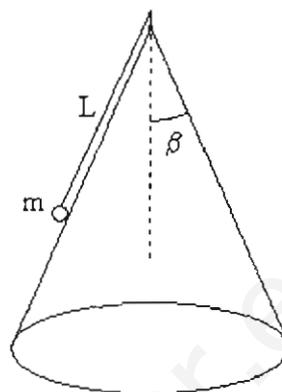
resp. $2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{5}h}{g}}$

10. Dos masas desiguales están conectadas por una cuerda de longitud L que pasa a través de un anillo fijo y liso. La masa menor se mueve como un péndulo cónico mientras que la otra cuelga verticalmente. Calcular el semiángulo β del cono y la frecuencia angular de movimiento si una porción de longitud "s" de la cuerda cuelga verticalmente.



Resp. $\cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right), \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m(L-s)}}$

11. Un cono circular de semiángulo vertical β está fijo con su eje vertical y su vértice hacia arriba. Se ata una cuerda inextensible de longitud L en el vértice por uno de sus extremos, y en el otro extremo se ata una partícula de masa "m" que descansa sobre la superficie lisa externa del cono. Luego, la partícula se hace rotar con velocidad constante ω en un círculo horizontal en contacto con el cono. Calcular la velocidad angular y la tensión de la cuerda.

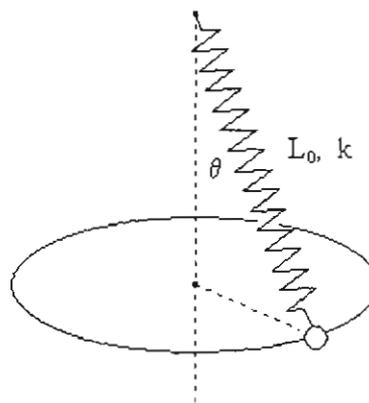


Resp.

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sec \beta}{L}}, \quad T = m(g \cos \beta + \omega^2 L \sin^2 \beta)$$

12. Una partícula de masa m está suspendida desde un punto fijo por medio de un resorte elástico lineal de longitud natural L_0 y constante elástica "k". La partícula describe un círculo con velocidad angular constante. Demostrar que se cumple la relación

$$\omega^2 \cos \theta = \frac{g}{L_0} \left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right)$$

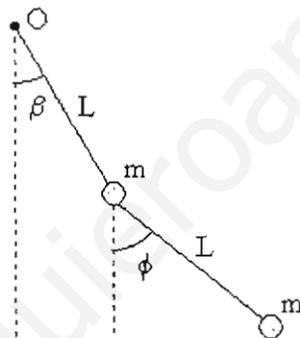


13. Una partícula cuelga de una cuerda inextensible de longitud L , atada a un punto fijo O . Una segunda partícula de la misma masa cuelga desde la primera mediante otra cuerda igual. Todo el sistema gira con velocidad angular constante ω alrededor de la vertical a través de O , de tal manera que las cuerdas superior e

2-64

inferior forman ángulos constantes β y ϕ , respectivamente. Demostrar que se cumple la relación

$$2 \tan \beta - \tan \phi = \frac{\omega^2 L}{g} \operatorname{sen} \beta$$



14. Calcular la masa del planeta Júpiter conociendo que el período de su Luna Io es de 1.77 días, y la distancia de Io al centro de Júpiter es de $4.22 (10^8)$ m.

Resp. $1.90 (10^{27})$ kg.

15. ¿Qué velocidad debe tener un satélite artificial en órbita circular alrededor de la Luna terrestre para que el radio de su órbita sea 1.5 veces el radio lunar.

Dato. el radio de la Luna es $1.74 (10^6)$ m.

Módulo III

TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA
UN ENFOQUE DE SISTEMAS

INTRODUCCIÓN

En el lenguaje coloquial las ecuaciones de balance más simples se enuncian así:

Lo que se tiene ahora es igual a lo que se tenía antes, más lo que entró y menos lo que salió en el interin.

La pequeña Lulú fue al bosque con 3 moras en su canasta. Recogió 12 moras más. En el camino de regreso regaló 4 a Tobi y la bruja Ágata le quitó 5. ¿Cuántas moras tiene ahora la pequeña Lulú?

El tema general de este módulo es una ecuación de balance análoga. Las moras en la canasta son la energía mecánica E , y las moras en curso de cambiar de dueño son el trabajo W .

El concepto primerísimo detrás de una ecuación de balance es claramente: ¡la canasta! ... perdón: ¡el sistema!

El sistema es el cuerpo material (o conjunto de cuerpos materiales) que guarda (o "posee", o "almacena"), la cantidad "balanceada", trátase de moras, energía mecánica, energía eléctrica, etc. La analogía con las moras no va muy lejos: las moras son algo que podemos ver, tocar y comer, pero la energía mecánica es un ente abstracto, intangible, invisible. Hubo tiempos cuando una forma especial de transmisión de energía, el calor, se veía como un ente material, que se denominó "calórico", pero los tiempos cambian y la idea de calórico se enfrió.

En la física existen diversos tipos de ecuaciones de balance: de masa, de fuerzas, de energía, de momento lineal, etc. Antes de plantear cualquier ecuación de balance debemos estipular cuál es el sistema al que se refiere o pertenece. *La tarea de especificar el sistema debe ser algo ... pues ... sistemático.*

El siguiente torito, conocido por todos nosotros, apunta a la importancia de los sistemas en las ecuaciones de balance, sean balances energéticos, monetarios, etc.

Tres viajeros llegan a pernoctar al Hotel Otelo. Comparten un cuarto triple por el que desembolsan la cantidad de \$30. Al otro día es el cumpleaños del manager, el Sr. Otelo, quien en un ataque de desprendimiento les hace a los viajeros un descuento colectivo de \$5. Entrega al botones esta cantidad para que se la devuelva a los viajeros. Como 5 entre 3 no da pagado, en el camino el botones se embolsa \$2, los viajeros reciben \$3, y todos contentos por el cumpleaños.

El problema es que los viajeros pagaron netamente \$27, que sumados a los \$2 del botones arroja \$29. ¿Dónde quedó el otro \$1 que completa los \$30 entregados inicialmente?

(Dicen que si le pregunta a un buen contador público le contestará: "¿dónde desea que lo hagamos quedar?")

Podemos definir aquí muchos sistemas: {Viajeros}, {Botones}, {Otelo}, {Viajeros + Botones}, {Botones + Otelo}, etc. Cada uno tiene su ecuación de balance de dinero. Antes de continuar la lectura, plantee la ecuación de balance del sistema compuesto por el Sr. Otelo y el Botones.

Esperando ...

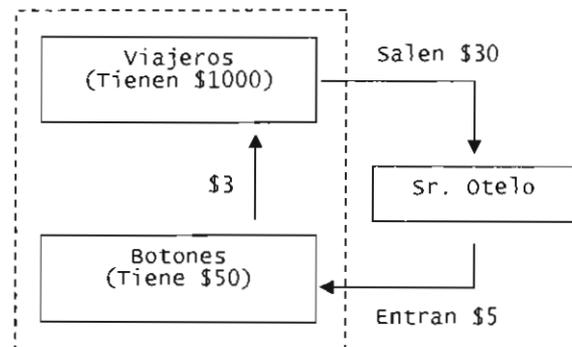
¿Ya? Prosigamos. Plantearemos la ecuación de balance del sistema {Viajeros + Botones}. Supongamos que antes de toda transacción los viajeros poseen en total \$1000 y el botones posee \$50. La ecuación de balance es

$$(\text{Dinero inicial}) + \text{Entradas} - \text{Salidas} = (\text{Dinero final})$$

$$\text{o bien } (\$1000 + \$50) + \$5 - \$30 = (\$1025)$$

Efectivamente, los viajeros tienen al final \$973 y el botones \$52.

Vea el siguiente diagrama (El sistema es el recuadro a rayas):

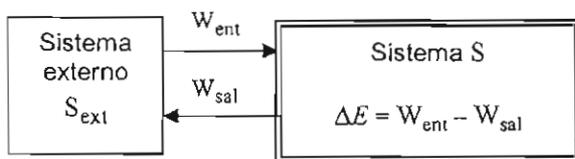


Note que el flujo de \$3 que ingresa a los viajeros proveniente del botones es *interno* al sistema {Viajeros + Botones}, por lo que no aparece en la ecuación de balance (más sobre esto a su debido tiempo). Dicho flujo figuraría en la ecuación de balance del sistema {Viajeros} o {Botones}, para el cual constituye un flujo *externo*. (En la analogía de la canasta de Lulú, podría haber compartimientos en la canasta, y pasarse las moras de uno a otro, pero ello no influiría en la ecuación de balance de moras.)

Volviendo a la física, para definir un *sistema* "S" simplemente se estipulan o enumeran los *cuerpos*

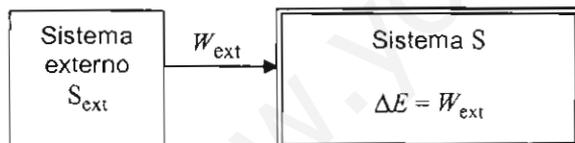
materiales que lo constituirán. Todos los cuerpos que quedan excluidos del sistema S, y que son capaces de influenciarlo, forman a su vez otro sistema que denominaremos el *sistema externo* de S, y que denotaremos con S_{ext} . También se le llama a S_{ext} los *alrededores* del sistema dado. Los cuerpos miembros de S_{ext} no son todos los restantes cuerpos del universo físico. No tiene caso incluir en S_{ext} cuerpos que no actúan sobre S. Podemos excluir a la Nube de Oort.

Una representación pictórica del balance de energía podría ser esta:



En cierto momento el sistema poseía cierta energía E_1 . Durante un lapso de tiempo subsecuente el sistema externo realizó trabajo total W_{ent} (entrante) sobre el sistema y por su parte éste efectuó trabajo total W_{sal} (saliente) sobre el sistema externo. Al término del lapso considerado el sistema hubo incrementado su energía a $E_2 = E_1 + \Delta E$, donde $\Delta E = W_{\text{ent}} - W_{\text{sal}}$.

El siguiente diagrama de energía es equivalente al anterior:



En este diagrama, W_{ext} es el trabajo *neto* sobre el sistema, igual a $W_{\text{ent}} - W_{\text{sal}}$. En " W_{ext} " ya están contabilizadas (sumadas algebraicamente) las energías que entraron y salieron del sistema disfrazadas de trabajo, es decir, las energías que suministraron los alrededores al sistema, y viceversa, en forma de trabajo (que no hay otra forma en mecánica, por cierto).

Cuando se efectúa un trabajo sobre un sistema, este trabajo pierde su identidad, se acaba su rol en la vida. ¿Adónde fue? Se "transmutó" o transformó en "energía mecánica" del sistema. Es decir, el trabajo no es energía "poseída" o "almacenada", sino "energía en tránsito" entre sistemas. Constituye la única forma en que los sistemas mecánicos intercambian energía.

En sistemas no-mecánicos existe otra forma de intercambio de energía: por calor. El calor es tema de estudio de la termodinámica, disciplina en que la energía de un "sistema termodinámico" se denomina *energía interna* (corresponde a la *energía mecánica* de un sistema mecánico). La ecuación de balance de energía en la termodinámica tiene la forma

$$\Delta U = (W_{\text{ent}} + Q_{\text{ent}}) - (W_{\text{sal}} + Q_{\text{sal}})$$

donde U es la energía interna del sistema y Q_{ent} y Q_{sal} son energías entrantes y salientes del sistema, respectivamente, en forma de calor. La ecuación anterior es la expresión matemática de la primera ley de la termodinámica. Esta ley se reduce a la forma

$$W_{\text{ext}} = \Delta E, \text{ aplicable a la mecánica, al poner}$$

$$U \equiv E \quad \text{y} \quad Q_{\text{ent}} = Q_{\text{sal}} = 0$$

La energía mecánica se compone de dos contribuciones que son la energía cinética y la energía potencial del sistema. La primera es "energía de movimiento", la segunda es "energía de configuración (o posición)".

Un sistema mecánico aislado (uno que no interactúa con ningún cuerpo en absoluto), o uno que no recibe netamente trabajo desde el exterior, no cobra ni paga energía. Su energía se *conserva* en el tiempo. Esta es la ley de conservación de la energía, la cual demostraremos para sistemas mecánicos. Esta ley se elevó a la categoría de un *principio* fundamental de la naturaleza, al irse extendiendo el estudio a sistemas que admiten fenómenos no mecánicos.

Ni qué decir que el tema de la energía es de gran importancia en ingeniería. Los protagonistas principales del tema en mecánica son:

- El sistema S.
- El sistema externo S_{ext} .
- El trabajo W .
- La energía cinética K .
- La energía potencial V .
- La energía mecánica o energía total $E = K + V$.

El villano de la obra es el trabajo. Saber calcular trabajos es el escollo matemático que hay que salvar en relación con el tema de la energía. Vale la pena dedicar el esfuerzo suficiente al respecto. Pagará muchos dividendos.

Al final de la jornada sabremos si faltan moras.

... O si sobran.

CAPÍTULO 9

TRABAJO EN EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Este es un capítulo en su mayor parte matemático. Está dedicado al cálculo de trabajos, y hemos preferido apartarlo de los capítulos con más contenido físico para no perder el hilo allí.

Empezaremos por dar un repaso a algunas fuerzas de importancia en el movimiento rectilíneo (o, como se suele decir, movimiento en una dimensión). Luego introduciremos la definición matemática del trabajo y finalmente daremos unos ejemplos de cálculo.

9.1. Repaso de fuerzas en una dimensión

En el movimiento rectilíneo el móvil se desplaza a lo largo de una recta bajo la acción de alguna fuerza total F_T (Fig. 1).

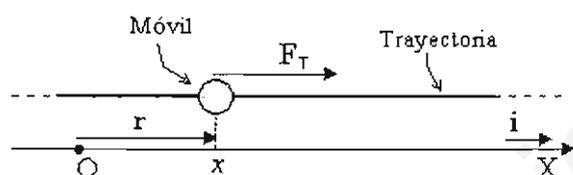


Fig. 1

El vector de posición r , los vectores velocidad v y aceleración a , así como el vector fuerza F_T , están dirigidos paralelamente al eje X en todo momento. Sus expresiones vectoriales generales son

$$r = x \mathbf{i} \quad v = v \mathbf{i} \quad a = a \mathbf{i} \quad F_T = F_T \mathbf{i}$$

Para no padecer de *i*-itis, todos los asuntos relacionados con estos vectores los trataremos con sus representantes legales, o sea sus respectivas componentes x , v , a y F_T . El signo de la componente revela la dirección del vector. Así por ejemplo, una fuerza negativa F_T significa que el vector F_T apunta en la dirección negativa del eje X , que también nombraremos la *dirección* $-X$, hacia donde disminuye la coordenada x . Fuerza positiva F_T corresponde a un vector F_T hacia la *dirección* $+X$, misma que la del vector unitario básico \mathbf{i} .

Repasemos algunas de las fuerzas más comunes. Es importante notar en cada caso cómo se coloca el sistema de coordenadas.

Peso cerca de la Tierra.

La fuerza de atracción gravitatoria terrestre que experimenta un objeto cerca de la superficie terrestre es muy aproximadamente constante. Su magnitud es " mg ", el producto de la masa m y la aceleración de la gravedad g . Esta fuerza se denomina el *peso* del objeto.

Si dirigimos el eje X hacia arriba (Fig. 2), el peso es

$$(1) \quad P = -mg$$

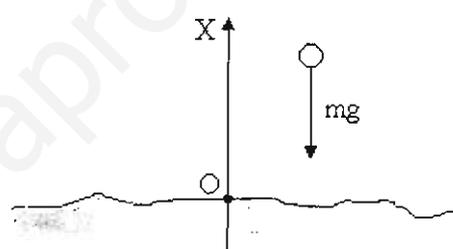


Fig. 2

Fuerza de un resorte elástico.

Un resorte elástico lineal ejerce una fuerza proporcional a su deformación. Conviene fijar el origen del eje X en el punto de equilibrio del resorte (Fig. 3), para que la coordenada x coincida con la deformación del resorte y la expresión matemática de la *fuerza elástica* quede en la forma simple

$$(2) \quad F(x) = -kx$$

donde " k " es una constante positiva denominada *constante elástica* o *rigidez* del resorte, con unidades de N/m .

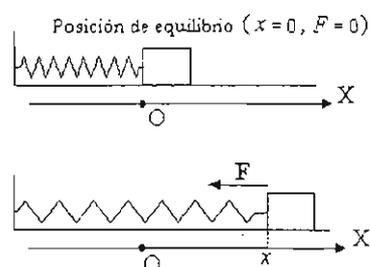


Fig. 3

Si la deformación es una elongación o alargamiento, como en la parte inferior de la Fig. 3, entonces $x > 0$ y la fuerza $F(x) = -kx$ es negativa así que F apunta en sentido contrario al eje X (en la Fig. 3: hacia la izquierda). Si el resorte está comprimido, x es negativa, $F(x)$ es positiva, y F apunta hacia la derecha. Por lo tanto, la expresión de la fuerza es válida para todo valor de x , sea positivo, negativo o cero.

Peso lejos de la Tierra.

Observe la Fig. 4. Suponemos que un objeto, de masa m y situado lejos de la Tierra, se mueve directamente hacia (o huyendo de) el centro del planeta

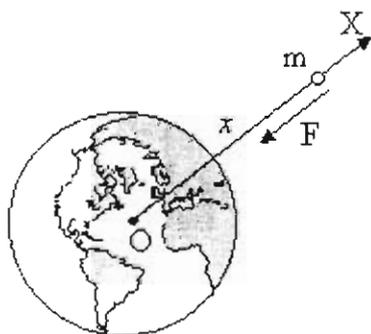


Fig. 4

(pues de otra manera el movimiento no sería rectilíneo). Tomando el origen O del eje X en el centro de la Tierra, tenemos que la coordenada x del objeto coincide con su distancia al centro, de tal modo que la fuerza gravitatoria es

$$(3) \quad F(x) = -\frac{GM_T m}{x^2}$$

(M_T = masa de la Tierra; G = constante de gravitación universal.)

Fuerza resistiva en un medio viscoso.

Una esferilla que cae bajo la acción de su propio peso dentro de un medio viscoso experimenta por parte de éste una fuerza de resistencia al movimiento. En un modelo simple, tal fuerza es proporcional a la velocidad, de acuerdo con la expresión

$$(4) \quad F(v) = -b v$$

" b " es una constante positiva con unidades de $N \cdot s/m$. Debido al signo menos en (4), la fuerza

$F(v) = -b v$ siempre se opone a la velocidad v .

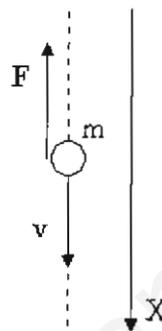


Fig. 5

Fuerza de fricción o rozamiento.

La fricción cinética ordinaria también es una fuerza que siempre se opone a la velocidad v , si bien su magnitud no depende del valor numérico de la velocidad. Se puede poner en la forma

$$(5) \quad f = -\text{sgn}(v) \cdot \mu N$$

donde μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal debida al contacto con la superficie sobre la que se desliza el cuerpo.

La función *signo*, denotada por " $\text{sgn}()$ ", se define por

$$(6) \quad \text{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \\ -1 & \text{si } v < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, en el caso simple del deslizamiento de un bloque sobre una superficie horizontal (Fig. 6), la fuerza normal N vale " mg " y la fricción cinética es, suponiendo el Eje X hacia la derecha:

$$f = -\mu mg \quad \text{si el movimiento es } \rightarrow$$

$$f = \mu mg \quad \text{si el movimiento es } \leftarrow$$

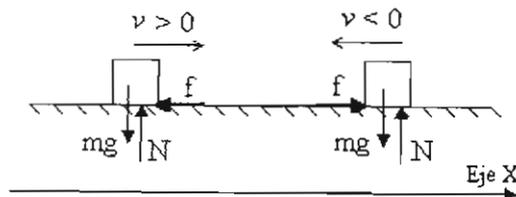


Fig. 6

La fricción cinética en este caso tiene magnitud constante, pero no podemos decir que sea una fuerza constante, puesto que su dirección varía según el sentido del movimiento.

9.2. Definición del trabajo

Considere el siguiente escenario:

- Se tiene un cuerpo que se mueve en línea recta bajo la acción de una o más fuerzas paralelas a la dirección de su movimiento.
- A lo largo del camino recto se tiende un Eje X, y la coordenada (o posición) del cuerpo se denota como usualmente por "x".
- F es una de las fuerzas que actúa sobre el cuerpo. Puede ser función de una o más de las variables tiempo t , posición x y velocidad v .
- El cuerpo se mueve desde x_1 hasta x_2 bajo la acción de todas las fuerzas presentes, entre las cuales se incluye F .

En relación con esta situación general conviene introducir la siguiente cantidad física:

Trabajo realizado por la fuerza F entre las posiciones x_1 y x_2		
(7)	$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$	F arbitraria.

A reserva de discutir en el siguiente capítulo el significado físico de esta cantidad, examinemos ahora algunas de sus propiedades:

- Las unidades físicas de trabajo son las del integrando en la expresión (7), esto es, las del producto de fuerza F y desplazamiento dx :

$$\text{newton-metro} = \text{N-m}$$

Este producto se le denomina **joule** y se abrevia por "J".

- El trabajo es distributivo, es decir,

Propiedad de distributividad del trabajo

El trabajo realizado por varias fuerzas F_1, F_2, \dots, F_N , que actúan conjuntamente, entre dos posiciones dadas, es igual a la suma algebraica de los trabajos efectuados por cada fuerza separadamente. En símbolos,

$$\int (F_1 + F_2 + \dots) dx = \int F_1 dx + \int F_2 dx + \dots$$

- El trabajo es aditivo, perdón, "aditivo", por lo cual se entiende lo siguiente:

Teorema de aditividad del trabajo

El trabajo realizado por una fuerza desde una posición x_1 hasta otra x_3 es igual a la suma algebraica de los trabajos realizados entre x_1 y x_2 y entre x_2 y x_3 , donde x_2 es una posición arbitraria.

- Si el cuerpo sobre el que actúa la fuerza F *no se mueve*, entonces la fuerza F no realiza trabajo sobre él. Esto se deduce de (7), ya que en este caso $dx \equiv 0$.

La definición (7) del trabajo se extiende al caso en que la fuerza se aplica en el extremo de una cuerda, resorte o varilla rígida. En este caso "x" es la coordenada del punto de aplicación P de la fuerza, y "dx" es el desplazamiento infinitesimal de tal punto (Fig. 7).

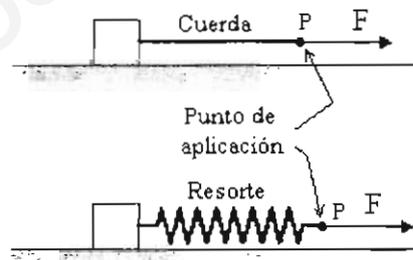


Fig. 7

En el caso de la fuerza aplicada al extremo de una cuerda, sabemos que la cuerda adquiere una tensión precisamente igual a la fuerza aplicada allí. Lo mismo ocurre con el resorte.

Note que aunque hablamos usualmente de "trabajos efectuados por fuerzas sobre cuerpos", también usamos la frase "trabajo efectuado por un cuerpo C_1 sobre otro cuerpo C_2 " (a través de la fuerza que ejerce C_1 sobre C_2). Así, refiriéndonos a la situación de la cuerda y el bloque de la Fig. 7, podemos decir que la *tensión* ejerce un trabajo sobre el bloque o, equivalentemente, que la *cuerda* ejerce un trabajo sobre el bloque.

Por otra parte está claro que el trabajo que ejerce F sobre la cuerda es igual al que ésta ejerce sobre el bloque. Análogamente con respecto al resorte.

9.3. Trabajo de la fuerza total

Sea F_T la fuerza total que actúa sobre un cuerpo. El trabajo de la fuerza total se denotará con el símbolo especial " W_{ext} ". Viene dado, según (7), por

Trabajo de la fuerza total	
(8)	$W_{ext} = \int_{x_1}^{x_2} F_T dx$

Si una partícula realiza un movimiento uniforme la fuerza total sobre ella es idénticamente cero, de tal manera que no se efectúa trabajo neto sobre la partícula.

9.4. Cálculo del trabajo de fuerzas comunes

(A) El trabajo de una fuerza constante F en un desplazamiento entre x_1 y x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F(x_2 - x_1) \equiv F \Delta x$$

Definiendo la cantidad "d" en la forma:

$$d \equiv |x_2 - x_1| = |\Delta x| =$$

= magnitud del desplazamiento Δx =
 = distancia entre los puntos
 terminales x_1 y x_2

tenemos

Trabajo de una fuerza constante F en un desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ de magnitud d.	
(9)	$W = F \Delta x$ o bien $F = F $ $W = \pm F d$ Signo "+" si F está en la dirección del desplazamiento; "-" en caso contrario.

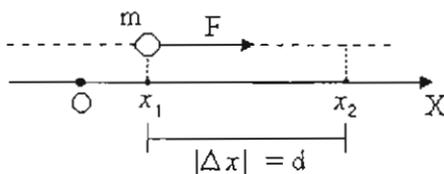


Fig. 8

Esta expresión es la familiar fórmula "trabajo = fuerza \times distancia" que Ud conoce de su primer curso de física. Note que el desplazamiento no necesita ser directo (o sea que "d" no necesariamente es la distancia recorrida por el móvil. Más bien d es la distancia que separa los puntos inicial x_1 y final x_2 del trayecto).

Conviene tener presente que si la fuerza (constante) F está en la misma dirección que el desplazamiento Δx , entonces el trabajo es positivo. En caso contrario es negativo.

(B) El trabajo de la fuerza gravitatoria terrestre cerca de la Tierra, o sea del peso "mg", se obtiene como un caso particular de la fórmula (9), ya que el peso es una fuerza constante. Poniendo en la fórmula $W = \pm F d$ los valores

$$F = mg \quad \text{y} \quad d = h$$

donde h es el desnivel vertical entre las posiciones inicial y final del cuerpo, tenemos

Trabajo del peso cerca de la Tierra	
(10)	$W = -mg \Delta x$ $W = \pm mgh$ Eje X vertical hacia arriba Signo "+" si el objeto baja; "-" si sube.

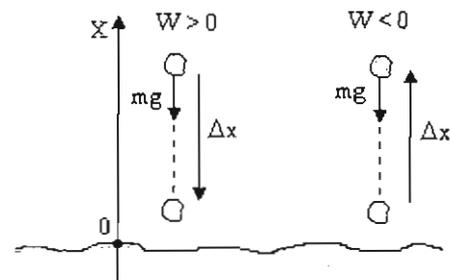


Fig. 9

(C) Calculemos el trabajo realizado por una fuerza de fricción de magnitud constante.

Considere un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal áspera (Fig. 10).

La magnitud de la fricción es constante, igual a $f = \mu N = \mu mg$. Sin embargo, el trabajo de la fricción no viene dado por la fórmula (9) porque la dirección de la fricción es en general variable, y ello ocasiona que la fricción no sea una fuerza constante. De hecho la fricción cinética f depende de la velocidad v en la forma

$$f = -\text{sgn}(v) \cdot f, \quad \text{con } f = |f| \quad (\text{ec. (5)-p6})$$

En otros términos, $f = -\mu mg$ si el móvil se mueve en dirección $+X$, y $f = \mu mg$ si lo hace en la dirección $-X$.

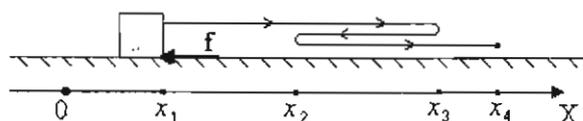


Fig. 10

El bloque se mueve directamente de x_1 a x_3 ; allí regresa hasta x_2 , y luego vuelve a invertir su movimiento hasta x_4 . En todo el camino existe fricción sobre el bloque, de magnitud constante. Es válido aplicar la fórmula (9) *por tramos* en los que la dirección de la fricción no cambie. En cada tramo el trabajo de la fricción es negativo y de magnitud igual al producto de “ f ” por la longitud del tramo considerado. Entonces el trabajo desde x_1 hasta x_4 a lo largo del camino mostrado en la Fig. 10 es

$$W = -f \cdot (|x_3 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_2|)$$

Generalizando tenemos la siguiente fórmula:

Trabajo de la fricción cinética		
(11)	$W = -fL$	$W < 0$ siempre. $f = \mu N$ es la magnitud de la fricción y L es la distancia total recorrida.

Suponemos que la superficie sobre la que se desliza el cuerpo está fija. (Consulte el Ejemplo 10 en la pág. 14.)

(D) Trabajo de un resorte elástico.

El trabajo de la fuerza elástica de un resorte es, con $F = -kx$,

$$(12) \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -\left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2\right) = -\Delta\left(\frac{1}{2} kx^2\right)$$

Para usar esta expresión tal como está es preciso colocar el origen del eje X en el punto de longitud natural del resorte, puesto que es en esta

situación que la expresión de la fuerza es “ $-kx$ ”. Pero conviene más poner este resultado en una forma “invariante”, esto es, que no dependa de dónde se coloque dicho origen (así lo hemos hecho con los trabajos calculados anteriormente). Para ello basta simplemente con escribir (12) en términos de la *deformación* del resorte, cantidad geométrica cuyo significado es independiente del sistema de coordenadas:

Trabajo de un resorte elástico

(13)	$W = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2)$	δ es la deformación del resorte.
------	---------------------------------------	---

Debido a que la deformación aparece al cuadrado en (13), el trabajo para deformación δ es el mismo tanto para elongación como para contracción del resorte.

(E) El trabajo de la fuerza gravitatoria lejos de la Tierra es (usando la ec. (3)-p6):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{GM_T m}{x^2}\right) dx = \left[\frac{GM_T m}{x}\right]_{x_1}^{x_2} = GM_T m \Delta\left(\frac{1}{x}\right)$$

Su expresión en forma invariante es

Trabajo de la fuerza de atracción terrestre lejos de la Tierra

(14a)	$W = GM_T m \Delta\left(\frac{1}{d}\right)$	“ d ” es la distancia de la partícula de masa “ m ” al centro de la Tierra.
-------	---	---

Recuerde que la aceleración de caída libre se puede expresar como

$$g = \frac{GM_T}{R^2}$$

de modo que el trabajo (14) se puede poner también:

$$(14b) \quad W = mg \cdot R^2 \Delta\left(\frac{1}{d}\right)$$

9.5. Interpretación gráfica del trabajo en una dimensión

En el espacio cartesiano abstracto $x-F$, el trabajo entre x_1 y x_2 es el "área" bajo el gráfico de $F(x)$ contra x , medida en newton-metro o joule.

Ejemplo 1. Calcular el trabajo entre $x = 0$ y $x = 6$ de la fuerza cuyo gráfico se muestra en la Fig. E1.

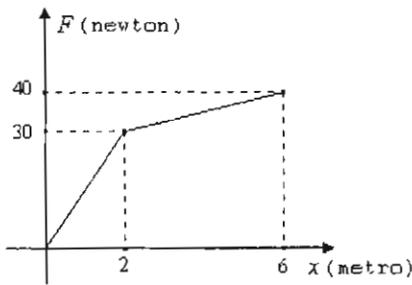


Fig. E1

$$W = 0.5 (2)(30) + 0.5 (70)(4) = 170 \text{ (J)}$$

<Nota. El área del trapecio entre $x = 2$ y $x = 4$ es la semisuma de las bases (igual a $0.5(30 + 40)$) por la altura (igual a 4).>

Ejemplo 2. Una fuerza F depende cuadráticamente de la posición, tal que el gráfico F vs x es como se muestra en la Fig. E2a (la curva es una parábola). Calcular el trabajo de la fuerza desde $x = 0$ m hasta $x = 6$ m.

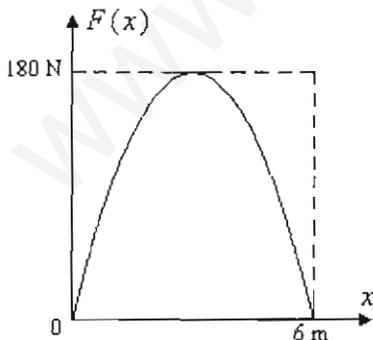


Fig. E2a

Calcularemos este trabajo primero con el método directo y luego con el "método turbo".

Tomando en cuenta que la parábola pasa por el

origen, y que su concavidad es hacia abajo, proponemos la siguiente función para la fuerza:

$$F(x) = C_1 x - C_2 x^2$$

Las constantes C_1 y C_2 las evaluamos como sigue:

- En $x = 3$, $F = 180$, o sea

$$180 = 3 C_1 - 9 C_2$$

Simplificando,

$$(r1) \quad 60 = C_1 - 3 C_2$$

- La pendiente de la parábola es 0 en $x = 3$, o sea

$$\text{Pendiente: } \frac{dF}{dx} = C_1 - 2C_2 x$$

$$(r2) \quad 0 = C_1 - 6 C_2$$

Resolviendo (r1) y (r2) hallamos

$$C_1 = 120, \quad C_2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = 120x - 20x^2$$

Entonces

$$W(0 \rightarrow 6) = \int_0^6 (120x - 20x^2) dx = 720 \text{ (J)}$$

El segundo método es bastante más rápido. Sabemos que el área de una parábola inscrita en un rectángulo es igual a los $2/3$ del área del rectángulo, de modo que el área bajo la curva $F(x)$ vs x es

$$W = \frac{2}{3} (6)(180) = 720 \text{ (J)}$$

Y si $F(x)$ variase como una semielipse, ¿cuál sería su trabajo? (Fig. E2b). (Sugerencia: el área de una elipse de semiejes a y b es πab . Resp. $W = 848.23 \text{ J}$).

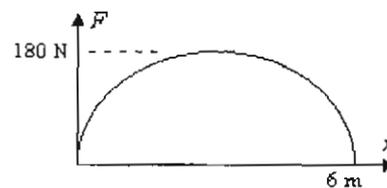


Fig. E2b

9.6. Trabajo cuasiestático

Efectuar un trabajo sobre un cuerpo es ejercerle una fuerza a lo largo de una distancia. Dependiendo de los apoyos del cuerpo, o de la forma como se aplique la fuerza, el efecto de este trabajo puede ser el acelerar al cuerpo, que es el caso más común, o deformarlo, o simplemente trasladarlo de un lugar a otro sin imprimirle velocidad. Este traslado se efectuaría muy lentamente, de tal modo que la velocidad del cuerpo durante el mismo fuese prácticamente nula.

En este último caso el trabajo se denomina *cuasiestático*, conforme a la siguiente definición:

Trabajo cuasiestático	
(15)	El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo se denomina <i>cuasiestático</i> cuando el desplazamiento del cuerpo durante la acción de la fuerza se lleva a cabo con velocidad prácticamente nula.

Se dice que el cuerpo está en todo punto durante el traslado en un estado de "equilibrio dinámico" (la fuerza total sobre él es nula o prácticamente nula).

Ejemplo 3. Comparar el trabajo cuasiestático necesario para elevar una pesa P directamente o mediante los sistemas de poleas mostrados en las Figs. E3a,b,c.

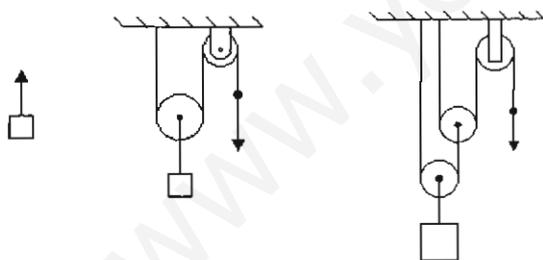


Fig. E3a

Fig. E3b

Fig. E3c

(a) Directamente (Fig. E3a).

Aplicamos a la pesa una fuerza apenas mayor que su peso P , elevándola muy lentamente una altura h . El trabajo necesario es

$$W = P h \quad (\text{con } P = mg)$$

(b) Por el sistema de poleas de la Fig. E7b.

En este caso se requiere una fuerza $P/2$ para

izar la pesa, pero la distancia que baja el punto de aplicación de dicha fuerza debe ser $2h$ para que la pesa suba h . Entonces el trabajo que debemos efectuar sobre la cuerda 1 es

$$W = \frac{P}{2} \cdot 2h = Ph$$

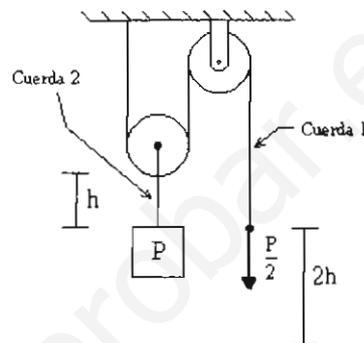


Fig. E3d

Note que este es el mismo trabajo que efectúa la cuerda 2 sobre el bloque, ya que la tensión en esta cuerda es P , y el desplazamiento del bloque es h .

(b) Por el sistema de poleas de la Fig. E3c.

Por análogas razones, el trabajo en el caso del dispositivo de la Fig. E3c es el mismo,

$$W = Ph$$

La Fig. E3e muestra las tensiones en las diversas cuerdas, y los desplazamientos requeridos.

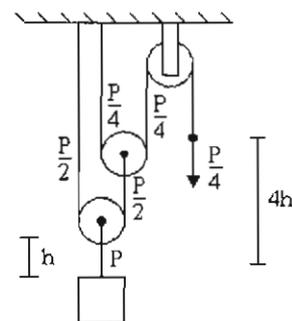


Fig. E3e

Ejemplo 4. Calcular el trabajo cuasiestático necesario para alargar " δ " metros un resorte, partiendo de su longitud natural.



Fig. E4

El proceso consiste en aplicar en el extremo libre del resorte una fuerza que en todo momento equilibre la propia fuerza del resorte. Cuando la elongación del resorte es x , la fuerza del resorte es

$-kx$, y la fuerza externa que debe aplicarse es por lo tanto $+kx$. El trabajo de esta fuerza es

$$W = \int_0^{\delta} kx \, dx = \frac{1}{2} k\delta^2$$

Ejemplo 5. El siguiente ejemplo de trabajo cuasi-estático concierne a un tema de Termodinámica.

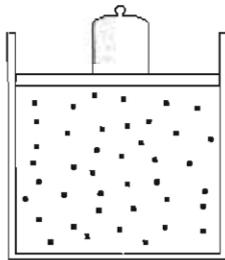


Fig. E5

Consideremos un gas en equilibrio termodinámico, confinado en un recipiente (Fig. E5). La presión del gas iguala la debida a la pesa sobre el émbolo.

Aumentemos la presión del gas colocando sobre el émbolo una pesa adicional mucho muy pequeña. Entonces el volumen del gas disminuirá en una cantidad muy pequeña "dV". Suponiendo que el émbolo baja una distancia "dx", y que el área del mismo es "A", tendremos que $dV = A \, dx$.

El trabajo realizado por la pesa sobre el gas (a través de la fuerza normal de contacto F con el émbolo) en este pequeño desplazamiento es

$$F \, dx = F \frac{dV}{A} = P \, dV$$

donde hemos introducido la presión del gas, dada por

$$P = \frac{F}{A}$$

En tal proceso "cuasiestático", en el que se lleva al gas desde un volumen inicial V_1 hasta uno final V_2 , el trabajo realizado es entonces

$$(16) \quad W = \int_{V_1}^{V_2} P \, dV$$

A lo largo de este proceso el gas adopta una sucesión de estados de equilibrio.

9.7. Potencia en una dimensión

Cuando un cuerpo sometido a una fuerza F se mueve un trecho "dx", la fuerza efectúa sobre él un trabajo $F \, dx$. Supongamos que el cuerpo tarda "dt" en desplazarse "dx", o sea que el trabajo se efectúa en un tiempo "dt". Entonces el trabajo por unidad de tiempo entregado por la fuerza es

$$\frac{F \, dx}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv$$

cantidad que se denomina la **potencia instantánea** suministrada por la fuerza.

Potencia en una dimensión.		
(17)	$P = Fv$	La potencia instantánea es el producto de la fuerza y la velocidad instantáneas.

Esta cantidad depende en general del instante t considerado, así que la potencia P suministrada en el instante t , denotada con $P(t)$, es el trabajo por unidad de tiempo efectuado por la fuerza sobre el cuerpo en dicho instante.

El trabajo de una fuerza en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, en términos de su potencia $P(t)$, viene dado por

$$(18) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \, dt$$

La unidad física de potencia es la de trabajo dividida por la de tiempo, o sea

$$\frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \frac{J}{s} = W = \text{watt}$$

Ejemplo 6. Un alpinista que pesa 80 kg escala una montaña de 8000 m de altura. Para ello las fuerzas de sus músculos realizan un trabajo de elevación "mgh", igual a

$$W = 80 \, \text{kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 8000 \, \text{m} = 6.272 (10^6) \, \text{J}$$

Usando la equivalencia

$$1 \, \text{J} = 1 \, \text{watt} \cdot \text{seg} = \frac{\text{kilowatt}}{1000} \cdot \frac{\text{hora}}{3600}$$

$$= 0.277 (10^{-6}) \, \text{kilowatt-hora},$$

este trabajo es igual a

$$W = 1.74 \text{ kW-h}$$

El costo del kW-h anda por los \$2.00, de modo que el costo de este trabajo anda por los \$4.00. Barato.

Ejemplo 7. La potencia suministrada a un cuerpo varía con el tiempo según el gráfico de la Fig. E7. Calcular el trabajo realizado sobre el cuerpo desde $t = 0 \text{ s}$ hasta $t = 10 \text{ s}$.

El trabajo se obtiene con la integral (18):

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

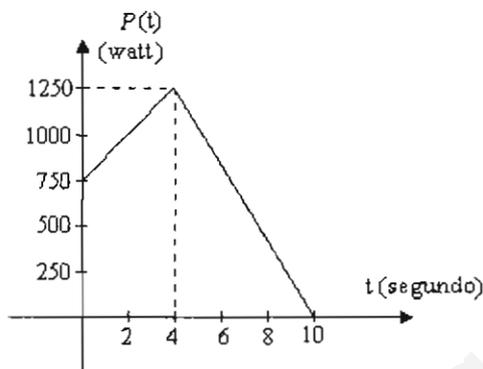


Fig. E7

La integral es el "área" bajo la curva $P(t)$ vs t , medida en watt-segundo, o joule.

El área del trapecio entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 4 \text{ s}$ es

$$\frac{1}{2} (750 + 1250) \cdot 4 = 4000 \text{ (J)}$$

El área del triángulo entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 10 \text{ s}$ es

$$\frac{1}{2} (6)(1250) = 3750 \text{ (J)}$$

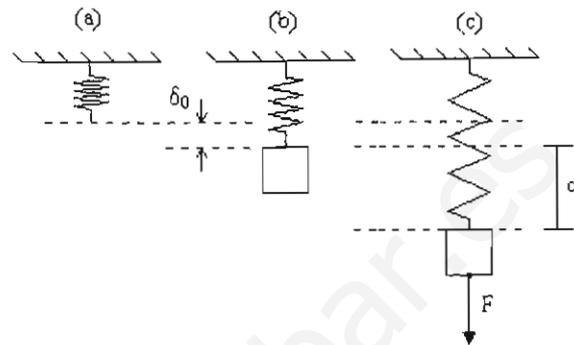
Por lo tanto, el trabajo es

$$W = 4000 \text{ J} + 3750 \text{ J} = 7750 \text{ J}$$

9.8. Ejemplos

Ejemplo 8. Un bloque de masa m está inicialmente en equilibrio, suspendido de un resorte lineal de constante k . En esta situación se le aplica una fuerza constante F dirigida hacia abajo (Véase la Fig. E8a,b,c).

Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el bloque cuando éste se desplaza una distancia " d " hacia abajo.



Figs. E8a,b,c

Aplicaremos las siguientes fórmulas:

Trabajo de una fuerza constante: $W = \pm F d$

Trabajo del peso: $W = \pm mgh$

Trabajo de un resorte lineal: $W = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2)$

Favor de tener presente qué significa cada símbolo en estas fórmulas (Son las ecs. (9)-p8, (10)-p8 y (13)-p9).

En la Fig. E8a está el resorte solo, en su configuración inextendida. En la situación de equilibrio de la Fig. E8b el resorte tiene una elongación δ_0 que se calcula de la condición de equilibrio de fuerzas Resorte-Tierra, o sea " $k \delta_0 = mg$ ". Es decir, la elongación antes de aplicar F es

$$(r1) \quad \delta_0 = \frac{mg}{k}$$

En la situación final (Fig. E8c) la elongación del resorte es " $\delta_0 + d$ ". Ya con las elongaciones inicial y final podemos calcular el trabajo del resorte como

$$-\frac{1}{2} k [(\delta_0 + d)^2 - \delta_0^2] = -\frac{1}{2} k (2d\delta_0 + d^2)$$

Usando (r1) se simplifica a

$$W_{\text{res}} = -mgd - \frac{1}{2} kd^2$$

Por otra parte, el trabajo del peso es

$$W_{\text{peso}} = mgd$$

(positivo porque tanto el peso como el desplazamiento están dirigidos hacia abajo.)

Finalmente, el trabajo de la fuerza constante es

$$W_F = F d$$

(positivo por la misma razón concerniente al peso.)

El trabajo de la fuerza total es entonces

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= W_{\text{res}} + W_{\text{peso}} + W_F = \\ &= -mgd - \frac{1}{2} k d^2 + mgd + Fd \end{aligned}$$

o sea

$$W_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} k d^2 + Fd \quad (\text{independiente de } \delta_0)$$

Ejemplo 9. A un bloque de masa 6 kg que está sujeto a un resorte de constante $k = 200 \text{ N/m}$, inicialmente no deformado, se le da un tirón con una fuerza sostenida de 100 N. Hay fricción bloque \leftrightarrow mesa, de coeficiente cinético $\mu = 0.2$. Calcular el trabajo de la fuerza total horizontal cuando el bloque ha recorrido una distancia de 0.25 m.

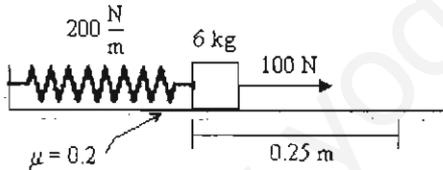


Fig. E9

Trabajo de la fuerza constante de 100 N:

$$W_1 = 100 \text{ N} \times 0.25 \text{ m} = 25 \text{ J}$$

Trabajo del resorte entre $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = 0.25 \text{ m}$:

$$W_2 = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2) = -\frac{1}{2} 200 (0.25)^2 \text{ J} = -6.25 \text{ J}$$

Trabajo de la fricción:

$$W_3 = -f \times 0.25 = 0.2 \times 6 \times 9.8 \times 0.25 = -2.94 \text{ (J)}$$

El trabajo de la fuerza total horizontal total es

$$W = 25 \text{ J} - 6.25 \text{ J} - 2.94 \text{ J} = 15.81 \text{ J}$$

Ejemplo 10. Un camión que viaja a velocidad constante $v_0 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ transporta un embalaje de 100 kg. En cierto momento t_0 el chofer aplica los frenos, que desaceleran el camión con $a = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Calcular el

trabajo de la fuerza de fricción sobre el embalaje desde t_0 hasta que el camión se detiene, para los siguientes valores de los coeficientes de fricción estática y cinética: $\mu_s = 0.25$, $\mu_c = 0.20$.

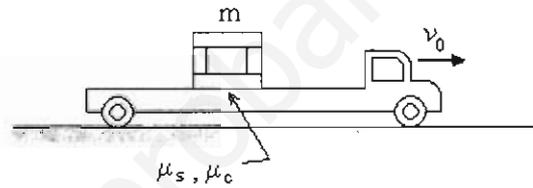


Fig. E10

En el momento que empieza la desaceleración se genera una fuerza de fricción sobre el embalaje, pues este tiende a deslizarse sobre la plataforma del camión. Ahora bien, puede suceder que el embalaje no se deslice sobre la plataforma (lo que puede ocurrir si la desaceleración es pequeña y/o el coeficiente de fricción estático μ_s es grande), o que sí se deslice. Tenemos que investigar estas posibilidades.

Para que el embalaje no se deslice su desaceleración debe ser la misma que la del camión. La fuerza que frena al embalaje es la de fricción embalaje-plataforma, que para producir una desaceleración de 2 m/s^2 a una masa de 100 kg debe ser igual a

$$f = m a = 100 \text{ kg} \cdot \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -200 \text{ N}$$

Si la fricción máxima que se genera en el contacto embalaje-plataforma es menor que los 200 N necesarios, el embalaje resbala. Calculemos la fricción máxima:

$$\begin{aligned} f_{\text{máx}} &= \mu_s N = \mu_s mg = \\ &= 0.25 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 245 \text{ N} \end{aligned}$$

Como $f_{\text{máx}} > |f|$, vemos que *no hay deslizamiento* y que la fuerza que frena al embalaje es la fricción *estática*, cuyo valor se ajusta a los 200 N requeridos.

Para calcular el trabajo de la fricción estática debemos calcular la distancia que recorre el camión antes de detenerse. La velocidad inicial es

$$v_0 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 54 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y la final es 0, así que usando la ecuación $\Delta v^2 = 2a\Delta x$ tenemos

$$0^2 - 15^2 = 2 \cdot (-2) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = 56.25 \text{ m}$$

Esta es también la distancia que recorre el embalaje, de modo que el trabajo de la fricción es

$$W = f\Delta x = -200 \text{ N} \cdot 56.25 \text{ m} = -11250 \text{ J}$$

Ejemplo 11. El sistema de la Fig. E11 se abandona desde el reposo, con $m_1 = 8 \text{ kg}$ y $m_2 = 4 \text{ kg}$. No existe fricción en ninguna parte. Calcular, para un desplazamiento de $d = 5 \text{ m}$ del bloque m_1 , el trabajo hecho por la tensión de la cuerda sobre dicho bloque y sobre el bloque m_2 . Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el bloque m_2 .

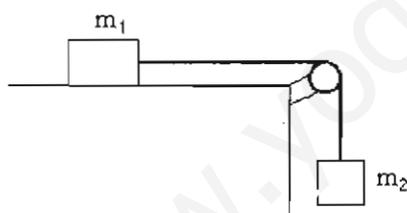


Fig. E11

Debemos calcular primeramente la tensión de la cuerda. La aceleración común de los bloques es

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{4}{8 + 4} 9.8 = 3.267 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Con ésta podemos calcular la tensión T como la fuerza que acelera al bloque m_1 , o sea

$$T = m_1 a = 8 \text{ kg} \cdot 3.267 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 26.14 \text{ N}$$

El trabajo de la cuerda sobre m_1 es entonces

$$W_1 = T d = 26.14 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 130.7 \text{ J}$$

Como el bloque m_2 se desplaza también 5 m , el trabajo de la cuerda sobre él es el mismo, excepto por el signo:

$$W_2 = -W_1$$

El signo menos proviene de que el bloque m_2 baja y la tensión sobre él se dirige hacia arriba. Notemos pues que la suma de los trabajos de la cuerda sobre ambos bloques es igual a cero.

La fuerza total sobre el bloque m_2 consta de su peso, 39.2 N , y de la fuerza de tensión, 26.14 N , en las direcciones indicadas en la Fig. E11b. Entonces el trabajo de la fuerza total sobre este bloque es

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= -26.14 \times 5 \\ &\quad + 39.2 \times 5 \\ &= 65.3 \text{ (J)} \end{aligned}$$

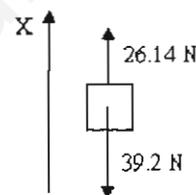
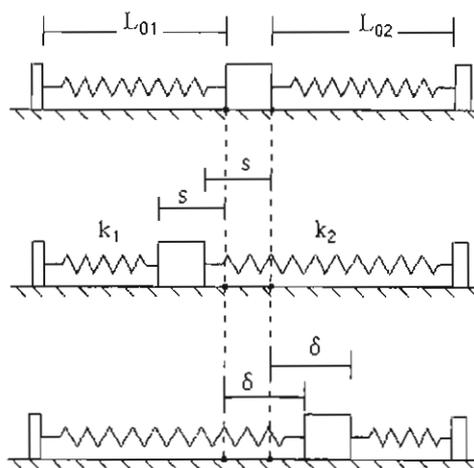


Fig. E10b

Ejemplo 12. Se tiene un bloque de masa m unido a dos resortes. En la situación inicial los resortes, de constantes elásticas k_1 y k_2 , no están deformados. Existe fricción bloque \leftrightarrow superficie, de coeficiente cinético μ . El bloque se desplaza una distancia " s " hacia la izquierda y luego se suelta. Calcular el trabajo realizado por la fuerza total horizontal sobre el bloque cuando la deformación del resorte izquierdo alcanza por primera vez una elongación δ_1 .



Figs. E12a,b,c

En la situación de la Fig. E12b, el resorte izquierdo tiene una contracción $-s$, y el derecho una elongación s . En la transición a la configuración de la Fig. E12c, el resorte izquierdo obtuvo elongación " δ " y el derecho contracción " $-\delta$ ". Por lo tanto, el trabajo del resorte izquierdo es

$$W_{izq} = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2) = -\frac{1}{2} k (\delta^2 - (-s)^2)$$

y el del resorte derecho es

$$W_{der} = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2) = -\frac{1}{2} k ((-\delta)^2 - s^2)$$

El trabajo conjunto de los resortes es

$$W_{res} = -k (\delta^2 - s^2)$$

Por otra parte, el trabajo de la fricción cinética es, con $f = mN = \mu mg$,

$$W_f = -fL = -\mu mg (s + \delta)$$

La suma de estos dos trabajos es lo que se pide.

9.9. Problemas

1. Una partícula sometida a varias fuerzas se desplaza desde la posición $x = 12$ m hasta $x = 23$ m; luego vira hasta la posición final $x = 16$ m. Una de las fuerzas sobre la partícula es constante y vale 20 N. Calcular el trabajo de esta fuerza entre la primera y la última posición.

Resp. 80 J

2. Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$F(x) = 5x^3 - 2x$$

desde $x = 1$ hasta $x = 3$; desde $x = -1$ hasta $x = 1$; y desde $x = -1$ hasta $x = 3$ (F y x en joule y metro, respectivamente).

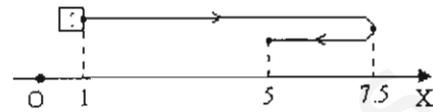
Rcsp. 92 J; 0 J; 92 J.

3. Una partícula se mueve en una recta bajo la acción de varias fuerzas. Una de las fuerzas depende de la posición x y la velocidad v en la forma

$$F = 6 \operatorname{sgn}(v) \cdot x$$

donde "sgn" es la función "signo". Calcular el trabajo de F en un trayecto que consta de dos tramos, uno

recorrido en dirección +X desde $x = 1$ hasta $x = 7.5$, y otro tramo de regreso recorrido en dirección -X desde $x = 7.5$ hasta $x = 5$. (Unidades arbitrarias.)

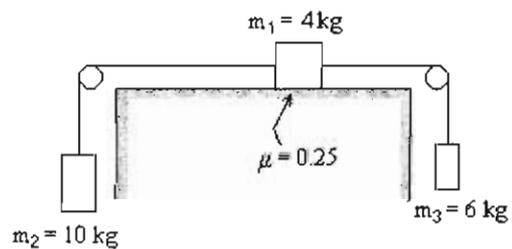


Resp. 259.5.

4. Un cuerpo está sujeto al extremo de un resorte de constante $k = 200$ N/m. El otro extremo del resorte está fijo a una pared. Calcular el trabajo del resorte sobre el cuerpo cuando aquel pasa de:

- (a) Una contracción de 0.2 a una elongación de 0.5.
- (b) Una elongación de 0.2 a una elongación de 0.5.
- (c) Una contracción de 0.2 a una elongación de 0.5. (valores en metros).

5. El bloque m_1 de la figura se desplaza aceleradamente hacia la izquierda entre dos posiciones del bloque m_1 que distan 0.5 m. Existe fricción con la mesa, de coeficiente cinético $\mu = 0.25$. Calcular el trabajo realizado por las cuerdas sobre el bloque m_1 , así como el trabajo de la fricción entre dichas posiciones.

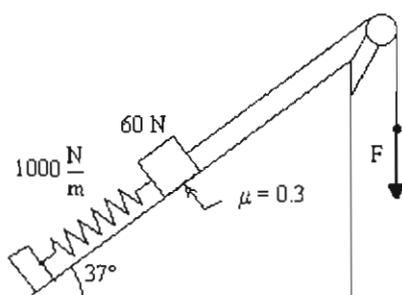


Sugerencia. La aceleración del sistema es

$$a = \frac{m_2 - m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Resp. 42.5 g; -34.5 g; -g

6. El sistema mostrado en la figura está inicialmente en equilibrio, con $F = 100$ N. A partir de esta situación se empieza a incrementar la fuerza F paulatinamente, hasta que la deformación del resorte llcga a 1.225 m.



Calcular el trabajo cuasiestático realizado sobre el bloque por el resorte, la cuerda y la fricción del plano. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza F sobre la cuerda.

Sugerencia. Resuelva el problema de equilibrio inicial con objeto de obtener la deformación correspondiente del resorte.

Resp. -299 J ; 275 J ; -0.396 J . 275 J

7. El trabajo cuasiestático necesario para comprimir un gas desde un volumen V_1 hasta otro V_2 viene dado por la integral

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

donde P es la presión del gas. Un gas ideal es sometido a un proceso descrito por la ecuación

$$P = \frac{C}{V^\gamma}$$

donde C y γ son constantes. Calcular el trabajo cuasiestático necesario para comprimir el gas desde un volumen V_1 hasta V_2 .

Resp. $C \frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

CAPÍTULO 10

ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA PARA UNA SÓLA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Dada la fuerza total sobre una partícula, así como su posición y velocidad en un tiempo particular t_0 , las leyes de Newton nos permiten calcular su movimiento, esto es, obtener su posición y velocidad para cualquier tiempo anterior o posterior a t_0 . En este capítulo expondremos otro método para resolver tal problema general, basado en el concepto de trabajo, ya introducido, y uno nuevo: la energía cinética.

10.1. Teorema Trabajo-Energía cinética en una dimensión

La expresión matemática vectorial de la segunda ley de Newton es

$$\mathbf{F}_T = m \mathbf{a}$$

donde \mathbf{F}_T es la fuerza total sobre una partícula de masa m y \mathbf{a} es la aceleración de la misma. En una dimensión, esta expresión se escribe

$$(19) \quad F_T = m a$$

donde F_T y a son las *componentes* X (únicas) de los vectores \mathbf{F}_T y \mathbf{a} .

La expresión matemática de la energía mecánica nació del problema de resolver la ecuación (19). Ésta es una ecuación diferencial, como se advierte poniéndola en la forma

$$(20) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_T(t, x, \frac{dx}{dt}) \quad \left(a = \frac{d^2 x}{dt^2} \right)$$

Hemos supuesto aquí que la fuerza total depende de todo: del tiempo "t", de la posición x y de la velocidad $v = \frac{dx}{dt}$. El problema consiste en encontrar la función

$x(t)$ que satisface la ecuación diferencial (20), dados los valores de x y v en un tiempo particular t_0 . Expondremos a continuación un método de resolución, de utilidad práctica cuando la fuerza total F_T depende exclusivamente de la posición x .

Escribamos el producto "ma" como una derivada con respecto a la posición x ,

$$(21) \quad ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot v = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

(Se aplicó la regla de la cadena a la derivada dv/dt).

Una breve pausa para bautizar la cantidad que está entre paréntesis en (21):

Energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v

(22)	$K \equiv \frac{1}{2} mv^2$	Siempre positiva.
------	-----------------------------	-------------------

Esta definición subsiste en el ámbito del movimiento plano arbitrario, al cambiar v por $v = |v|$.

Usando (19), (21) y (22) vemos que la segunda ley de Newton se puede expresar también así:

Otra forma de la segunda ley de Newton

(23)	$F_T = \frac{dK}{dx}$
------	-----------------------

La fuerza total F_T es la tasa de variación de la energía cinética con la distancia recorrida. Si una partícula se desplaza dx bajo la acción de la fuerza total F_T , su energía cinética varía en $dK = F_T dx$.

Ahora integremos la ecuación (23) entre dos posiciones x_1 y x_2 arbitrarias del movimiento,

$$(24) \quad \int_{x_1}^{x_2} F_T dx = \int_{x_1}^{x_2} dK$$

La integral del lado izquierdo no es otra cosa que el trabajo efectuado por la fuerza total F_T entre x_1 y x_2 , denotado con " W_{ext} ".

La integral del lado derecho de (24) es simplemente el cambio de energía cinética entre las posiciones consideradas. Si v_1 y v_2 son las velocidades en estas posiciones, este cambio es

$$(25) \quad \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Hemos arribado con este procedimiento al siguiente teorema:

Teorema trabajo-energía cinética		
(26)	$W_{\text{ext}} = \Delta K$	El trabajo realizado por la fuerza total F_T entre dos posiciones arbitrarias x_1 y x_2 es igual al cambio de energía cinética entre ambas posiciones.

Advertimos que el teorema es útil si la fuerza total F_T depende exclusivamente de la posición x , de tal manera que la integral en (24) pueda efectuarse sin rodeos. Por otra parte, la ecuación (26) no resuelve completamente el problema de movimiento, siuo que proporciona una relación entre la velocidad y la posición, $v = v(x)$. Para obtener la posición como función del tiempo, $x = x(t)$, habría que efectuar una integración adicional, ahora de la relación $v(x) = \frac{dx}{dt}$

(por eso se dice que la ecuación (26) es solamente una "primera integral" de la ecuación $F_T = ma$). De todas maneras el teorema trabajo-energía cinética es sumamente útil en problemas en que se desea relacionar directamente las posiciones con las velocidades, sin hacer intervenir el tiempo.

Las unidades de la energía cinética son las mismas que las de trabajo, o sea joules.

10.2. Ecuación de balance de energía

Vamos a vestir el teorema trabajo-energía cinética,

$$W_{\text{ext}} = \Delta K$$

con el atuendo de una "ecuación de balance de energía" (abreviada EBE).

En estos balances están implicados dos sistemas, que en el contexto actual son:

- Un sistema que consta de una sola partícula, cuya "energía mecánica", o "energía", a secas, es puramente su energía cinética K .
- El sistema externo, compuesto por todos aquellos cuerpos que interactúan con la partícula. Estos

cuerpos son los responsables de la fuerza total F_T sobre la misma.

<Nota. Un nombre alternativo para la fuerza total F_T es fuerza externa total; por eso hemos indicado su trabajo con " W_{ext} "¹.>

Nos auxiliamos del diagrama de flujo de energía mostrado en la Fig. 11, centrandó nuestra atención en el sistema "partícula", el cuadro a la derecha.

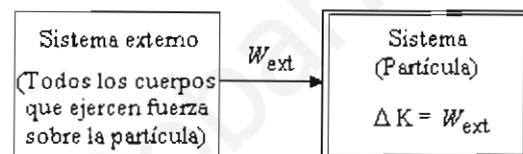


Fig. 11

Cuando la partícula está en x_1 tiene cierta energía cinética K_1 . Las fuerzas que sufre (que totalizan F_T) la jalen y/o empujan todo el camino hasta x_2 . En este trayecto la energía cinética de la partícula va variando, y toma en x_2 un nuevo valor K_2 . Decimos que hubo un "flujo" de energía, en "forma" de trabajo W_{ext} , desde el sistema externo hacia el sistema-partícula. La energía que ingresó a este sistema-partícula, en cantidad W_{ext} , quedó acumulada en él en calidad de energía cinética. No hubo desvíos: todo el trabajo se "convirtió" o "transformó" en energía cinética: $W_{\text{ext}} = \Delta K = K_2 - K_1$.

En el diagrama anterior, W_{ext} representa el trabajo neto sobre la partícula.

Hemos definido el trabajo de una fuerza sobre una partícula mediante la integral $\int \vec{f} \cdot d\vec{x}$. Según esta definición, un trabajo positivo es hecho por el exterior sobre la partícula, y uno negativo es hecho por la partícula sobre el exterior². Si a fin de cuentas W_{ext} es menor que cero, entonces la partícula netamente hizo

¹ Una partícula no tiene partes y por lo mismo es un sistema sin fuerzas internas. Todas las fuerzas que actúan sobre una partícula son necesariamente externas.

² La relación entre el signo del trabajo y la dirección del flujo de energía es convencional (pues nada nos impide definir el trabajo como el negativo de la integral $\int \vec{f} \cdot d\vec{x}$). En mecánica un trabajo positivo es uno hecho por el exterior sobre el sistema. En termodinámica se prefiere la convención opuesta: trabajo positivo es el que hace el sistema sobre el exterior.

trabajo sobre el exterior y el diagrama de energía correspondiente podría pintarse alternativamente así:

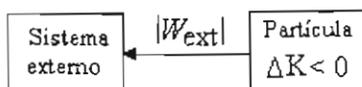


Fig. 12

(En estos diagramas se suele anotar junto a cada flecha la *magnitud* de la cantidad transferida, pues el *signo* de esta cantidad viene dado ya por la dirección de la flecha).

Es válido decir por ejemplo: “sobre la partícula se efectuó un trabajo de -34 J ”. Se entiende que realmente fue la partícula la que efectuó trabajo sobre el exterior, a costa de su energía cinética que debió disminuir. El asunto es meramente convencional. Es como si se dijera “gané en las carreras $-\$34$ ” en lugar de “perdí $\$34$ ”.

Consideremos un ejemplo. En la Fig. 13 el resorte está en su configuración de equilibrio cuando se aplica la fuerza constante F al bloque. ¿Cómo estuvieron los flujos de energía una vez que el resorte fue comprimido “ δ ” metros?

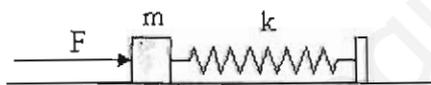


Fig. 13

Consulte su tarjeta-acordeón de trabajos y compruebe que:

La fuerza F efectuó un trabajo (positivo) sobre el bloque, igual a $F \delta$. El resorte hizo un trabajo *negativo* sobre el bloque, igual a $-(1/2)k\delta^2$. En virtud de tal signo negativo podemos decir alternativamente que fue el *bloque* el que efectuó un trabajo $(1/2)k\delta^2$ sobre el *resorte*. El trabajo de la fuerza F tiende a aumentar la energía cinética del bloque; el que hace el bloque sobre el resorte tiende a disminuirla.

En sistemas muy simples, como el formado por una sola partícula, no se gana mucho diferenciando entre trabajo hecho *sobre* la partícula o *por* la partícula. En la práctica uno habla siempre de trabajos hechos *sobre* la partícula, aunque estos trabajos sean negativos. Es decir, pensamos en términos de un diagrama de flujo como el de la Fig. 11, donde W_{ext} es el trabajo *neto*

sobre la partícula.

Existe una excepción importante a la regla de signos y flujos de energía, concerniente a un fenómeno de naturaleza no-mecánica: la disipación de energía mecánica por efecto de la fricción.

Consideremos un bloque de masa m que se mueve sobre una mesa horizontal áspera y que en cierto momento posee una velocidad v . Eventualmente esta velocidad se reduce a cero, es decir, el bloque llega a perder toda su energía cinética por efecto de la fricción.

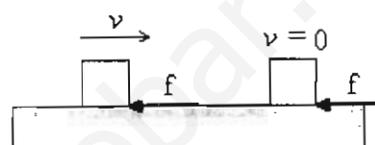


Fig. 14

Ahora bien, el trabajo de la mesa sobre el bloque (a través de la fricción) es negativo. ¿Es válido decir que realmente es el bloque el que efectuó trabajo sobre la mesa, a costa de su energía cinética?

No. El bloque no efectuó ningún trabajo sobre la mesa porque si bien ejerce una fuerza μmg sobre ésta (la reacción de la fricción), la mesa *no se ha movido*. Como no hay desplazamiento, no hay trabajo.

La fricción da lugar a una disipación irreversible de energía. La energía cinética que pierde el bloque se distribuye en un enorme número de moléculas constituyentes del bloque y de la mesa. Ambos cuerpos experimentan un ligero aumento de temperatura. Parte de la energía cinética perdida se transforma al fin y al cabo en energía interna, en energía sonora, en energía de radiación calorífica, etc.

Intervienen, pues, fenómenos que quedan fuera del ámbito de la mecánica³. Por este motivo, en el caso de la fuerza de fricción no cabe decir que el sistema físico realiza un *trabajo* sobre el exterior. Esta es la excepción mencionada; constituye una razón por la que conviene hablar siempre de trabajo *neto* sobre el sistema. Algo análogo ocurre con otros tipos de fuerzas “disipativas”, como por ejemplo la resistencia de un medio viscoso, $F(v) = -bv$; en el movimiento bajo esta clase de fuerza también hay pérdida de energía cinética del sistema, no asociada con la realización de un trabajo sobre el exterior.

³ El sistema bloque-mesa no es un sistema *mecánico*. En este tipo de sistemas todas las fuerzas internas deben ser conservativas. La fuerza bloque \leftrightarrow mesa, interna del sistema conjunto, no es conservativa.

10.3. Ejemplos

Presentaremos a continuación unos ejemplos de aplicación de la ecuación de balance de energía (EBE) para una sólo partícula.

Tenga presente lo siguiente:

La EBE $W_{\text{ext}} = \Delta K$ sirve para relacionar *posiciones* y *velocidades* del movimiento. Si bien la EBE es válida para cualquier clase de fuerza total F_T , su utilidad se restringe a fuerzas dependientes solamente de la posición.

La EBE se aplica entre dos posiciones convenientes x_1 y x_2 de la partícula. Debe calcularse el trabajo de todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre ella entre ambas posiciones. Entonces el " W_{ext} " es la suma de todos estos trabajos individuales. Por otra parte, el cálculo de ΔK es trivial en muchos casos.

Ejemplo 13. Una pelota de masa m se deja caer "libremente" (es decir, se desprecia la resistencia del aire) del reposo desde cierta altura h sobre el suelo. ¿Con qué velocidad llega a éste?

Evidentemente el problema se puede resolver con las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado, en particular, con la ecuación $\Delta v^2 = 2a \Delta x$:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 a (x_f - x_i)$$

Si colocamos el eje X como en la Fig. E13 tendremos que

$$a = -g, \quad x_i = h, \\ x_f = 0, \quad v_i = 0$$

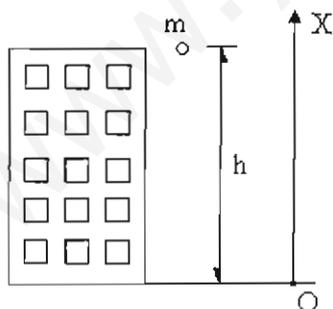


Fig. E13

Por lo tanto,

$$v_f^2 - 0^2 = 2 (-g) (0 - h)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

Alternativamente, con un enfoque de energía

tenemos:

Sistema = {Pelota}

Sistema externo = {Tierra}

Trabajo hecho por las fuerzas externas sobre la pelota (únicamente el peso):

$$W_{\text{ext}} = mgh$$

Cambio de energía cinética de la pelota:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

De la igualdad $W_{\text{ext}} = \Delta K$ se sigue la expresión ya encontrada para v_f . La Tierra invierte un trabajo mgh para acelerar a la pelota desde el reposo hasta la velocidad $\sqrt{2gh}$. Este es un "trabajo de aceleración".

Ejemplo 14. Desde una posición en donde el resorte tiene una elongación " δ_0 " se suelta el bloque de masa " m " mostrado en la Fig. E14. La mesa sobre la que se desliza el bloque es áspera, con coeficiente de fricción cinética μ relativo al bloque. Supongamos que eventualmente el resorte alcanza su configuración no deformada. ¿Qué longitud total recorrió el bloque hasta este punto?

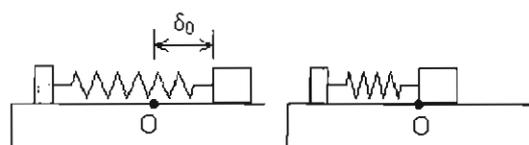


Fig. E14

Apliquemos la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta K$ entre las dos posiciones mostradas en la Fig. E14. La deformación pasa del valor δ_0 al valor 0; por lo tanto el trabajo del resorte es

$$-\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2) = -\frac{1}{2} k (0 - \delta_0^2) = \frac{1}{2} k \delta_0^2.$$

El trabajo de la fricción es $-\mu mgL$, donde L es la distancia total recorrida por el bloque. En virtud de que el cambio de energía cinética es $\Delta K = 0$ tenemos

$$\frac{1}{2} k \delta_0^2 - \mu mgL = 0$$

de donde

$$L = \frac{k\delta_0^2}{2\mu mg}$$

Nota importante. Hemos dicho que en el fenómeno de fricción cinética hay producción de calor, el cual es una clase especial de energía. Parecería que esta energía no está tomada en cuenta en la expresión $W_{\text{ext}} = \Delta K$, aplicada a casos que incluyan trabajo de la fuerza de fricción. Sin embargo, haciendo un análisis cuidadoso de la fuerza de fricción se puede demostrar que el trabajo de la fricción, " $W_f = -fL$ ", incluye esta componente de energía transmitida como calor. En lo que respecta al fenómeno puramente mecánico, entonces, podemos aplicar la ecuación de balance tal como lo hemos hecho en este ejemplo.

Ejemplo 15. Se desea calcular la *velocidad de escape* de un objeto en la Tierra. Esta velocidad es la mínima con que debe proyectarse el objeto verticalmente desde la superficie terrestre para que ya no regrese a la Tierra.

Nuestro "sistema", la partícula, está sometida únicamente a la fuerza gravitatoria terrestre, es decir, la Tierra es su "sistema externo". La EBE $W_{\text{ext}} = \Delta K$ se aplica entre dos puntos convenientes del movimiento, relacionados con los datos e incógnitas del problema.

Escojamos como primer punto aquel desde donde se proyecta el objeto. En este punto la distancia al centro de la Tierra es igual al radio de la misma, R , y la velocidad es la de escape, v_e , a determinar.

Queremos que la velocidad de proyección v_e mande a la partícula bastante lejos, teóricamente hasta el infinito y, dado que deseamos la *mínima* velocidad de proyección, que lo haga en la forma más económica posible, esto es que $v = 0$ en el infinito. Este es nuestro segundo punto.

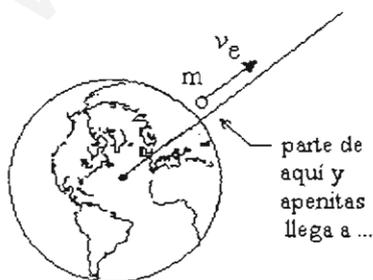


Fig. E15

Apliquemos ahora la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta K$ entre los dos puntos considerados. W_{ext} es el trabajo de la fuerza gravitatoria terrestre o sea, aplicando la ecuación (14a)-p9,

$$W_{\text{ext}} = GM_T m \Delta \left(\frac{1}{d} \right) = GM_T m \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right)$$

$$W_{\text{ext}} = - \frac{GM_T m}{R}$$

Por otra parte, el cambio de energía cinética es

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_e^2 = - \frac{1}{2} m v_e^2$$

Igualando W_{ext} a ΔK y despejando v_e obtenemos (en unidades S.I.)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{6.37 \cdot 10^6}}$$

$$v_e \approx 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

o bien

$$v_e \approx 40,320 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(La vuelta al mundo en 1 hora)

Las moléculas de la atmósfera terrestre se hallan en agitación térmica por la acción de los rayos solares. Sus velocidades están distribuidas de acuerdo con sus masas y la temperatura, y la velocidad media de estas moléculas atmosféricas es del orden de 1 km/s, bastante menor que la necesaria para que escaparan hacia el espacio exterior, privando a la Tierra de su atmósfera.

Qué respiro.

Ejemplo 16. Sobre un cuerpo de masa 4 kg que inicialmente está en reposo en $x = 0$ se aplica una fuerza F que depende de la posición x de acuerdo con el gráfico F vs x mostrado en la Fig. E16. Calcular la velocidad del cuerpo como función de x para $x \geq 40$ m.

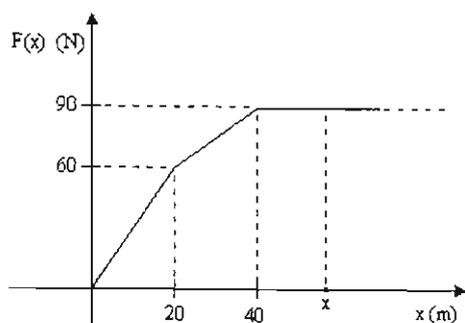


Fig. E16

El trabajo de F en el intervalo $[0, x]$ es el "área" bajo la curva F vs x (medida en N·m):

$$\int F dx = \frac{1}{2} (20)(60) + \frac{1}{2} (20)(75) + 90(x - 40)$$

Igualando a $\Delta K = \frac{1}{2} mv^2 = 2 v^2$ y despejando " v ",

$$v = \sqrt{45x - 1225} \quad (x \geq 40)$$

Ejemplo 17. Una bloque de masa m pende tranquilamente de un resorte elástico de rigidez k (Fig. E17). Se jala el bloque hacia abajo un trecho d y luego se suelta. ¿Qué velocidad v_0 tiene el bloque cuando pasa de subida por su posición inicial?

Lo primero que notamos es que en la situación "(0)", antes de jalar el bloque hacia abajo, el resorte tiene una elongación $\delta_0 = mg/k$, valor obtenido del equilibrio de fuerzas resorte-peso, o sea " $k \delta_0 = mg$ ".

El sistema {Bloque} tiene por sistema externo el sistema {Resorte, Tierra}, que son los cuerpos que actúan sobre él una vez soltado. Para calcular el trabajo W_{ext} entre las configuraciones "(1)" y "(2)" mostradas en la Fig. E17 notemos que la deformación del resorte pasa del valor $\delta_0 + d$ al valor δ_0 , y que el bloque sube una distancia d . De las fórmulas (10)-p8 y (13)-p9 tenemos entonces para el trabajo conjunto del resorte y la Tierra:

$$W_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} k [\delta_0^2 - (\delta_0 + d)^2] - mgd$$

Por otra parte, la velocidad pasa del valor 0 al valor v_0 , con lo que

$$\Delta K = \frac{1}{2} mv_0^2 - 0 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Igualando W_{ext} a ΔK y tomando en cuenta la relación

$$\delta_0 = \frac{mg}{k}$$

obtenemos

$$v_0 = d \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{independiente de } \delta_0)$$

<Nota. Otro modo de escribir este resultado es

$$v_0 = \omega_0 d$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del resorte.>

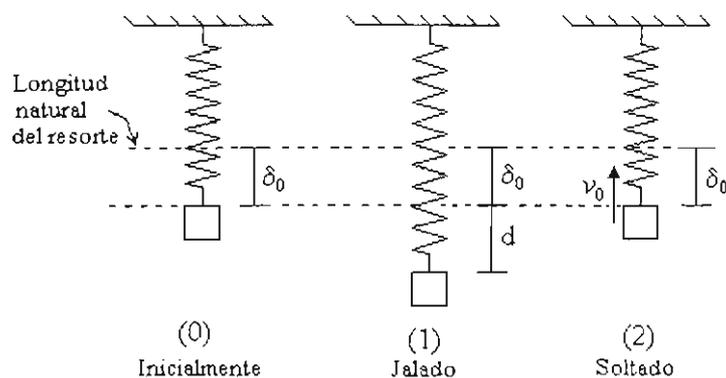


Fig E17

Ejemplo 18. Un carro de masa M que viaja a velocidad v va a ser frenado por un sistema de tres resortes. El resorte central tiene constante elástica k_1 y los otros dos k_2 . Calcular la longitud "s" de tal modo que la compresión de los resortes iguales sea igual a un valor dado " δ " cuando el carro se haya detenido.

Nota. Como demostraremos posteriormente, el peso del carro y la fuerza normal sobre él no afectan el resultado que obtendremos aquí.

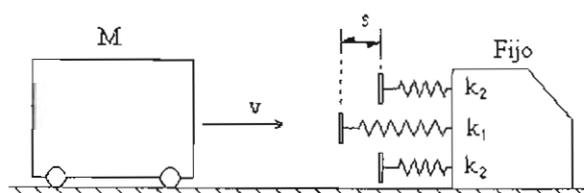


Fig. E18

En la situación inicial mostrada en la Fig. E18 la energía cinética del carro es

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

En la situación final la energía cinética es cero, de tal modo que el cambio de energía cinética del carro es

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v^2$$

Por otra parte, usando la fórmula

$$W = -\frac{1}{2} \Delta(\delta^2)$$

para el trabajo de un resorte tenemos:

Para el resorte largo la deformación pasa de 0 a $s + \delta$, y su trabajo es

$$W_1 = -\frac{1}{2} k_1 (s + \delta)^2$$

Para los resortes iguales la deformación pasa de 0 a δ , y el trabajo conjunto es

$$W_2 = -2 \frac{1}{2} k_2 \delta^2$$

Aplicando la EBE $W_{ext} = \Delta K$ obtenemos

$$-\frac{1}{2} k_1 (s + \delta)^2 - 2 \frac{1}{2} k_2 \delta^2 = -\frac{1}{2} m v^2$$

Simplificando se llega a

$$k_1 s^2 + 2k_1 \delta s + (k_1 + 2k_2) \delta^2 - m v^2 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática para "s", cuya raíz positiva es la solución del problema.

Nota. Para que la ecuación anterior no tenga raíces complejas, que corresponde a la situación en que los resortes iguales no llegan a comprimirse, se requiere que

$$s < \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{k_1 k_2} \cdot \frac{1}{2} m v^2}$$

como se puede demostrar imponiendo la condición de que el radicando que figura en la solución de la ecuación cuadrática sea mayor que cero.

10.4. Otra vez la potencia

En el Apartado 1.7 de la página 12 definimos la potencia instantánea suministrada por una fuerza F como el producto de la fuerza y la velocidad, o sea

$$[(17)] \quad P = F v$$

Ahora bien, si la fuerza considerada es la fuerza *total* sobre la partícula, entonces tenemos, según la ecuación (23)-p18,

$$[(23)] \quad F_T = \frac{dK}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación $P_T = F_T v$ tenemos

$$P_T = \frac{dK}{dx} v = \frac{dK}{dt}$$

donde hemos usado la relación

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}$$

Potencia suministrada por la fuerza total F_T		
(27)	$P_T = \frac{dK}{dt}$	La potencia de la fuerza total es la derivada de la energía cinética con respecto al tiempo.

Esta relación, que hemos demostrado ahora para una partícula en movimiento retilíneo, tendrá la misma forma para el movimiento de una partícula en un plano, como veremos.

Ejemplo 19. La fuerza motriz impulsa un auto con una potencia constante P . Suponiendo que el auto parte del reposo, describir su movimiento. Despreciar la resistencia del aire y suponer que no hay pérdidas por fricción.

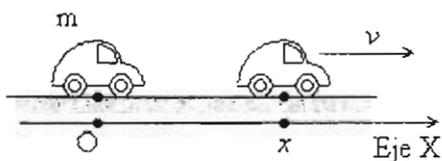


Fig. E19

Sea "m" la masa del vehículo. De la relación

$$P = Fv$$

tenemos que la fuerza que acelera el vehículo viene dada por la expresión

$$F = \frac{P}{v}$$

Notemos que esta fuerza no es constante, así que *la aceleración no es constante*. Calculemos la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo,

De (27) tenemos que

$$P dt = dK$$

Integrando esta relación entre $t = 0$ y un tiempo indefinido "t", y considerando que P es constante,

$$Pt = \frac{1}{2} mv^2$$

De aquí obtenemos

$$v = C\sqrt{t} \quad \text{donde} \quad C = \sqrt{\frac{2P}{m}}$$

La aceleración la obtenemos derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{C}{2\sqrt{t}}$$

Como vemos, la velocidad aumenta y la aceleración disminuye conforme transcurre el tiempo.

Respondamos ahora la pregunta: ¿qué distancia Δx necesita recorrer el vehículo para que su velocidad aumente desde 0 hasta "v" bajo la potencia constante P ?

De la fórmula (27),

$$dK = P dt$$

Poniendo aquí $dK = mv dv$ y $dt = dx/v$ tenemos

$$mv^2 dv = P dx$$

Integrando entre $x = 0$ y un valor x indefinido, correspondientes a $v = 0$ y un valor v indefinido tenemos

$$\int mv^2 dv = \int P dx$$

de donde se obtiene

$$x = \frac{mv^3}{3P}$$

Por otra parte, el tiempo "t" necesario para acelerar el cuerpo desde $v = 0$ hasta "v" en un trayecto de longitud "x" bajo una potencia constante P se puede obtener integrando la relación

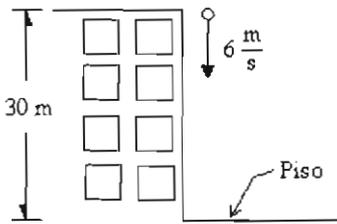
$$dx = v dt = C\sqrt{t} dt$$

desde $x = 0$ hasta "x". Resulta

$$t = \left(\frac{3x}{2C}\right)^2$$

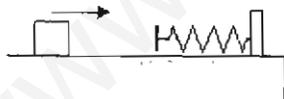
10.5. Problemas

1. Desde una azotea se lanza verticalmente hacia abajo una pelota, con una velocidad inicial de 6 m/s . La altura de la azotea sobre el suelo es de 30 m . ¿Con qué velocidad llega la pelota al suelo? Resolver usando la ecuación de balance.
 Resp. 25 m/s .

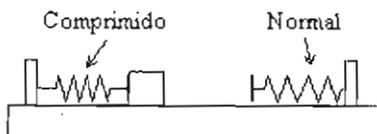


<Nota. En los problemas 2-4 incluya en W_{ext} el trabajo de las fuerzas exclusivamente en la dirección de movimiento de la partícula considerada. En el siguiente capítulo haremos ver que el peso y la normal, que son perpendiculares a tal dirección, no afectan los resultados.>

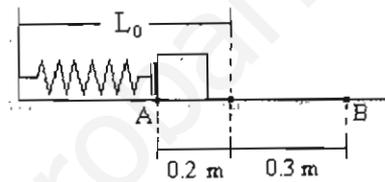
2. Un bloque de masa $m = 2 \text{ kg}$ viaja sobre una mesa horizontal lisa, sobre la cual se ha fijado un resorte de constante $k = 3200 \text{ N/m}$ como se muestra en la figura. ¿Con qué velocidad debe el bloque encontrar al resorte para causarle una compresión máxima de 70 mm ?
 Resp. 2.8 m/s .



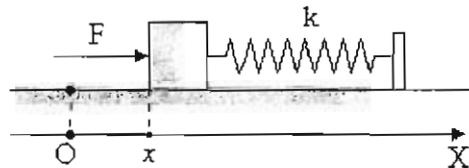
3. Un bloque de masa $m = 3 \text{ kg}$ sale despedido de un resorte de constante 8000 N/m , comprimido 120 mm . El bloque, que se mueve sobre una superficie horizontal lisa, pasa a comprimir otro resorte de constante 2000 N/m . ¿Cuánto vale la compresión máxima de éste?
 Resp. 240 mm .



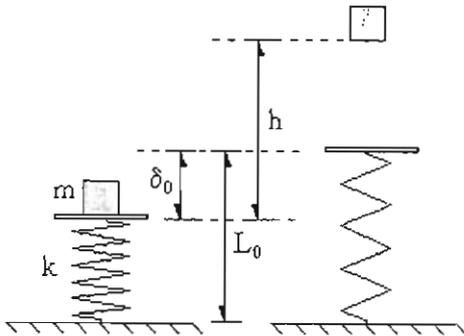
4. Un bloque de masa $m = 6 \text{ kg}$ se suelta desde la posición "A" mostrada en la figura, en la que sufre la fuerza de un resorte de constante 2000 N/m , comprimido 0.2 m . El resorte no está pegado al bloque. Existe fricción bloque \leftrightarrow mesa, de coeficiente cinético $\mu = 0.2$. Calcular la velocidad del bloque cuando llega al punto "B", a 0.5 m del punto de partida.
 Resp. 3.62 m/s .



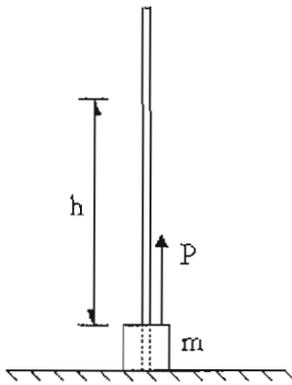
5. Inicialmente, un bloque de masa "m" está en equilibrio en el extremo de un resorte en su configuración no deformada. Se desea comprimir el resorte "cuasiestáticamente", esto es, aplicándole al bloque una fuerza F que en todo momento equilibre justamente la fuerza del resorte. ¿Qué trabajo efectúa F sobre el bloque cuando éste ha llegado hasta cierta posición x ? ¿Qué nos dice la EBE $W_{\text{ext}} = \Delta K$ aplicada al sistema {Bloque} entre $x = 0$ y $x =$ valor arbitrario? Suponer que la mesa horizontal es lisa.
 Resp. $(1/2)kx^2$; $0 = 0$.



6. Una persona mantiene un bloque de 3 kg de masa presionado contra un resorte de constante 4000 N/m , de modo que la compresión sea $\delta_0 = 0.2 \text{ m}$ (parte izquierda de la figura). La persona retira súbitamente la fuerza, permitiendo que el bloque se eleve. ¿Hasta qué altura h sobre el nivel de partida alcanza a subir el bloque? Suponga que las masas del resorte y de la tablilla fija a él son insignificantes.
 Rrsp. 2.52 m .

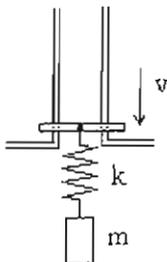


7. Se aplica al collarín de masa "m" una fuerza constante "P" a lo largo de una distancia "h", tras la cual desaparece la fuerza P. Calcular la velocidad con la que el collarín regresa al punto más bajo.



Resp. $v = \sqrt{\frac{2Ph}{m}}$

8. Un conjunto Resorte-Bloque desciende con velocidad constante "v" a lo largo de una guía lisa, como se ve en la figura. Unos topes causan que el extremo superior del resorte se detenga súbitamente. Calcular la deformación adicional "s" del resorte cuando el bloque se ha detenido.



Resp. Es la solución positiva de la ecuación

$$ks^2 + 4mgs - mv^2 = 0$$

9. La fuerza total sobre una partícula viene dada por

$$F_T(x) = -3x^2 + 8x^3$$

(x en metros, F_T en newtons). Calcular el cambio de energía cinética de la partícula desde $x = 0$ m hasta $x = 2$ m.

Resp. 24 J.

10. La energía cinética de una partícula como función de la posición es

$$K = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

donde A y k son constantes. ¿Cuál es la fuerza total sobre ella como función de x?

11. La posición de una partícula de masa "m" como función del tiempo es

$$x(t) = x_0 e^{-bt}$$

donde x_0 y b son constantes. Expresar la energía cinética en términos de la posición. Calcular el trabajo de la fuerza total sobre la partícula entre $x = 0$ y $x = L$.

Resp. $\frac{1}{6}mb^2L^3$.

12. Una partícula de masa m sufre una fuerza atractiva

$$F = -\frac{C}{x^3}$$

donde C es una constante positiva. Demostrar que su "velocidad de escape" desde x_0 es

$$v_e = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{C}{m}}$$

13. Una partícula está sometida a una fuerza que depende únicamente de la posición:

$$F = F(x)$$

Demostrar que si la partícula pasa dos o más veces por una misma posición x_p , lo hace con la misma rapidez en cada caso.

3-28

(Sugerencia: aplique el teorema trabajo-energía cinética al circuito desde x_p hasta x_p .)

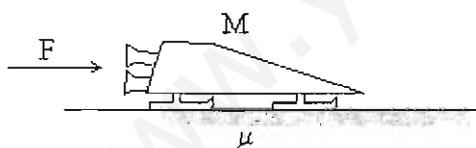
14. La velocidad de una partícula de masa 6 kg como función del tiempo es (con "t" en segundos y "v" en metros por segundo)

$$v(t) = 4t^2$$

Calcular la potencia de la fuerza total en $t = 3$ s.

Resp. 5184 w.

15. Un trineo de masa M impulsado por cohetes va a deslizarse a partir del reposo sobre una pista horizontal recta, con la que existe fricción de coeficiente cinético μ . Suponiendo que los cohetes generan una fuerza constante F, calcular la potencia suministrada por los cohetes como función del tiempo. Suponga que el sistema tiene masa constante y desprecie la resistencia del aire.



$$\text{Resp. } P = \frac{F(F - \mu Mg)}{M} \cdot t$$

CAPÍTULO 11

TRABAJO EN EL MOVIMIENTO PLANO

Existe un teorema trabajo-energía cinética, o lo que es lo mismo una ecuación de balance de energía para una partícula en movimiento *plano* arbitrario. Esta EBE tiene la misma forma matemática que en una dimensión, o sea $W_{\text{ext}} = \Delta K$. Sin embargo, el trabajo de una fuerza cuya dirección puede ser una cualquiera del plano ya no se calcula con la fórmula (7)-p7, pues ahora la posición de la partícula ya no es solamente "x", sino una pareja (x, y). En esta sección daremos la expresión más general del trabajo, la cual se reduce a la fórmula citada si el movimiento es rectilíneo.

Antes de presentar la EBE aplicable al movimiento plano, hemos reunido en este capítulo todo lo concerniente al trabajo de las fuerzas más comunes.

11.1. Trayectoria recta y fuerza constante

Sea una partícula de masa m , sujeta a varias fuerzas (Fig. 15).

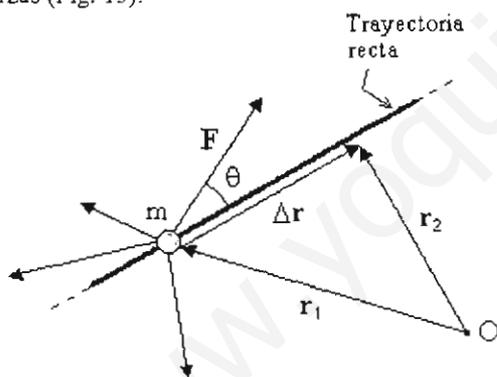


Fig. 15

Supongamos que las fuerzas existentes sobre la partícula la hacen recorrer un camino recto en la vida. Sea F una de estas fuerzas, que suponemos *constante*. Sean r_1 y r_2 dos posiciones de la partícula sobre su trayectoria recta y sea $\Delta r = r_2 - r_1$ el vector desplazamiento entre ambas. He aquí la definición del trabajo en este caso:

Trabajo de una fuerza *constante* en un desplazamiento *recto* (Forma 1)

(28a)	$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$	\mathbf{F} y $\Delta \mathbf{r}$ son los vectores fuerza y desplazamiento.
-------	--	--

En términos de las magnitudes $F = |\mathbf{F}|$ y $d = |\Delta \mathbf{r}|$, y del ángulo θ que forman \mathbf{F} y $\Delta \mathbf{r}$, el producto escalar de estos vectores es

$$W = F d \cos \theta$$

Notando que

$$F \cos \theta = F_t$$

es la componente de \mathbf{F} a lo largo de la dirección de $\Delta \mathbf{r}$ (dirección de movimiento o dirección "tangencial" a la trayectoria), podemos escribir el trabajo (28a) en la forma alternativa siguiente:

Trabajo de una fuerza *constante* en un desplazamiento *recto* (Forma 2)

(28b)	$W = F_t d$	F_t es la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, y "d" es la magnitud de éste.
-------	-------------	---

Se sigue de la definición de trabajo que si \mathbf{F} y $\Delta \mathbf{r}$ forman un ángulo agudo el trabajo es positivo. Si este ángulo es obtuso el trabajo es negativo, y si es un ángulo recto el trabajo es nulo (Fig. 16).

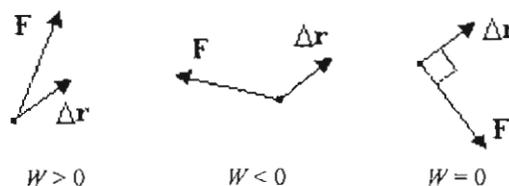


Fig. 16

La noción técnica de trabajo, huelga decirlo, no corresponde a la idea del ciudadano común. Uno puede sostener levantada una pesa de 30 kg durante 10 minutos y sentir que efectuó un gran trabajo. Sin embargo, el trabajo físico (de la física, no del fisicoculturismo) no es lo mismo que sudar la gota gorda. El pesista no efectuó trabajo porque la pesa no se movió.

Ejemplo 20. Un collarín desciende aceleradamente por una guía recta lisa en el campo gravitatorio de la Tierra (Fig. E20). En su camino el collarín es refrenado por una fuerza horizontal constante F . Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el collarín en un desplazamiento Δr dirigido hacia abajo.

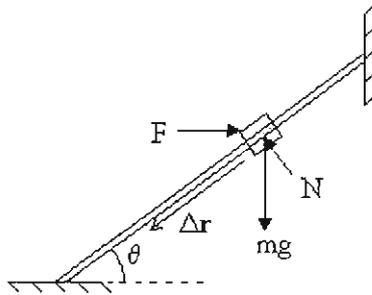


Fig. E20

Para identificar la fuerza total hacemos el diagrama de cuerpo libre.

Podemos aplicar cualquiera de las fórmulas (28a) o (28b). Apliquemos la segunda, $W = F_t d$, donde F_t es la componente de cada fuerza en la dirección de Δr (o sea hacia abajo del plano inclinado) y $d = |\Delta r|$. Las diversas componentes " F_t " son:

- De la fuerza F : $-F \cos \theta$
- Del peso " mg ": $mg \sin \theta$
- De la normal N : 0

El trabajo total es entonces

$$W_{\text{ext}} = -F \cos \theta \cdot d + mg \sin \theta \cdot d$$

Ejemplo 21. Un bloque de 6 kg baja por un plano inclinado a 37° , con el que se genera fricción de coeficiente cinético $\mu = 0.3$. El bloque está atado a una cuerda que pasa por una polea lisa en lo alto del plano y remata en otro bloque de masa 2 kg. Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el bloque de 6 kg entre dos posiciones que distan 0.8 m, como se ve en la Fig. E21.

El bloque considerado está sujeto a las 4 fuerzas mostradas en la Fig. E21, que son todas constantes. Nuestra primera tarea consiste en calcular estas fuerzas.

La aceleración del sistema, común de ambos bloques, es

$$a = \frac{m_1 g \sin \theta - m_2 g - \mu m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo valores numéricos, $a = 0.212 \frac{m}{s^2}$.

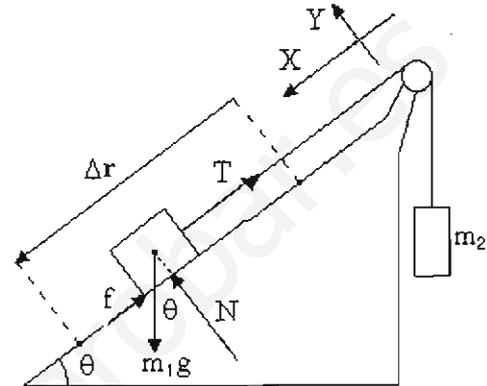


Fig. E21

El vector aceleración apunta hacia abajo del plano.

Ya con la aceleración es fácil calcular las fuerzas f y T . Tenemos

Peso: $P = 58.8 \text{ N}$ Tensión: $T = 20 \text{ N}$

Normal: $N = 47 \text{ N}$ Fricción: $f = 14 \text{ N}$

El desplazamiento Δr está hacia abajo del plano inclinado y su magnitud es $d = 0.8 \text{ m}$. Aplicaremos la fórmula $W = F_t d$, donde F_t es la componente de cada fuerza hacia abajo del plano inclinado, y $d = 0.8 \text{ m}$ en todos los casos.

He aquí el trabajo de cada fuerza, en joules:

El trabajo de la normal N es cero puesto que es perpendicular al desplazamiento.

El trabajo de la tensión es negativo:

$$-T d = -20 (0.8) = -16 \quad (T \nearrow \Delta r \swarrow)$$

El trabajo de la fricción es negativo:

$$-f d = -14 (0.8) = -11.2 \quad (f \nearrow \Delta r \swarrow)$$

Finalmente, el trabajo del peso es positivo

$$(m_1 g \sin \theta) d = 28.3 \quad ((mg)_t \swarrow \Delta r \swarrow)$$

El trabajo de la fuerza total es la suma de todos estos trabajos,

$$W_{\text{ext}} = 0 - 16 - 11.2 + 28.34 = 1.1 \text{ (J)}$$

11.2. Trayectoria curva y fuerza constante

Las fórmulas (28a) y (28b) de la pág. 29 son aplicables también al caso en que la partícula describe una curva, como demostraremos más adelante. En la Fig. 17 se muestran las cantidades F , Δr , F_t y d .

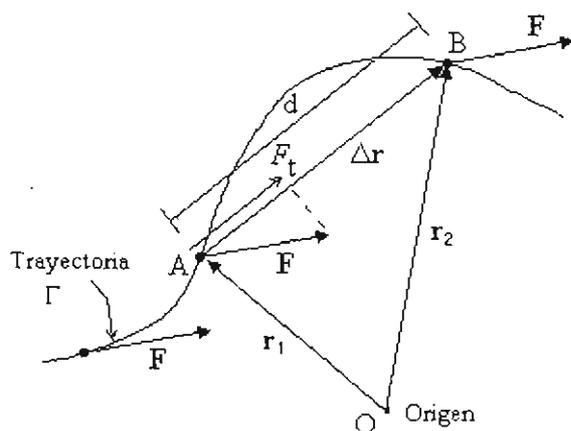


Fig. 17. ($W = F \cdot \Delta r$ ó $W = F_t d$)

Ejemplo 22. Un pequeño collarín de 2 kg se hace deslizar en un plano vertical a lo largo de una guía semicircular lisa de 5 m de radio mediante una fuerza horizontal constante de 40 newton. Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el collarín entre las posiciones P y Q mostradas en la Fig. E22a.

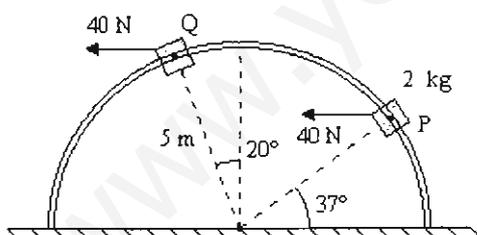


Fig. E22a

En lugar de usar la expresión $W = F_t d$, que requiere sacar las componentes de las fuerzas a lo largo de la dirección del desplazamiento, $\Delta r = PQ$, usaremos la expresión vectorial $W = F \cdot \Delta r$, más cómoda en este caso.

Introduzcamos un sistema de ejes $X \rightarrow Y \uparrow$ con su origen en el centro de la guía. Los vectores de posición de P y Q son, en metros,

$$r_P = (5 \cos 37^\circ, 5 \sin 37^\circ) \approx (4, 3)$$

$$y \quad r_Q = (-5 \sin 20^\circ, 5 \cos 20^\circ) \approx (-1.71, 4.7)$$

El desplazamiento es entonces

$$\Delta r = r_Q - r_P = (-5.71, 1.7) \quad (\text{m})$$

En cuanto a la fuerza total sobre el collarín, se compone de las siguientes fuerzas:

- La normal N .
(La normal aquí es una fuerza de magnitud y dirección variables, pero como no efectúa trabajo no es necesario dar su expresión vectorial)
- El peso $-mg \mathbf{j} = -19.6 \mathbf{j} = (0, -19.6) \quad (\text{N})$
- La fuerza constante $-40 \mathbf{i} = (-40, 0) \quad (\text{N})$

Estas fuerzas se muestran en el DCL del collarín en la Fig. E22b.

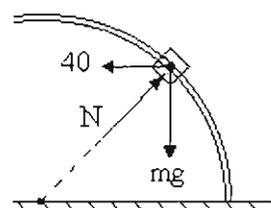


Fig. E22b

La fuerza que produce trabajo es entonces

$$\mathbf{F} = (0, -19.6) + (-40, 0) = (-40, -19.6) \quad (\text{N})$$

y su trabajo es, por la fórmula $W = \mathbf{F} \cdot \Delta r$,

$$\begin{aligned} W &= (-40, -19.6) \cdot (1.7, -5.71) = \\ &= -40(1.7) - 19.6(-5.71) \approx 44 \quad (\text{joule}) \end{aligned}$$

Cuando la partícula se mueve en una curva son de mucha utilidad los métodos vectoriales en el cálculo del trabajo.

Ejemplo 23. Una fuerza constante de 112 N actúa sobre una partícula todo el camino entre dos puntos A y B, como se muestra en la Fig. E23. Calcular el trabajo de esta fuerza entre dichos puntos.

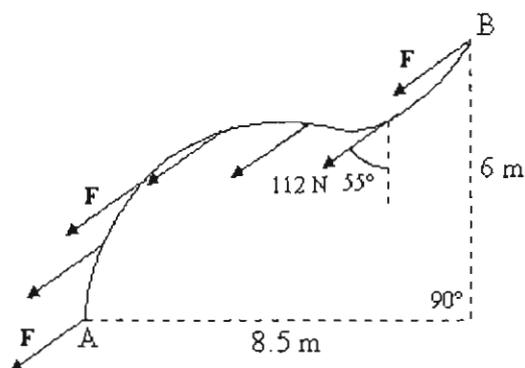


Fig. E23

Tomemos el sistema XY con su origen en A y los ejes X y Y del modo estándar. Entonces,

$$\mathbf{F} = (-112 \sin 55^\circ, -112 \cos 55^\circ)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{AB} = (8.5, 6)$$

El trabajo es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} &= (-91.74, -64.24) \cdot (8.5, 6) = \\ &= -1165.23 \text{ (J)} \end{aligned}$$

¿Cuánto vale el trabajo de B a A?

¿Cuánto vale el trabajo si la partícula parte de A y recorre una curva cerrada, terminando de vuelta en A?

11.3. Trayectoria curva y fuerza variable

Ahora extenderemos la definición de trabajo al caso general de movimiento a lo largo de curvas, bajo fuerzas variables. Nos basaremos en la relación $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$, válida para tramos rectos y fuerzas constantes, y en los métodos del cálculo integral.

Denotemos con " Γ " la trayectoria curva de la partícula considerada, y sea de nuevo \mathbf{F} una de las fuerzas que actúan sobre ella. Supondremos que:

- Se conoce la trayectoria Γ .
- La fuerza \mathbf{F} depende exclusivamente de la posición \mathbf{r} .

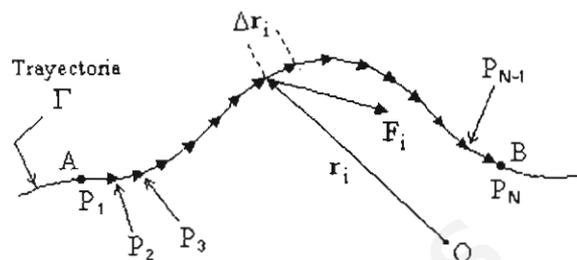


Fig. 18

Consideremos un tramo curvo de Γ , comprendido entre dos puntos A y B (Fig. 18). Marquemos sobre este tramo una serie de N puntos " P_i " (con $i = 1, 2, \dots, N$) espaciados más o menos uniformemente, haciendo coincidir P_1 con A y P_N con B. Estos puntos determinan un conjunto numeroso de segmentos de la curva, los cuales supondremos tan pequeños que:

- Podamos considerarlos *rectos*, con buena aproximación.
- La fuerza \mathbf{F} sea prácticamente *constante* en cada segmento.

¿Desplazamiento recto y fuerza constante?

Entonces vale (28a)-p29 y el trabajo realizado por \mathbf{F} en el segmento representativo $[P_i, P_{i+1}]$ es

$$\mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \quad \text{y} \quad \Delta \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$$

Formemos la suma de todos estos trabajos,

$$\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

Conforme $N \rightarrow \infty$ a la vez que $|\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0$ para toda i , esta suma tiende a un valor determinado, que definiremos como el *trabajo hecho por F a lo largo de Γ entre A y B*. Este límite define a la vez una operación de integración denominada *integral de línea*. Se simboliza así:

$$(29) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \equiv \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Fórmula general del trabajo	
(30)	$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
El trabajo efectuado por una fuerza \mathbf{F} a lo largo de una trayectoria Γ , entre dos puntos A y B, es la integral de línea de la fuerza, a lo largo de Γ , desde A hasta B.	

Visualizamos el integrando $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ como el trabajo " δW " hecho por \mathbf{F} en el desplazamiento $d\mathbf{r}$, y la integral como la suma de trabajos semejantes. El trabajo (30) también goza de las propiedades de distributividad y aditividad mencionadas en la página 7 en relación con el movimiento rectilíneo.

Dado que la integral (30) contiene vectores, se puede evaluar en cualquier sistema de coordenadas. Lo haremos para los sistemas más comunes, el cartesiano y el polar. Supondremos que la fuerza \mathbf{F} , o campo de fuerzas, depende en general de la posición.

11.4. Cálculo de la integral del trabajo en coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas la expresión general de una fuerza variable, o campo de fuerzas que depende de la posición (x, y) , es

$$\mathbf{F}(x, y) = F_x(x, y) \mathbf{i} + F_y(x, y) \mathbf{j}$$

Por otra parte, el desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ viene dado por

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$$

de tal manera que el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy$$

o abreviadamente

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$$

donde se sobreentiende que las componentes F_x y F_y dependen de x y y .

Entonces la integral del trabajo en coordenadas cartesianas queda en la siguiente forma general:

Fórmula general del trabajo en coordenadas cartesianas	
(31)	$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy)$

Para evaluar la integral (31) hay que hacer lo siguiente:

1. Sustituir en ella las expresiones de F_x y F_y como funciones de (x, y) , quedando

$$(32) \quad W = \int_A^B F_x(x, y) dx + \int_A^B F_y(x, y) dy$$

2. Usando la ecuación de la trayectoria, cuya forma es

$$y = f(x)$$

expresar y en términos de x en las integrales de (32). Sustituir también dy por

$$dy = f'(x) dx \quad \left(f'(x) = \frac{df}{dx} \right)$$

3. Queda así x como única variable de integración, por lo que los límites de integración simbólicos A y B en (32) se sustituyen por las abscisas x_A y x_B de los puntos límites.
4. Efectuar la integración sobre la variable x .

Ejemplo 24: Una partícula se halla sometida a un campo de fuerzas \mathbf{F} que depende de la posición (x, y) según la ley

$$\mathbf{F}(x, y) = 10(-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$$

Calcular el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} entre los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$, a lo largo de

- (a) La parábola $y = x^2$.
- (b) La recta $y = 2x$.
- (c) El segmento del Eje X desde $x = 0$ hasta $x = 2$, y luego el segmento del Eje Y desde $y = 0$ hasta $y = 4$.
- (d) La circunferencia de radio 5 y centro en el origen.

Démonos una idea gráfica del campo. Notamos que la fuerza en un punto arbitrario es perpendicular al vector de posición respectivo, ya que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = 10(-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) = 10(-yx + xy) = 0$$

Entonces las líneas de fuerza del campo son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, como vemos en la Fig. E24a.

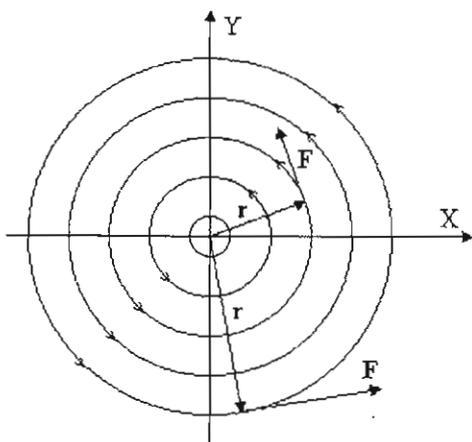


Fig. E24a

Notemos además que la magnitud de F es proporcional a la del vector de posición r :

$$(r1) \quad F = |10(-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})| = 10\sqrt{x^2 + y^2} = 10r$$

En la Fig. E24b se muestran las trayectorias en los casos (a), (b) y (c).

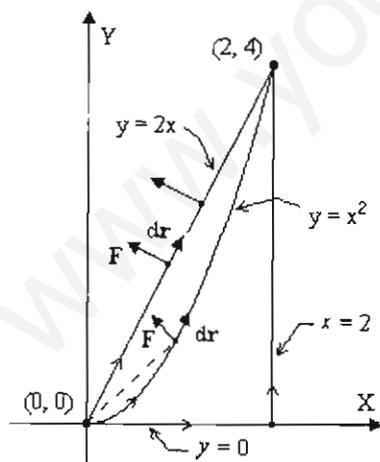


Fig. E24b

Poniendo en la fórmula (31) las expresiones

$$F_x = -10y \quad y \quad F_y = 10x$$

obtenemos la integral a calcular:

$$(r2) \quad W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = 10 \int_A^B (-y dx + x dy)$$

(a) Parábola $y = x^2$

De la ecuación de la parábola tenemos

$$y = x^2 \quad y \quad dy = 2x dx$$

Sustituyéndolos en la integral (r2) queda

$$W = 10 \cdot \int_0^2 (-x^2 dx + x \cdot 2x dx) = 10 \cdot \int_0^2 x^2 dx = \frac{80}{3}$$

(Como la integral queda sólo sobre la variable x , los límites son los valores extremos de x , o sean 0 y 2.)

(b) Recta $y = 2x$

Análogamente, poniendo $y = 2x$ y $dy = 2dx$ en la integral (r2),

$$W = 10 \cdot \int_0^2 (-2x dx + 2x dx) = 0$$

El campo no hace trabajo a lo largo de la recta. Esto es fácil de entender, puesto que en todo punto de la recta F y dr son perpendiculares, de donde el producto $F \cdot dr$ es nulo idénticamente, y entonces

$$\int F \cdot dr = 0.$$

(c) Segmentos ligados del Eje X y el Eje Y.

En el segmento horizontal de $x = 0$ a $x = 2$ tenemos $y = 0$ y $dy = 0$, de modo que el integrando en (r2) es

$$10(-y dx + x dy) = 10(-0 \cdot dx + x \cdot 0) = 0$$

y la integral es cero en este tramo. En el tramo vertical de $y = 0$ a $y = 4$ tenemos $x = 2$, $dx = 0$ y el integrando en (r2) se vuelve $10(-y dx + x dy) = 10(-y \cdot 0 + 2 dy) = 20 dy$. Entonces

$$W = \int_0^4 20 dy = 80$$

(d) Circunferencia de radio 5 y centro en el origen.

Podríamos usar aquí la ecuación de la circunferencia de radio 5, y obtener la diferencial de y ,

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad dy = \frac{-x dx}{\sqrt{25 - x^2}}, \text{ etc.}$$

Sin embargo, hay un método más fácil, basado en que a lo largo de todo el círculo los vectores \mathbf{F} y $d\mathbf{r}$ son paralelos; y la magnitud de \mathbf{F} (dada por (r)) es constante (Fig. E24c).

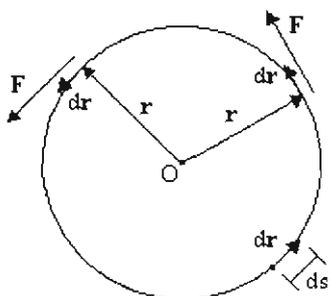


Fig. E24c

Entonces el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se vuelve simplemente el producto de las magnitudes de \mathbf{F} y dr , denotadas con F y ds respectivamente:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds$$

y la integral general del trabajo da

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F ds = F \int ds = F \cdot 2\pi r$$

(Se sacó F de la integral ya que $F = 10r$ y es constante sobre el círculo. Por otra parte, la integral de "ds" sobre el círculo es la suma de las longitudes de todos los dr 's dispuestos a lo largo de la circunferencia, o sea la longitud de la misma, $2\pi r$. El trabajo es entonces $W = 20\pi r^2$ o bien

$$W = 500\pi$$

Como vemos en este ejemplo, el trabajo es distinto a lo largo de las 4 trayectorias consideradas.

11.5. Fuerzas conservativas

La integral general del trabajo se evalúa a lo largo de una trayectoria dada Γ . Ahora bien, existen campos de fuerzas $\mathbf{F}(x, y)$ cuyo trabajo entre dos puntos dados es independiente de la curva que enlace ambos puntos. Esta clase de campos juega un papel muy importante en el desarrollo del concepto de energía. Se denominan *campos (o fuerzas) conservativos*.

El campo $\mathbf{F} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ que consideramos en el ejemplo anterior no es conservativo, puesto que los

trabajos resultaron distintos para distintas trayectorias.

Hay muchas clases de campos conservativos. Una clase de campos tales es la que se expresa como sigue:

$$(33) \quad \mathbf{F}(x, y) = h(x) \mathbf{i} + g(y) \mathbf{j}$$

La componente X del campo depende solamente de x , y la componente Y solamente de y , a través de las funciones $h(\cdot)$ y $g(\cdot)$, respectivamente:

$$(34) \quad F_x = h(x) \quad F_y = g(y)$$

Veámoslo. Sea $y = f(x)$ la ecuación de la trayectoria de integración Γ . Sustituimos en la integral (31)-p33 las expresiones (34). Obtenemos

$$(35) \quad W = \int_A^B (h(x) dx + g(y) dy)$$

Conforme al método que dimos, el siguiente paso sería sustituir y por $f(x)$ y dy por $f'(x) dx$. Sin embargo, no hay necesidad de hacerlo, puesto que la integral (35) se puede evaluar tal como está, en la forma

$$(36) \quad W = \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} g(y) dy$$

En otras palabras, la trayectoria de integración $y = f(x)$ no se necesita. No interviene para nada en el cálculo, de tal manera que el trabajo es independiente de la trayectoria. Esto demuestra que el campo considerado es conservativo.

Por ejemplo, este campo es de la forma (33):

$$\mathbf{F} = 3x^2 \mathbf{i} - 2y^3 \mathbf{j}$$

Tenemos aquí $F_x = h(x) = 3x^2$ y $F_y = g(y) = -2y^3$. El trabajo de este campo a lo largo de cualquier trayectoria entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es, de (36),

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} 3x^2 dx + \int_{y_1}^{y_2} (-2y^3) dy \\ &= \left[x^3 \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{y^4}{2} \right]_{y_1}^{y_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = x_2^3 - x_1^3 - \frac{1}{2} y_2^4 + \frac{1}{2} y_1^4$$

Como vemos, el trabajo depende solamente de los puntos terminales (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

(37)	<p>Para un <i>campo de fuerzas conservativo</i> el trabajo entre dos puntos cualesquiera no depende de la trayectoria de integración, sino exclusivamente de las coordenadas de los puntos límites de integración. En símbolos:</p> $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \text{función de } (x_A, y_A, x_B, y_B)$
------	---

Más adelante volveremos a las propiedades de los campos conservativos. Por ahora pasaremos a calcular trabajos de algunas fuerzas comunes.

No todos los trabajos los calcularemos aplicando directamente la fórmula general. Para las fuerzas más comunes existen atajos en el cálculo del trabajo, como veremos.

11.6. Galería de trabajos.

Primeramente demostraremos que la fórmula

$$[(28a)] \quad W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

que define el trabajo de una fuerza constante sobre una partícula que se mueve en línea *recta*, sirve también para cuando la partícula describe una trayectoria *curva* bajo fuerza constante, cosa que ya usamos en los ejemplos 22 y 23 en las págs. 31 y 32).

Trabajo de una fuerza constante.

Si la fuerza \mathbf{F} es constante sus componentes F_x y F_y son constantes y podemos sacarlas de la integral del trabajo:

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dy$$

Obtenemos así

$$(38) \quad W = F_x (x_B - x_A) + F_y (y_B - y_A) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

donde $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A) \mathbf{i} + (y_B - y_A) \mathbf{j}$ es el desplazamiento entre los puntos A y B, QED.

Como vemos en (38), el trabajo en este caso depende solamente de los puntos terminales A y B, por lo que

Un campo de fuerzas constante es conservativo

Trabajo del peso.

La fuerza constante más importante es, por supuesto, el "peso mg ". Si dirigimos el eje vertical Y hacia arriba, podemos escribir vectorialmente el peso P en la forma

$$\mathbf{P} = -mg \mathbf{j}$$

Calculemos el trabajo del peso sobre una partícula que describe una trayectoria arbitraria Γ entre dos puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ (Véase la Fig. 19).

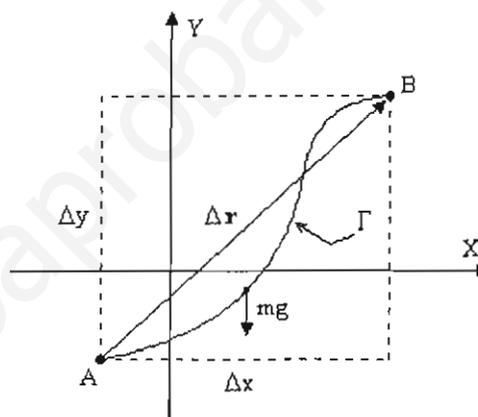


Fig. 19

Poniendo $\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$ y usando la fórmula (38) o la (28a)-p29 tenemos

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = (-mg \mathbf{j}) \cdot (\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j})$$

$$\Rightarrow \quad W = -mg \Delta y$$

donde $\Delta y = y_B - y_A$.

Definiendo $h = |\Delta y|$, o sea $h =$ desnivel vertical entre los puntos A y B, tenemos entonces

Trabajo del peso "mg"

(39)	$W = -mg \Delta y$ $W = \pm mgh$	$h =$ distancia que el cuerpo sube o baja. Signo "+" si el cuerpo baja, "-" si sube.
------	---	---

Note que esta expresión tiene la misma forma que la del trabajo del peso en el movimiento rectilíneo.

El peso es una fuerza conservativa

Trabajo de la fuerza normal de contacto entre dos superficies.

Como su nombre lo indica, la fuerza normal siempre es perpendicular a la dirección de movimiento de la partícula, por lo que el trabajo de esta fuerza es cero en todos los casos.

En la Fig. 20 tenemos un movimiento en el que la normal N es una fuerza variable en magnitud y dirección. De todas maneras en todo punto se cumple $N \cdot dr \equiv 0$, de donde $W = 0$.

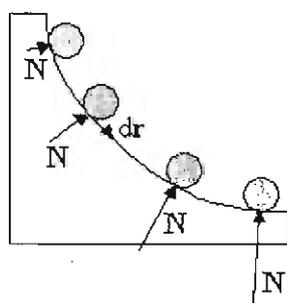


Fig. 20

Trabajo de la fuerza normal N		
(40)	$W = 0$	N puede tener magnitud constante o variable. La superficie sobre la que se desliza el cuerpo está fija.

Trabajo de una fuerza de fricción de magnitud constante.

La fricción f es una fuerza que en todas partes apunta contra la dirección de movimiento, es decir, f y dr forman un ángulo de 180° y su producto escalar es

$$f \cdot dr = -f ds \quad (f = |f|, ds = |dr|)$$

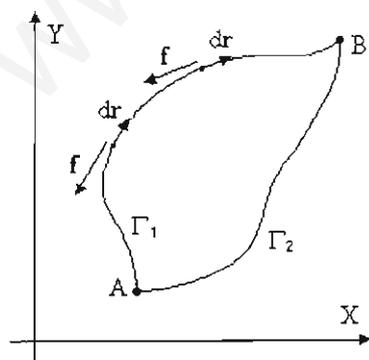


Fig. 21. (Plano horizontal)

Si la magnitud de la fricción es *constante*, su trabajo es

$$W = \int f \cdot dr = - \int f ds = -f \int ds$$

Ahora bien, la integral de "ds" es la suma de las magnitudes de todos los desplazamientos "dr", la cual es igual a la longitud de la trayectoria entre los puntos límites de integración. Así pues,

Trabajo de la fricción de magnitud constante

$$(41) \quad W = -fL$$

f es la magnitud de la fricción y L es la longitud del camino recorrido bajo la acción de la fricción. La superficie sobre la que se desliza el cuerpo está fija.

El trabajo de la fricción siempre es negativo, y depende del camino, puesto que a distintos caminos Γ_1 y Γ_2 corresponden en general distintas longitudes (Ver Fig. 21). Por lo tanto,

La fricción es una fuerza *no-conservativa*

En el ejemplo de la Fig. 20 la normal es una fuerza variable y también lo será la fricción, habida cuenta de la relación de proporcionalidad $f = \mu N$. En este caso el trabajo de la fricción no es (41); para calcularlo habría que obtener la fricción como función de la posición y efectuar la integral correspondiente.

Examinando las fórmulas de los trabajos del peso, la normal y la fricción, advertimos que tienen la misma forma que las correspondientes al movimiento rectilíneo. Lo mismo ocurrirá con el trabajo de un resorte, como veremos más adelante.

Trabajo de la fuerza de tensión constante de un cable.

Observe la Fig. 22. El bloque es jalado por un cable que pasa por un perno liso, cambiando de dirección. Del extremo C del cable se jala con una fuerza de *magnitud constante* T (misma cosa que la tensión del cable), que provoca que el bloque se desplace sobre una mesa horizontal. En esta mesa se fija un eje X como se ve. Se desea obtener el trabajo realizado por la cuerda sobre el bloque tras un cierto desplazamiento Δx del mismo.

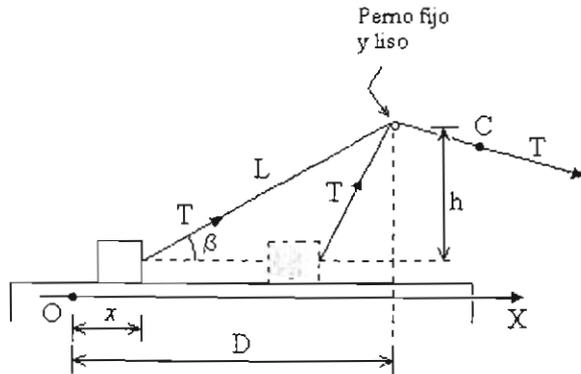


Fig. 22

En la integral general del trabajo, $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sustituycamos la siguiente expresi3n de $T(x)$:

$$\mathbf{F} = T = T \cos \beta \mathbf{i} + T \sin \beta \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$$

El integrando se reduce a

$$\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = T \cos \beta \, dx$$

$$\Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} T \cos \beta \cdot dx \quad (\beta \text{ y } x \text{ variables})$$

Notando que

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2 + h^2}} = -\frac{d}{dx} \left(\sqrt{(D-x)^2 + h^2} \right) = \\ &= -\frac{dL}{dx} \end{aligned}$$

donde $L(x)$ es la longitud del pedazo "hipoten3sico" de cuerda comprendido entre el punto de sujeci3n al bloque y el perno, tendremos

$$W = -T \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dL}{dx} dx = -T(L_2 - L_1)$$

Pero $L_2 - L_1 \equiv \Delta L$ es la longitud de cuerda cobrada desde el extremo C, donde est3 aplicada la fuerza externa al cable. El resultado no depende de c3mo se desplace C. Tampoco se altera si en lugar del perno est3 una polea lisa.

**Trabajo de un cable inextensible
cuya tensi3n T es constante**

(42)	$W = -T \Delta L$	ΔL es la longitud de cuerda cobrada desde el extremo desde donde se jala la cuerda. Este extremo puede moverse en una curva.
------	-------------------	--

Debemos tener cuidado al aplicar la expresi3n (42), pues existen muchas situaciones donde la tensi3n no tiene magnitud constante (como por ejemplo en los sistema de las Figs. 25, 26 y 27 en la p3gina siguiente).

Las tensiones son fuerzas que no incluiremos en la clasificaci3n de eonservativas o no-conservativas, por razones que expondremos posteriormente.

11.7. Trabajo de fuerzas restrictivas en sistemas conectados

Considere dos part3culas m_1 y m_2 unidas por una varilla recta, r3gida y de masa insignificante, como en la Fig. 23. La varilla ejerce fuerzas de tensi3n o compresi3n dirigidas a lo largo de la misma. Deseamos calcular el trabajo de *ambas* fuerzas de tensi3n (o compresi3n) sobre las masas durante un desplazamiento arbitrario de la mancuerna.

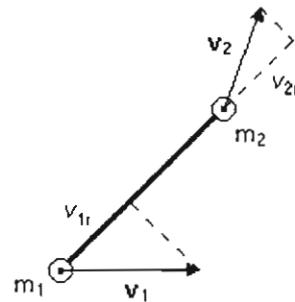


Fig. 23

En virtud de que la varilla es *r3gida*, las part3culas m_1 y m_2 no pueden acercarse ni alejarse a lo largo de la l3nea que las une (la varilla). Esto se traduce en que las part3culas se desplazan lo mismo a lo largo de la direcci3n de la varilla, y por ende las velocidades v_1 y v_2 de las part3culas deben tener la misma componente a lo largo de la varilla, es decir,

$$v_{1r} = v_{2r}$$

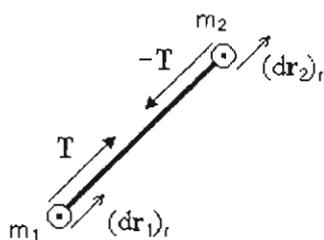


Fig. 24

Se sigue que los desplazamientos de m_1 y m_2 correspondientes a un corto lapso dt son vectores cuyas componentes vectoriales $(dr_1)_r$ y $(dr_2)_r$ a lo largo de la varilla son iguales (Fig. 24). Por otra parte, dado que la varilla no tiene masa, las fuerzas de tensión que ejerce sobre m_1 y m_2 son iguales y opuestas.

Por lo tanto, el trabajo realizado por T sobre m_1 es el negativo del que realiza $-T$ sobre m_2 , de tal manera que el trabajo total es cero.

Situaciones análogas de trabajo total nulo se presentan en otros sistemas cuyos cuerpos están conectados entre sí por cuerdas. Eche un vistazo a los de las Figs. 25 y 26.

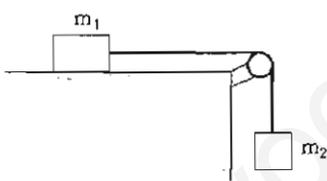


Fig. 25

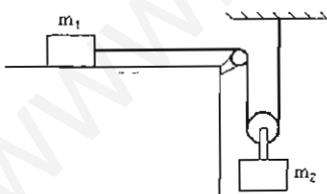


Fig. 26

Demostrémoslo.

En el sistema de la Fig. 25 ambos bloques tienen la misma velocidad a todo instante, por lo que también sus desplazamientos son iguales. Para el bloque que se desliza sobre la mesa la tensión y el desplazamiento tienen direcciones iguales; para el otro bloque tienen direcciones contrarias. Por lo tanto, el trabajo de ambas fuerzas de tensión es nulo.

En cuanto al sistema de la Fig. 26, comparemos los desplazamientos y las tensiones sobre el bloque m_1 y el conjunto {Polea móvil + bloque m_2 }. Sobre el primero actúa la tensión T y sobre el conjunto actúa $2T$, pero el desplazamiento de éste es la mitad del desplazamiento de aquel. Nuevamente se deduce que el trabajo de las tensiones es nulo.

Consideremos ahora el sistema ilustrado en la Fig. 27.

El sistema tiene semejanza con el de la Fig. 22. Sin embargo, en el caso presente no se jala de la cuerda con fuerza constante: la tensión de la cuerda *varia* conforme el bloque de la derecha cae.

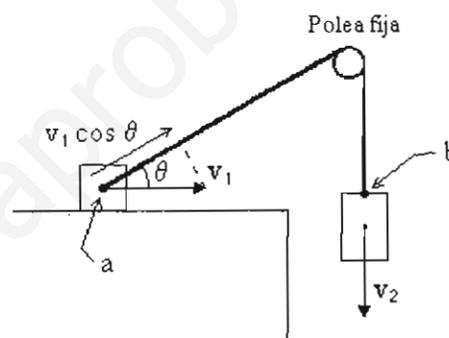


Fig. 27

La relación entre las velocidades de ambos bloques se saca de la siguiente observación: como la cuerda es *inextensible*, las velocidades de los extremos "a" y "b" deben tener la misma componente *a lo largo de la cuerda*. Estas velocidades coinciden con las de los bloques a que están atados dichos extremos. Tenemos así que

$$(43) \quad v_1 \cos \theta = v_2$$

Debido a esta relación los extremos a y b se desplazan lo mismo en la dirección de la cuerda, que es la línea de acción de las fuerzas de tensión sobre los bloques, así que el trabajo de ambas fuerzas de tensión es cero.

11.8. Fuerzas activas y diagrama de fuerzas activas

Llamaremos *fuerzas activas* a aquellas que realizan trabajo cuando el sistema físico se desplaza. La fuerza normal N y las parejas de fuerzas de tensión debidas a cables inextensibles o de tensión/compresión debidas a varillas ligeras en sus extremos no son fuerzas activas.

El *diagrama de fuerzas activas* (DFA) de un sistema es un bosquejo del sistema que muestra todas las fuerzas activas sobre el mismo (naturalmente se excluyen, al igual que en el DCL, las fuerzas internas en el sistema). Usaremos los DFA's en el Capítulo 13.

11.9. Cálculo de la integral del trabajo en coordenadas polares

La expresión general de una fuerza variable en coordenadas polares es

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$$

o bien $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta$

Es decir, tanto la componente radial F_r como la angular F_θ dependen en general de la posición (r, θ) . Por otra parte, el desplazamiento vectorial infinitesimal en coordenadas polares es

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta$$

Entonces

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r(r, \theta) dr + F_\theta(r, \theta) r d\theta$$

y la integral general del trabajo queda en la forma

Fórmula general del trabajo en coordenadas polares	
(44)	$W = \int_A^B (F_r dr + F_\theta \cdot r d\theta)$

Al igual que en el caso de coordenadas polares, la integral (44) es una suma de dos integrales, en las que figuran en general las dos variables de integración r y θ . Para expresarlas en términos de una sola variable de integración empleamos la ecuación de la trayectoria de integración, la cual es una curva cuya ecuación tiene la forma

$$r = r(\theta) \quad (dr = r'(\theta)d\theta)$$

Sin embargo, en este módulo nos limitaremos a fuerzas que dependen sólo de la coordenada "r". Se tratan en el siguiente Apartado.

11.10. Campos de fuerzas centrales

Un campo de fuerzas es *central* si la fuerza del campo depende solamente de la distancia "r" a un punto fijo O, denominado el *centro de fuerzas*, y se dirige en todo punto a lo largo de la recta radial desde O (Fig. 28). En el centro de fuerzas conviene colocar el polo de un sistema de coordenadas polares (r, θ) , con base ortonormal $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta]$. La expresión matemática de toda fuerza central en esta base es

Expresión general de una fuerza central en la base polar	
(45)	$\mathbf{F}(r) = F(r) \mathbf{e}_r$

\mathbf{e}_r es el vector unitario radial y $F(r)$ es la componente radial (única) de la fuerza \mathbf{F} .
--

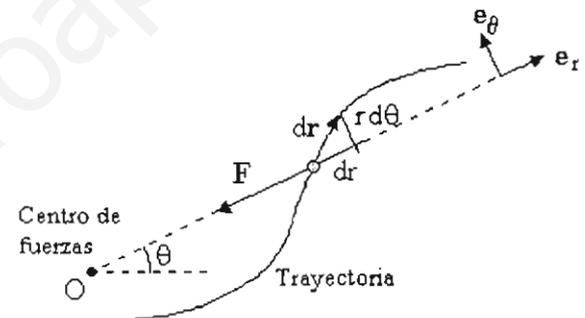


Fig. 28

Poniendo $F_r = F(r)$ y $F_\theta \equiv 0$ en la fórmula general (44) obtenemos una fórmula para el trabajo de un campo central:

Trabajo de un campo de fuerzas central, entre las posiciones r_i y r_f	
(46)	$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr$

$F(r)$ es la componente radial (única) de la fuerza \mathbf{F} y el centro de fuerzas está fijo.
--

Se advierte que la integral (46) se puede evaluar tal como está, sin necesidad de emplear la ecuación de la trayectoria de integración. Es decir,

(47)	Todo fuerza central es conservativa
------	-------------------------------------

Ejemplos de fuerzas centrales importantes son la ejercida por un resorte elástico lineal, la fuerza del campo gravitatorio de una masa puntual, y la fuerza del campo electrostático de una carga puntual.

Trabajo de un resorte elástico lineal.

En la Fig. 29 se representa una partícula que se mueve a lo largo de cierta trayectoria Γ . La partícula está fija a un resorte de constante elástica "k", y el otro extremo del resorte está fijo al origen O. En un punto general A, el vector de posición de la partícula es "r". El vector unitario radial en A es e_r , y r_0 es un vector de magnitud constante, igual a la longitud natural del resorte, "r₀", y de dirección variable, hacia la posición corriente de la partícula.

Favor de comprobar que la fuerza del resorte es en magnitud y dirección

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - r_0)$$

o bien,

$$(48) \quad \mathbf{F} = -k(r - r_0) \mathbf{e}_r$$

ya que $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ y $r_0 = r_0 \mathbf{e}_r$. Notemos que $r - r_0$ es la deformación del resorte.

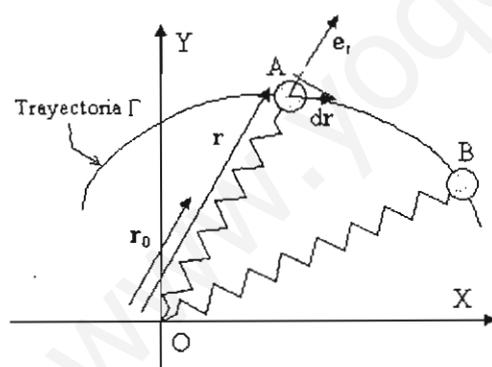


Fig. 29

Como vemos en (48), la fuerza elástica es una fuerza central cuya componente radial es

$$F(r) = -k(r - r_0)$$

Su trabajo entre dos posiciones r_1 y r_2 viene dado entonces por la fórmula (46) en la forma

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = -k \int_{r_1}^{r_2} (r - r_0) dr$$

$$\Rightarrow W = -\frac{1}{2} k(r_2 - r_0)^2 + \frac{1}{2} k(r_1 - r_0)^2$$

Introduciendo las elongaciones

$$\delta_1 = r_1 - r_0 \quad \text{y} \quad \delta_2 = r_2 - r_0$$

correspondientes a las posiciones r_1 y r_2 resulta

Trabajo de un resorte lineal

(49)	$W = -\frac{1}{2} k \Delta(\delta^2)$	k es la rigidez del resorte, y $\Delta(\delta^2) = \delta_2^2 - \delta_1^2$
------	---------------------------------------	--

(50) La fuerza de un resorte lineal es conservativa

Ejemplo 25. Un collarín insertado en una guía lisa, y cuyo peso es 30 N, es jalado por medio de un cable inextensible con una fuerza constante de 900 N como se ve en la Fig. E25a. El collarín está sujeto a un resorte de constante 4000 N/m, que está inextendido y horizontal en la situación inicial. Calcular el trabajo realizado por la fuerza total sobre el collarín cuando éste sube una distancia de 0.8 m.

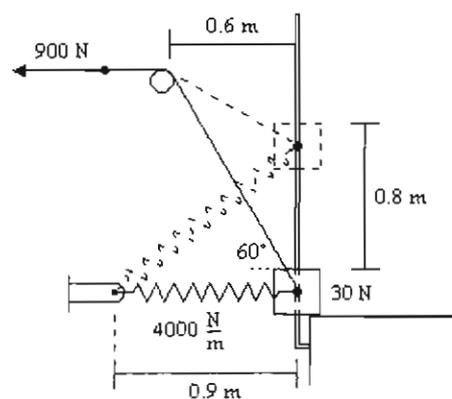


Fig. E25a

Las fuerzas actuantes sobre el collarín son su peso, la normal de la guía, la tensión del cable y la fuerza del resorte. Para calcular el trabajo de las últimas dos debemos calcular la deformación del resorte en la situación final y la distancia que se mueve el extremo de la cuerda donde está aplicada la fuerza de 900 N.

La longitud final del resorte se saca del triángulo rectángulo de catetos 0.9 m y 0.8 m, y vale

$$\sqrt{(0.9)^2 + (0.8)^2} = 1.2 \text{ (m)}$$

por lo que la deformación final vale

$$\delta_f = 1.2 \text{ m} - 0.9 \text{ m} = 0.3 \text{ m}$$

Ahora calcularemos la diferencia de longitudes $L_2 - L_1$, mostrada en la Fig. E25b. La longitud L_1 se saca a partir del ángulo de 60° y el lado de 0.6 m, en la forma

$$0.6 = L_1 \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow L_1 = 1.2 \text{ m}$$

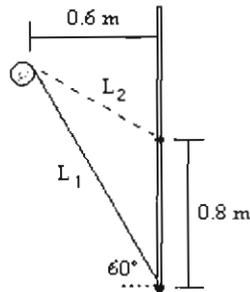


Fig. E25b

Ahora, por la ley de los cosenos tenemos

$$L_2 = \sqrt{1.2^2 + 0.8^2 - 2(1.2)(0.8) \cos 30^\circ} = 0.64 \text{ (m)}$$

Los trabajos son entonces:

Peso:

$$W_{\text{Peso}} = -30 \times 0.8 = -24 \text{ (J)}$$

Normal:

$$W_{\text{Nor}} = 0$$

Resorte:

$$W_{\text{Res}} = -\frac{1}{2} k \delta_f^2 = -0.5 (4000) (0.3)^2 = -180 \text{ (J)}$$

Cable (o fuerza de 900 N):

$$W_{\text{Cable}} = -T \Delta L = -900 \times (0.64 - 1.2) = 504 \text{ (J)}$$

(Se usó aquí la fórmula (42)-p38.)

El trabajo de la fuerza total sobre el collarín es

$$W_{\text{ext}} = -24 \text{ J} - 180 \text{ J} + 504 \text{ J} = 300 \text{ J}$$

11.11. Trabajo de las fuerzas de interacción centrales entre dos partículas

La importancia de las fuerzas centrales estriba en que las fuerzas gravitatoria y eléctrica entre dos partículas son *centrales*, por lo cual se entiende ahora que su línea de acción es la línea *actual* que une las partículas, y que su magnitud depende solamente de la distancia entre ambas. ¿Dónde quedó el centro de fuerzas en este caso? No cabe hablar de él, pues ambas partículas están en movimiento en general y no existe un centro de fuerzas fijo.

Uno puede preguntarse cuál es el trabajo que realiza sobre una de las partículas la fuerza que le ejerce la otra. Pero será de más utilidad calcular el trabajo que realizan *ambas* fuerzas de interacción sobre una y otra partícula. Con este fin tracemos la Fig. 30, que incluye las fuerzas acción-reacción F y $-F$, los radiovectores r_1 y r_2 relativos a un referencial inercial, y el vector separación r entre ambas partículas.

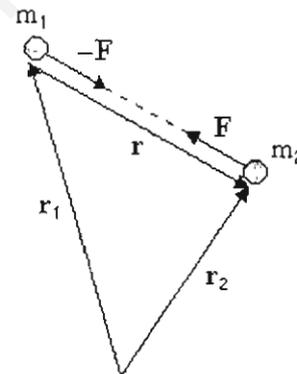


Fig. 30

<Nota. Si denotamos la fuerza sobre una de las dos partículas con "F", entonces la fuerza sobre la otra será automáticamente "- F". Para evitar errores de signo al calcular trabajos tome en cuenta esta regla:

"La partícula sobre la que actúa la F tiene vector de posición (relativo) r, el cual se mide desde la otra partícula".>

Imaginemos desplazamientos arbitrarios de m_1 y m_2 , denotando respectivamente con dr_1 y dr_2 sus desplazamientos infinitesimales. En la elección de la Fig. 30, F trabaja sobre m_2 y $-F$ sobre m_1 , y el trabajo conjunto es

$$W = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{\Gamma_1} (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}_1$$

donde la primera integral se evalúa a lo largo de la trayectoria Γ_2 de m_2 , y la segunda a lo largo de la correspondiente Γ_1 .

Se puede demostrar que este trabajo se puede poner también en términos del vector "r" en la forma

$$(51a) \quad W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde la trayectoria de integración es la trayectoria de m_2 vista desde un sistema donde m_1 está en reposo.

<Nota. Si bien la fórmula (51a) tiene la misma forma que la expresión general del trabajo, ecuación (30)-p33, su interpretación física es otra.>

La integral (51a) es fácil de evaluar si consideramos que $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento de m_2 relativo a un sistema de coordenadas fijo en m_1 , de tal modo que la expresión (51a) se puede enunciar también así:

(51b)	El trabajo de las fuerzas centrales acción-reacción en un sistema de dos partículas se puede calcular suponiendo fija una de ellas y calculando el trabajo realizado sobre la partícula móvil por la fuerza debida a la partícula fija.
-------	---

Ahora bien, si imaginamos fija una de las partículas, la podemos ver como un centro de fuerzas fijo, y como la fuerza es central caemos en el caso de la fórmula (46)-p40. Se sigue:

Trabajo de ambas fuerzas acción-reacción de un sistema de dos partículas con interacción central		
(52)	$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr$	"r" es aquí la distancia interpartículas.

<Nota. Cabe aquí el mismo comentario que hicimos en la nota anterior: aunque la expresión (52) es idéntica a la (46)-p40, la interpretación es distinta.>

Notemos que existen muchas configuraciones distintas correspondientes a una misma distancia interpartículas r_0 . El trabajo depende solamente de las distancias r_i y r_f , no de las orientaciones del sistema de dos partículas.

Como aplicación de (52) calcularemos el trabajo realizado por dos fuerzas centrales fundamentales: la fuerza gravitatoria entre dos partículas de masas m_1 y m_2 , y la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 .

Sus expresiones matemáticas son

Fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales	
(53a)	$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$

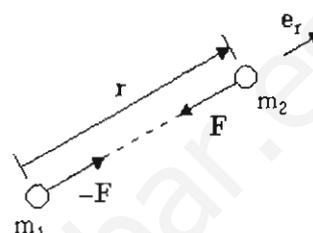


Fig. 31

Fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales	
(53b)	$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{(4\pi\epsilon_0)r^2} \mathbf{e}_r$

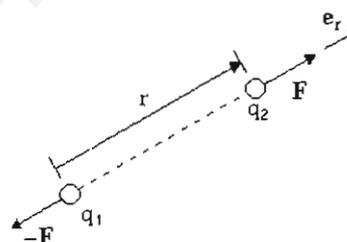


Fig. 32

La Fig. 32 corresponde a fuerza eléctrica repulsiva ($q_1 > 0$ y $q_2 > 0$ o bien $q_1 < 0$ y $q_2 < 0$).

Queremos calcular en cada caso el trabajo realizado por las dos fuerzas acción-reacción \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$, entre dos configuraciones en las que las distancias interpartículas son r_0 y r .

La fuerza $F(r)$ es en cada caso el factor de e_r , en las expresiones (53a) y (53b), o sea

$$F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad F(r) = \frac{q_1q_2}{(4\pi\epsilon_0)r^2}$$

Entonces el trabajo de las fuerzas gravitatorias $m_1 \leftrightarrow m_2$ es, por (52),

$$W = -Gm_1m_2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

y el trabajo de las fuerzas eléctricas $q_1 \leftrightarrow q_2$ es:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Notemos que los trabajos de estas fuerzas, desde configuraciones en que las partículas están *infinitamente* separadas hasta alguna configuración donde la distancia interpartículas es "r", no es infinito, sino

$$(54a) \quad W = \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (\text{Trabajo gravitatorio } \infty \rightarrow r)$$

$$(54b) \quad W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{Trabajo eléctrico } \infty \rightarrow r)$$

El trabajo desde ∞ a "r" de la fuerza de atracción gravitatoria siempre es positivo. El eléctrico tiene un signo que depende de los signos de las cargas. Si la fuerza eléctrica es de atracción el trabajo eléctrico es positivo, y si es de repulsión es negativo.

Ejemplo 26. Dos bloques de masas $m_1 = 10 \text{ kg}$ y $m_2 = 6 \text{ kg}$ están unidos a los extremos de un resorte de constante $k = 800 \text{ N/m}$, que inicialmente tiene una contracción de 0.25 m . Se rompe el hilo que mantiene al resorte comprimido. Calcular el trabajo de las fuerzas que ejerce el resorte sobre los bloques desde la situación inicial hasta que la deformación del resorte es una elongación de 0.1 m .

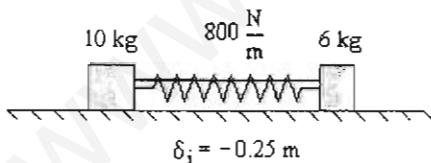


Fig. E26

Aunque las fuerzas que ejerce el resorte sobre los bloques no son de acción-reacción, sí son fuerzas de magnitudes iguales y direcciones opuestas. Adaptando las ideas que llevaron a (52) tenemos entonces

$$W = -\frac{1}{2} k\Delta(\delta^2) = -0.5 \cdot 800 (0.1^2 - 0.25^2) = 21 \text{ (J)}$$

*11.12. Más sobre las fuerzas conservativas

Hemos visto que la integral del trabajo,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

depende en general de:

- Las coordenadas (x_A, y_A) y (x_B, y_B) de los puntos límites de integración, y también de:
- La ecuación de la trayectoria de integración, $y = y(x)$.

Sin embargo, como sabemos, existen fuerzas para las cuales el trabajo es independiente de la trayectoria, las llamadas fuerzas conservativas. Para esta clase de fuerzas la integral del trabajo sigue dependiendo, por supuesto, de las coordenadas (x_A, y_A) y (x_B, y_B) (Consulte la ec. (37)-p36). Dicho de otra manera, el trabajo es una función de *dos puntos*, A y B. Ahora bien, si fijamos uno de los puntos, digamos A, y vemos el punto B como un punto variable con coordenadas (x, y) , entonces la expresión del trabajo será función de un sólo punto (x, y) . *De esta manera podemos asociar con cada fuerza conservativa F una función de punto (o función de la posición) $\phi(x, y)$.*

Demostremos un ejemplo. Consideremos la siguiente fuerza conservativa:

$$(55) \quad \mathbf{F}(x, y) = 3x^2 \mathbf{i} - y^3 \mathbf{j}$$

(es de la forma (33)-p35). El trabajo de esta fuerza entre, digamos, el punto fijo $(2, 1)$ y el punto variable (x, y) , a lo largo de *cualquier* trayectoria entre ambos, es

$$W = \int_{(2,1)}^{(x,y)} (3x^2 dx - y^3 dy) = \int_2^x 3x^2 dx - \int_1^y y^3 dy$$

Obtenemos

$$(56) \quad W[(2,1) \rightarrow (x, y)] = \frac{1}{4}(4x^3 - y^4 - 31)$$

o bien

$$(57a) \quad W[(2,1) \rightarrow (x, y)] = \phi(x, y)$$

con

$$(57b) \quad \phi(x, y) \equiv \frac{1}{4}(4x^3 - y^4 - 31)$$

Reiteramos que (57a,b) da el trabajo de la fuerza particular (55) entre el punto fijo (2, 1) (llamado *punto de referencia*) y el punto arbitrario (x, y). Por ejemplo, el trabajo entre los puntos (2, 1) y (5, -3) sería igual, con $x = 5$ y $y = -3$, a

$$W = \varphi(5, -3) = \frac{1}{4}(4 \cdot 5^3 - (-3)^4 - 31) = 97$$

¿Y si quisiéramos evaluar el trabajo entre dos puntos cualesquiera, digamos (-3, 6) y (7, -2)?

Podríamos hacerlo aplicando un par de propiedades de la operación de integración, a saber,

$$\int_A^B = \int_A^P + \int_P^B \quad \text{e} \quad \int_A^B = -\int_B^A$$

Combinándolas tenemos

$$\int_A^B = -\int_P^A + \int_P^B$$

o bien, en notación obvia,

$$(58) \quad W[A \rightarrow B] = -W[P \rightarrow A] + W[P \rightarrow B]$$

que se puede poner (ver ec. (57a)):

$$(59) \quad W[A \rightarrow B] = -\varphi(A) + \varphi(B) \equiv \Delta\varphi$$

Notemos que la referencia al punto fijo (2, 1) ha desaparecido en la ecuación (59), la cual es válida independientemente del punto fijo que se escoja.

De acuerdo con (59), entonces, el trabajo entre (-3, 6) y (7, -2) es

$$\begin{aligned} W[(-3, 6) \rightarrow (7, -2)] &= \varphi(7, -2) - \varphi(-3, 6) = \\ &= \frac{1}{4}(4 \cdot 7^3 - (-2)^4 - 31) - \frac{1}{4}(4 \cdot (-3)^3 - 6^4 - 31) \\ &= -27.5 \end{aligned}$$

Resumamos la discusión anterior en estos cuadros:

(60a)	El trabajo de una fuerza conservativa $\mathbf{F}(x, y)$, entre un punto de referencia fijo (x_0, y_0) y un punto variable (x, y) , es una función de la posición: $W[(x_0, y_0) \rightarrow (x, y)] = \varphi(x, y)$
-------	---

(60b)	El trabajo de una fuerza conservativa $\mathbf{F}(x, y)$, entre dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , se puede poner en la forma $W[(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2)] = \Delta\varphi =$ $= \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)$ La función "φ" asociada a la fuerza conservativa $\mathbf{F}(x, y)$ la llamaremos <i>función potencial</i> del campo.
-------	---

Hay un par de interrogantes que debemos atender en relación con las fuerzas conservativas:

- ¿Existe algún criterio simple para averiguar si un campo dado es conservativo o no?
- ¿Cómo calcular fácilmente la función potencial de un campo que se sabe es conservativo?

Con respecto a la primera pregunta, examinemos la integral general del trabajo en coordenadas cartesianas, a saber,

$$(61) \quad W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy)$$

Si el integrando de (61) se puede escribir, sin necesidad de emplear la ecuación de la trayectoria, como la diferencial de alguna función "φ", o sea,

$$(62) \quad F_x dx + F_y dy = d\varphi$$

entonces el campo \mathbf{F} es conservativo, ya que la integral (62) queda

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \int_A^B d\varphi = \\ &= [\varphi]_A^B = \varphi(B) - \varphi(A) = \Delta\varphi \end{aligned}$$

Esta función φ sería la función potencial del campo.

Ahora recurramos al cálculo diferencial, que nos dice que si x varía en dx y y varía en dy, entonces la función φ(x, y) varía en "dφ", dada por

Diferencial total de una función φ(x, y)	
(63)	$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy$

Comparando (63) con (62) tenemos el siguiente teorema:

(64)	Si las componentes del campo son las derivadas parciales de alguna función φ , $F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ entonces el campo es conservativo, y su función potencial es dicha función φ .
------	---

<Nota. El recíproco del teorema también es cierto, pero no lo demostraremos: si un campo es conservativo, entonces sus componentes se pueden poner como las derivadas de una función.>

Naturalmente, queda el problema de cómo obtener esta función φ . Pero, por lo pronto, el teorema nos da un modo de generar campos conservativos a granel. Hélo aquí:

- Invente alguna función $\varphi(x, y)$.
- Defina el campo $F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ y $F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$.
- Presto. El campo $F = F_x i + F_y j$ es conservativo, y su función potencial es " φ ".

Ejemplo 27. Inventemos la función

$$\varphi = 4x^2y^3$$

Deseamos que esta sea la función potencial de algún campo. ¿Cuál es este campo?

De acuerdo con el teorema (64), pongamos

$$F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 8xy^3, \quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 12x^2y^2$$

Entonces el campo cuya función potencial es $4x^2y^3$ es

$$F(x, y) = 8xy^3 i + 12x^2y^2 j$$

Ahora podemos calcular el trabajo realizado por este campo entre dos puntos cualesquiera. Por ejemplo, el trabajo entre los puntos (0, 3) y (-2, 5) sería

$$\begin{aligned} W &= \Delta\varphi = \varphi(-2, 5) - \varphi(0, 3) = \\ &= 4(-2)^2(5)^3 - 4(0)^2(3)^3 = 2000 \end{aligned}$$

Evidentemente tal generación de campos conservativos no tiene gran utilidad práctica. Pero el teorema (64) nos proporciona un criterio para saber si un campo dado es conservativo o no. Veamos.

Si F es conservativo, entonces existe una función φ tal que

$$F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Derivando F_x parcialmente con respecto a y y F_y con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

Si la función φ es continua y de derivadas continuas, lo cual supondremos cierto, las segundas derivadas en los miembros derechos de estas relaciones son iguales, de modo que obtenemos el siguiente teorema:

Teorema	
(65)	Si el campo $F = F_x i + F_y j$ es conservativo entonces la derivada parcial de F_x con respecto a y es igual a la derivada parcial de F_y con respecto a x . $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

El recíproco de este teorema también es cierto (no lo demostraremos) y es el que nos da el criterio para averiguar la conservatividad de un campo:

Criterio para decidir sobre la conservatividad	
(66)	Si se cumple la relación $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$, entonces el campo $F = F_x i + F_y j$ es conservativo.

Por ejemplo, el siguiente campo es conservativo:

$$F = 2 \ln y i + \frac{2x}{y} j$$

puesto que $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{2}{y}$ y $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{2}{y}$.

Otro ejemplo: los campos que se escriben en la forma $\mathbf{F} = h(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j}$ son conservativos, ya que la parcial de F_x con respecto a y (igual a cero) es igual a la parcial de F_y con respecto a x (también cero).

Finalmente abordemos el problema de cómo calcular la función potencial de un campo que hemos demostrado que es conservativo.

El problema consiste en integrar el campo desde algún punto de referencia fijo, digamos el punto (x_0, y_0) , hasta un punto arbitrario (x, y) . Esta integral será una función $\varphi(x, y)$ exclusivamente del punto final (x, y) y será la función potencial asociada al campo.

Ahora bien, dado que el campo es conservativo por hipótesis, podemos calcular la integral a lo largo de *cualquier* trayectoria que una los puntos (x_0, y_0) y (x, y) . La más simple es la que consta de dos segmentos rectos consecutivos, como vemos en la figura 33: uno a lo largo del Eje X desde el punto (x_0, y_0) hasta el punto (x, y_0) , y el otro a lo largo del Eje Y desde el punto (x, y_0) hasta el punto final (x, y) .

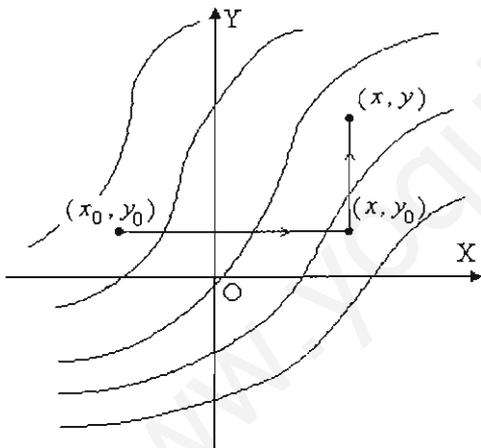


Fig. 33

La integral se formula entonces así:

$$(67) \quad W = \int (F_x dx + F_y dy) = \int F_x dx + \int F_y dy$$

Ambas integrales a la derecha se extienden sobre los dos tramos rectos.

Con respecto a la primera integral: como $dy \equiv 0$ sobre el segmento vertical, esta integral se extiende solamente a lo largo del segmento horizontal, sobre el que además y es constante, igual a y_0 . Entonces esta primera integral queda

$$\int_{x_0}^x F_x(x, y_0) dx$$

Por un razonamiento análogo, la segunda integral se extiende sólo sobre el segmento vertical y queda

$$\int_{y_0}^y F_y(x, y) dy$$

donde x debe considerarse constante (Vea la Fig. 33).

Por lo tanto,

Función potencial de un campo conservativo

$F(x, y)$

$$(68) \quad \varphi(x, y) = \int_{x_0}^x F_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y F_y(x, y) dy$$

x se considera constante en la segunda integral.

Ejemplo 28. Demostrar que el campo

$$\mathbf{F} = 2x \sin y \mathbf{i} + x^2 \cos y \mathbf{j}$$

es conservativo, y calcular su función potencial.

Tenemos

$$F_x = 2x \sin y \quad y \quad F_y = x^2 \cos y$$

De acuerdo con (65), evaluemos las derivadas:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x \cos y \quad y \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x \cos y$$

Dado que son iguales, el campo es conservativo.

Para encontrar su función potencial apliquemos la fórmula (68). Tenemos que $F_x(x, y_0) = 2x \sin y_0$ y $F_y(x, y) = x^2 \cos y$, por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{x_0}^x 2x \sin y_0 dx + \int_{y_0}^y x^2 \cos y dy \\ &= 2 \sin y_0 \int_{x_0}^x x dx + x^2 \int_{y_0}^y \cos y dy \end{aligned}$$

(Recuerde que x se considera constante en la integral sobre y).

Entonces

$$(r1) \quad \varphi(x, y) = x^2 \sin y - x_0^2 \sin y_0$$

En las aplicaciones del presente formalismo interesan diferencias de valores de la función potencial $\varphi(x, y)$; entonces el término constante " $-x_0^2 \text{ sen } y_0$ " de (r1) se puede suprimir, puesto que desaparece al formar la diferencia $\Delta\varphi$. Queda finalmente

$$(r2) \quad \varphi(x, y) = x^2 \text{ sen } y$$

Note que se cumple

$$F_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

como debía.

Ejemplo 29. Calcular la función potencial del campo conservativo

$$\mathbf{F} = 2 \ln y \mathbf{i} + \frac{2x}{y} \mathbf{j}$$

De acuerdo con (68), la componente F_x se integra sobre x desde x_0 hasta x , sustituyéndose y por la constante y_0 . La componente F_y se integra sobre y desde y_0 hasta y , tal como está, pero imaginando x constante. O sea,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{x_0}^x 2 \ln y_0 \, dx + \int_{y_0}^y \frac{2x}{y} \, dy = \\ &= 2 \ln y_0 \int_{x_0}^x dx + 2x \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \\ &= 2 \ln y_0 (x - x_0) + 2x (\ln y - \ln y_0) \end{aligned}$$

Esto se simplifica a

$$\varphi(x, y) = 2x \ln y - 2x_0 \ln y_0$$

Podemos suprimir el término constante, así que finalmente

$$\varphi(x, y) = 2x \ln y$$

11.13. Potencia en el movimiento plano

El trabajo efectuado por una fuerza \mathbf{F} en un desplazamiento $d\mathbf{r}$ es $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Si este trabajo se efectúa en un tiempo dt , entonces el trabajo realizado por

unidad de tiempo es

$$\frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Esto es lo que se define como la potencia suministrada por la fuerza en el instante t :

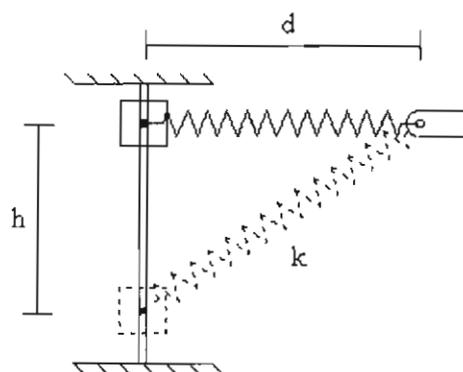
$$(69a) \quad P(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Análogamente a lo que ocurre en el caso unidimensional, la potencia de la fuerza total, P_T , se puede poner en la forma

$$(69b) \quad P_T = \frac{dK}{dt}$$

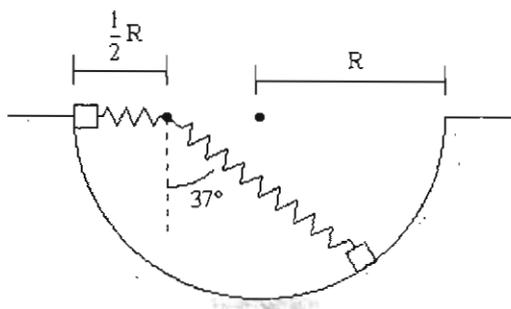
11.14. Problemas

1. Un collarín de masa 5 kg se mueve en una guía vertical lisa en un plano vertical. Calcular el trabajo efectuado sobre el collarín por el resorte y la Tierra entre las dos posiciones mostradas en la figura. Se tiene $d = 4 \text{ m}$ y $h = 3 \text{ m}$. La constante elástica del resorte es $k = 400 \text{ N/m}$ y su longitud natural es 3.8 m.



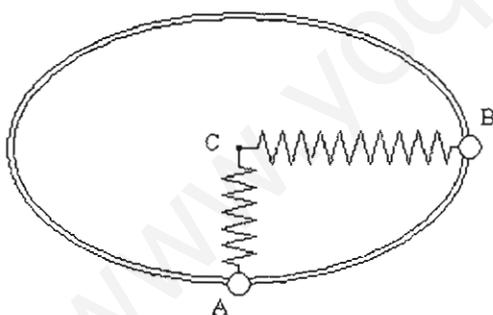
Resp. - 280 J; 147 J.

2. El bloque de la figura se deja ir desde la posición en el punto superior, en donde el resorte de constante k tiene una compresión de $R/2$. Calcular el trabajo del resorte y del peso entre dicha posición inicial y la posición final donde el resorte forma 37° con la vertical. Tome $R = 1 \text{ m}$, $k = 300 \text{ N/m}$, $m = 1 \text{ kg}$.



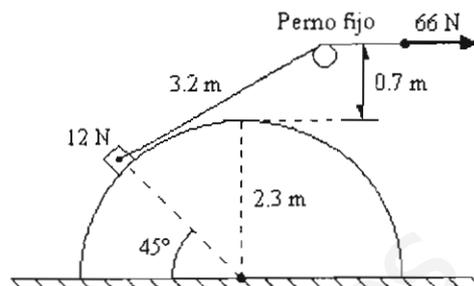
Resp. 30.37 J ; 10.02 J .

3. Una bola de masa 5 kg se mueve a lo largo de una guía lisa con forma de elipse de semiejes mayor 1 m y menor 0.7 m . La bola se mueve en un plano vertical, sujeta a un resorte de constante elástica $k = 400 \text{ N/m}$. Calcular el trabajo que ejerce la fuerza total sobre la bola entre las posiciones A y B, cuando el resorte está vertical y horizontal, respectivamente. El resorte no está deformado en la posición A.



Resp. $W_{\text{ext}} = -52.3 \text{ J}$.

4. Se jala un bloque de 12 N de peso sobre una superficie semiesférica de radio 2.3 m mediante una cuerda a la que se aplica una fuerza horizontal constante de 66 N . Inicialmente el tramo de cuerda entre el bloque y el perno fijo mide 3.2 m y está inclinado a 30° con la horizontal. Calcular el trabajo efectuado por la tensión y por el peso entre la posición inicial mostrada y la posición en que el bloque está en la parte superior de la superficie.

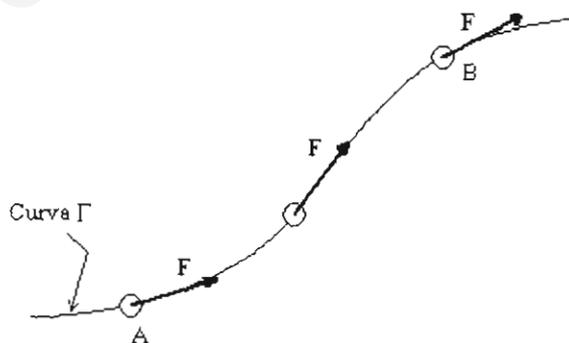


Resp. 127.1 J ; -8.08 J .

5. Una fuerza F de magnitud constante se aplica sobre una partícula que se desliza sobre una guía curva. La fuerza siempre está dirigida a lo largo de la tangente a la guía en todo punto. Demostrar que el trabajo que realiza esta fuerza es

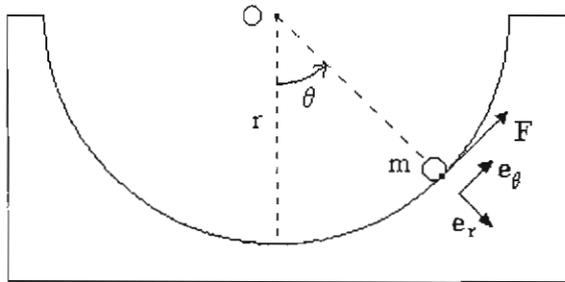
$$W = F s$$

donde F es la magnitud de F y "s" es la longitud del camino recorrido por la partícula a lo largo de la guía.

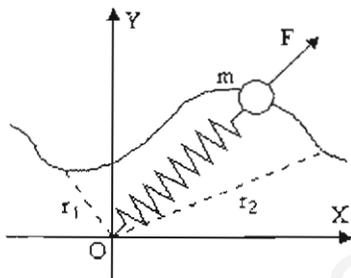


6. Una partícula de masa m se mueve en una circunferencia. Una de las fuerzas sobre ella, $F = F_\theta e_\theta$, está en todo punto en dirección tangencial, como vemos en la figura. La componente F_θ depende solamente de θ . Mostrar que la expresión del trabajo realizado por F es

$$W = r \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_\theta d\theta$$



7. Un resorte elástico produce una fuerza no lineal, cuya componente radial (única) viene dada por $F = -k(r - r_0)^3$, donde k es constante. La longitud inextendida del resorte es r_0 . Calcular el trabajo efectuado sobre una partícula de masa m cuando ésta se desplaza a lo largo de una curva cualquiera entre las posiciones $r = r_1$ y $r = r_2$, dentro del rango elástico del resorte.



Resp. $-\frac{1}{4}k\Delta(\delta^4)$, $\delta_1 = r_1 - r_0$, $\delta_2 = r_2 - r_0$

8. Un campo de fuerzas central se expresa por

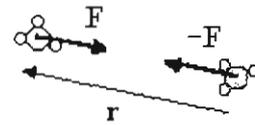
$$\mathbf{F} = A_0 \cos kr \mathbf{e}_r$$

donde A_0 y k son constantes. Calcular el trabajo del campo entre $r = 0$ y $r = \pi/k$.
Resp. A_0/k .

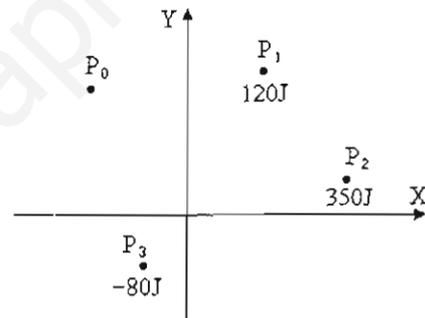
9. Las moléculas de un gas se ejercen mutuamente una fuerza eléctrica que depende de la distancia "r" entre ellas, en la forma

$$F(r) = \frac{a}{r^7} - \frac{b}{r^{13}}$$

donde a y b son constantes. Calcular el trabajo de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ desde una separación R hasta una separación infinita.



10. Un campo de fuerzas bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$ existe en una región del espacio XY . El campo es conservativo, lo cual permite definir una función de la posición P como el trabajo realizado por el campo entre un punto fijo P_0 y el punto P . En la figura se muestran los valores de esta función, en joule, para tres puntos, P_1, P_2 y P_3 . ¿Cuánto vale el trabajo del campo entre los puntos P_1 y P_2 ? ¿Entre P_3 y P_2 ? Si el trabajo entre P_1 y cierto punto P_4 vale 340, ¿cuánto vale el trabajo entre P_0 y P_4 ?
Resp. 230; -430.

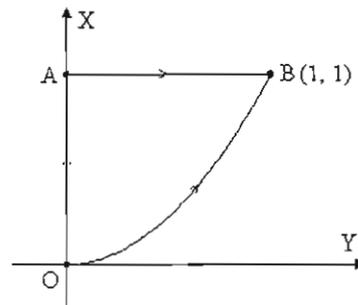


11. Calcular el trabajo del campo de fuerzas

$$\mathbf{F} = -5y^3 \mathbf{i} - 15xy^2$$

entre el origen y el punto $B(1, 1)$, a lo largo de:

- (a) la parábola $y = x^2$.
- (b) el segmento vertical de O a A y luego el segmento horizontal de A a B .



12. ¿Es conservativo el campo de fuerzas $\mathbf{F} = xi + yj$?
¿Y el campo $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$?

13. Utilizando la fórmula (68)-p47, calcular la función potencial de los siguientes campos conservativos:

(a) $\mathbf{F} = 15x^2y^2 \mathbf{i} + 10x^3y \mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F} = (1 + y)e^{xy} \mathbf{i} + x^2 e^{xy} \mathbf{j}$

Resp. (a) $5x^3y^2$ (b) xe^{xy} .

14. Demuestre que el campo de fuerzas

$$\mathbf{F} = 10 \cos x \mathbf{i} - 12 \sin 2y \mathbf{j}$$

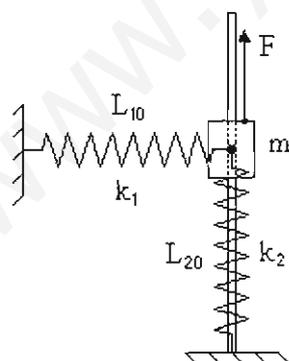
es conservativo. Calcular el trabajo del campo entre los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 2\pi)$

Resp. 2 J .

15. El collarín que se muestra en la figura es jalado por una fuerza constante F , que lo desplaza una distancia d desde la posición mostrada. Los resortes sujetos al collarín no están deformados inicialmente, y sus longitudes naturales son L_{10} y L_{20} . La guía vertical es lisa.

Calcular el trabajo de la fuerza total sobre el collarín entre las dos posiciones mencionadas.

Datos: $L_{10} = 0.6 \text{ m}$, $L_{20} = 0.8 \text{ m}$, $k_1 = 5000 \text{ N/m}$, $k_2 = 6000 \text{ N/m}$, $m = 5 \text{ kg}$, $F = 100 \text{ N}$, $d = 0.15 \text{ m}$.



Resp. $W = 0.0475 \text{ J}$.

CAPÍTULO 12

BALANCE DE ENERGÍA PARA UNA SÓLA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

Buenas noticias: la ecuación de balance de energía para una partícula en movimiento plano tiene la misma forma " $W_{ext} = \Delta K$ " que en una dimensión, como veremos en este capítulo. La aplicación de esta EBE va a reducirse en muchos casos a un problema geométrico simple.

12.1. Teorema Trabajo-Energía cinética en el plano

La segunda ley de Newton es

$$(70) \quad F_T = m a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

(F_T es la fuerza *total* sobre la partícula, "m" es su masa, r su vector de posición, v su velocidad y a su aceleración).

Dada la fuerza total F_T , junto con los valores $\{r(t_0), v(t_0)\}$ que especifican el estado de la partícula en un tiempo particular t_0 , se trata de obtener a partir de (70) el estado en cualquier tiempo t , o sea las cantidades $r(t)$ y $v(t)$.

La fuerza total puede ser función de r , v y t ,

$$(71) \quad F_T = F_T(r, v, t) \quad (\text{en general})$$

La ecuación de movimiento (70) es una ecuación diferencial de segundo orden. En ciertos casos es posible reducirla a una ecuación de primer orden (lo que se llama efectuar una "primera integral" de dicha ecuación), mediante el procedimiento descrito a continuación.

Multipliquemos ambos miembros de (70) escalarmente por el vector " dr ", que representa un desplazamiento infinitesimal de la partícula a lo largo de su trayectoria actual,

$$(72) \quad F_T \cdot dr = m \frac{dv}{dt} \cdot dr$$

El miembro derecho se puede transformar en una expresión más simple:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dr = m dv \cdot \frac{dr}{dt} = m dv \cdot v = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

(Se reacomodó la diferencial "dt" y se usó la relación general $A \cdot dA = d\left(\frac{1}{2} A^2\right)$, en la que A es la magnitud del vector A). Con esto (72) se vuelve

$$(73) \quad F_T \cdot dr = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Definiendo la energía cinética "K" análogamente a como en una dimensión, $K = \frac{1}{2} m v^2$ (con $v = |v|$), tenemos:

$$(74) \quad F_T \cdot dr = dK$$

El trabajo efectuado por la fuerza total F_T en un desplazamiento infinitesimal dr es igual a la variación dK de la energía cinética ocurrida en este desplazamiento.

Examinemos físicamente el significado de (74). La fuerza total F_T posee en general dos componentes, una tangencial a la dirección local de movimiento, F_t , y la otra perpendicular a dicha dirección, F_n (Fig. 34).

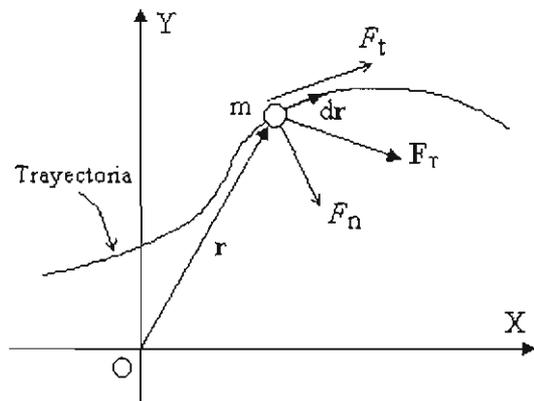


Fig. 34

Conocemos el efecto cinemático de cada componente. La componente normal F_n tiende a rotar la dirección de movimiento. Esta componente no altera la velocidad, y no realiza trabajo sobre la partícula. La componente tangencial F_t modifica la rapidez "v" de la partícula, es decir, modifica la energía cinética. F_t es precisamente la tasa de variación de K con la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria. Esto es lo que expresa la ecuación (74), puesto que la relación

$$\mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{r} = F_t ds$$

conduce a

$$F_t ds = dK \quad \text{y} \quad F_t = \frac{dK}{ds}$$

Integremos ambos miembros de la ecuación (74) a lo largo de la trayectoria. Obtenemos

$$\int_A^B \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{r} = K_B - K_A$$

A la izquierda tenemos el trabajo de la fuerza total \mathbf{F}_T , y a la derecha el cambio de energía cinética. Esto es la:

Ecuación de balance de energía para una partícula en movimiento plano	
(75)	$W_{\text{ext}} = \Delta K$
El trabajo efectuado por la fuerza total entre dos puntos cualesquiera A y B es igual a la variación de la energía cinética entre estos puntos.	

También se le llama "**Teorema trabajo-energía cinética**" o "**Teorema de las fuerzas vivas**".

La utilidad de este teorema se limita a movimientos bajo fuerzas dependientes sólo de la posición. De ser así, el teorema relaciona *posiciones y velocidades* en el movimiento. A partir de allí, mediante una segunda integración, se puede relacionar la posición con el tiempo.

La interpretación de la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta K$ como una ecuación de balance de energía es la misma que la discutida en el capítulo 2.

La energía mecánica de un sistema formado por una sola partícula es puramente cinética. El sistema externo de la partícula son todos aquellos cuerpos que

ejercen fuerza sobre ella. El trabajo que ejercen las fuerzas sobre la partícula, W_{ext} , representa un flujo de energía (en forma de trabajo, obviamente) hacia la partícula, que sirve para incrementar su energía cinética tanto como $\Delta K = W_{\text{ext}}$.

12.2. Ejemplos

Ejemplo 30. Un objeto de masa "m" se deja caer desde el reposo (Fig. E30). En el caso (a) cae libremente en dirección vertical; en (b) se desliza por una resbaladilla lisa; y en (c) desciende en un arco de circunferencia, sujeto al extremo de un hilo. Demostrar que en los tres casos alcanza una velocidad $v = \sqrt{2gh}$ después de descender una distancia "h".

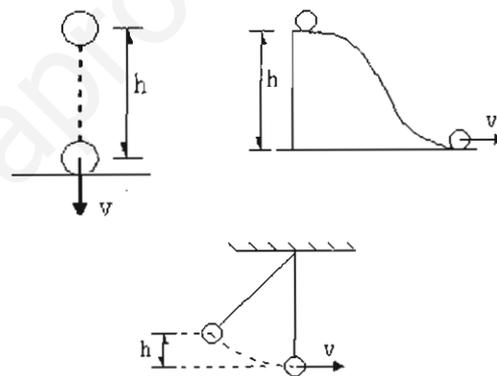


Fig. E30

Nuestro sistema es la partícula. Su sistema externo (los cuerpos que ejercen fuerza sobre ella) es

En el caso (a):

La Tierra.

En el caso (b):

La Tierra y la Resbaladilla.

En el caso (c):

La Tierra y el Hilo.

Calculemos el trabajo hecho por el sistema externo en cada caso.

Caso (a)

Como el objeto desciende (peso en la misma dirección que el desplazamiento), el trabajo efectuado por el peso (o bien: "el trabajo hecho por la Tierra") es positivo, igual a $W = mgh$.

Caso (b)

La resbaladilla es lisa y por tanto ejerce solamente fuerza normal N , cuyo trabajo es nulo. El trabajo de la Tierra es $W = mgh$.

Caso (c)

El hilo no hace trabajo porque la tensión es perpendicular al desplazamiento en todo punto del arco de circunferencia. El trabajo de la Tierra es $W = mgh$.

En los tres casos, pues, la Tierra es la única que trabaja, tanto como " mgh ". Aplicando la ecuación de balance $W_{ext} = \Delta K$ se halla

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 - 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gb}$$

Ejemplo 31. En el conjunto de la Fig. E31 suponemos que todas las superficies son lisas. La cuerda enlaza los bloques de masas m_1 y m_2 , y el conjunto parte del reposo. Se desea encontrar la velocidad " v " del conjunto después que el bloque colgante ha descendido una distancia h .

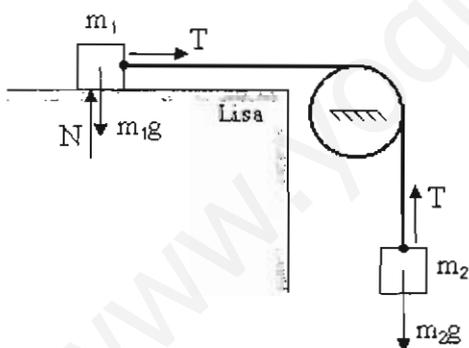


Fig. E31

Aplicaremos la ecuación $W_{ext} = \Delta K$ a cada bloque por separado:

Sistema: {Bloque de masa m_1 }

Sistema externo (y fuerzas que ejerce):

- Tierra (m_1g)
- Mesa (N)
- Cuerda (T)

Trabajo del sistema externo:

$$W_{ext} = T h$$

EBE:

$$(r1) \quad T h = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Sistema: {Bloque de masa m_2 }

Sistema externo (y fuerzas que ejerce):

- Tierra (m_2g)
- Cuerda (T)

Trabajo del sistema externo:

$$W_{ext} = m_2gh - T h$$

EBE:

$$(r2) \quad m_2gh - T h = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Sumando miembro a miembro ambas EBE's (r1) y (r2) se cancelan los términos " Th " y obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1 + m_2}}$$

Ejemplo 32. Un pequeño collarín de masa m se desliza en un plano vertical por una guía circular de radio R , como se muestra en la Fig. E32a. Inicialmente el collarín se halla alineado con el centro de la guía y con un resorte de rigidez k y longitud natural L_0 . Suponiendo que parte del reposo, ¿qué velocidad adquiere el collarín en el punto más bajo de su trayecto? Si el resorte es muy duro el collarín no alcanza a llegar a dicha posición; ¿qué condición debe cumplirse para que sí llegue?

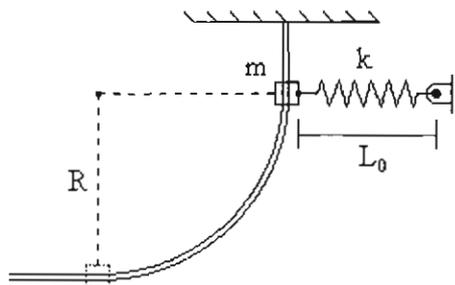


Fig. E32a

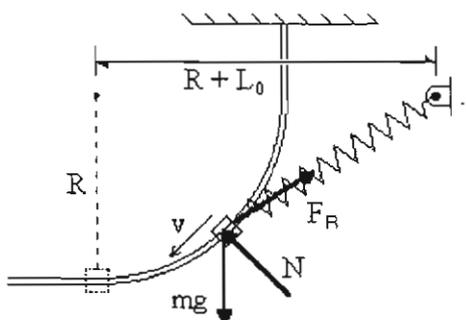


Fig. E32b

Nuestro sistema es el {Collarín}, y su sistema externo es {Tierra, Resorte, Guía}.

En la Fig. E32b está el DCL para una posición arbitraria. El trabajo de las fuerzas entre las posiciones inicial y final dadas es:

De la Tierra: mgR

De la guía: 0

Del resorte: $-\frac{1}{2}k\Delta(\delta^2) = -\frac{1}{2}k\delta_{\text{final}}^2 =$

$$= -\frac{1}{2}k\left\{\sqrt{R^2 + (R + L_0)^2} - L_0\right\}^2$$

De la EBE $W_{\text{ext}} = \Delta K$ obtenemos, con $K_{\text{inicial}} = 0$,

$$mgR - \frac{1}{2}k\left\{\sqrt{R^2 + (R + L_0)^2} - L_0\right\}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gR - \frac{k}{m}\delta_{\text{final}}^2}$$

donde δ_{final} es la deformación del resorte en la situación final.

La condición necesaria para que el collarín llegue hasta abajo es que el radicando sea positivo.

Ejemplo 33. El bloque m_2 se deja caer desde el reposo en la situación mostrada en la Fig. E33a. No hay fricción en ninguna parte. Calcular la velocidad del bloque m_1 después de recorrer una distancia D sobre la mesa horizontal.

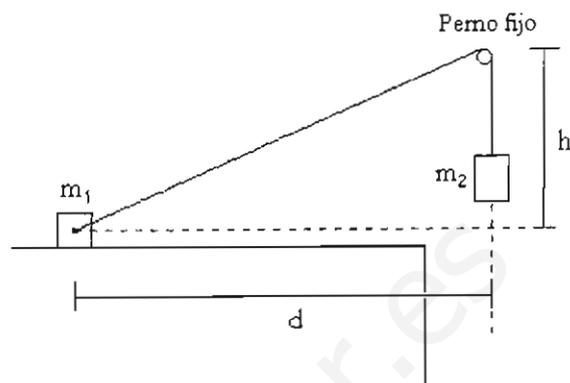


Fig. E33a

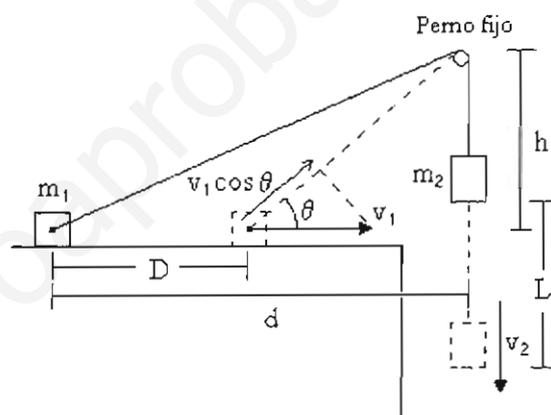


Fig. E33b

Aplicaremos la EBE a cada bloque, o sea

$$(W_{\text{ext}})_1 = \Delta K_1$$

$$(W_{\text{ext}})_2 = \Delta K_2$$

de donde

$$(W_{\text{ext}})_1 + (W_{\text{ext}})_2 = \Delta(K_1 + K_2)$$

En la suma de los trabajos externos figuran los trabajos de las respectivas tensiones sobre cada bloque. Como vimos en el Apartado 11.7-p38, la suma de estos dos trabajos es igual a cero. La única fuerza externa que hace trabajo (ello sobre el bloque m_2) es el peso m_2g .

$$(W_{\text{ext}})_1 + (W_{\text{ext}})_2 = m_2gL$$

donde L es la distancia que baja el bloque m_2 . Usando ahora la relación cinemática

$$v_1 \cos \theta = v_2 \quad (\text{Ec. (43)-p39})$$

obtenemos

$$m_2 g L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_1 \cos \theta)^2$$

En términos de $L = \sqrt{d^2 + h^2} - \sqrt{(d-D)^2 + h^2}$ y

$$\cos \theta = \frac{d-D}{\sqrt{(d-D)^2 + h^2}} \text{ resulta}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 g L}{m_1 + m_2 \cos^2 \theta}}$$

Ejemplo 34. Dos bloques de masas $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 5 \text{ kg}$ están unidos por una varilla rígida de masa despreciable. Los bloques pueden deslizarse a lo largo de una guía lisa en escuadra, como se ve en la Fig. E34a. El bloque m_1 está fijo a un resorte lineal de rigidez $k = 120 \text{ N/m}$. Calcular la velocidad del bloque m_1 después de que m_2 ha bajado una distancia de 0.3 m , suponiendo que el conjunto parte del reposo con el resorte en su configuración natural.

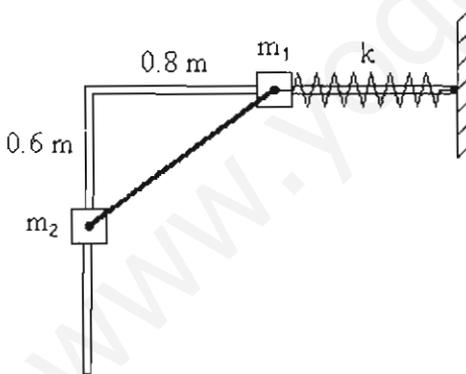


Fig. E34a

Aplicaremos la ecuación

$$(W_{ext})_1 + (W_{ext})_2 = \Delta(K_1 + K_2)$$

que se obtiene sumando miembro a miembro las EBE's de los bloques individuales. El sistema externo del bloque- m_1 es {Tierra, Guía, Varilla, Resorte}; el del bloque- m_2 es {Tierra, Guía, Varilla}. La varilla no hace trabajo sobre el conjunto de los 2 bloques (Vea el

Apartado 11.7-p38). Por otra parte, la fuerza normal de la guía tampoco hace trabajo. Quedan la Tierra y el resorte como únicos cuerpos "activos".

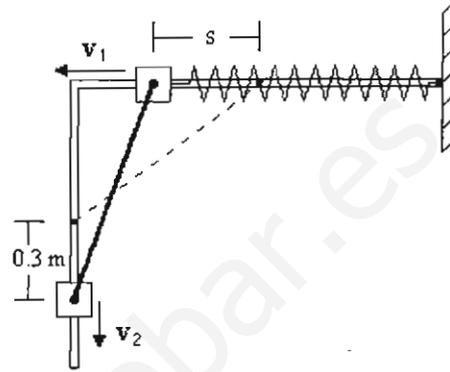


Fig. E34b

Ahora necesitamos relacionar los desplazamientos y las velocidades de los bloques.

Sea "s" el desplazamiento de m_1 asociado con el desplazamiento vertical de 0.3 m de m_2 (Fig. E34b). Dado que la longitud de la varilla es 1 m , tenemos que

$$s = 0.8 - \sqrt{1^2 - 0.9^2} = 0.364 \text{ m.}$$

Por otra parte, sabemos que las velocidades de m_1 y m_2 poseen la misma componente a lo largo de la varilla. De la Fig. E34b sacamos entonces

$$v_2 (0.9) = v_1 (0.436) \quad \text{o bien} \quad v_2 = 0.484 v_1$$

El trabajo del peso (únicamente sobre m_2) es

$$m_2 g (0.3) = 5 \times 9.8 \times 0.3 = 14.7$$

y el del resorte (sobre m_1) es

$$\begin{aligned} -0.5 k \Delta(\delta^2) &= -0.5 k s^2 = \\ &= -0.5 \times 120 \times (0.364)^2 = -7.95 \end{aligned}$$

La suma de los trabajos es $(W_{ext})_1 + (W_{ext})_2 = 6.75 \text{ J}$. Igualando a la variación de la energía cinética total,

$$6.75 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 =$$

$$v_1^2 + 2.5 (0.484 v_1)^2 = 1.58 v_1^2$$

de donde $v_1 = 2.07 \text{ m/s}$.

Ejemplo 35. Se deja caer un bloque de masa m desde el reposo a lo largo de un plano inclinado áspero con coeficiente de fricción μ relativo al bloque. Tras recorrer una distancia " s " el bloque encuentra un resorte de rigidez k , no deformado. Calcular la máxima deformación del resorte, utilizando los siguientes datos: $m = 4 \text{ kg}$, $\mu = 0.25$, $s = 1.5 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$, $k = 1250 \text{ N/m}$.

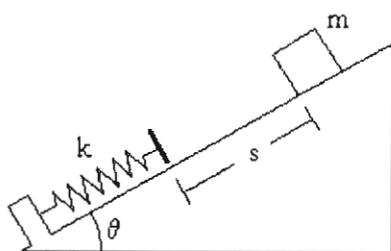


Fig. E35a

El sistema externo del bloque es {Tierra, Plano inclinado, Resorte}. Sea δ la deformación máxima del resorte, situación en que el bloque se ha detenido momentáneamente (Fig. E35b). El trabajo externo sobre el bloque se compone de:

El trabajo del peso:
 $mg \sin \theta \cdot (s + \delta)$

El trabajo de la fricción:
 $-\mu mg \cos \theta \cdot (s + \delta)$

(Esto porque la fuerza normal es " $mg \cos \theta$ " y la fricción es μN).

El trabajo del resorte:

$$-\frac{1}{2}k\delta^2$$

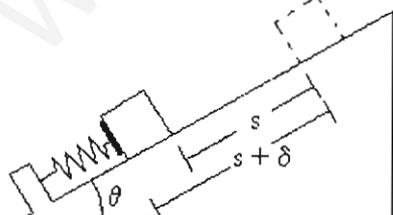


Fig. E35b

Como el bloque está en reposo al principio y al final, el cambio de energía cinética es cero. Entonces

$W_{\text{ext}} = \Delta K = 0$, o sea

$$mg \sin \theta (s + \delta) - \mu mg \cos \theta (s + \delta) - \frac{1}{2}k\delta^2 = 0$$

Sustituyendo valores numéricos se llega a

$$-625\delta^2 + 11.11\delta + 16.67 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son -0.155 y 0.172 . La raíz negativa se desecha, así que

$$\delta = 0.172 \text{ m}$$

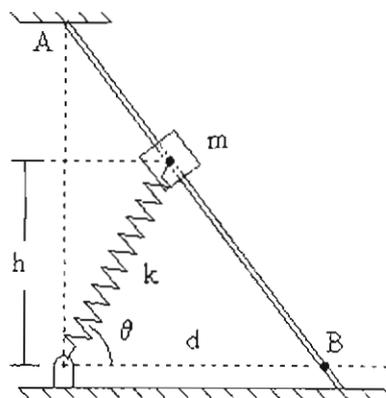
<Nota. Para $\mu = 0.8$ la ecuación cuadrática en δ tiene raíces complejas. ¿Por qué?>

12.3. Problemas

Resuelva los siguientes problemas aplicando la ecuación de balance $W_{\text{ext}} = \Delta K$.

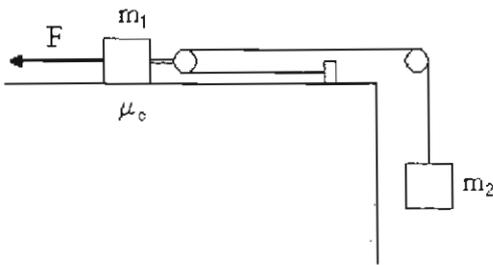
1. Un collarín de masa " m ", sujeto al extremo de un resorte elástico de constante " k ", desciende por una guía lisa a partir del reposo desde la posición indicada en la figura, cuando el resorte forma un ángulo θ con la horizontal. Calcular la velocidad del collarín cuando llega al punto B. La longitud natural del resorte es de " $0.5 h$ ".

Datos: $h = 0.8 \text{ m}$, $d = 0.5 \text{ m}$, $m = 4 \text{ kg}$, $k = 400 \text{ N/m}$, $\theta = 50^\circ$.



Resp. 6.8 m/s .

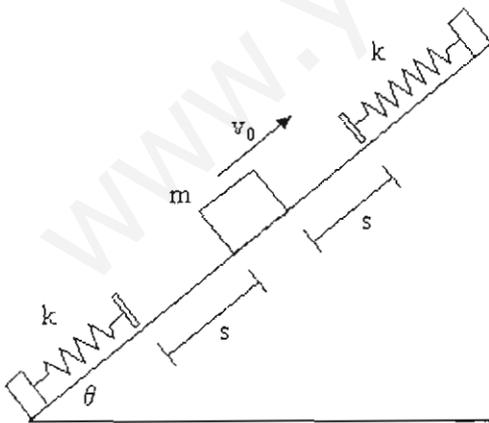
2. A partir del reposo se aplica al bloque m_1 una fuerza horizontal constante F . El bloque m_1 está acoplado a otro bloque m_2 por medio de una polea móvil, como se muestra. Existe fricción Bloque $m_1 \leftrightarrow$ Mesa horizontal, de coeficiente cinético μ_c . Calcular la velocidad del bloque m_2 cuando la fuerza ha actuado a lo largo de una distancia "s".



Datos: $F = 110 \text{ N}$, $\mu_c = 0.25$, $s = 0.4 \text{ m}$, $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$.

Resp. $v_2 = \sqrt{\frac{(F - (\mu_c m_1 + 2m_2)g)s}{\frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2}} = 1.26 \text{ m/s}$.

3. Se comunica al bloque de masa "m" una velocidad v_0 hacia arriba del plano inclinado, como se muestra en la figura. El bloque comprime luego un resorte elástico de constante k , y luego baja para comprimir el resorte elástico de la misma constante k en la base del plano. Calcular la máxima compresión de cada resorte.

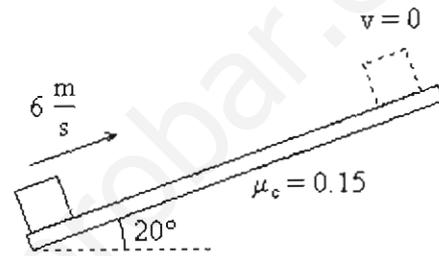


Resp. Las compresiones máximas son soluciones de las ecuaciones

$$\frac{1}{2} k \delta_1^2 - mg \text{ sen } \theta \delta_1 - mgs \text{ sen } \theta - \frac{1}{2} mv_0^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} k \delta_2^2 + mg \text{ sen } \theta \delta_2 + mgs \text{ sen } \theta - \frac{1}{2} mv_0^2 = 0$$

4. Un bloque de masa 4 kg se lanza con velocidad inicial 6 m/s hacia arriba de una rampa inclinada a 20° . Existe fricción de coeficiente cinético 0.15. Calcular la distancia máxima que logra recorrer el bloque hacia arriba sobre la rampa. Calcular la velocidad con la que regresa al punto de partida.

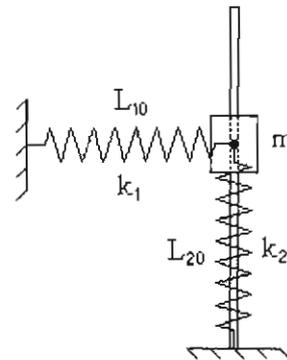


Resp. 3.8 m; 3.87 m/s.

5. Un collarín de masa "m" está ensartado en una guía vertical lisa. El collarín está sujeto a dos resortes elásticos de constantes k_1 y k_2 , como se indica en la figura. En la situación inicial los resortes tienen sus longitudes naturales L_{10} y L_{20} y el collarín se mantiene en reposo.

Calcular la velocidad del collarín después de haber caído una distancia "d" desde su posición inicial.

Datos: $m = 40 \text{ kg}$, $k_1 = 4000 \text{ N/m}$, $k_2 = 2000 \text{ N/m}$, $L_{10} = 0.6 \text{ m}$, $L_{20} = 0.8 \text{ m}$, $d = 0.3 \text{ m}$.



Resp. $v = 0.93 \text{ m/s}$.

CAPÍTULO 13

ENERGÍA POTENCIAL Y BALANCE DE ENERGÍA
PARA SISTEMAS DE DOS O MÁS PARTÍCULAS

En este capítulo presentaremos ya la ecuación de balance de energía de un sistema mecánico. Aunque inicialmente la formularemos para un sistema de dos partículas, su extensión a sistemas de muchas partículas será inmediata.

13.1. Sobre la energía potencial

Una partícula puede tener solamente un tipo de energía, la cinética. En cuanto consideramos sistemas formados por *dos* partículas (o más) entra en juego una nueva clase de energía denominada *energía potencial*.

En los cursos elementales se define la energía (de cualquier clase) como la capacidad para producir un trabajo. Esta es una definición general bastante aceptable. En particular, una partícula con energía cinética es capaz de producir un trabajo; esto lo sabemos, pues es lo que expresa nuestra conocida EBE " $W_{ext} = \Delta K$ ". Según esta relación, para comunicarle energía cinética a un cuerpo debemos efectuar un trabajo sobre el mismo. A la inversa, un dispositivo mecánico puede obtener trabajo de un cuerpo reduciéndole su energía cinética. Lo mismo ocurrirá con respecto a la energía potencial: si un sistema físico posee energía potencial, entonces es posible obtener de él un trabajo externo, a costa de la energía potencial del sistema.

La diferencia entre las energías cinética y potencial es que la primera es "energía de movimiento", y la segunda es "energía de configuración" (entendemos por la *configuración* de un sistema su "geometría" presente, esto es, sus dimensiones geométricas y las posiciones y distancias mutuas que guardan los cuerpos que lo integran).

Para que un sistema físico posea energía potencial se requiere que:

- Existan fuerzas mutuas *conservativas* entre los cuerpos del sistema.
- Los cuerpos ocupen lugares "propicios" en el espacio (tengan una configuración favorable).

Si ello ocurre, entonces podemos extraer trabajo del sistema al permitir que cambie su configuración, es decir, que los cuerpos se desplacen a otras ubicaciones

por efecto de sus fuerzas de interacción.

Demos un ejemplo. Consideremos dos carritos que portan sendas cargas eléctricas positivas Q (Ver la Fig. 35). Hay una fuerza electrostática de repulsión mutua. Está claro que la simple cercanía de los carritos se puede aprovechar para producir un trabajo. Simplemente habría que colocar en el camino de los carritos algún objeto que deseáramos mover. Se generaría una fuerza de contacto que desplazaría dicho objeto, obteniéndose así un trabajo.



Fig. 35

El sistema formado por los 2 carritos tiene pues una energía potencial (denominada "electrostática"). Esta energía potencial electrostática proviene del hecho de que existe una fuerza de interacción conservativa entre las cargas Q , y de que estas cargas no están tan distanciadas como para que dicha fuerza fuese insignificante.

Cosa análoga ocurre con un cuerpo que se mantiene a cierta elevación con respecto a la superficie terrestre. Uno puede aprovechar la tendencia de este cuerpo a caer para producir un trabajo. Existe aquí una energía potencial del sistema {Tierra, Cuerpo} (denominada energía potencial gravitatoria), por el hecho de que existe una fuerza de interacción gravitatoria que tiende a acercar mutuamente el Cuerpo y la Tierra, y porque el Cuerpo está en una configuración propicia (no está en el suelo).

Comprimamos un resorte y mantengámoslo en esta configuración por medio de dos hilos, como se muestra en la Fig. 36. Está claro que podríamos extraer trabajo del resorte, simplemente quitando los hilos y permitiendo que se alargara hasta su configuración no deformada, empujando algún cuerpo en este proceso.

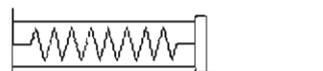


Fig. 36

El resorte posee así una energía potencial (denominada "elástica"), puesto que es capaz de producir un trabajo. Esta energía surge gracias a las fuerzas conservativas con que interactúan mutuamente las moléculas del resorte.

13.2. Definición de la energía potencial

¿Cómo cuantificamos la energía potencial?

Volvamos al sistema de dos cargas eléctricas, que denotaremos ahora con q_1 y q_2 . Las imaginamos positivas por concreción. Partamos de una configuración " C_0 " en la que las cargas están infinitamente separadas (Fig. 37, superior); entonces la fuerza eléctrica mutua es nula y el sistema no posee energía potencial (no podemos extraer un trabajo del sistema en esta situación).

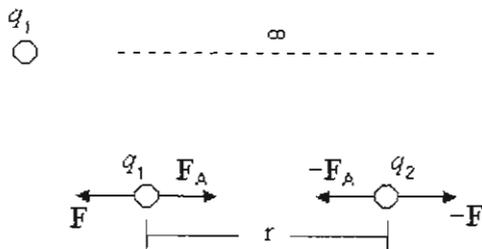


Fig. 37

Denotando con " V " la energía potencial, diremos entonces que $V \equiv 0$ en la configuración C_0 , o abreviadamente $V(C_0) = 0$. Por otra parte, cuando las cargas están a cierta distancia mutua finita " r ", el sistema $\{q_1, q_2\}$ sí posee energía potencial. ¿De dónde proviene esta energía?

Nos imaginamos aquí un proceso cuasiestático que trae a las cargas desde el infinito y las coloca en sus posiciones presentes ("configura el sistema"). Un "agente externo" (cuerpo que no especificaremos) realiza un trabajo sobre las cargas, con el fin de aproximarlas. Ello sin imprimirles velocidad, o sea que este trabajo no proporcionará energía cinética al sistema, sino que irá a parar íntegramente en energía potencial.

Semejante trabajo de configuración es precisamente lo que se define como la energía potencial del sistema $\{q_1, q_2\}$ en una configuración " C " en que la separación es " r ".

Calculemos tal trabajo de acercamiento cuasiestático. El agente externo debe ejercer sobre las cargas sendas fuerzas F_A y $-F_A$ que equilibren justa-

mente las fuerzas de repulsión eléctrica F y $-F$, o sea (Vea la Fig. 37, inferior):

$$(76) \quad F_A = -F$$

Dado que la fuerza eléctrica F es *conservativa*, por (76) la fuerza F_A también es conservativa, y el trabajo del agente externo no dependerá del proceso, sino exclusivamente de la configuración final C (o equivalentemente, de la distancia final " r " entre las cargas). El agente externo desplaza las cargas muy lentamente, acercándolas paulatinamente hasta su separación final " r ". El trabajo " W_A " realizado por el agente externo en este proceso es la suma de los trabajos realizados por las fuerzas F_A y $-F_A$. Pero este último es, en virtud de la relación (76), el negativo del trabajo realizado por las fuerzas de interacción F y $-F$. Denotando éste con " W_{int} " tenemos pues que

$$(77) \quad W_A = -W_{int}$$

Esta discusión referente a un sistema de dos cargas puntuales se puede extender tal cual a un sistema general de dos partículas de masas $\{m_1, m_2\}$ que interactúan con una fuerza conservativa. Arribamos así a esta definición de energía potencial:

Energía potencial de un sistema de dos partículas

$$(78) \quad V(C) = -W_{int}(C_0 \rightarrow C)$$

La *energía potencial* de un sistema de dos partículas $\{m_1, m_2\}$, cuando se halla en cierta configuración C , denotada con $V(C)$, se define como el negativo del trabajo " W_{int} " que realizan *ambas* fuerzas de interacción $m_1 \leftrightarrow m_2$ entre la configuración de referencia C_0 y la configuración considerada C .

En esta definición ya no hacemos referencia al "agente externo", que realmente es una construcción teórica auxiliar. La energía potencial del sistema, según (78), es un asunto que no compete a nada externo, sino a cantidades propias del sistema, como sus fuerzas de interacción y sus configuraciones.

De todas maneras, para ciertos cálculos de energías potenciales es útil una definición alternativa de la energía potencial, que se desprende de lo discutido en este Apartado, a saber,

Energía potencial de un sistema de dos partículas

(79) La **energía potencial** de un sistema de dos partículas $\{m_1, m_2\}$, cuando se halla en cierta configuración C , denotada con $V(C)$, se define como el trabajo cuasiestático que necesita realizar un agente externo para llevar al sistema desde la configuración de referencia C_0 hasta la configuración considerada C .

La configuración C_0 se escoge libremente. En tal configuración la energía potencial es nula, como se sigue de (78):

$$V(C_0) = -W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C_0) = 0$$

En el caso de la Tierra y un Objeto ligados por su atracción gravitatoria, cerca de la Tierra, la configuración de referencia se escoge generalmente al nivel del suelo. En el caso de un resorte se escoge aquella donde el resorte no está deformado.

13.3. Cálculo de energías potenciales

Calcular una energía potencial es calcular un trabajo, que puede ser:

- El negativo del trabajo de las fuerzas de interacción (ec. (78)).
- El trabajo del agente externo (ec. (79)).

Buenas noticias: muchos de los trabajos que hemos calculado anteriormente pueden reformularse como energías potenciales.

(A) ENERGÍA POTENCIAL DE UN RESORTE ELÁSTICO LINEAL.

En el Ejemplo 4, página 11, calculamos el trabajo necesario para elongar un resorte cuasiestáticamente entre deformaciones 0 y δ . Resultó $W = \frac{1}{2} k\delta^2$.



[Fig. E4, página 11]

Por la definición (79), este trabajo es la energía potencial del resorte en la configuración en que la deformación es δ . La configuración de referencia en este caso corresponde a $\delta = 0$.

Energía potencial de un resorte elástico lineal

$$(80) \quad V = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Dado que δ aparece al cuadrado en (80), el resorte tiene la misma energía potencial cuando δ es una elongación que cuando es una contracción. La fórmula es válida también en el movimiento plano.

El resorte es un sistema complicado de muchas partículas, que se ejercen fuerzas mutuas conservativas. Para aplicar la fórmula (79) al resorte no fue necesario conocer estas fuerzas internas, como hubiera sido el caso si hubiésemos partido de la fórmula (78).

(B) ENERGÍA POTENCIAL DE DOS CARGAS ELÉCTRICAS O DOS MASAS PUNTALES.

En la página 42 calculamos el trabajo realizado por las fuerzas de interacción eléctrica o gravitatoria entre dos cargas o dos masas, respectivamente. Los trabajos (53a) y (53b) en la página 43 son los trabajos internos W_{int} a los que se refiere la definición (78) de la energía potencial. La configuración de referencia en ambos casos se toma cuando las cargas o masas están a separación infinita. Por lo tanto, cambiando el signo de tales trabajos W_{int} tenemos:

Energía potencial gravitatoria de un sistema de dos masas puntuales m_1 y m_2 .

$$(81) \quad V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Energía potencial eléctrica de un sistema de dos cargas puntuales q_1 y q_2 .

$$(82) \quad V(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Las fórmulas (81) y (82) son casos especiales de la siguiente:

(C) ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS CON INTERACCIÓN CENTRAL.

De acuerdo con la definición (78) de energía potencial, y de la ecuación (52)-p43, tenemos:

Energía potencial de un sistema de dos partículas que interactúan centralmente con fuerza $F(r)$.

(83)	$V(r) = - \int_{r_0}^r F(r) dr$	"r" es aquí la distancia interpartículas, que vale r_0 en la configuración de referencia.
------	---------------------------------	---

Ejemplo 35. Dos partículas interactúan centralmente con una fuerza radial dada por

$$F(r) = Ar + \frac{B}{r^3}$$

donde A y B son constantes. Escogiendo la configuración de referencia aquella donde la distancia interpartículas "r" es igual a cierto valor "R", obtener la energía potencial en una configuración arbitraria donde dicha distancia es "r".

De acuerdo con (83) tenemos

$$V(r) = - \int_R^r F(r) dr = - \int_R^r \left(Ar + \frac{B}{r^3} \right) dr$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{1}{2} A(r^2 - R^2) + \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)$$

(D) ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA {TIERRA, OBJETO}, CUANDO EL OBJETO SE HALLA CERCA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE.

Un sistema sumamente importante de dos cuerpos ligados por su atracción gravitatoria es el formado por la Tierra y un Objeto cerca de su superficie. La Tierra no es una partícula, pero se puede considerar como tal para fines de calcular la energía potencial del sistema. La razón es que la fuerza gravitatoria de la Tierra, allende su superficie, es equivalente a la que ejercería una partícula cuya masa fuese la de la Tierra y cuya ubicación fuese el centro de la misma.

Para calcular el trabajo de las fuerzas de interacción Tierra \leftrightarrow Objeto usaremos este resultado:

[(51b)-p43] *El trabajo de las fuerzas acción-reacción en un sistema de dos partículas se puede calcular suponiendo fija una de ellas y calculando el trabajo realizado sobre la partícula móvil por la fuerza debida a la partícula fija.*

Calculemos la energía potencial gravitatoria

del sistema {Tierra, Objeto} cuando el objeto se halla en una franja o rango muy pequeño en comparación con el radio de la Tierra (Fig. 38), de modo que la fuerza mutua sea prácticamente constante, igual al peso "mg".

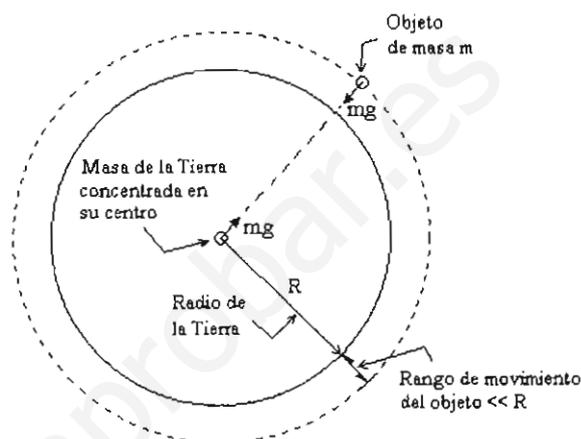


Fig. 38

Según el resultado mencionado, supongamos que la Tierra está fija, lo cual no es difícil de imaginar, y calculemos el trabajo de la fuerza "mg" sobre el objeto, desde la superficie de la Tierra (punto que corresponde a nuestra configuración de referencia) hasta que el objeto se halla a cierta altura "y" (Fig. 39). Tal trabajo es simplemente " $-mg y$ ", con lo que

Energía potencial gravitatoria de un sistema {Tierra-Objeto}, cerca de la Tierra

(84)	$V = m g y$	El objeto, de masa m , se halla cerca de la superficie terrestre, a altura "y" sobre la misma.
------	-------------	--

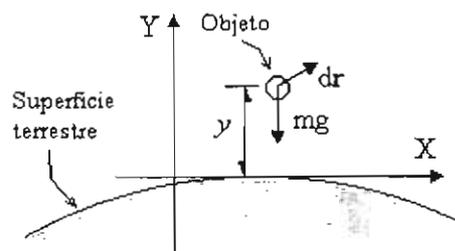


Fig. 39

En muchos libros de texto se refieren a la

energía potencial $V = m g y$ como "la energía potencial del objeto en el campo gravitatorio de la Tierra". Se dice también "un objeto situado a una altura h sobre la superficie terrestre posee una energía potencial dada por $V = mgh$ ". Según el enfoque de sistemas, la energía potencial gravitatoria es una propiedad no del objeto solamente, sino del sistema {Tierra, Objeto}.

Si el objeto está muy lejos de la Tierra, a distancias comparables a R o mayores, como vemos en la Fig. 40, la energía potencial gravitatoria del sistema {Tierra, Objeto} se obtiene de (82) tomando $m_1 = M_T =$ masa de la Tierra y $m_2 = m =$ masa del Objeto:

Energía potencial gravitatoria de un sistema {Tierra, Objeto}, el Objeto lejos de la Tierra	
(85)	$V(r) = -\frac{GM_T m}{r}$

Para (85) la configuración de referencia es aquella donde la separación Tierra-Objeto es infinita.

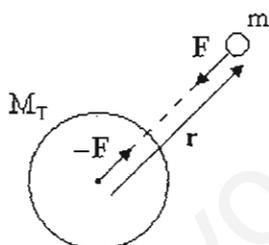


Fig. 40

(El material expuesto desde aquí hasta la siguiente raya puede pasarse por alto)

Los valores de $V(r)$ dados por (85) tienden al valor " mgy " dado por (84) cuando el objeto está muy cerca de la superficie terrestre.

Para verlo, pongámonos

$$r = R + y$$

donde y es muy pequeña en comparación con R . Entonces (85) se vuelve

$$(86) \quad V = -\frac{GM_T m}{R + y}$$

Ahora bien, el cociente y/R es muy pequeño. Desarrollemos (86) en una serie de potencias de este cociente, y despreciemos términos cuadráticos y superiores del mismo. Usando el desarrollo binomial $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ tenemos

$$V = -\frac{GM_T m}{R \left(1 + \frac{y}{R}\right)} = -\frac{GM_T m}{R} \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} = -\frac{GM_T m}{R} \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2} - \dots\right)$$

Despreciando el término cuadrático en esta serie,

$$V \approx -\frac{GM_T m}{R} \left(1 + \frac{y}{R}\right) = -\frac{GM_T m}{R} + \frac{GM_T m}{R^2} y$$

Redefiniendo el punto de referencia en $y = 0$, o sea en la superficie terrestre, eliminamos el término constante de la última relación. Por otra parte, usando la conocida expresión de la aceleración de caída libre,

$$g = \frac{GM_T}{R^2}$$

resulta $V = m g y$, QED.

Más adelante volveremos al concepto de energía potencial. Pasaremos ahora a la obtención de la ecuación de balance de energía de un sistema de dos partículas.

13.4. Ecuación de balance de energía para un sistema de dos partículas

Recordemos que la *configuración* de un sistema de 2 partículas en un tiempo " t " es su "geometría" presente, es decir, la especificación de las *posiciones* $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ de las partículas. Por otra parte, el *estado* del sistema es la especificación de las *posiciones y las velocidades* $\mathbf{v}_1(t)$ y $\mathbf{v}_2(t)$.

Las fuerzas que se ejercen mutuamente las partículas del sistema se denominan *fuerzas internas* del sistema. Las *fuerzas externas* sobre el sistema son las que sufren las partículas del sistema por obra de los cuerpos *ajenos* al mismo.

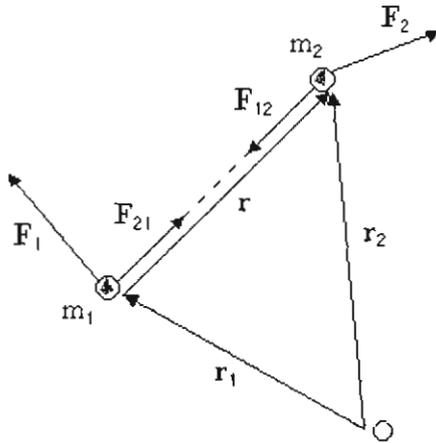


Fig. 41

En la Fig. 41 se muestra un sistema general $\{m_1, m_2\}$. Existen fuerzas externas totales F_1 y F_2 sobre las partículas m_1 y m_2 , respectivamente. Por otra parte, F_{12} y F_{21} son las fuerzas internas del sistema. Cumplen la tercera ley de Newton en su forma restrictiva, es decir, son fuerzas *centrales* y además

$$(87) \quad F_{12} = -F_{21}$$

Decimos que el sistema es *mecánico* si las fuerzas internas son *conservativas*, cosa que supondremos en lo sucesivo. En cuanto a las fuerzas externas, podrán ser conservativas o no.

La configuración de referencia, " C_0 ", es simplemente la pareja de posiciones en $t = t_0$, o sea $C_0 \equiv \{r_1(t_0), r_2(t_0)\}$. En esta configuración el vector separación entre m_1 y m_2 es $r_0 \equiv r_2(t_0) - r_1(t_0)$, con magnitud " r_0 ".

Definimos la energía cinética del sistema en forma aditiva, esto es, como la suma de las energías cinéticas de sus partículas:

Energía cinética de un sistema de dos partículas	
(88)	$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

Para obtener la EBE del sistema $\{m_1, m_2\}$, plantearemos la ecuación de balance de cada partícula del sistema, es decir, de los sistemas monopartículas $\{m_1\}$ y $\{m_2\}$. Luego sumaremos estas ecuaciones individuales con objeto de sintetizar una ecuación de balance para la pareja $\{m_1, m_2\}$.

Imaginemos pues una transición del sistema

$\{m_1, m_2\}$ entre dos configuraciones C_1 y C_2 arbitrarias. Las EBE " $W_{ext} = \Delta K$ " propias de cada partícula, aplicadas a dicha transición, tienen esta forma:

$$\begin{aligned} [\text{Trabajo de todas las fuerzas existentes sobre } \{m_i\}] &= \\ &= [\text{Variación de la energía cinética de } m_i] \\ &(i = 1, 2) \end{aligned}$$

En símbolos:

$$(89) \quad W_1 + W_{21} = \Delta K_1$$

$$(90) \quad W_2 + W_{12} = \Delta K_2$$

donde W_1 y W_2 son los "trabajos externos", realizados por las fuerzas F_1 y F_2 sobre las partículas m_1 y m_2 , respectivamente, y W_{12} y W_{21} son los trabajos hechos por las fuerzas de interacción F_{12} y F_{21} (o sea las fuerzas internas). Sumando miembro a miembro (89) y (90),

$$W_1 + W_{21} + W_2 + W_{12} = \Delta K_1 + \Delta K_2$$

ecuación que podemos escribir sucintamente así:

$$(91) \quad W_{ext} + W_{int} = \Delta K$$

donde

$$W_{ext} = W_1 + W_2 = \text{Trabajo de las fuerzas externas } F_1 \text{ y } F_2$$

$$W_{int} = W_{12} + W_{21} = \text{Trabajo de las fuerzas internas } F_{12} \text{ y } F_{21}$$

$$K = K_1 + K_2 = \text{Energía cinética del sistema}$$

Ahora bien, de acuerdo con (78)-p59, el trabajo de las fuerzas internas se puede poner en términos de lo que hemos definido como energía potencial del sistema. Tenemos

$$V(C_1) = -W_{int}(C_0 \rightarrow C_1)$$

$$V(C_2) = -W_{int}(C_0 \rightarrow C_2)$$

Por la propiedad de aditividad del trabajo,

$$\begin{aligned} W_{\text{int}}(C_1 \rightarrow C_2) &= W_{\text{int}}(C_1 \rightarrow C_0) + W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C_2) = \\ &= -W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C_1) + W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C_2) \\ &= V(C_1) - V(C_2) \equiv -\Delta V \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión para W_{int} en (91),

$$W_{\text{ext}} - \Delta V = \Delta K$$

De donde

$$(92) \quad W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta V = \Delta(K + V)$$

Introduzcamos ahora la siguiente cantidad:

Energía mecánica (o energía total o "energía", a secas) de un sistema mecánico de dos partículas		
(93)	$E = K + V$	La energía de un sistema mecánico es la suma de las energías cinética y potencial del sistema.

Entonces la ecuación (92) se escribe sucintamente como sigue:

Ecuación de balance de energía de un sistema de dos partículas	
(94)	$W_{\text{ext}} = \Delta E$
El trabajo realizado sobre un sistema de dos partículas por las fuerzas <i>externas</i> es igual a la variación de la energía total del sistema.	

Es importante advertir que en la ecuación (94) no figuran las fuerzas *internas* del sistema.

El diagrama de flujo de energía asociado con la EBE (94) es el siguiente:

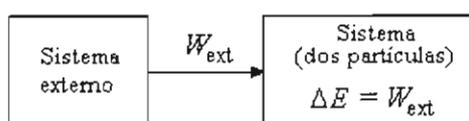


Fig. 42

El sistema externo, que produce las fuerzas

externas F_1 y F_2 sobre m_1 y m_2 , respectivamente, realiza sobre el sistema (es decir, sobre ambas partículas) cierto trabajo W_{ext} cuando el sistema pasa de una configuración C_1 a una C_2 . El efecto de tal trabajo consiste en incrementar la energía total E , siendo el incremento ΔE precisamente igual al trabajo W_{ext} .

Hay un diagrama alternativo. En general, el trabajo externo constará de términos positivos y negativos. Por ejemplo, el trabajo de la fuerza gravitatoria terrestre a veces es positivo, a veces negativo; el trabajo de la fricción siempre es negativo, etc. Podremos escribir en general el trabajo externo en la forma

$$(95) \quad W_{\text{ext}} \equiv W_{\text{ent}} - W_{\text{sal}}$$

donde W_{ent} (trabajo entrante en el sistema) y W_{sal} (trabajo saliente del sistema) son positivos e indican respectivamente la parte positiva y negativa de W_{ext} .

He aquí el otro diagrama:

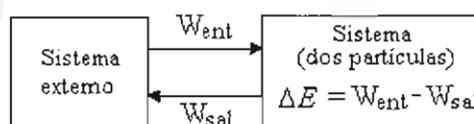


Fig. 43

13.5. Teorema de conservación de la energía mecánica

Las siguientes consideraciones se refieren ahora al sistema de dos partículas, pero también son válidas para los sistemas de muchas partículas.

Una consecuencia de la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$ es inmediata:

Teorema de conservación de la energía mecánica	
(96)	Si $W_{\text{ext}} = 0$ entonces $E = \text{constante}$. $\Rightarrow \quad \Delta E = \Delta K + \Delta V = 0$
La energía de un sistema mecánico que no recibe netamente trabajo externo se conserva.	

Ahora bien, la condición $W_{\text{ext}} = 0$ se da en varios escenarios:

- El sistema está *aislado*, esto es, no interactúa con cuerpo externo alguno. Está flotando en algún lugar del espacio exterior, mucho muy lejos de cualquier cuerpo celeste (se trata de una idealización útil en la teoría).
- El sistema sí interactúa, pero *estas interacciones son insignificantes* en el ámbito del análisis considerado. Decimos que el sistema está *prácticamente aislado*.
- El sistema sí interactúa, pero el trabajo de las fuerzas externas *es igual a cero* entre cualesquiera configuraciones de interés del sistema. Este caso es común en las aplicaciones, como veremos.

Ilustremos.

Consideremos un sistema aislado compuesto de dos cargas eléctricas q_1 y q_2 , ambas positivas, inicialmente en reposo y separadas por una corta distancia r_i (Fig. 44, izquierda).

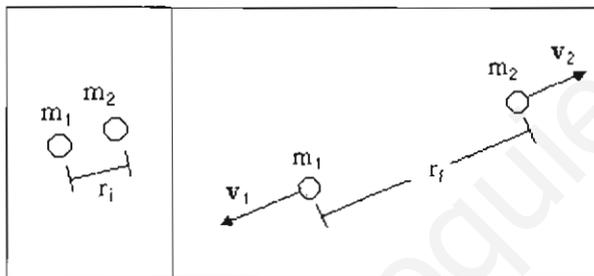


Fig. 44

Inicialmente la energía del sistema es puramente potencial. Referida al infinito viene dada por

$$E_i = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_i}$$

Liberado el sistema, la repulsión eléctrica mutua provoca mayor distanciamiento (Fig. 44, derecha). Cuando la distancia entre las cargas es r_f , la energía del sistema es

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_f}$$

Como la distancia aumentó, la energía potencial disminuyó. En virtud de que la energía total es constante ($E_i = E_f$), la disminución de energía potencial debe venir acompañada de un aumento de la energía

cinética (efectivamente, el sistema adquiere energía cinética en cuanto empieza a aumentar la distancia entre las cartas).

En el caso del sistema {Sol, Tierra}, la energía total es (en el marco de referencia del Sol)

$$E = \frac{1}{2} m_T v^2 - \frac{GM_S m_T}{R}$$

Si despreciamos el efecto de los demás planetas y lunas del sistema solar (Sistema Sol-Tierra prácticamente aislado), esta energía es constante. Como se sabe, la Tierra describe una elipse alrededor del Sol. En el perihelio, punto de la órbita terrestre más próximo al Sol, la energía potencial es mínima; en el afelio (punto de mayor lejanía al Sol) es máxima. Se sigue que la velocidad de la Tierra es mayor en el perihelio que en el afelio.

Ejemplo 36. Desde un punto a una elevación $h = 5 \text{ m}$ sobre el suelo se lanza una piedra de masa $m = 0.3 \text{ kg}$ con una velocidad $v_0 = 8 \text{ m/s}$ a un ángulo $\theta = 36.87^\circ$. ¿Qué altura adicional " h_1 " alcanza a subir la piedra y cuál es su velocidad v_1 allí? ¿Cuál es su velocidad v_2 al llegar al suelo?

El sistema {Tierra, Piedra} está prácticamente aislado (se desprecia la resistencia del aire y otros factores). La energía de este sistema es

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g y$$

y se conserva ($\Delta E = 0$).

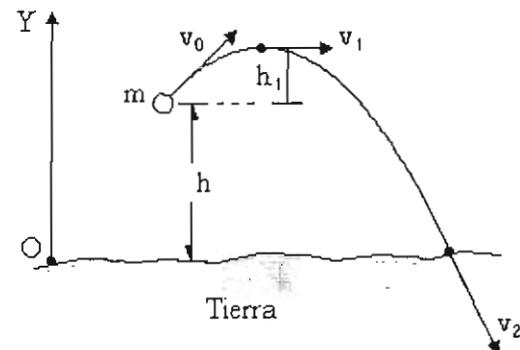


Fig. E36

Apliquemos la EBE $\Delta E = 0$ al sistema. Dado que $\Delta E = \Delta(K + V) = \Delta K + \Delta V$, convendrá trabajar con los cambios ΔK y ΔV en lugar de las cantidades absolutas K y V .

EBE entre el punto de lanzamiento y el punto de máxima altura:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta V = mg (\Delta y) = mg h_1$$

Ahora bien, la ecuación $\Delta E = 0$ da $\Delta K = -\Delta V$ o sea

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mg h_1$$

de donde

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2g} (v_0^2 - v_1^2)}$$

pero $v_1 = v_0 \cos \theta$, ya que en el punto de altura máxima la velocidad no tiene componente vertical, y la componente horizontal de velocidad no cambia. Entonces

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9.8} (8^2 - (8 \cos 36.87^\circ)^2)} = 1.08 \text{ (m)}$$

EBE entre el punto de lanzamiento y el punto al nivel del suelo:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta V = mg (\Delta y) = -mg h$$

La ecuación $\Delta K = -\Delta V$ conduce a

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 12.73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

También podríamos haber obtenido v_2 aplicando la EBE entre la posición de altura máxima y la posición a nivel del suelo.

Antes de presentar más ejemplos de aplicación de la ecuación de balance de energía, extenderemos la teoría a los sistemas de muchas partículas, que son los más comunes en la práctica.

13.6. Energía potencial del sistema de muchas partículas

Casi todo el desarrollo teórico de los Apartados precedentes se aplica sin modificaciones importantes al caso general del sistema de N partículas. La energía potencial se define como en (78-p59) o (79-p60). La EBE $W_{\text{ext}} = \Delta E$ es aplicable a estos sistemas.

Calculemos la energía potencial de un sistema de 3 partículas, con lo cual será fácil inducir el caso de N partículas. Nuestra tarea consiste en calcular el trabajo W_{int} realizado por las fuerzas internas del sistema $\{m_1, m_2, m_3\}$. El negativo de este trabajo es la energía potencial del sistema.

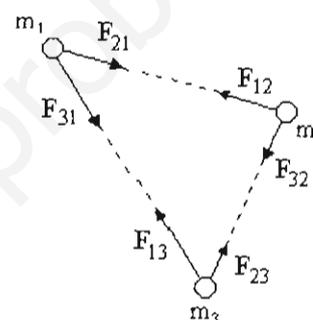


Fig. 45

En la Fig. 45 se muestran las 6 fuerzas internas existentes en un sistema de 3 partículas. El trabajo interno entre dos configuraciones cualesquiera es

$$W_{\text{int}} = \int (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}) \cdot d\mathbf{r}_1 + \int (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{r}_2 + \int (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}) \cdot d\mathbf{r}_3$$

Conviene agrupar los términos de dos en dos, en la forma

$$\int (\mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_1) + \int (\mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{r}_3 + \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r}_2) + \int (\mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{r}_3 + \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r}_1)$$

Los pares de términos encerrados en paréntesis se asocian con sendas parejas de partículas, a saber, $\{m_1, m_2\}$, $\{m_2, m_3\}$ y $\{m_1, m_3\}$. De hecho, cada par es el trabajo de las fuerzas internas del sistema de *dos* partículas asociado, es decir, el negativo de la energía potencial de ese sistema asociado $\{m_i, m_k\}$. Denotando con V_{ik} tal energía tenemos así:

$$W_{\text{int}} = -V_{12} - V_{13} - V_{23} = -(V_{12} + V_{13} + V_{23})$$

La energía poteucial del sistema de tres partículas es evidentemente

$$(97) \quad V = V_{12} + V_{13} + V_{23}$$

Eu el caso de un sistema de N partículas, la expresión (97) se generaliza a

Energía potencial de un sistema de N partículas	
(98)	$V = \sum_{i,k=1}^N V_{ik} \quad (i < k)$
La energía potencial de un sistema de N partículas $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ es igual a la suma de las energías potenciales de todas las parejas $\{m_i, m_k\}$ de partículas que es posible formar en el sistema (tantas como $N(N-1)/2$).	

Advierta que la energía potencial no es aditiva, en el sentido de que la euergía potencial del sistema $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ no es igual a la suma de las energías potenciales de dos subsistemas $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ y $\{m_k, m_{k+1}, \dots, m_N\}$ extraídos de aquel. La razón es que, además de las interacciones domésticas en cada subsistema, existen interacciones mutuas entre ambos subsistemas.

Ejemplos de aplicación de (98) son:

Un sistema de masas puntuales $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$, cuya energía potencial gravitatoria es

$$(99) \quad V = \sum_{i,k} \left(-\frac{Gm_i m_k}{r_{ik}} \right) \quad k > i$$

Un sistema de cargas eléctricas puntuales $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, cuya energía potencial eléctrica es

$$(100) \quad V = \sum_{i,k} \left(-\frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{ik}} \right) \quad k > i$$

<Nota. Las cargas eléctricas poseen masa, y por tanto un sistema de cargas tendría también encrgía potencial gravitatoria. Sin embargo, la energía potencial gravitatoria es muchísimo menor que la eléctrica (como haremos ver un poco más adelante)>.

13.7. Sobre la aplicación de la ecuación de balance

En la definición de energía poteucial figura una "configuración de refereneia C_0 ". Cuando el sistema está en esta configuración su energía potencial es cero (ejemplos: resorte no deformado, objeto colocado en el suelo, dos cargas infinitamente separadas). Por esta razón decimos que "fijar la configuración de referencia" es lo mismo que "fijar el nivel cero de la energía potencial".

¿Qué pasa si se cambia la configuración de referencia, digamos de C_0 a C'_0 ?

Pasa que se modifican los valores de la energía potencial en todas las configuraciones, pero esta modificación *es la misma* para todas ellas. Los valores nuevos de la energía potencial son los viejos, desplazados en una constante común. Veamos.

Sea V la energía potencial referida a C_0 , y V' la referida a C'_0 , o sea

$$V(C) = -W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C)$$

$$V'(C) = -W_{\text{int}}(C'_0 \rightarrow C)$$

Ahora bien, por la propiedad de aditividad del trabajo,

$$\begin{aligned} V'(C) &= -W_{\text{int}}(C'_0 \rightarrow C) = \\ &= -W_{\text{int}}(C'_0 \rightarrow C_0) - W_{\text{int}}(C_0 \rightarrow C) = \\ &= -W_{\text{int}}(C'_0 \rightarrow C_0) + V(C) \end{aligned}$$

Como C_0 y C'_0 son dos configuraciones fijas, el término $W_{\text{int}}(C'_0 \rightarrow C_0)$ tienc un valor fijo. Por consiguiente, $V'(C)$ y $V(C)$ difieren en la misma constante para toda C.

Ahora bien, en la ecuación de balance de energía,

$$W_{\text{ext}} = \Delta E = \Delta K + \Delta V$$

figura una *diferencia* de energías potenciales. Al hacer la diferencia se cancela cualquier término constante en la expresión de la energía potencial V .

Conviene adoptar el punto de vista de que, más que los valores absolutos de V , son las *diferencias* ΔV las que tienen un significado físico preciso. Dicho de otra manera: la configuración de referencia C_0 es completamente arbitraria; el cambiar esta configuración no altera la "física del problema"; la EBE conduce a las mismas predicciones.

Esta libertad de elección del nivel cero de la energía potencial comporta una gran simplificación en muchos problemas. Por ejemplo, consideremos un sistema formado por dos cargas puntuales positivas y una varilla rígida que las une (Fig. 46). La energía potencial eléctrica de las cargas, referida al infinito, es

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde "r" es la longitud de la varilla. Sin embargo, como la varilla es rígida, r es constante y por ende también la energía V es constante. Al aplicar la EBE a este sistema podemos suprimir la contribución a la energía potencial debida a la fuerza eléctrica mutua.

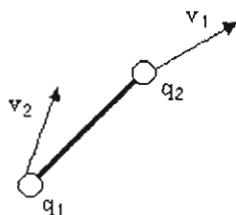


Fig. 46

Cosa similar ocurre en otros sistemas de partículas que se mueven rígidamente como un todo. Consideremos el caso simple de un bloque que reposa sobre una mesa. Visualicemos el bloque como un conjunto de partículas (moléculas), cada una con cierta masa. De acuerdo con la fórmula (99), el bloque posee una energía potencial gravitatoria debido a las fuerzas de atracción gravitatoria entre sus moléculas. Sin embargo, dado que el bloque es rígido las distancias interpartículas "r_{ik}" de la fórmula (99) no se alteran, de modo que la susodicha energía potencial es constante y puede ignorarse.

Incluso si el bloque se deformara, por ejemplo en una colisión, de tal modo que cambiaran las "r_{ik}", el cambio de energía potencial gravitatoria sería tan pequeño que no se tomaría en cuenta. Demos un ejemplo numérico: la energía potencial gravitatoria de una esfera sólida uniforme de masa M y radio R es

$$V = \frac{3GM^2}{5R}$$

(Esta expresión se obtiene efectuando la suma (99) mediante los métodos del cálculo integral). Para una bola de billar de masa 3 kg y radio 0.12 m se obtendría

$$V \approx 3 \times 10^{-11} \text{ J}$$

cantidad insignificante en comparación, por ejemplo, con la energía potencial gravitatoria asociada con el

peso de la bola (o sea, no con las interacciones gravitatorias mutuas de las moléculas de la bola de billar, sino con la interacción Bola-Tierra (para una bola de billar de masa 3 kg a una altura de 1 m sobre el suelo esta energía potencial es, en joules, $V = mgh = 3 \times 9.8 \times 1 = 29.4$).

13.8. Energía potencial de algunos sistemas compuestos

(A) ENERGÍA POTENCIAL DE UN SISTEMA

{RESORTE, BLOQUE}.

Este caso se puede tratar fácilmente con los resultados encontrados antes, concernientes a resortes y bloques en cuanto objetos individuales.

Podemos visualizar el conjunto Resorte-Bloque como un sistema de N + M partículas, de las cuales las primeras N constituyen el resorte, y las restantes M el bloque.

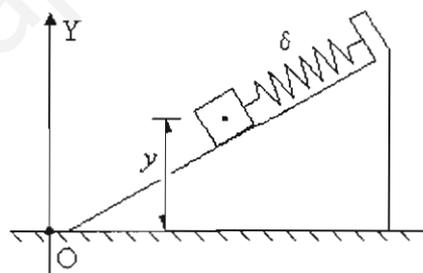


Fig. 47

La energía potencial del sistema {Resorte, Bloque} es el negativo del trabajo W_{int} efectuado por la totalidad de las fuerzas internas desde la configuración de referencia (que definiremos como aquella donde el resorte tiene su longitud natural) hasta la configuración actual (en la que la deformación es "delta").

Dividiremos las fuerzas internas del sistema {Resorte, Bloque} en tres partes:

- Las fuerzas internas del resorte.
- Las fuerzas internas del bloque.
- Las fuerzas de interacción resorte ↔ bloque.

Las primeras dan lugar a una energía potencial igual a $V = (1/2)k\delta^2$. Las segundas no dan lugar a energía potencial, por lo discutido en el Apartado precedente.

Nos falta considerar el trabajo de las fuerzas

13.9. Potencia

Hemos definido anteriormente la potencia suministrada a una partícula por una fuerza \mathbf{F} como el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre la partícula por unidad de tiempo.

Si sobre un sistema de partículas actúan varias fuerzas externas, a cada una de ellas se le puede asociar su propia potencia,

$$(103) \quad P(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

como vimos en el Apartado 12.13 de la página 48.

Sin embargo, la cantidad interesante en este caso es la potencia de la fuerza total. Dado que el trabajo de tal fuerza, W_{ext} , va a incrementar la energía mecánica E del sistema, tenemos:

Potencia de la fuerza total sobre un sistema

$$(104) \quad P(t) = \frac{dE}{dt}$$

La potencia de la fuerza total sobre un sistema es el ritmo al que dicha fuerza incrementa la energía mecánica del sistema.

Ejemplo 37. Un motor iza una caja de 65 kg por un plano inclinado a 40° con una velocidad constante de $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Existe fricción caja \leftrightarrow plano, de coeficiente cinético 0.5. (a) Calcular la potencia útil del motor. (b) si la potencia se incrementa repentinamente en un 20% del valor hallado en (a), ¿cuál es la aceleración instantánea de la caja en el momento de este incremento?

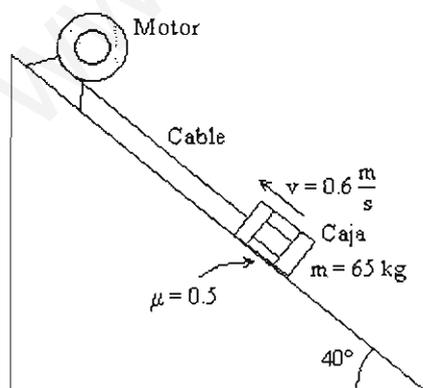


Fig. E37a

(a) Como la velocidad de la caja es constante, hay equilibrio de fuerzas, o sea

$$(r1) \quad T - f - mg \sin \theta = 0$$

$$(r2) \quad N - mg \cos \theta = 0$$

Tenemos también la relación

$$(r3) \quad f = \mu N$$

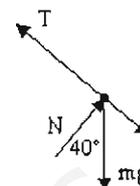


Fig. E37b

(T es la tensión del cable, f la fricción, θ el ángulo del plano inclinado.)

La potencia suministrada por el motor es

$$P = T v$$

donde T es la tensión del cable y v es la velocidad de la caja. Resolviendo las ecuaciones (r1) a (r3) para T y multiplicando T por v encontramos que

$$P = mg v (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ = 65 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}} (\sin 40^\circ + 0.5 \cos 40^\circ) =$$

$$\Rightarrow P = 392 \text{ w}$$

(b) Si la potencia se incrementa en un 20%, o sea al valor $P = 1.2 (392) \text{ w} = 470.4 \text{ w}$, la tensión pasa a ser momentáneamente

$$T = \frac{P}{v} = \frac{470.4}{0.6} = 784 \text{ (w)}$$

Se pierde el equilibrio de fuerzas y la aceleración instantánea de la caja se saca de

$$T - f - mg \sin \theta = m a$$

$$\Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Conforme va aumentando la velocidad la aceleración va disminuyendo hasta que la velocidad se estabiliza a un valor mayor que $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Esto porque la potencia del motor se supone constante en el valor 784 w, de modo que la velocidad no puede aumentar sin límite.

13.10. Estrategia general y ejemplos de aplicación de la ecuación de balance de energía.

La ecuación de balance de energía (EBE) de un sistema mecánico tiene la forma general $W_{ext} = \Delta E$. Esta ecuación se aplica al sistema entre dos configuraciones dadas del mismo. W_{ext} es el trabajo de las fuerzas externas entre ambas configuraciones, y ΔE es la variación de energía mecánica del sistema entre las mismas.

La ecuación $W_{ext} = \Delta E$ es útil para relacionar posiciones con velocidades de cuerpos del sistema.

Un sistema se denomina "mecánico" cuando las fuerzas internas del sistema son todas conservativas. Si esto no ocurre la EBE no es aplicable al sistema.

La energía mecánica E es la suma de las energías cinética y potencial del sistema:

$$E = K + V$$

Los pasos generales del método para aplicar la EBE $W_{ext} = \Delta E$ son los siguientes:

- Definir el sistema físico al cual se desea aplicar la ecuación de balance. Al respecto tome en cuenta lo siguiente:

- Estamos en libertad de elegir el sistema como deseemos. Sin embargo, para conseguir mayor simplificación conviene incluir en el sistema aquellas parejas de cuerpos que interactúen mediante una fuerza conservativa. Este es el caso de la Tierra y cualquier objeto sobre su superficie. Si incluimos estos cuerpos habrá una energía potencial gravitatoria del sistema.

- Incluya elementos de unión entre cuerpos, como son las cuerdas, varillas ligeras, etc.

- Incluya los resortes elásticos dentro del sistema. Habrá entonces una energía potencial elástica del sistema.

- No incluir en el sistema ningún agente externo que ejerza una fuerza constante (con excepción, naturalmente, del peso, conforme se explicó arriba). Este agente contribuirá al trabajo externo W_{ext} , lo mismo que cualesquiera otras fuerzas no conservativas, como la fricción.

- Identificar el sistema externo del sistema físico considerado, o sea hacer un diagrama de fuerzas activas (DFA). Este diagrama incluye las fuerzas externas sobre el sistema, exceptuando aquellas que no producen trabajo entre las dos configuraciones

consideradas. Si se incluyó a la Tierra dentro del sistema, entonces el peso del objeto no figura en el DFA, puesto que es ahora una fuerza interna.

- Calcular el trabajo W_{ext} realizado por las fuerzas activas sobre el sistema entre las dos configuraciones de interés del sistema.

- Calcular el cambio de energía cinética ΔK entre dichas configuraciones.

- Calcular el cambio de energía potencial ΔV entre las dos configuraciones de interés.

- Plantear la ecuación

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta V$$

y resolver para las incógnitas.

Tenga presente los siguientes resultados demostrados anteriormente:

(i) Si el sistema es una sola partícula la EBE se reduce a la forma simple

$$W_{ext} = \Delta K$$

donde W_{ext} es el trabajo de todas las fuerzas (necesariamente externas) que actúan sobre la partícula. Note que en este caso el peso de la partícula es una fuerza externa, de tal modo que debe figurar en W_{ext} el trabajo hecho por el peso.

(ii) Si se incluye a la Tierra y/o los resortes elásticos para formar el sistema {Partícula, Resortes, Tierra}, entonces la EBE aplicable es

$$W_{ext} = \Delta E$$

En este caso la energía E incluye, además de la energía cinética de la partícula, también la energía potencial gravitatoria "mg y " y la energía potencial elástica de los resortes. El trabajo W_{ext} ya no incluye el trabajo del peso ni el de los resortes.

(iii) Fuerzas de reacción en apoyos, que actúen sobre puntos *fijos*, no producen trabajo. Estas fuerzas no aparecen en el DFA.

(iv) Fuerzas normales debidas a superficies planas o alabeadas o guías rectas o curvas no efectúan trabajo. Este tipo de fuerzas no aparecen en el DFA.

(v) El trabajo de una fuerza constante viene dado por

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

Ejemplo 38. Un collarín se desliza por una guía lisa curva. Obtener la velocidad como función de la profundidad y , medida desde el punto más elevado de su recorrido, suponiendo que se libera desde allí y desde el reposo.

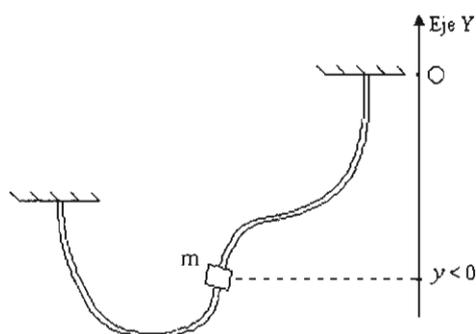


Fig. E38a

Nuestro sistema es

{Tierra, Collarín}

El sistema externo es la

{Guía}

Entre el punto más alto y el punto a profundidad y , la guía no hace trabajo, de modo que $W_{\text{ext}} = 0$, y el cambio de energía del sistema es

$$\Delta K + \Delta V = \frac{1}{2} m v^2 + m g y$$

(Recuerde que en la fórmula que da el cambio de E.P. gravitatoria, $\Delta V = m g \Delta y$, el eje Y debe ir hacia arriba, por lo que el cambio $\Delta V = m g y$ es negativo.)

La ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$ da

$$(r1) \quad v = \sqrt{2g(-y)} = \sqrt{2g|y|}$$

Esta expresión para la velocidad aparece frecuentemente en las aplicaciones, por lo que la resaltaremos en este cuadro:

(105)	<p>La velocidad que adquiere un cuerpo que parte del reposo y cae una distancia $h > 0$ bajo la acción de la gravedad, sea libremente, o a lo largo de una guía lisa de cualquier forma, o como masa pendular, es igual a</p> $v = \sqrt{2gh}$
--------------	--

Ejemplo 39. Desde la posición "(1)" indicada en la Fig. E39 se jala un collarín de masa 1.5 kg con una fuerza horizontal constante $F = 20 \text{ N}$, hasta que llega al punto más alto, "(2)". La guía es lisa. Calcular la velocidad del collarín en la situación final.

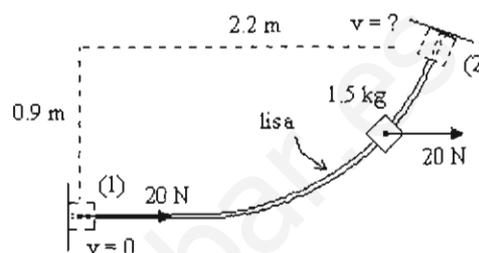


Fig. E39

Sistema: {Tierra, Collarín}

Sistema externo: {Guía, Agente F}

(Algún cuerpo no mostrado en la figura es el que ejerce la fuerza F . Este cuerpo lo hemos denominado "Agente F".)

La guía no hace trabajo porque es lisa. En cuanto al trabajo del Agente F , vale

$$\begin{aligned} W &= F \cdot \Delta \mathbf{r} = (20 \mathbf{i}) \cdot (2.2 \mathbf{i} + 0.9 \mathbf{j}) \\ &= 20 (2.2) = 44 \text{ (J)} \end{aligned}$$

El cambio de energía cinética es

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 = 0.75 v^2$$

y el cambio de la energía potencial, puramente gravitatoria, es

$$\Delta V = m g \Delta y = 1.5 (9.8) (0.9) = 13.23 \text{ (J)}$$

La EBE $W_{\text{ext}} = \Delta E$ da

$$44 = 0.75 v^2 + 13.23$$

de donde

$$v = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 40. El collarín 1 de masa m_1 encajado en una guía vertical se abandona desde la situación mostrada en la Fig. E40a. Una varilla ligera lo une con otro collarín 2 de masa m_2 que puede deslizarse horizontalmente. Calcular la velocidad del collarín 1 cuando la varilla está horizontal. Suponga que no hay fricción en ninguna parte.

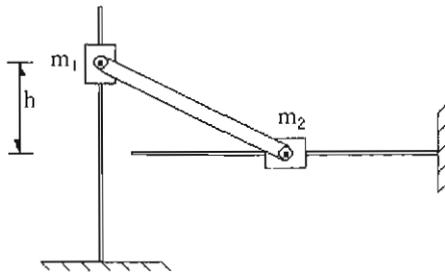


Fig. E40a

Consideremos el sistema

{Tierra, Collarín 1, Collarín 2, Varilla}

y bosquejemos la situación final (Fig. E40b).

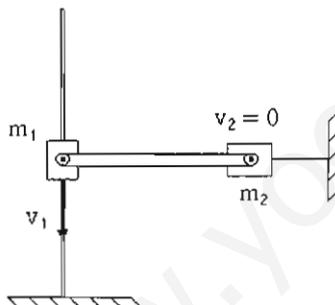


Fig. E40b

El sistema externo lo constituyen simplemente las guías vertical y horizontal.

Como las guías son lisas no hay trabajo externo sobre el sistema y la energía se conserva, o sea

$$(r1) \quad \Delta K = -\Delta V$$

Para calcular el cambio de energía cinética entre ambas situaciones remitimos al lector al Apartado 12.7 en la página 38, donde explicamos que las velocidades de los extremos de una varilla rígida deben tener iguales componentes a lo largo de la varilla. Como en la situación final de la Fig. E40b la velocidad del collarín 1 es vertical, y como la velocidad del collarín 2 debe

ser horizontal en todo momento, se deduce que la velocidad del collarín 2 debe ser cero en esta situación. Tenemos entonces $K_1 = 0$ y $K_2 = (1/2)m_1 v_1^2$ y

$$(r2) \quad \Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

La energía potencial del sistema es puramente gravitatoria. El cambio de energía potencial proviene solamente del collarín 1, ya que el collarín 2 se mantiene a la misma altura. Es igual a

$$(r3) \quad \Delta V = -m_1 g h$$

(Se usó la fórmula $\Delta V = mg \Delta y$, con $\Delta y = -h$).

Las ecuación (r1), (r2) y (r3) dan

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h$$

de donde

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Note que esta velocidad es la misma que la de un objeto que cae desde una altura h .

Ejemplo 41. Tres bloques de masas m_1 , m_2 y m_3 , unidos por cuerdas como se ve en la Fig. E41a, ascienden por un plano inclinado, con el que existe fricción de coeficiente cinético común μ . Liberado el sistema desde el reposo, calcular la velocidad del bloque 3 después de que ha descendido una distancia h .

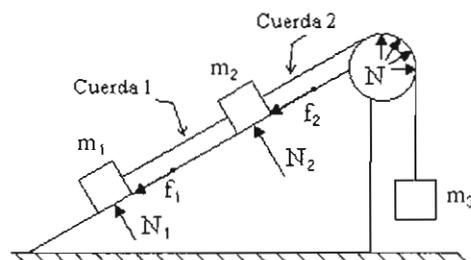


Fig. E41a

Conviene escoger el siguiente sistema:

{Tierra, Bloque 1, Cuerda 1, Bloque 2, Cuerda 2, Bloque 3}

La Fig. 41a es el diagrama de cuerpo libre del sistema.

(la Tierra se ha suprimido del diagrama, pero debemos imaginarla parte del sistema.) Note que en el DCL no aparecen los pesos de los bloques, ya que estos son fuerzas *internas* Tierra ↔ bloques. El sistema externo es

{Plano inclinado, Polea fija}

<Nota. Como vemos aquí, el plano inclinado no se considera parte de la Tierra. Tampoco hay necesidad de considerar las fuerzas de contacto del plano inclinado con la superficie de la Tierra.>

Las fuerzas normales N_1 y N_2 no hacen trabajo. Tampoco la fuerza normal sobre el tramo de cuerda en contacto con la polea fija, ya que los desplazamientos de los puntos de la cuerda son perpendiculares localmente a las fuercillas normales respectivas. El único trabajo externo proviene de las fuerzas de fricción f_1 y f_2 , y es igual a

$$W_{\text{ext}} = -\mu (m_1 + m_2) g \cos \theta \cdot h$$

puesto que los bloques se desplazan una distancia h hacia arriba del plano.

Sea " v " la velocidad común en la situación final. El cambio de energía cinética es

$$\Delta K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v^2 = \frac{1}{2} M v^2$$

donde $M = m_1 + m_2 + m_3$ es la masa total del sistema. Por otra parte, el cambio de energía potencial gravitatoria es

$$\Delta V = m_1 g h \sin \theta + m_2 g h \sin \theta - m_3 g h$$

ya que cuando el bloque 3 baja " h ", los bloques 1 y 2 suben " $h \sin \theta$ ". La ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$ es entonces

$$(r1) \quad -\mu (m_1 + m_2) g \cos \theta \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} M v^2 + m_1 g h \sin \theta + m_2 g h \sin \theta - m_3 g h$$

Despejando " v ",

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{M} (m_3 g - (m_1 + m_2)(\sin \theta - \mu \cos \theta))}$$

Con objeto de ilustrar cómo influye la elección del sistema en la resolución del problema, supongamos que hubiéramos escogido el siguiente sistema:

{Bloque 1, Cuerda 1, Bloque 2}

Ahora la Tierra y la Cuerda 2 son cuerpos *externos*. El

sistema externo completo es

{Tierra, Cuerda 2, Plano inclinado}

El DCL del sistema sería el mostrado en la Fig. E41b.

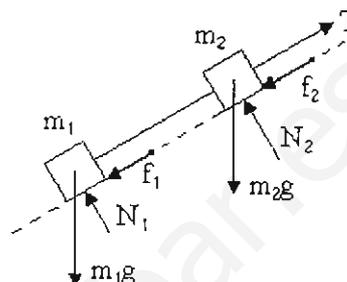


Fig. E41b

El cambio de energía cinética sería ahora

$$\Delta K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

El trabajo W_{ext} se compondría de:

El trabajo de la Tierra, igual a

$$W_{\text{Tierra}} = -m_1 g h \sin \theta - m_2 g h \sin \theta$$

El trabajo de las fricciones, igual a

$$W_{\text{fricciones}} = -\mu (m_1 + m_2) g \cos \theta \cdot h$$

El trabajo de la tensión T de la cuerda 2, igual a

$$W_{\text{tensión}} = T h$$

La ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$ conduciría a

$$(r2) \quad -m_1 g h \sin \theta - m_2 g h \sin \theta - \mu (m_1 + m_2) g \cos \theta \cdot h + T h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

En esta ecuación aparecen dos incógnitas: T y v . Habría que obtener otra ecuación entre ellas, digamos aplicando la ecuación de balance al sistema {Bloque 3}, que daría

$$(r3) \quad W_{\text{ext}} = -T h + m_3 g h = \Delta K = \frac{1}{2} m_3 v^2$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (r2) y (r3) obtenemos la ecuación (r1).

Por eso se recomienda como primera elección del sistema la Tierra, junto con todos los cuerpos móviles que se pueda, incluyendo cuerdas, varillas, etc..

Ejemplo 42. Una bola de masa $m = 6 \text{ kg}$ y radio $r = 250 \text{ mm}$ está sujeta a un resorte de constante $k = 400 \text{ N/m}$ y longitud natural $L_0 = 1.1 \text{ m}$, cuyo otro extremo está fijo, como se muestra en la Fig. E42a. La bola puede deslizarse por una guía semicircular lisa de radio $R = 1.6 \text{ m}$. El conjunto parte del reposo desde la posición vertical del resorte y llega a la posición donde el resorte forma ángulo de 30° con la vertical. En todo el movimiento la bola sufre una fuerza $F = 10 \text{ N}$ que está perpendicular al resorte en todo momento. Hallar la velocidad de la bola en la situación final.

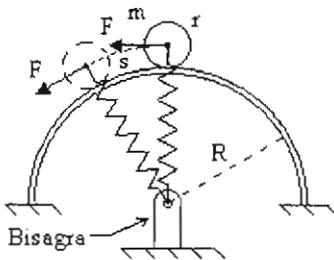


Fig. E42a

Sistema: {Tierra, Bola, Resorte}

El sistema externo lo forman los cuerpos que están en contacto ya sea con la bola o con el resorte:

Sistema externo: {Guía, Agente F, Bisagra}

(Tal como hemos hecho en los ejemplos anteriores, no tomaremos en cuenta las fuerzas que ejercen los cuerpos del sistema externo sobre la Tierra, pues ésta se supone fija y no se realiza trabajo sobre ella.)

La Guía no hace trabajo sobre la Bola, y la Bisagra no hace trabajo sobre el Resorte (porque el extremo del Resorte unido a la Bisagra está fijo). El trabajo externo proviene del Agente F. Calculemos el trabajo de esta fuerza.

Como se muestra en la Fig. E42b, la fuerza F es perpendicular al vector desplazamiento dr a lo largo de todo el arco que describe el centro de la bola. Su trabajo es entonces

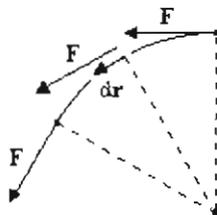


Fig. E42b

(e1) $W = F s$

donde F es la magnitud de la fuerza y "s" es la longitud del arco (el cálculo es similar al que hicimos en la página 37 en relación con el trabajo de la fricción. Consulte también el problema 5 en la página 49).

El cambio de energía cinética es simplemente

(e2) $\Delta K = \frac{1}{2} m v^2$

La energía potencial del sistema tiene dos contribuciones: la gravitatoria y la elástica del resorte. Sin embargo, como la longitud del resorte no cambia, la energía potencial elástica no cambia y podemos olvidarnos de ella. Con la geometría de la Fig. E42c obtenemos para el cambio de energía potencial gravitatoria:

(e3) $\Delta V = -mg(R+r)(1 - \cos \theta)$

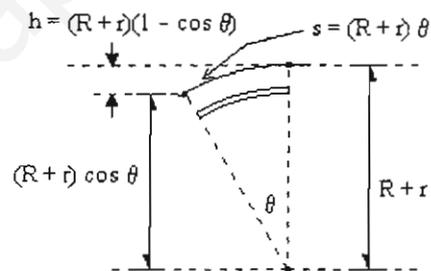


Fig. E42c

La ecuación $W_{ext} = \Delta E$ da

$$F s = \frac{1}{2} m v^2 - mg(R+r)(1 - \cos \theta)$$

Poniendo $s = (R+r)\theta$ y despejando "v",

$$v = \sqrt{\frac{2(R+r)}{m} (F\theta + mg(1 - \cos \theta))}$$

Sustituyendo valores,

$$v = \sqrt{\frac{2(1.85)}{6} \left(10 \cdot \frac{\pi}{6} + 6 \cdot 9.8(1 - \cos 30^\circ) \right)}$$

$\Rightarrow v = 2.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 43. Desde lo alto de una superficie semi-esférica lisa de radio "r" se lanza una partícula de masa "m" con cierta velocidad inicial v_0 . Calcular el ángulo θ_0 al que la partícula deja de hacer contacto con la superficie.

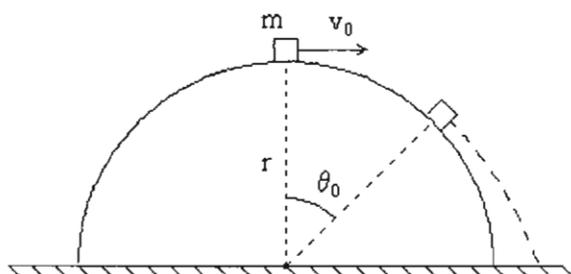


Fig. 43a

Para resolver este problema es necesario combinar las leyes de movimiento de Newton con la ley de conservación de la energía.

Hagamos el DCL de la partícula correspondiente a un ángulo θ arbitrario (antes de abandonar). Incluye la fuerza normal N debida a la superficie, y el peso " mg ", como vemos en la Fig. 43b.

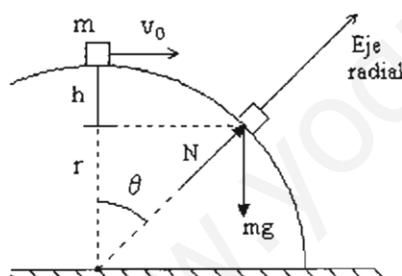


Fig. E43b

La ecuación de movimiento según el eje radial es:

$$(e1) \quad N - mg \cos \theta = m \left(-\frac{v^2}{r} \right)$$

Pero cuando $\theta = \theta_0$ la normal se vuelve nula y la velocidad tiene cierto valor " v_s ". Poniendo estas condiciones en (e1) y despejando el término " mv_s^2 " tenemos

$$(e2) \quad mv_s^2 = mgr \cos \theta_0$$

Apliquemos ahora la EBE al sistema {Tierra, partícula} entre las configuraciones inicial ($\theta = 0$) y final ($\theta = \theta_0$). Tenemos que

$$(e3) \quad \Delta K = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Además

$$(e4) \quad \Delta V = -mgh$$

donde "h" es la distancia vertical que baja la partícula. De la Fig. 43b calculamos esta "h" como

$$(e5) \quad h = r(1 - \cos \theta_0)$$

Como no existe fuerza externa sobre el sistema {Partícula, Tierra}, la energía se conserva, de modo que

$$\Delta K = -\Delta V$$

o sea

$$(e6) \quad \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

Sustituyendo aquí según las relaciones (e2) y (e5) obtenemos

$$\frac{1}{2} mgr \cos \theta_0 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mg \cdot r(1 - \cos \theta_0)$$

Despejando,

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr}$$

(como $\cos \theta_0 \leq 1$, debemos tener $v_0 \leq \sqrt{gr}$.)

Como vemos, si la partícula parte con velocidad prácticamente nula, el ángulo al que deja la superficie es

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) = 48.19^\circ$$

Por otra parte, si la partícula se lanza con velocidad $v_0 = \sqrt{gr}$, entonces pierde el contacto desde el momento de partida (ya que $\theta_0 = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$).

Ejemplo 44. Una partícula de masa $m = 0.1 \text{ kg}$ es impulsada por un resorte elástico de constante $k = 500 \text{ N/m}$, inicialmente comprimido. La partícula viaja en un plano vertical a lo largo de un tramo recto, después del cual entra a un rizo circular liso de radio $R = 0.8 \text{ m}$, como se muestra en la Fig. E44a. Calcular cuál debe ser la mínima compresión " δ " del resorte para que la partícula logre llegar al punto superior del rizo.

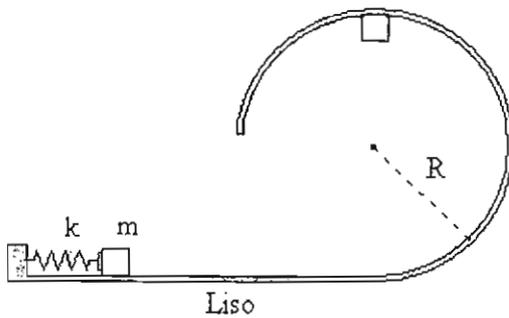


Fig. E44a

Nuestro sistema es

{Partícula, Resorte, Tierra}

y su sistema externo es

{Guía lisa}

Como la guía es lisa no efectúa trabajo sobre el sistema, por lo que la energía se conserva.

Aplicaremos la conservación de la energía entre la situación inicial en que el resorte está deformado, y la final en que la partícula está en el punto más alto del rizo. Hay que observar que para que la partícula llegue a esta situación final se requiere que la fuerza normal del rizo sea nula justamente allí. En cambio, la velocidad de la partícula no es cero allí, como se puede deducir de las ecuaciones.

El cambio de energía cinética entre ambas situaciones es

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_a^2$$

donde hemos indicado con " v_a " la velocidad en el punto superior del rizo. El cambio de energía potencial es

$$\Delta V = -\frac{1}{2} k \delta^2 + mg \cdot 2R$$

ya que la energía potencial elástica disminuyó y la gravitatoria aumentó.

Igualando ΔK a $-\Delta V$ tenemos

$$(e1) \quad \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 - mg \cdot 2R$$

Ahora, para calcular " δ " necesitamos conocer la velocidad v_a . Para calcularla aplicaremos la ecuación de movimiento radial al momento en que la partícula está en el punto alto. El DCL correspondiente es el que vemos en la Fig. 44b, donde la fuerza normal N ya se ha puesto igual a cero.

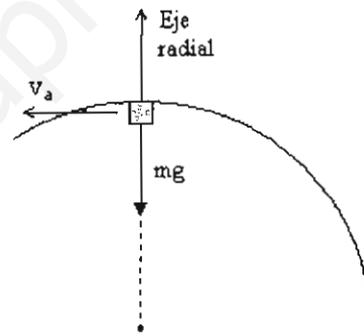


Fig. E44b

La ecuación de movimiento radial es

$$-mg = m \left(-\frac{v_a^2}{R} \right)$$

Despejando el término " $m v_a^2$ " de aquí y sustituyendo en (e1) tenemos

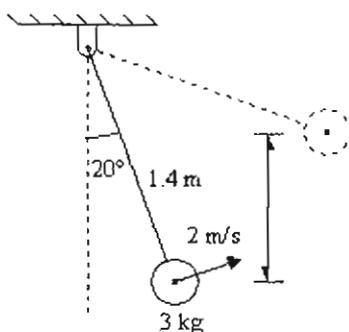
$$\frac{1}{2} k \delta^2 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2} mgR = \frac{5}{2} mgR$$

de donde

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{5mgR}{k}} = \sqrt{\frac{5(0.1)(9.8)(0.8)}{500}} = \\ &= 0.088 \text{ (m)} = 88 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

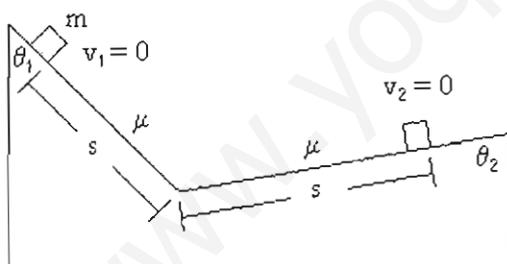
13.11. Problemas

1. Una masa pendular tiene en la posición indicada en la figura una velocidad de 2 m/s . Calcular el máximo ángulo que forma el hilo con la vertical.



Resp. 37.45° .

2. Un bloque de masa " m " parte del reposo desde un punto a una distancia " s " sobre el pie de un plano inclinado de ángulo θ_1 como se ve en la figura. El bloque entra a otro plano inclinado, de ángulo θ_2 hasta que llega al reposo a la misma distancia " s ". Existe fricción de coeficiente cinético μ entre el bloque y ambos planos. Calcular el ángulo θ_2 .



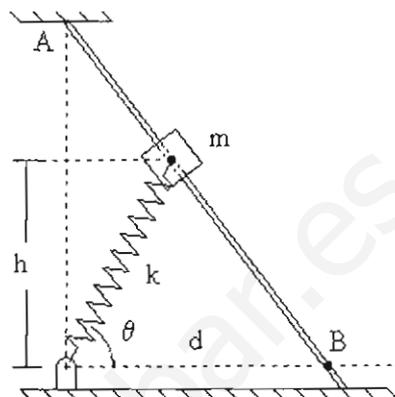
Datos: $\theta_1 = 53.13^\circ$, $\mu = 0.2$.

Resp. $\theta_2 = 75.75^\circ$.

3. Un collarín de masa " m ", sujeto al extremo de un resorte elástico de constante " k ", desciende por una guía lisa a partir del reposo desde la posición indicada en la figura, cuando el resorte forma un ángulo θ con la horizontal. Calcular la velocidad del collarín cuando llega al punto B. La longitud natural del resorte es de " $0.5 h$ ".

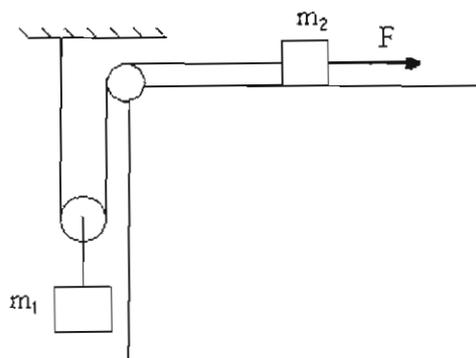
Datos: $h = 0.8 \text{ m}$, $d = 0.5 \text{ m}$, $m = 4 \text{ kg}$, $k = 400 \text{ N/m}$,

$\theta = 50^\circ$.



Resp. 6.8 m/s .

4. El conjunto mostrado en la figura se mueve desde el reposo impulsado por una fuerza constante F . Calcular la velocidad del bloque de masa m_1 una vez que el bloque de masa m_2 ha recorrido una distancia " s " a lo largo de la mesa horizontal lisa. Despreciar la masa de la polea móvil y suponer que no hay fricción.



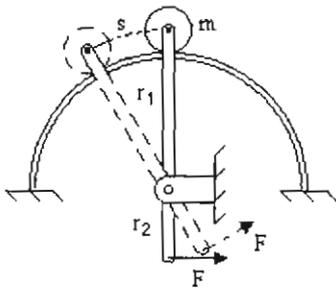
Datos: $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, $F = 50 \text{ N}$.

Resp. $v_1 = \sqrt{\frac{(2F - m_1 g)s}{m_1 + 4m_2}} = 0.767 \text{ m/s}$.

5. Resolver el Ejemplo 32 de la página 3-54 usando la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$.

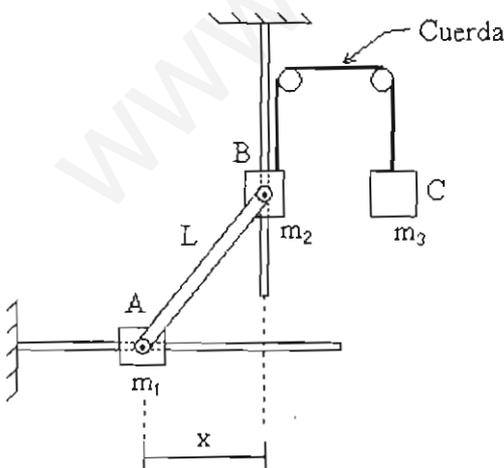
6. Resolver el Ejemplo 34 de la página 3-56 usando la ecuación $W_{\text{ext}} = \Delta E$.

7. Una varilla ligera está articulada en un extremo a una bola de masa m , y en un punto interior a una articulación fija. La varilla, de longitud $r_1 + r_2$, inicialmente está vertical y una fuerza de magnitud constante F , aplicada siempre perpendicularmente a la varilla, la hace girar, haciendo que la bola recorra una distancia " s " sobre la guía lisa semicircular que la sostiene, llegando a esta posición con velocidad " v ". Calcular la fuerza F necesaria.



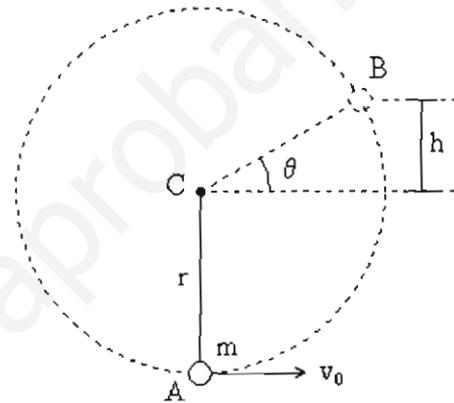
Resp. $F = \frac{r_1}{r_2 s} \left(\frac{1}{2} m v^2 - m g \left(1 - \cos \frac{s}{r_1} \right) \right)$

8. En el conjunto mostrado en la figura, los collarines A y B se mueven a lo largo de sendas guías lisas colocadas horizontal y verticalmente. A y B están unidos por una varilla ligera de longitud L , y el collarín B está atado a una cuerda que lo conecta con el bloque C. El conjunto parte del reposo en la configuración mostrada. Calcular la velocidad del bloque A cuando llega a la posición verticalmente debajo de B.



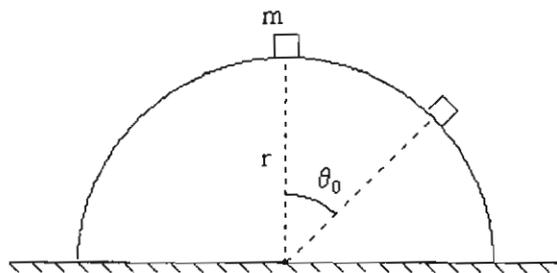
Resp. $v_1 = \sqrt{\frac{2}{m_1} (m_3 - m_2) g h}$

9. Una bola de masa " m " gira en un círculo de radio dado " r ", sujeta a una cuerda inextensible. En el punto más bajo de su movimiento la bola tiene velocidad v_0 . ¿Qué tensión T_0 debe tener la cuerda en la posición más baja de la bola " m " para que ésta alcance a subir una altura " h " por encima del centro C?



Resp. $T_0 = 3 m g \left(1 + \frac{h}{r} \right)$

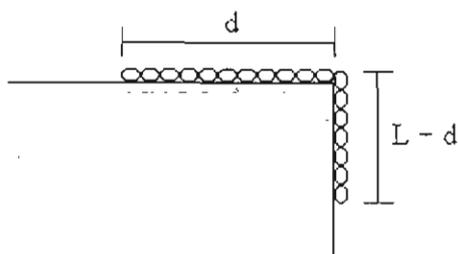
10. Un bloque de masa " m " parte del reposo desde lo alto de una superficie semiesférica lisa de radio " r ", como se ve en la figura. Calcular el ángulo θ_0 al cual la fuerza normal sobre el bloque es igual a la mitad de su peso.



Resp. $\theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{5}{6} \right)$

11. Una cadena de longitud $L = 1.2 \text{ m}$ parte del reposo sobre una mesa horizontal lisa desde la configuración que se muestra en la figura, donde $d = 0.4 \text{ m}$. Calcular la velocidad de la cadena cuando el último eslabón

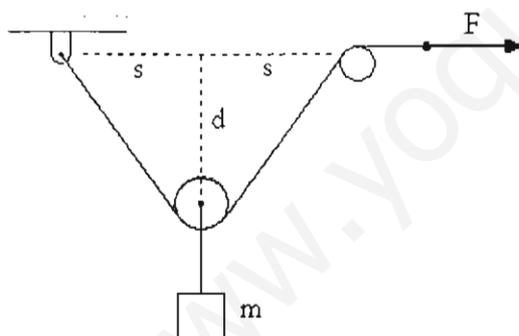
abandona la mesa. La densidad de masa de la cadena es λ kg/m.



Sugerencia. Para obtener la energía potencial gravitatoria de la parte colgante de la cadena use la posición vertical de su centro geométrico, que coincide con el centro de masa de dicha parte.

Resp. $1.53 \frac{m}{s}$

12. El conjunto [Polea móvil, Cuerda vertical, Bloque] se iza mediante una fuerza constante F , aplicada siempre horizontalmente como se muestra. Suponiendo que parte del reposo, calcular la velocidad del bloque cuando el conjunto ha subido una altura " h ". Ignore las dimensiones de la polea colgante.

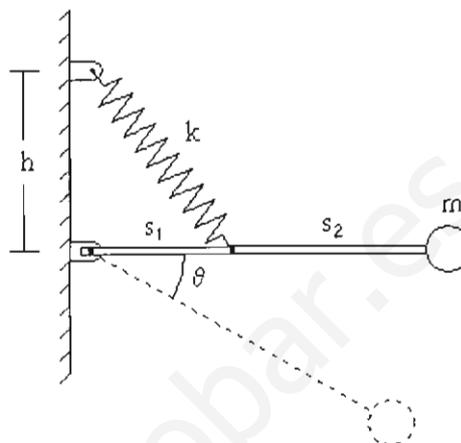


Datos: $d = 4 \text{ m}$, $s = 3 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $F = 50 \text{ N}$.

Resp. $v = \sqrt{\frac{4F}{m}(L_1 - L_2) - 2gh} = 2.37 \text{ m/s}$.

13. La bola de masa " m " está sujeta a una barra de peso insignificante inicialmente horizontal. El conjunto se libera desde el reposo cuando el resorte tiene su longitud natural. La longitud de la barra es " $s_1 + s_2$ " y está pivoteada en un extremo. La barra está sujeta al resorte elástico de constante " k " en un punto a distancia s_1 del pivote. Calcular la velocidad de la bola cuando la

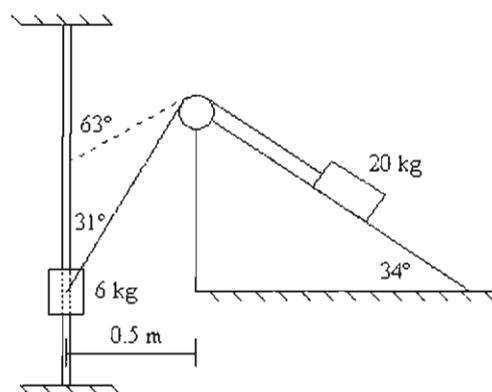
barra ha girado un ángulo " θ " como se muestra.



Resp. $v = \sqrt{2g(s_1 + s_2) \sin \theta - \frac{k\delta^2}{m}}$

con $\delta = \sqrt{h^2 + s_1^2 + 2hs_1 \sin \theta} - \sqrt{h^2 + s_1^2}$

14. El conjunto de los bloques de masas 6 kg y 20 kg parte del reposo en la posición mostrada en la figura. No hay fricción en ninguna parte. Calcular la velocidad del bloque de 6 kg cuando el ángulo que forma la cuerda con la vertical toma el valor 63° .



Sugerencia. En todo momento las velocidades de los bloques tienen la misma componente a lo largo de la cuerda que los une.

Resp. 1.47 m/s .

Introducción a la mecánica de la partícula en el plano
Se terminó de imprimir en el mes de agosto de 2008 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Se imprimieron 100 ejemplares más sobrantes para reposición.

www.yoquieroaprobar.es

UAM 2893936
QA841 Becerril Hernández, Hugo
B4.35 Introducción a la mecánica

ISBN-13: 978-970-31-0179-8
ISBN-10: 970-31-0179-8



INT. A LA MECANICA DE LA FALDADA DE AL
RODRIGO MORALES • SECCION DE TENSORES
2. 40
40-ANTOLOGIAS DEI • 51 51