CAPÍTULO 2

Cinemática de la partícula

Capítulo 2

Cinemática de la partícula

2.1 Conceptos básicos

Partícula o punto material

Además del movimiento de traslación, los cuerpos pueden efectuar movimientos de rotación y de vibración. Cuando se analiza el movimiento de traslación exclusivamente, resulta conveniente introducir el concepto de partícula, asumiendo que el cuerpo se comporta como un punto, con toda su masa concentrada en él (figura 2.1).

Figura 2.1. Buitre considerado como partícula para analizar su traslación.

Siempre que sólo interese analizar el movimiento de traslación, se puede asumir, en una primera aproximación, que el cuerpo en cuestión se comporta como una partícula. De esta forma se centra la atención en la traslación, y se deja de tomar en cuenta las posibles rotaciones y vibraciones, que siempre pueden ser analizadas posteriormente. La aproximación será más cercana a la realidad mientras mayores sean las distancias involucradas en comparación con las dimensiones del objeto en cuestión.

Vector de posición

El movimiento es *relativo*. Cuando se menciona que un cuerpo se mueve, hay que especificar con relación a qué se está moviendo. Usualmente se toma la Tierra como *sistema de referencia*, pero la Tierra también se mueve alrededor del Sol, y éste, junto con todo el sistema solar, alrededor del centro de la galaxia y con relación a otras galaxias, etc.

La posición de una partícula respecto a cualquier sistema de referencia se especifica mediante el *vector de posición* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (figura 2.2).

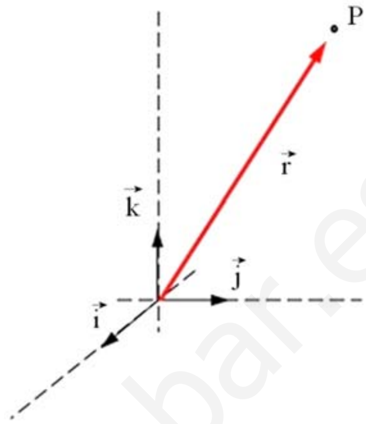


Figura 2.2. Vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Conociendo (x,y,z) se conoce exactamente la posición de la partícula. En lo que sigue sólo se analizaran problemas en 1 y 2 dimensiones (recta y plano), por lo que la representación del vector de posición será en el plano xy:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \,.$$

Trayectoria y desplazamiento

Cuando la partícula varía su posición con el transcurso del tiempo, la curva imaginaria que se obtiene al unir las posiciones sucesivas que va ocupando la partícula se denomina *trayectoria* de la misma.

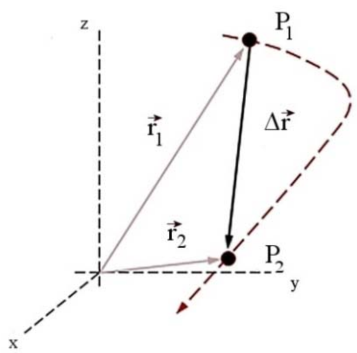


Figura 2.3. Trayectoria de P_1 a P_2 (línea quebrada) y desplazamiento (vector $\Delta\vec{r}$).

En este caso el vector de posición será función del tiempo, lo que se designa por $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Como $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, también se cumplirá que x = x(t); y = y(t).

Supongamos que en un instante t_1, medido con reloj, la partícula se encuentra en la posición P_1, con vector de posición $\vec{r}_1$. Y que en un instante posterior se encuentra en P_2, asociado a $\vec{r}_2$. Se define el *desplazamiento* de la partícula (figura 2.3) en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Se ve con facilidad que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$.

2.2 Velocidad y rapidez

Si la partícula ha realizado un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ en el intervalo de tiempo Δt, es posible definir su velocidad media por la expresión

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} .$$

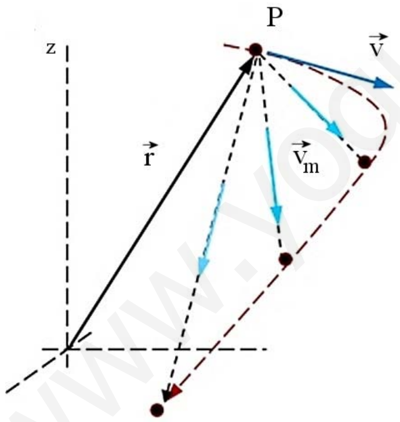


Figura 2.4. Velocidad media e instantánea.

Como Δt es un escalar siempre positivo, la velocidad media siempre tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (figura 2.4).

La velocidad instantánea (o simplemente, la velocidad) se define como el límite para cuando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} ,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Cuando Δt tiende a cero, el vector desplazamiento también tiende a cero, y cada vez la cuerda se acerca más a la tangente a la curva (ver figura). Como la velocidad tiene la misma dirección que $\Delta\vec{r}$, también su dirección se acercará cada vez más a la tangente a la curva. En el límite, cuando $\Delta t = 0$, la dirección de la velocidad coincide con la tangente a la trayectoria. Es decir, *la velocidad instantánea de la partícula siempre es tangente a la trayectoria.*

En coordenadas cartesianas en dos dimensiones $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} ,$$

donde v_x y v_y son las componentes de la velocidad a lo largo de los ejes coordenados: $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$.

Rapidez

Considere un segmento cualquiera de trayectoria recorrida entre los puntos P_1 y P_2, y sea $\Delta\ell$ la longitud de ese intervalo. Si la longitud se recorre en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, la rapidez de la partícula se define por la expresión

$$\text{rapidez} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\ell}{\Delta t} .$$

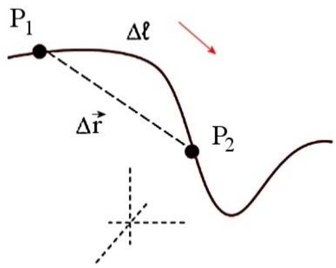


Figura 2.5. Rapidez

De la figura 2.5 se ve que $\Delta\ell$ y Δr no son iguales sino que, a lo más, $\Delta\ell \approx \Delta r$. Sin embargo, a medida que el intervalo Δt se hace menor y el punto P_2 se acerca a P_1, el valor de Δr y el de $\Delta\ell$ irán siendo cada vez más similares. En el límite para $\Delta t \to 0$ el punto P_1 y el P_2 prácticamente coinciden, y es posible sustituir uno por el otro. En ese caso $d\ell = dr$ (figura 2.6), y queda entonces

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\ell}{\Delta t}=\frac{d\ell}{dt}=\frac{dr}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=|\vec{v}|\ .$$

Por tanto, *la rapidez de la partícula no es más que el módulo de su velocidad* (figura 2.7).

Resumiendo:

$$|\vec{v}|=\frac{d\ell}{dt}=\frac{dr}{dt}\,.$$

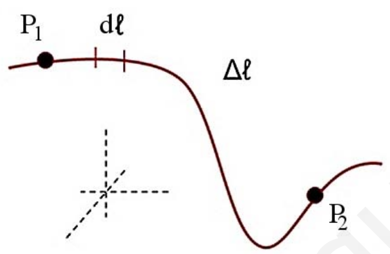


Figura 2.6. Longitud o espacio recorrido a lo largo de la trayectoria ($\Delta\ell$).

Figura 2.7. El velocímetro indica la rapidez y el odómetro el $\Delta\ell$ recorrido (151517 total, 6536 parcial).

Longitud recorrida a lo largo de la trayectoria

Si se desea calcular la longitud $\Delta\ell$, despejando en la expresión anterior se obtiene $d\ell = v\,dt$; por tanto,

$$\Delta\ell=\sum_{1}^{2}d\ell$$

$$\int_{l_o}^{l}d\ell=\int_{t_o}^{t}v\,dt\,,$$

$$\Delta\ell=\int_{t_o}^{t}v\,dt\,.$$

Unidades

En el SI de unidades las longitudes patrones se miden en metros y el tiempo patrón en segundos. De aquí que, en las unidades básicas:

$$[v] = [L]/[t] = m/s.$$

2.3 Aceleración media e instantánea en el plano

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ las velocidades de una partícula en los instantes t_1 y t_2, respectivamente. Entonces,

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1\,.$$

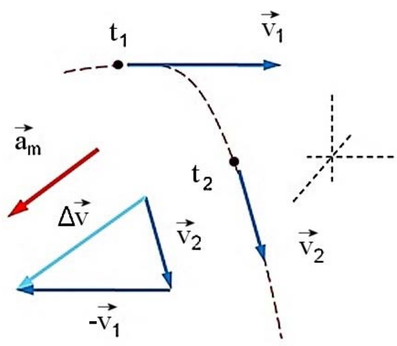


Figura 2.8. Aceleración media a_m.

La *aceleración media* de la partícula en ese intervalo de tiempo se define por la expresión

$$\vec{a}_m=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,,$$

y se comprueba fácilmente que el vector a_m, paralelo al vector Δv, está dirigido siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria (figura 2.8). La aceleración (instantánea) se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo Δt tiende a cero:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \ .$$

Cuando la velocidad se expresa en función de sus componentes,

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \ ,$$

aplicando la definición anterior, se obtiene

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \ ,$$

$$a_x = dv_x/dt, \quad a_y = dv_y/dt \ .$$

Componentes normal y tangencial de la aceleración

Hasta el momento se ha utilizado para establecer la posición de la partícula un sistema de referencia ligado a tierra. Consideremos ahora otro sistema de referencia: uno ligado a la partícula, de manera que se mueve junto con ella con uno de los lados tangente a la trayectoria (figura 2.9).

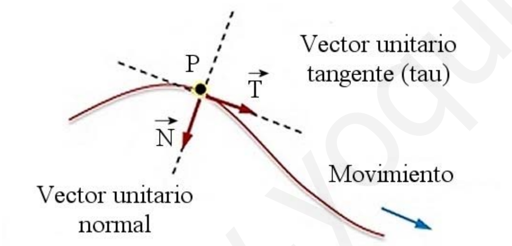


Figura 2.9. Componentes en un sistema de referencia móvil.

Los ejes coordenados de este sistema de referencia se toman de forma que uno de ellos es tangente a la trayectoria en cada instante, y el otro es perpendicular a esa tangente. Se introducen, además, el vector unitario tangente $\vec{T}$ (tau) y el vector unitario normal $\vec{N}$, este último dirigido hacia la parte cóncava de la curva. El vector $\vec{T}$ se puede expresar en función de la velocidad de la partícula, que también es tangente a la trayectoria, como

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$$

Expresando la aceleración en función de $\vec{T}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt} \ .$$

El primer término, dv/dt, es la variación de la rapidez a lo largo de la curva, y tiene la dirección del vector tangente; es la *aceleración tangencial*:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \ .$$

Más adelante se demuestra que el 2do término se puede expresar como

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\vec{N}$$

donde $\left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{v}{R}$,

por lo que el 2do término es igual a $\frac{v^2}{R}\vec{N}$.

Llamando aceleración tangencial al primer término

$$a_t = \frac{dv}{dt} \ ,$$

y aceleración normal al 2do:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \ ,$$

al sustituir en la expresión de la aceleración se obtiene

$$\vec{a} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N} \ .$$

Demostración $\mathbf{v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{N}}$

Como $\vec{T}$ es un vector unitario, entonces el producto escalar de él consigo mismo es igual a la unidad:

$$\vec{T}\cdot\vec{T} = 1 \ .$$

La derivada del producto escalar sigue las mismas reglas que las derivadas de las funciones reales; y derivando respecto al tiempo se obtiene

$$2\vec{T}\cdot\frac{d\vec{T}}{dt}=0\,.$$

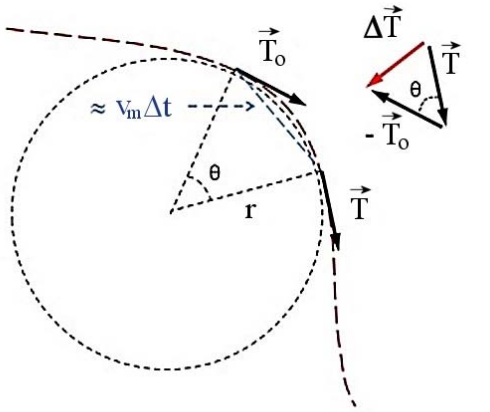


Figura 2.10. Evaluación de ΔT/Δt

De acuerdo a las propiedades analizadas del producto escalar, significa que los vectores $\vec{T}$ y $d\vec{T}/dt$ son perpendiculares, por lo que el vector $d\vec{T}/dt$ tiene la dirección del vector unitario normal $\vec{N}$, y por tanto es posible escribir

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\vec{N}\,.$$

Para dilucidar el significado de $\left|d\vec{T}/dt\right|$ |consideremos la definición de derivada:

$$\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta t}\right|\simeq\frac{\Delta T}{\Delta t},$$

y ΔT/Δt se puede evaluar de la figura 2.10.

El triángulo formado por los dos radios y el segmento de cuerda de valor $v_m\Delta t$ es semejante al triángulo formado por $\vec{T}$, $\vec{T}_o$ y $\Delta\vec{T}$, por ser isósceles con ángulo común entre los lados iguales. Que el ángulo es el mismo en ambos casos se ve fácilmente considerando que los vectores unitarios son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia. Cuando dos ángulos agudos tienen sus lados correspondientes perpendiculares entre sí, son iguales.

Analizando entonces la proporcionalidad entre lados homólogos de triángulos semejantes, se cumplirá que

$$\frac{\Delta T}{v_m\Delta t}=\frac{T}{R}=\frac{1}{R},\quad y$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{v_m}{R}\,.$$

Considerando ahora un intervalo Δt tendiendo a cero, la velocidad media v_m tenderá al valor de la velocidad instantánea en un punto, y el cociente ΔT/Δt se convertirá en la derivada dT/dt; luego:

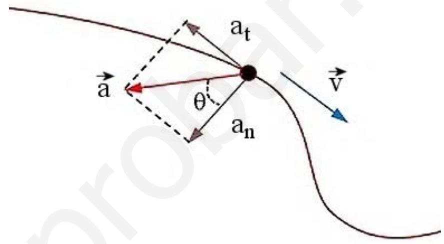


Figura 2.11. Aceleración en el plano.

$$v\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{v^2}{R}\vec{N}\,,$$

que es la expresión que deseábamos encontrar.

La componente a_n es siempre positiva, mientras que a_t puede ser positiva o negativa, según sea que la partícula vaya aumentando o reduciendo su velocidad a lo largo de la trayectoria.

La figura 2.11 indica que el vector aceleración siempre estará dirigido hacia la parte cóncava de la curva. Su dirección puede obtenerse a partir de las componentes; $\tan\theta = a_n/a_t$.

2. 4 Caso en que ā = 0: Movimiento rectilíneo y uniforme (MRU).

A continuación se estudian algunos casos particulares de movimiento, comenzando por el más sencillo posible.

Si $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=0$, entonces $\vec{v}$ = constante. Y si la velocidad es constante (módulo, dirección y sentido), el movimiento tiene que ser a lo largo de una recta (figura 2.12).

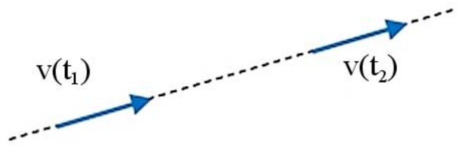


Figura 2.12. MRU

En este caso resulta conveniente escoger el eje x de forma que coincida con la dirección del movimiento. El vector de posición de la partícula tendrá la forma $\vec{r} = x\vec{i}$.

En la figura 2.13, $|\vec{r}_1| = x_1$; $|\vec{r}_2| = x_2$. Como sólo hay una dirección con dos posibles sentidos, se puede adoptar el convenio de que los vectores que estén dirigidos hacia la derecha se representen con un signo (+), mientras que los dirigidos a la izquierda se representen con un signo (-). De esta forma se puede obviar completamente la representación vectorial, y trabajar sólo con los escalares.

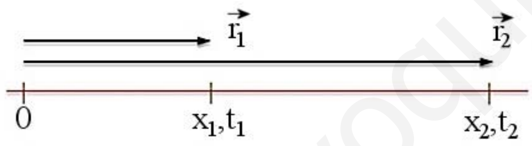


Figura 2.13. Ver texto.

Así se obtiene, para la velocidad media $v_m = \Delta x/\Delta t$, donde $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

La velocidad es positiva cuando el movimiento es hacia la derecha y negativa en caso contrario. Como la velocidad es constante, la velocidad instantánea será igual a la velocidad media en todo instante, por tanto:

$$v = \Delta x/\Delta t.$$

Esta es la fórmula de la velocidad en el MRU.

Formula del espacio en el MRU

Tomando $t_1 = 0$ como el momento en que se comienza a contar el tiempo y despejando Δx en la expresión anterior, se llega a la expresión para el espacio recorrido:

$$\Delta x = vt .$$

Si se desea expresar como varía la abscisa en función del tiempo, sustituyendo Δx en la expresión anterior, se obtiene

$$x = x_o + vt,$$

donde x_o es la posición de la partícula para t = 0.

Si se grafica la velocidad en función del tiempo, se obtiene una recta paralela el eje de las t. En cambio, la ecuación de la abscisa en función del tiempo es la ecuación de una recta con intercepto x_o y pendiente v (figura 2.14).

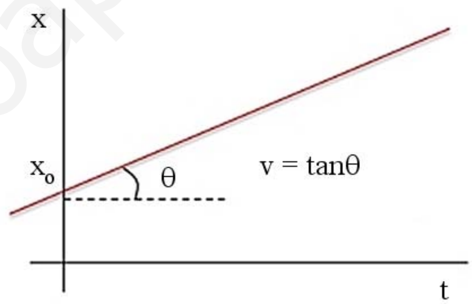


Figura 2.14. Abscisa en el MRU

Ejercicio: Analizar cómo queda el gráfico cuando x_o es negativo y como cuando la velocidad es negativa.

Unidades

En el SI de unidades las longitudes se miden en metros (magnitud patrón) y el tiempo en segundos. Por tanto,

$$[v] = [L]/[t] = m/s$$

$$[a] = [v]/[t] = m/s^2.$$

2.5 Movimiento a lo largo de una recta con aceleración constante (MRUV)

Fórmula de la velocidad

Como el movimiento es en una recta, la expresión de la aceleración queda como $a = dv/dt$. Considerando la derivada como un cociente de infinitesimales antes de alcanzar el límite, es posible trabajar con los diferenciales como si fueran números reales. Por tanto, despejando en la ecuación anterior,

$$dv = adt .$$

La igualdad debe mantenerse cuando se integra a ambos lados de la expresión, considerando que para el instante inicial t_o la velocidad de la partícula tenía el valor t_o y que la aceleración es constante y se puede sacar fuera de la integral,

$$\int_{v_o}^{v} dv = a\int_{t_o}^{t} dt .$$

Integrando ambas expresiones y haciendo $t_o = 0$ por conveniencia (instante en que se comienza a contar el tiempo), se llega a la *fórmula de la velocidad* en el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$v = v_o + at . \qquad (1)$$

Note que t siempre es (+), pero v, v_o y a pueden ser positivos o negativos, y que aquí se sigue el mismo convenio de signos que en el caso del MRU. El vector que apunte a la derecha (sea $\vec{v}$ ó $\vec{a}$) será positivo, y negativo en caso contrario. Si v y a están dirigidas en el mismo sentido el movimiento es acelerado; si están en sentido contrario el movimiento es retardado

Hay cuatro posibilidades que se resumen en la tabla 2.1. Es oportuno enfatizar que los vectores carecen de signo; poseen módulo, dirección y sentido. El convenio de la tabla 2.1 es válido sólo si el movimiento es unidimensional.

El gráfico de v en función del tiempo proporciona la ecuación de una recta. En el ejemplo de la figura 2.15 se ha representado un movimiento retardado hacia la derecha.

Tabla 2.1
Posibles movimientos en el MRUV

	v	a
Acelerado a la derecha ($v > 0, a > 0$)	→	→
Acelerado a la izquierda ($v < 0, a < 0$)	←	←
Retardado a la derecha ($v > 0, a < 0$)	→	←
Retardado a la izquierda ($v < 0, a < 0$)	←	→

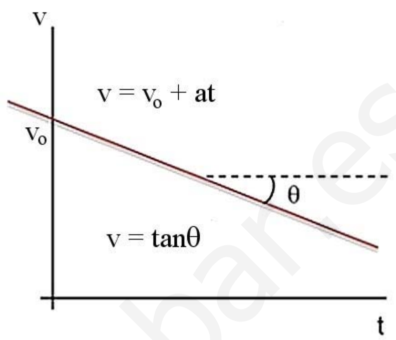


Figura 2.15. Velocidad en el MRUV

Fórmula del espacio en el MRUV

Para hallar la expresión del espacio recorrido, a partir de la definición de velocidad $v = dx/dt$ es posible despejar dx considerando un instante antes de llegar al límite:

$$dx = vdt .$$

Integrando a ambos lados del signo de igualdad, y sustituyendo $v = v_o + at$, se obtiene:

$$\int_{x_o}^{x} dx = \int_{t_o}^{t} (v_o + at)dt = v_o\int_{t_o}^{t} dt + a\int_{t_o}^{t} t\,dt .$$

La integración definida de la expresión anterior, considerando $t_o = 0$ como se ha hecho anteriormente, conduce a:

$$\Delta x = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2. \qquad (2)$$

Si se prefiere, es posible expresar la abscisa explícitamente en función del tiempo:

$$x = x_o + v_o t + \tfrac{1}{2} at^2.$$

Note que estas expresiones proporcionan en realidad *la abscisa* en un instante determinado, *que no es lo mismo* que el espacio total recorrido (que tampoco es igual a $x-x_o$; por ejemplo, si el móvil sale y retrocede al origen, el espacio total no es cero, pero $\Delta x = 0$).

Otras fórmulas de interés en el MRUV

Si se despeja el tiempo en la fórmula de la velocidad (1), se sustituye en la fórmula de Δx (2) y se simplifican términos, se llega a

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta x, \qquad (3)$$

relación que no depende del tiempo y puede ser de utilidad en muchos casos. Si se sustituye la fórmula del espacio (2.5.2) en la expresión de la velocidad media $v_m = \Delta x/\Delta t$ y se simplifican términos, se llega a:

$$v_m = \frac{v_o + v}{2}. \qquad (4)$$

Finalmente, como Δx también puede escribirse como $\Delta x = v_m t$, sustituyendo la expresión (4) se llega a

$$\Delta x = \left(\frac{v_o + v}{2}\right)t. \qquad (5)$$

Note que las ecuaciones (1) a la (5) se derivaron para el caso particular en que la aceleración es constante y a lo largo de una recta. No se pueden aplicar en ningún otro caso.

2.6 Caída libre de los cuerpos

Cuando es posible despreciar la resistencia del aire, todos los cuerpos caen verticalmente hacia la tierra con la misma aceleración, de aproximadamente $g = 9.8$ m/s^2. Esto se puede comprobar fácilmente en experimentos de cátedra, donde una pluma y una esfera pequeña de acero caen al unísono en un tubo al que se le ha extraído el aire previamente.

Los ejes de la gráfica en la figura 2.16 representan la distancia al punto inicial y el tiempo transcurrido desde que se deja caer un objeto cerca de la superficie terrestre. La gravedad acelera el objeto, que sólo cae unos 20 metros en los primeros dos segundos, pero casi 60 metros en los dos segundos siguientes. También se encuentra en la práctica que g disminuye a medida que aumenta la altura sobre la tierra (se analizará más adelante) y que, además, varía con la latitud geográfica: (tabla 2.2).

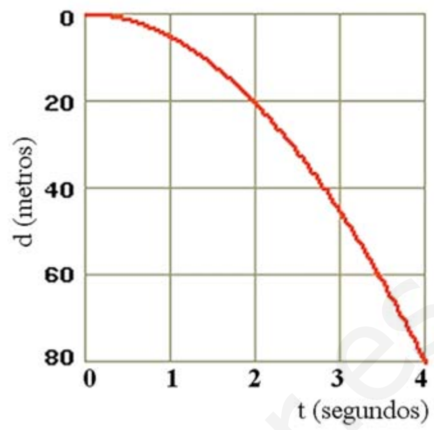


Figura 2.16. Avance de una partícula en caída libre.

Tabla 2.2 Aceleración de la gravedad en diversas latitudes	
Lugar	**g(cm/s^2)**
Ecuador (0º)	978.0
La Habana (23º N)	978.2
Washington (47ºN)	980.7
Alaska (64º N)	982.2
Polos norte y sur (90º)	983.2

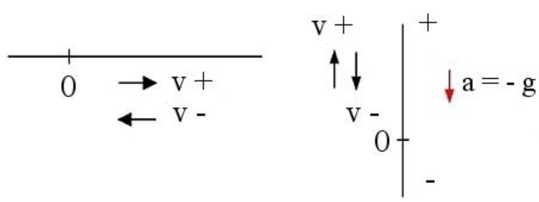


Figura 2.17. Sistema de referencia para caída libre. Basta rotar el horizontal en sentido contrario al reloj.

Como el movimiento de caída libre es con aceleración constante y a lo largo de una recta, se regirá por las mismas expresiones que rigen el MRUV. Lo único que varía es el sistema de referencia, que ahora se encuentra vertical (equivale a rotar 90º a la izquierda el sistema de referencia que se utiliza para el movimiento en el eje x. El convenio de signos se mantiene, figura 2.17).

Con este convenio de signos, las ecuaciones de la caída libre toman la forma siguiente:

$$v = v_o - gt$$

$$\Delta y = v_o t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g\Delta y.$$

Notar que, al igual que el movimiento analizado en el eje x, la variable y representa la abscisa en un instante determinado, y *no* el espacio recorrido por la partícula. Usualmente el cero del sistema de referencia se toma de forma que coincida con la superficie de la tierra, pero es posible colocarlo en cualquier otro lugar.

2.7 Movimiento de proyectiles

Un proyectil es cualquier objeto que se mueve bajo la acción exclusiva de la gravedad y de la resistencia del aire, después que se le aplica un impulso inicial. En lo sigue no tomaremos en cuenta la resistencia del aire (aproximación válida cuando la distancia a recorrer por el proyectil no es muy grande).

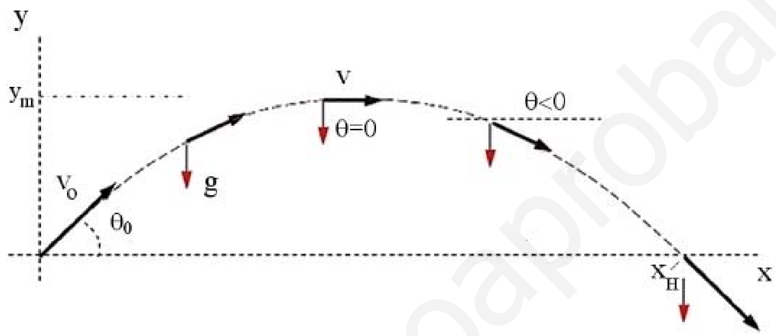


Figura 2.18. Trayectoria de un proyectil

Cuando se analiza la variación de la posición (y = y(x)) se comprueba que cualquier proyectil describe una trayectoria característica (aproximadamente parabólica) representada esquemáticamente en la figura 2.18.

El movimiento del proyectil se caracteriza por una serie de parámetros:

$\vec{v}_o$: velocidad inicial

θ_o : ángulo de lanzamiento o ángulo inicial (note que el ángulo que forma la velocidad

con la horizontal varía a medida que el proyectil avanza)

y_m : altura máxima que alcanza el proyectil

x_h : alcance horizontal (distancia recorrida a lo largo del eje x)

t_v : tiempo de vuelo (tiempo que el proyectil está en el aire)

Es posible encontrar relaciones entre todas estas magnitudes; por ejemplo, el alcance horizontal como función de la velocidad inicial y el ángulo de disparo. La posición del proyectil quedará determinada completamente en cada instante si se conoce su *ley del movimiento*, es decir, si se conoce la dependencia $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Como estamos en un movimiento en dos dimensiones, entonces

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\,,$$

donde x = x(t); y = y(t). Si se conoce el vector de posición en cada instante, entonces se puede conocer también la velocidad en cada instante, puesto que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

Para calcular y(t) y x(t) analicemos la componente del movimiento en cada eje por separado.

Movimiento en el eje X

La única aceleración actuando es la de la gravedad, que no tiene componente en el eje x. Por tanto, el movimiento en el eje x es con velocidad constante, a lo largo de una recta. Las expresiones a utilizar son las mismas del MRU tomando la proyección o componente de la velocidad inicial a lo largo del eje x:

$$v_x = v_o\cos\theta_o$$

$$\Delta x = v_o\cos\theta_o t\ .$$

Movimiento en el eje Y

La componente de la velocidad inicial en eje y es:

$$v_{oy} = v_o\text{sen}\theta_o.$$

Y se ve fácilmente que las expresiones serán las mismas que las de caída Libre (movimiento en el eje y con aceleración de la gravedad).

$$v_y = v_o\text{sen}\theta_o - gt$$

$$\Delta y = v_o\text{sen}\theta_o t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Tiempo de vuelo t_v

Cuando no hay fricción se comprueba con facilidad que el proyectil tarda el mismo intervalo de tiempo en llegar hasta su altura máxima que el que tarda en regresar posteriormente hasta el suelo. Por tanto, es posible escribir

$$t_v = 2t',$$

donde t' es el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. El tiempo t' se puede calcular considerando que, al alcanzar la altura máxima el proyectil invierte su recorrido en el eje y, por lo que en ese instante $v_y = 0$. Haciendo $v_y = 0$ en la expresión correspondiente:

$$0 = v_o\text{sen}\theta_o - gt'$$

$$t' = \frac{v_o\text{sen}\theta_o}{g}\ .$$

El tiempo de vuelo es el doble de este valor,

$$t_v = \frac{2v_o\text{sen}\theta_o}{g}\ .$$

Alcance horizontal x_h

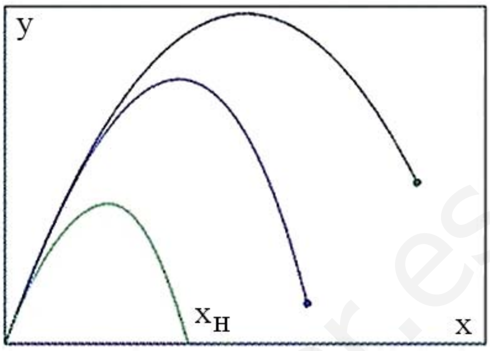


Figura 2.19. Efecto de la velocidad inicial en el alcance horizontal para un valor dado de θ_o .

Al sustituir el tiempo que el proyectil está en el aire (t_v) en la expresión de Δx más arriba, obtendremos su máximo alcance. Sustituyendo:

$$\Delta x = v_o\cos\theta_o\ \frac{2v_o\text{sen}\theta_o}{g}\ .$$

Considerando que $2\text{sen}\theta_o\cos\theta_o = \text{sen}(2\theta_o)$ y que $x_o = 0$, agrupando y simplificando se obtiene:

$$x_h = \frac{v_o^2\text{sen}2\theta_o}{g}\ .$$

En la figura 2.19 se muestra el efecto de incrementar la velocidad inicial del proyectil cuando θ_o es constante.

Ángulo de alcance máximo

Dada una velocidad inicial v_o, el ángulo inicial que proporciona el máximo alcance del proyectil se obtiene imponiendo la condición de extremo relativo en la expresión anterior, ya que en ese caso x_h depende de θ_o exclusivamente.

$$\frac{dx_h}{d\theta_o} = \frac{v_o^2\cos(2\theta_o)\times 2}{g}\ .$$

Igualando a cero esta expresión (condición de extremo relativo) se obtiene que la derivada será cero si $\cos(2\theta_o) = 0$, o lo que es igual, si $2\theta_o = \pi/2$. De aquí se obtiene

$$\theta_{o(\text{máx})} = \pi/4 \qquad (45^o),$$

que se comprueba corresponde a un máximo de la función $x_h = x_h(\theta_o)$.

Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo en las expresiones para Δx y Δy, haciendo $x_o = y_o = 0$, es posible demostrar que la ecuación de la trayectoria sigue una dependencia parabólica (ejercicio para el lector);

$$y = x\tan\theta_o - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_o}x^2 .$$

2. 8 Movimiento relativo

Cuando un objeto cae de un móvil (automóvil, tren) la descripción del movimiento que proporciona un observador en el móvil usualmente difiere de la descripción que ofrece un observador en tierra. Un observador en una de las ventanas del móvil verá que el objeto se aleja de sí en línea recta hacia la tierra, mientras que el observador en tierra verá que sigue al móvil en su movimiento, describiendo una parábola (figura 2.20).

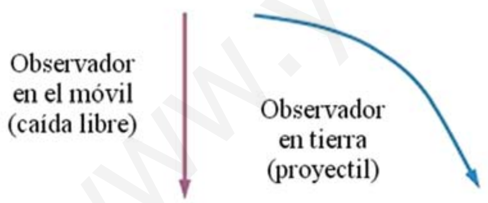


Figura 2.20. Un mismo movimiento en diversos sistemas de referencia.

Interesa encontrar la relación que hay entre el movimiento visto por ambos observadores. Con este fin, considere una partícula en movimiento y dos sistemas de referencia, uno fijo a tierra (xy) y otro ligado a un móvil (x'y') que se mueve con velocidad constante respecto al sistema fijo.

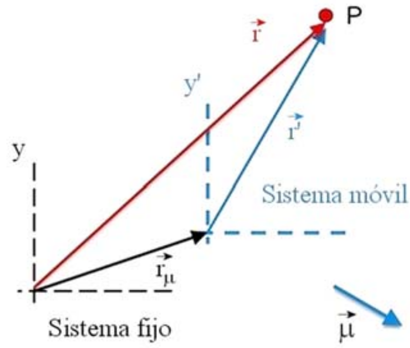


Figura 2.21. Movimiento relativo del punto P en dos sistemas de referencia.

Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ son los vectores de posición de la partícula P respecto a cada sistema de referencia. El vector $\vec{r}_\mu$ es el vector de posición del sistema móvil respecto al sistema fijo. Según las reglas de la suma de vectores, $\vec{r} = \vec{r}_\mu + \vec{r}\,'$ (figura 2.21).

Como la partícula está en movimiento, y el sistema móvil suponemos que se mueve con velocidad constante, los tres vectores están variando continuamente su posición con el transcurso del tiempo. Derivando en la expresión anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\vec{v} = \vec{\mu} + \vec{v}\,' .$$

donde:

$\vec{v}$: velocidad de la partícula respecto al sistema fijo.

$\vec{v}\,'$: velocidad de la partícula respecto al sistema móvil.

$\vec{\mu}$: velocidad del sistema móvil respecto al sistema fijo.

Se acostumbra representar la expresión anterior despejando $\vec{v}\,'$:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{\mu} .$$

Ejemplo: Un auto se mueve a 10 m/s. Comienza a llover sin viento, cayendo las gotas con velocidad constante de 5 m/s. ¿Con qué

Angulo chocan las gotas de lluvia el parabrisas lateral?

Datos:

(Ver figura 2.22).

Auto (sistema móvil): $\mu = 10$ m/s

Lluvia (partícula respecto a tierra): $v = 5$ m/s

Lluvia respecto al sistema móvil (v')?

$\tan \theta = \mu/v = 10/5 = 2$

$\theta = \arctan(2)$

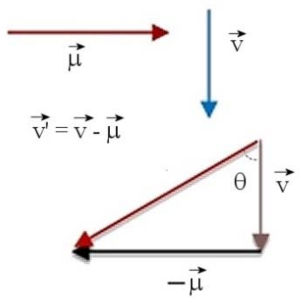


Figura 2.22

Respuesta: $\theta \approx 63^{o}$ con la vertical

2.9 Problemas resueltos

1. Un auto sube una loma a 40 km/h y la baja a 80 km/h. ¿Cuál fue su velocidad media en el recorrido?

2. Dos trenes salen en el mismo instante de las ciudades A y B, separadas 300 km, con rapidez media constante de 60 y 90 km/h respectivamente, uno al encuentro del otro. a) ¿A qué distancia de la ciudad A se cruzan? b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta ese momento?

3. En el momento que se enciende la luz verde de un semáforo, un auto arranca con aceleración de 6 m/s^2. En el mismo instante, un camión que iba con rapidez constante de 30 m/s alcanza y rebasa al automóvil. a) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el auto al camión? b) ¿Cuál era la velocidad del auto en ese instante? c) Dibuje el gráfico de x vs. t para ambos vehículos.

4. Una persona sube por una escalera automática inmóvil en 90 s. Cuando la persona está inmóvil sobre la escalera y ésta se mueve, llega arriba en 60 s. ¿Qué tiempo tarda la persona en subir cuando ella y la escalera están en movimiento?

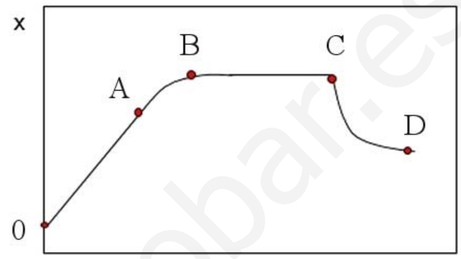


Figura problema 6

5. Un tren que avanza a velocidad v_{01} comienza a frenar con aceleración a para no chocar con otro que avanza delante en el mismo sentido con velocidad $v_{02} < v_{01}$ y que se encuentra a una distancia d del primero. Demuestre que si $d < (v_{01}-v_{02})^2/2a$ habrá choque, y no lo habrá en caso de que $d > (v_{01}-v_{02})^2/2a$.

6. La gráfica representa el movimiento de una partícula en una recta. a) Diga, para cada intervalo, si la velocidad y la aceleración son (+), (-) o cero. b) Describa el movimiento de la partícula.

7. Un globo asciende con rapidez de 12 m/s y deja caer un bulto cuando se encuentra a la altura de 80 m. ¿Cuánto tarda el bulto en llegar al suelo? (No se toma en cuenta la resistencia del aire. Tome g = 10 m/s^2).

8. Desde un puente de 45 m de altura se deja caer una piedra. Otra piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 segundo después. Si ambas piedras llegan al suelo al mismo tiempo, ¿cuál fue la velocidad inicial de la segunda piedra?

9. Un cuerpo en caída libre a partir del reposo recorre la mitad de su camino total en el último segundo de su caída. Calcular: a) tiempo de vuelo y b) altura inicial.

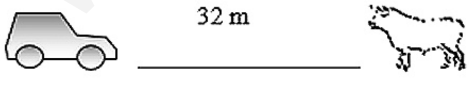
10. Se dispara horizontalmente un proyectil desde un cañón situado a 44 m por encima de la horizontal con velocidad inicial de 240 m/s. Diga: a) tiempo de vuelo, b) alcance horizontal, c) componente vertical de la velocidad al llegar al suelo.

11. Un auto que viajaba a 108 km/h comienza a frenar al entrar en una sección circular de la carretera de radio de curvatura 20 m. Si su rapidez se reduce uniformemente 2 m/s cada segundo, ¿cuál será su aceleración en el momento que alcance 72 km/h?

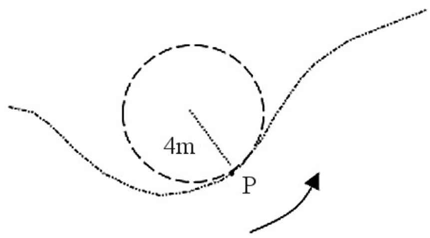
Problemas propuestos

1. Un auto que se movía inicialmente con MRU acelera a partir de un cierto instante a razón de 1 m/s^2 durante 12 s. Si en esos 12s el auto recorrió 180 m. a) ¿Cuál fue su velocidad final? b) ¿Cuál era la velocidad inicial? c) ¿Cuál fue su velocidad media en los de 12 s?

2. A 32 m por delante de un auto que viaja a 72 km/h se atraviesa una vaca que andaba suelta en la vía. El chofer aplica los frenos pero, no obstante, 2 segundos después el auto choca con la vaca. Calcular: a) velocidad del auto al chocar y, b) aceleración del auto después de aplicar los frenos, supuesta constante.



3. Considere una partícula moviéndose de izquierda a derecha por la trayectoria curvilínea de la figura, de forma tal que cuando se encuentra en P su rapidez disminuye con el tiempo.

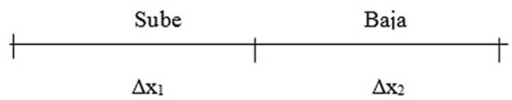


a) Escriba la expresión para la aceleración de la partícula en función de las componentes normal y tangencial; b) señale en el gráfico la representación vectorial aproximada de la aceleración de la partícula; c) Calcule el módulo de esa aceleración sabiendo que cuando la partícula está en P su rapidez es de 4 m/s y varía a razón de 3 m/s cada segundo; el radio de curvatura en ese punto es 4 m. d) ¿Cuál es el valor del ángulo existente entre la aceleración de la partícula y su velocidad?

4. ¿Qué tipo de movimiento surge cuando: i) la componente normal de la aceleración es cero y la componente tangencial es constante y de sentido contrario a la velocidad? Haga un esquema que ilustre su respuesta. ii) la aceleración tangencial es cero y la aceleración normal es de módulo constante y está siempre dirigida hacia el mismo punto? Haga un esquema que ilustre su respuesta.

Soluciones

Problema 2.1



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\Delta x_1$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \;;$$

$$\Delta t_1 = \Delta x_1/v_1 \;;$$

$$\Delta t_2 = \Delta x_2/v_2$$

$$v_m = \Delta x/\Delta t = \frac{2\Delta x_1}{\frac{\Delta x_1}{v_1}+\frac{\Delta x_2}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{80}} =$$

$$= 53.3 \text{ km/h}$$

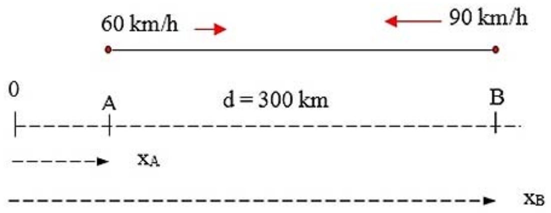
Problema 2.2

Escogiendo un sistema de referencia común para ambos móviles

$$x_A = v_A\, t$$
$$x_B = d - v_B\, t$$

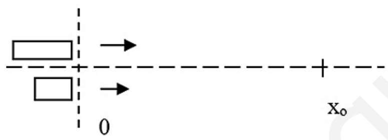
t es el mismo, porque arrancan en el mismo instante. Cuando se crucen:

$$x_A = x_B$$
$$v_A\, t = d - v_B t$$



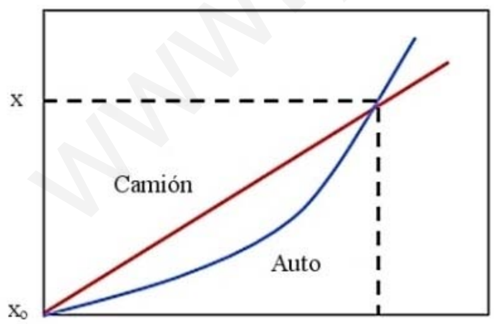
$$t = d/(v_A + v_B) = 300/150 = 2h$$
$$x_B = x_A = v_A\, t = 60x2 = 120 \text{ km}$$

Problema 2.3



a) Camión: (MRU) $x_C = v_c\, t$

Auto: (MRUV) $x_A = ½\, at^2$ $(v_o = 0)$



Como el tiempo es el mismo para los dos, cuando el auto alcanza al camión en x_o

$$x_A = x_C$$
$$½\, at^2 = v_c t.$$

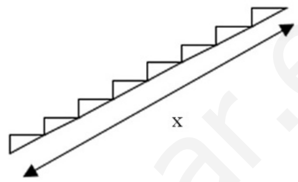
Despejando: $t = 2v_C/a$ es el tiempo que tarda en alcanzarlo. Sustituyendo en x_C se obtiene la distancia:

$$x_C = x_o = 2v_C^2/a = 2 \text{ x } (30)^2/ 6 = 300 \text{ m}$$

b) $v = at = 2v_C = 2 \text{ x } 30 = 60$ m/s.

Problema 2.4

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\mu}$ (el movimiento es a lo largo de una recta)



μ: velocidad del sistema móvil (escalera) respecto a tierra

v: velocidad de la partícula (persona) respecto a tierra

v': velocidad de la partícula (persona) respecto al sistema móvil (escalera)

$$v' = x / t_1 = x / 60$$
$$\mu = x / t_2 = x / 90$$

Despejando y considerando que los vectores son colineales:

$$v = v' + \mu = x(1/60 + 1/90)$$

$$t = x / v = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = 36 \text{ s}$$

Problema 2.5

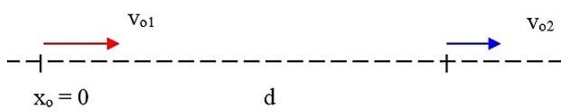
$$x_1 = v_{o1}t + ½\, at^2$$

$$x_2 = d + v_{02}t$$

Habrá choque si $x_1 \geq x_2$ en algún momento:

$$v_{o1}t + ½\, at^2 \geq d + v_{02}t$$

$$t^2 + (2/a)(v_{01} - v_{02})t - 2d/a \geq 0$$



Esta ecuación tendrá solución real sólo si el discriminante $B^2 - 4AC$ es mayor o igual que cero:

$$(4/a^2)(v_{o1} - v_{o2})^2 - 8d/a \geq 0$$

lo que conduce a: $d < (v_{01}-v_{02})^2/2a$ (condición de choque)

Si $B^2 - 4AC < 0$ se obtiene una raíz imaginaria y no hay solución. No es posible que $x_1 \geq x_2$ y no hay choque. Al sustituir arriba se obtiene

$$d > (v_{01}-v_{02})^2/2a \quad \text{(no hay choque)}.$$

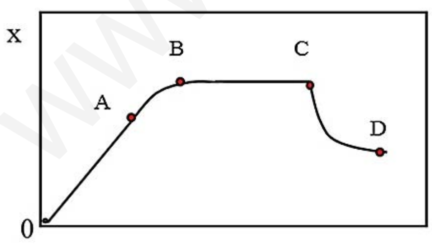
Problema 2.6

Analizando la definición de velocidad y aceleración para el movimiento en una dimensión;

$$v = dx/dt \quad , \quad a = dv/dt$$

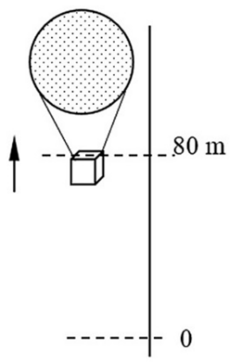
	v	a
OA	+	0
AB	+	-
BC	0	0
CD	-	+

b) La partícula, a partir de un impulso inicial a la derecha, se mueve con velocidad constante, comienza a frenar en t_A, hasta que se detiene en el instante t_B y ahí se mantiene hasta el instante t_C.



En t_C recibe otro impulso, pero ahora en sentido contrario, y a partir de ese momento comienza a frenar hasta el instante t_D, donde se detiene nuevamente ($dx/dt = 0$ en D).

Problema 2.7



Se conocen v_o, y_o, y, g . Se quiere conocer t:

$$y = y_o + v_o t - \tfrac{1}{2} gt^2 .$$

Sustituyendo $v_o = 12$ m/s, $y_o = 80$ m, $y = 0$, se obtiene una ecuación de segundo grado:

$$5t^2 - 12t - 80 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144+1600}}{10} = 1.2 \pm 4.18$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$t_1 = 5.38 \text{ s}; \quad t_2 = -\,2.98 \text{ s}.$$

La segunda no tiene significado como solución del problema (tiempo negativo), por tanto:

Respuesta: tarda 5.4 s.

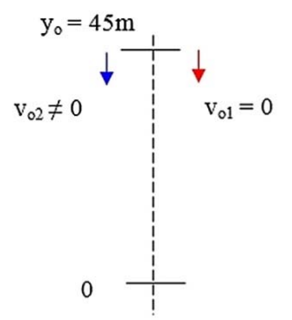
Ejercicio: resolver el problema cuando el bulto se lanza *hacia abajo* con la misma rapidez.

Problema 2.8

Como ambas piedras no se lanzan en el mismo instante, existirá una diferencia de un segundo entre los tiempos contados para ambos movimientos. Llamando $t_1 = 0$ al instante en que se lanza la primera piedra, cuando $t_1 = 1$ entonces $t_2 = 0$.

La diferencia en el tiempo se mantiene, por lo que es posible escribir

$$t_2 = t_1 - 1.$$



Calculando lo que tardan en llegar al suelo:

piedra 1:

$$y_1 = 0,\ \ y_{o1} = y_{o2} = y_o = 45,\ v_{o1} = 0$$

$$0 = y_o - \tfrac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1 = (2y_o/g)^{1/2} = 3 \text{ s.}$$

piedra 2:

$$t_2 = t_1 - 1 = 2 \text{ s}$$

$$0 = y_{o2} - v_{o2}t_2 - \tfrac{1}{2} g t_2^2$$

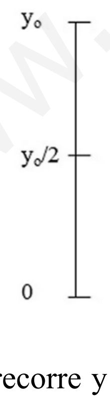
$v_{o2} = (y_o/t_2) - \tfrac{1}{2} g t_2^2 =$

$= (45/2) - (\tfrac{1}{2}) \text{ x } 10 \text{ x } 2 = 12.\ 5$ m/s

---

Problema 2.9

a) Si recorre la mitad en el último segundo, la otra mitad la recorrió en $t = t_v - 1$, donde t_v es el tiempo total.



En ese intervalo recorre $y = y_o/2$. Como es a partir del reposo,

$$y_o/2 = y_o - \tfrac{1}{2} g(t_v - 1)^2$$

$$y_o = g(t_v - 1)^2$$

Tenemos hasta el momento una ecuación y dos incógnitas (t_v, y_o). Hace falta otra ecuación, que se obtiene a partir de que cuando $t = t_v$, $y = 0$:

$$0 = y_o - \tfrac{1}{2} g t_v^2$$

$$y_o = \tfrac{1}{2} g t_v^2 \ .$$

Igualando esta ecuación con la anterior:

$$g(t_v - 1)^2 = \tfrac{1}{2} g t_v^2$$

$$t_v^2 - 4t_v + 2 = 0$$

$$t_v = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}\ .$$

Las dos raíces son: $t_1 = 3.41$ s; $t_2 = 0.59$ s. Esta última no tiene sentido, ya que el tiempo de vuelo debe ser mayor de un minuto necesariamente. Luego

$$t_v = 3.41 \text{ s}$$

b) $y_o = \tfrac{1}{2} g t_v^2 =$

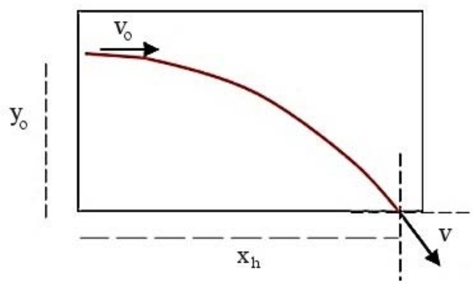
$= \tfrac{1}{2} \text{ x } 10 \text{ x } (3.41)^2 = 58.14$ m

Problema 2.10

Datos: $y_o = 44$ m, $v_{ox} = 240$ m/s, $v_{oy} = 0$, t?

a) $$0 = y_o - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t_v = \sqrt{\frac{2y_o}{g}} = \sqrt{8.8} \cong 3 \text{ s}$$



b) $x_h = v_{ox} t_v = 240 \text{ x } 3 = 720$ m

c) $v_y = -\,gt = -\,10 \text{ x } 3 = -\,30$ m/s

Problema 2.11

$$v_o = 108 \text{ km/h} = 108 \text{ x } 5/18 = 30 \text{ m/s}$$

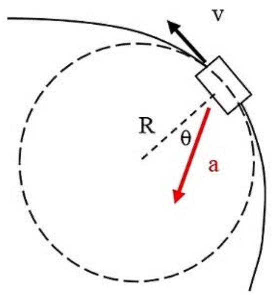
$$v = 72 \text{ km/h} = 72 \text{ x } 5/18 = 20 \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$$

$$a_t = dv/dt = - 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = v^2/R = 20^2/20 = 20 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = - 2\vec{T} + 20\vec{N} .$$



En esta expresión están incluidos el módulo y la dirección del vector a.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 20^2} = 20.1 \text{ m/s}^2$$

$$\tan\theta = a_t/a_n = 2/20 = 0.1$$

Respuesta: $\theta = \arctan(0.1) = 5.7^o$.