

# Cinemática de la partícula



## Física I Grado en Ingeniería de Organización Industrial Primer Curso



Ana M<sup>a</sup> Marco Ramírez  
Curso 2013/2014

Dpto. Física Aplicada III  
Universidad de Sevilla

## Índice



- **Introducción**
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
- Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones.

# Introducción (I)



- La **Mecánica** es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, así como los conceptos relacionados de fuerza y energía.
- Clasificación:
  - **Cinemática**: descripción únicamente geométrica del movimiento, sin atender a las causas.
  - **Dinámica**: principios y leyes físicas. Fuerza, energía.
  - **Estática**: cuerpos en reposo permanente o equilibrio. Caso particular de la dinámica.

3

# Introducción (I)



- Modelo de **partícula o punto material**.
- **Definición**: cuerpo de dimensiones tan pequeñas comparadas con las distancias que recorre que podemos representarlo como un punto geométrico.

Ej: La Tierra, en su movimiento en torno al Sol, puede ser tratada como una partícula:

Diámetro Tierra  $\sim 13 \times 10^6 \text{m}$

Distancia Tierra-Sol  $\sim 15 \times 10^{10} \text{m}$

4

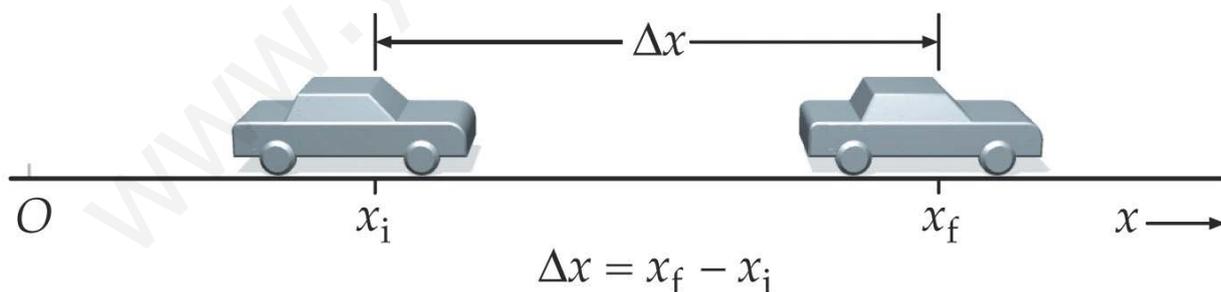
# Índice



- Introducción
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
  - Posición y desplazamiento
  - Velocidad: media e instantánea
  - Aceleración
  - Ejemplos de movimiento rectilíneo
- Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones.

5

## Cinemática del movimiento en una dimensión: Posición y desplazamiento



En la figura,  $x_i$  es la posición inicial;  $x_f$ , la posición final, y  $\Delta x$ , el desplazamiento.

Dimensiones:  $[\Delta x] = L$  (longitud)      Unidad SI: metro (m)

**Ojo:** No confundir desplazamiento con distancia recorrida. Si volvemos al punto de partida, el desplazamiento es nulo aunque la distancia recorrida no lo sea.

6

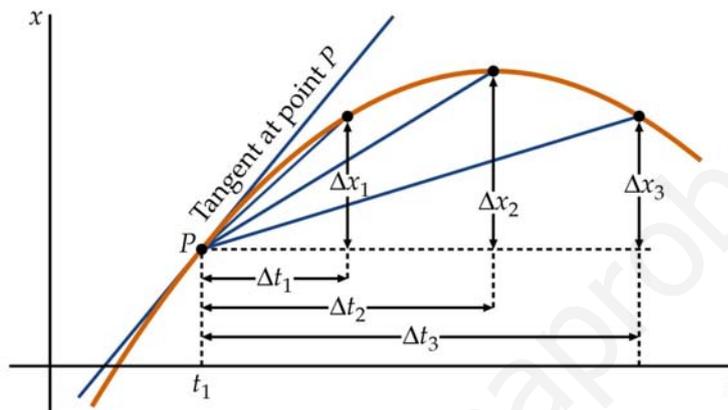
# Cinemática del movimiento en una dimensión: velocidad



■ Velocidad media:  $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

■ Velocidad instantánea:  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Dimensiones:  $[v] = L \cdot T^{-1}$  Unidades SI: m/s



7

# Cinemática del movimiento en una dimensión: aceleración



■ Aceleración:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Puede escribirse también:  $a = \dot{v} = \ddot{x}$

Dimensiones:  $[a] = L \cdot T^{-2}$  Unidades SI:  $m/s^2$

Conocida  $a(t)$ , pueden obtenerse  $v$  y  $x$ :

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left( \int_0^t a(t) dt \right) dt$$

# Cinemática del movimiento en una dimensión: ejemplos



- Movimiento rectilíneo uniforme:

$$a = 0$$

$$v = v_0$$

$$x = x_0 + v_0 t$$

- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$a = cte$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

9

## Índice



- Introducción
- Cinemática del movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo)
- **Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones**
  - Desplazamiento, velocidad y aceleración
  - Movimiento de proyectiles (tiro parabólico)
  - Movimiento circular

10

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{r}$ y $\Delta\vec{r}$

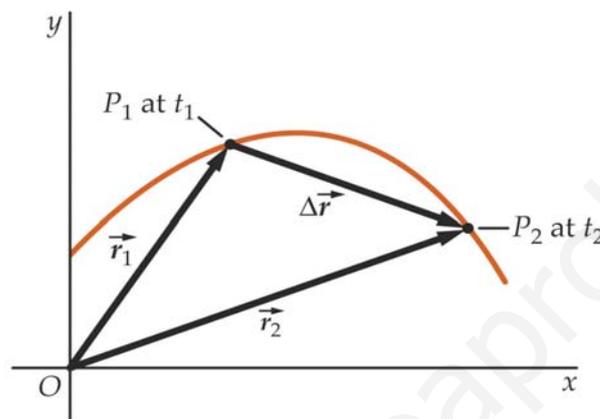


- Vector posición  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Vector desplazamiento  $\Delta\vec{r}$ :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



11

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{v}_m$ y $\vec{v}$



- Vector velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

- Vector velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Celeridad:

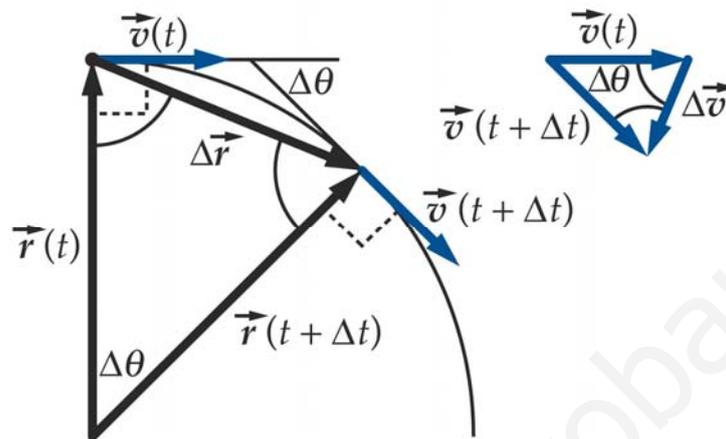
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

12

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}^{13}$$

## Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$ , $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (I)



- Usamos el doble producto vectorial para descomponer el vector  $\vec{a}$ , aceleración, en una componente tangencial y otra ortogonal respecto del vector  $\vec{v}$ , velocidad:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad ; \quad \vec{a}_t \parallel \vec{v} \quad ; \quad \vec{a}_n \perp \vec{v} \quad ; \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a}) = (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} - v^2\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{v^2} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} + \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{v^2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} \quad ; \quad \vec{a}_n = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{v^2}$$

## Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$ , $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (II)

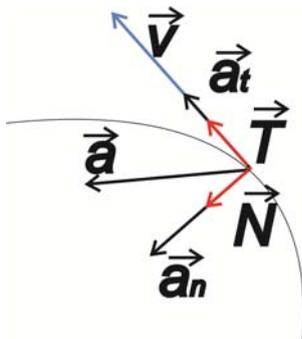


Introduciendo el vector unitario tangente,  $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$  :

$$\vec{a}_t = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}}{v^2} = (\vec{T} \cdot \vec{a})\vec{T} = a_t \vec{T} \quad ; \quad a_t = a_{\parallel\vec{v}} = (\vec{T} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a}_n = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{v}}{v^2} = (\vec{T} \times \vec{a}) \times \vec{T} \quad ; \quad a_n = a_{\perp\vec{v}} = |\vec{T} \times \vec{a}|$$

Definiendo el vector unitario normal,  $\vec{N} = \frac{\vec{a}_n}{a_n} = \frac{(\vec{T} \times \vec{a}) \times \vec{T}}{|\vec{T} \times \vec{a}|}$  :



$$\vec{a}_n = a_n \vec{N}$$

$$\vec{a} = a_t \vec{T} + a_n \vec{N}$$

15

## Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$ , $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (III)



A partir de  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  y de  $\vec{v} = v\vec{T}$ , obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v \left| \frac{d\vec{T}}{dt} \right| \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$$

Identificamos el vector unitario normal  $\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|}$ , y vamos

a probar que  $\vec{N} \perp \vec{T}$ . Para ello, basta probar que  $\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = 0$ :

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right) 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} \right] = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{d(\vec{T} \cdot \vec{T})}{dt} = 0$$

c.q.d.  
16

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $\vec{a}$ , $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ (IV)



$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (\text{cambio en la celeridad})$$

$$a_t = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Movimiento uniforme}$$

$$a_t = cte \quad \Leftrightarrow \text{Mov. uniformemente acelerado}$$

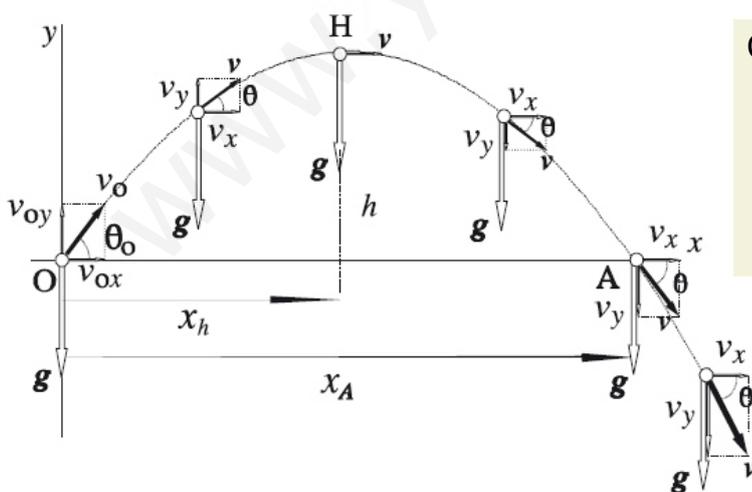
$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (\text{cambio dirección trayectoria})$$

$$R, \text{ radio de curvatura} \quad R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Movimiento rectilíneo} (R = \infty)$$

17

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: tiro parabólico



Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= 0 \\ v_{0x} &= v_0 \cos \theta_0 & v_{0y} &= v_0 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

Aceleración:  $\vec{a} = -g\vec{j}$

Velocidad:

$$v_x = v_{0x} \quad v_y = v_{0y} - gt$$

Posición:

$$x = v_{0x}t \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

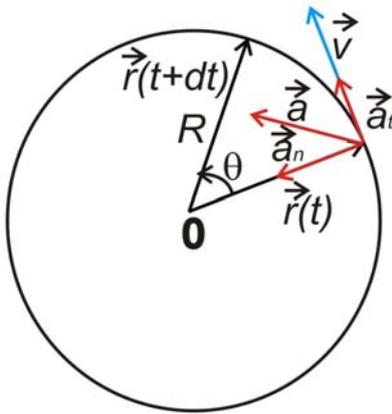
Eliminando el tiempo en las ecuaciones de  $x$  e  $y$ :

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}x^2$$

Ecuación de una parábola

18

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (I)



La trayectoria es una circunferencia:  
radio de curvatura constante

$$|\vec{r}(t)| = |\vec{r}(t + \Delta t)| = R = cte$$

Se trata de un movimiento plano.  
Se introduce  $\vec{\omega}$ , velocidad angular, vector de dirección perpendicular al plano de la trayectoria y módulo  $\omega = \dot{\theta}$

Además,  $\vec{v} \perp \vec{r}$ . Vamos a probarlo:

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 0 \quad (R^2 = cte); \quad \frac{d(R^2)}{dt} = 2R \frac{dR}{dt} = 2Rv = 2\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

Así, escribimos  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  (en módulo,  $v = \omega R = \dot{\theta}R$ )<sub>19</sub>

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (II)



Derivamos para obtener la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

con  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , aceleración angular (en módulo,  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ )

Tanto  $\vec{\omega}$  como  $\vec{\alpha}$  son vectores perpendiculares al plano de la trayectoria, y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha.



Identificamos:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a}_t \parallel \vec{v} \quad , \quad a_t = \alpha R = \dot{\omega}R = \ddot{\theta}R$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad , \quad \vec{a}_n \perp \vec{v} \quad , \quad a_n = \omega^2 R = \dot{\theta}^2 R = \frac{v^2}{R} \quad ^{20}$$

## Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (III)



Ahora, desarrollamos para poner  $\vec{a}_n = a_n \vec{N}$  :

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} = -\omega^2 \vec{r} = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \vec{r}$$

Podemos escribir  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{N}$ , siendo  $\vec{N} = -\frac{\vec{r}}{R}$

Y para  $\vec{a}_t = a_t \vec{T}$  :

Como ya sabemos que  $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$ , podemos escribir

$$\vec{a}_t = a_t \vec{T} = |\vec{\alpha} \times \vec{r}| \vec{T} = \alpha R \vec{T} = \dot{\omega} R \vec{T} = \ddot{\theta} R \vec{T} = \dot{v} \vec{T}$$

21

## Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: movimiento circular (IV)



Caso particular:

**Movimiento circular uniforme** ( $v = v_0 = cte \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0}$ )

Vemos que se cumple con las dos expresiones de  $\vec{a}_t$ :

- $v = v_0 = cte \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0}$
- $\omega = \frac{v_0}{R} = cte \Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{0}$

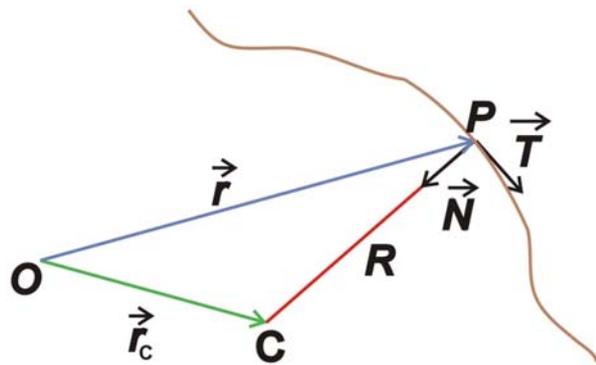
Entonces,  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{a}_n = \frac{v_0^2}{R} \vec{N}$ , con  $\vec{N} = -\frac{\vec{r}}{R}$

**Expresiones Movimiento Circular Uniforme:**

$$\begin{aligned} v &= v_0 = \omega_0 R \\ a_t &= 0 ; a_n = \frac{v_0^2}{R} \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t ; \omega = \dot{\theta} = \omega_0 ; \alpha = \dot{\omega} = 0 \end{aligned}$$

22

# Cinemática del movimiento en dos y tres dimensiones: $R$ y $\vec{r}_C$



Antes definimos  $R$ , radio de curvatura, como  $R = \frac{v^2}{a_n}$

En toda trayectoria, si tomamos un segmento lo bastante pequeño, podemos considerarlo un arco de

circunferencia, cuyo radio sería el radio de curvatura,  $R$ , y cuyo centro,  $C$ , tendría, como vector posición, el  $\vec{r}_C$ .

Es fácil ver que  $\vec{r} = \vec{r}_C + \overrightarrow{CP} = \vec{r}_C + (-\vec{N})R$ , siendo

$\vec{N} = -\frac{\overrightarrow{CP}}{R}$  y  $\vec{r}$  el vector posición del punto  $P$ , perteneciente a la trayectoria, tomado, como  $\vec{r}_C$ , respecto al origen  $O$ .<sup>23</sup>