

donde c es la velocidad de la luz, una constante. En la Figura 4.2.6, demostrar, utilizando una notación clara y fácil de entender, la «paradoja de los gemelos»:

$$\text{tiempo propio (AB)} + \text{tiempo propio (BC)} < \text{tiempo propio (AC)}.$$

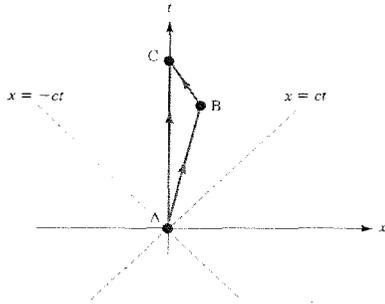


Figura 4.2.6. La desigualdad triangular relativista.

19. Los antiguos griegos sabían que una línea recta era el camino más corto entre dos puntos. Euclides, en su libro *Óptica*, enunció el «principio de reflexión de la luz» —es decir, la luz que se mueve en un plano lo hace en línea recta y, cuando se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión—. Los griegos no podían tener una prueba de que la línea recta era el camino más corto entre dos puntos porque, en primer lugar, no conocían la definición de longitud de una trayectoria general. Ellos pensaron que esta propiedad de las líneas rectas era más o menos «obvia».

Utilizando la justificación de la longitud de arco dada en esta sección y la desigualdad triangular de la Sección 1.5, justificar razonadamente que si c_0 es el segmento rectilíneo $c_0(t) = tP + (1 - t)Q$ que une los puntos P y Q en \mathbb{R}^3 , entonces:

$$L(c_0) \leq L(c)$$

para cualquier otra trayectoria c que una P y Q .

4.3. Campos vectoriales

El concepto de campo vectorial

En el Capítulo 2, presentamos un tipo particular de campo vectorial: el gradiente. En esta sección estudiamos campos vectoriales generales, examinando su importancia geométrica y física.

Campos vectoriales Un **campo vectorial** en \mathbb{R}^n es una aplicación $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto x de su dominio A un vector $F(x)$. Si $n = 2$, F se denomina un **campo vectorial en el plano**, y si $n = 3$, F es un **campo vectorial en el espacio**.

Podemos representar F dibujando una flecha en cada punto (véase la Figura 4.3.1). Para diferenciarla de los campos vectoriales, una aplicación $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un número a cada punto se llama **campo escalar**. Un campo vectorial $F(x, y, z)$ en \mathbb{R}^3 tiene tres **componentes** F_1, F_2 y F_3 , cada una de las cuales es un **campo escalar**, de manera que

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Análogamente, un campo vectorial en \mathbb{R}^n tiene n componentes F_1, \dots, F_n . Si cada componente es una función C^k , diremos que el campo vectorial F es de **clase C^k** . En adelante, supondremos que los campos vectoriales que aparezcan serán al menos de clase C^1 , salvo que se diga expresamente lo contrario.

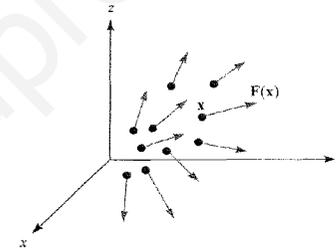


Figura 4.3.1. Un campo vectorial F asigna un vector $F(x)$ a cada punto x de su dominio.

En muchas aplicaciones el vector $F(x)$ representa una cantidad física (fuerza, velocidad, etc.) asociada con la posición x , como puede verse en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.11 El flujo de agua a través de una tubería se llama **estacionario** si en cada punto del interior de la tubería la velocidad del fluido que pasa por ese punto no cambia con el tiempo. (Obsérvese que esto es muy distinto de afirmar que el agua de la tubería no se mueve.) Asignando a cada punto la velocidad del fluido en él, obtenemos el **campo de velocidades V** (véase la Figura 4.3.2). Obsérvese que la longitud de las flechas (la rapidez), así como la dirección del flujo, pueden cambiar de un punto a otro.



Figura 4.3.2. Un campo vectorial que describe la velocidad de un fluido en una tubería.

EJEMPLO 4.12 Algunos movimientos giratorios (por ejemplo el movimiento de las partículas en un plato que está rotando) pueden describirse mediante el campo vectorial

$$V(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Véase la Figura 4.3.3, en la que, para mayor claridad, hemos dibujado en lugar de \mathbf{V} el campo más corto $\frac{1}{4}\mathbf{V}$, de manera que las flechas no se solapen. Esto es una práctica común al dibujar campos vectoriales.

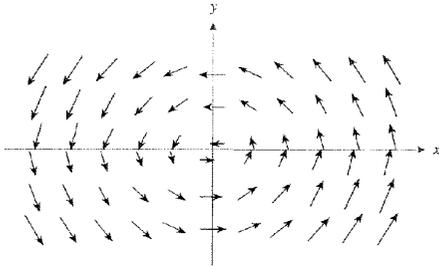


Figura 4.3.3. Un campo vectorial rotatorio.

EJEMPLO 4.13 En el plano, \mathbb{R}^2 , consideramos el campo vectorial \mathbf{x} definido por

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} - \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(excepto en el origen, donde \mathbf{V} no está definido). Este campo vectorial es una buena aproximación para la componente plana de la velocidad del agua que fluye a través de un agujero en la base de una cuba (véase la Figura 4.3.4). Obsérvese que la velocidad aumenta cuando nos aproximamos al desagüe.

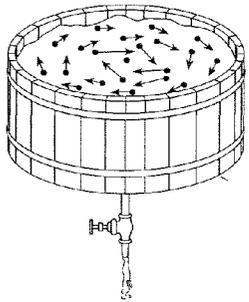


Figura 4.3.4. El campo vectorial que describe el flujo circular en una cuba.

Campo vectorial gradiente

En la Sección 2.6 definimos el gradiente de una función mediante la expresión

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ahora vamos a interpretarlo como un ejemplo de campo vectorial —asigna un vector a cada punto (x, y, z) . En consecuencia, nos referiremos a ∇f como *campo vectorial gradiente*. Estos campos aparecen en un variado número de situaciones, como muestran los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.14 Considérese un objeto sólido que está siendo calentado por un extremo y enfriado por el otro. La temperatura en cada punto del interior del cuerpo en un instante dado viene descrita por una función escalar $T(x, y, z)$. El flujo de calor puede representarse por un campo vectorial, donde las flechas indican la dirección y magnitud del flujo (Figura 4.3.5). Este *campo vectorial flujo de calor* o *energía* viene dado por $\mathbf{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante llamada *conductividad*, y ∇T es el gradiente de la función escalar T . Los conjuntos de nivel de T se llaman *isotermas*. Obsérvese que el calor fluye de las regiones calientes hacia las frías, puesto que $-\nabla T$ apunta en la dirección en que T decrece.

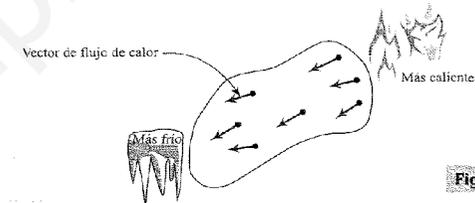


Figura 4.3.5. Un campo vectorial que describe la dirección y magnitud del flujo de calor.

EJEMPLO 4.15 La fuerza de atracción de la Tierra sobre una masa m puede describirse mediante un campo vectorial, llamado *campo gravitatorio*. Tomamos un sistema de coordenadas cuyo origen está situado en el centro de la Tierra (que suponemos esférica). De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, este campo viene dado por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3} \mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, y $r = \|\mathbf{r}\|$ (véase la Figura 4.3.6). El dominio de este campo vectorial consiste en aquellos valores de \mathbf{r} para los que $\|\mathbf{r}\|$ es mayor que el radio de la Tierra. Como vimos en el Ejemplo 2.52, Sección 2.6, \mathbf{F} es un campo gradiente, $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde

$$V = -\frac{mMG}{r}$$

es el *potencial gravitatorio*. Obsérvese nuevamente que \mathbf{F} apunta en la dirección hacia la que V decrece. Escribiendo \mathbf{F} en términos de sus componentes, vemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{mMG}{r^3} x, -\frac{mMG}{r^3} y, -\frac{mMG}{r^3} z \right).$$

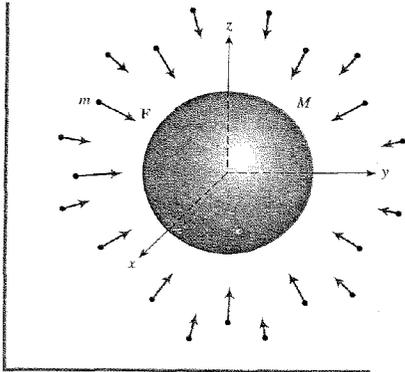


Figura 4.3.6. El campo vectorial \mathbf{F} dado por la ley de la gravitación de Newton.

EJEMPLO 4.16 Según la *ley de Coulomb*, la fuerza que actúa sobre una carga e situada en una posición \mathbf{r} , bajo el efecto de una carga Q situada en el origen, es

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon Qe}{r^3} \mathbf{r} = -\nabla V,$$

donde $V = \epsilon Qe/r$ y ϵ es una constante que depende de las unidades que estemos usando. Para $Qe > 0$ (cargas del mismo signo) la fuerza es repulsiva [Figura 4.3.7(a)], y para $Qe < 0$ (cargas de distinto signo) la fuerza es atractiva [Figura 4.3.7(b)]. Como el potencial V es constante sobre sus superficies de nivel, éstas reciben el nombre de *superficies equipotenciales*. Obsérvese que la fuerza es ortogonal a las superficies equipotenciales (la fuerza es radial, mientras que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas).

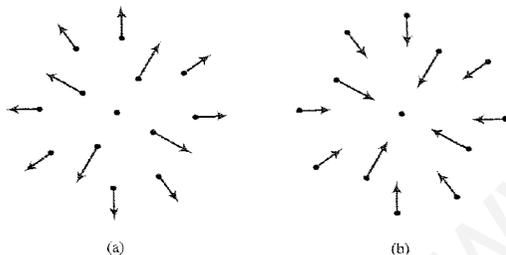


Figura 4.3.7. Los campos vectoriales asociados con (a) cargas del mismo signo ($Qe > 0$) y (b) cargas de distinto signo ($Qe < 0$).

El ejemplo siguiente demuestra que no todo campo vectorial es un campo gradiente.

EJEMPLO 4.17 Demostrar que el campo vectorial \mathbf{V} en \mathbb{R}^2 definido por $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ no es un campo gradiente; es decir, no existe ninguna función f de clase C^1 tal que

$$\mathbf{V}(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Solución

Supongamos que existiera una tal f . Entonces $\partial f/\partial x = y$ y $\partial f/\partial y = -x$. Puesto que éstas son de clase C^1 , f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas. Pero $\partial^2 f/\partial x \partial y = -1$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x = 1$, lo que contradice la igualdad de las derivadas cruzadas; por tanto, \mathbf{V} no puede ser un campo gradiente.

Conservación de la energía y escape del campo gravitatorio terrestre

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en un campo de fuerzas \mathbf{F} que es un campo potencial. Es decir, suponemos $\mathbf{F} = -\nabla V$ para una función escalar V , y que las partículas se mueven según la ley $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Entonces, si la trayectoria es $\mathbf{r}(t)$, se tiene

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}(t)). \tag{1}$$

Una característica básica de tal movimiento es la *conservación de la energía*. La energía E de la partícula se define como la suma de las energías potencial y cinética,

$$E = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t)). \tag{2}$$

El principio de *conservación de la energía* afirma que si se cumple la segunda ley de Newton, entonces E es independiente del tiempo; es decir, $dE/dt = 0$. La prueba de esta identidad es un sencillo cálculo; utilizamos la Ecuación (2), la regla de la cadena, y la Ecuación (1):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{r}} \cdot (-\nabla V + \nabla V) = 0. \end{aligned}$$

Velocidad de escape

Como aplicación de la conservación de la energía, calcularemos la velocidad que un cohete debe alcanzar para poder escapar de la influencia gravitacional de la Tierra. Supongamos que m es la masa del cohete, que está a una distancia R_0 del centro de la Tierra (o de cualquier otro planeta) cuando alcanza la velocidad de escape v_e , y a partir de ese punto viaja sin usar sus motores. La energía en ese instante es

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{mMG}{R_0}. \tag{3}$$

Por la conservación de la energía, E_0 debe ser igual a la energía en un instante posterior, que escribimos como

$$E_0 = E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{R}, \quad (4)$$

donde v es la velocidad y R es la distancia hasta el centro de la Tierra (u otro planeta). Lo que denotamos por el término *velocidad de escape* es que v_e se elige de modo que cuando el cohete alcanza grandes distancias apenas se mueve; es decir, v está próxima a cero y R es muy grande. Por tanto, de la Ecuación (4), vemos que $E = 0$ y entonces $E_0 = 0$; despejando v_e en esta expresión usando la Ecuación (3) obtenemos

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R_0}}$$

Ahora, GM/R_0^2 es exactamente g , la aceleración de la gravedad a distancia R_0 del centro del planeta. Por tanto, podemos escribir:

$$v_e = \sqrt{2gR_0}$$

Para la Tierra, si la velocidad se alcanzase en la superficie (lo que, por supuesto, no es muy realista), deberíamos obtener

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6.371.000 \text{ m}} = 11.127 \text{ m/s}.$$

Sin embargo, este valor es una buena aproximación de la velocidad que necesita un satélite situado en una órbita baja alrededor de la Tierra para escapar del campo gravitatorio terrestre.

Líneas de flujo

Un concepto importante relacionado con los campos vectoriales (no necesariamente provenientes de un gradiente) es el de línea de flujo, definida del modo siguiente:

Líneas de flujo Si \mathbf{F} es un campo vectorial, una *línea de flujo* para \mathbf{F} es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que:

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$$

Es decir, \mathbf{F} da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

En el contexto del Ejemplo 4.11, una línea de flujo es la trayectoria seguida por una pequeña partícula suspendida en el fluido (Figura 4.3.8). Las líneas de flujo también se llaman apropiadamente *líneas de corriente* o *curvas integrales*.

Geoméricamente, una línea de flujo para un campo vectorial dado \mathbf{F} es una curva trazada sobre el dominio de \mathbf{F} de manera que el vector tangente a la curva en cada punto coincide con el campo vectorial, como se representa en la Figura 4.3.9.

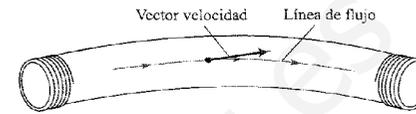


Figura 4.3.8. El vector velocidad de un fluido es tangente a las líneas de flujo.

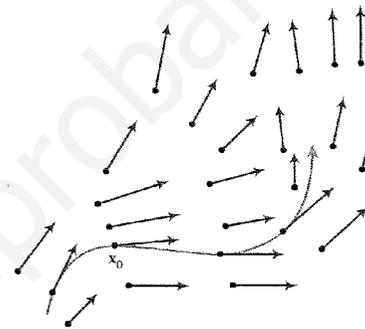


Figura 4.3.9. Una línea de flujo discurrendo sobre un campo vectorial en el plano.

Una línea de flujo puede interpretarse como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. En efecto, podemos escribir su definición $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ como

$$x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)),$$

$$y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)),$$

$$z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)),$$

donde $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, y donde

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Estos sistemas se analizan en cursos sobre ecuaciones diferenciales, pero suponemos que no se ha seguido uno de estos cursos.

EJEMPLO 4.18 Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. ¿Hay más líneas de flujo?

Solución

Debemos comprobar que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. El término de la izquierda es $(-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, mientras que el término de la derecha es $\mathbf{F}(\cos t, \sin t) = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, de manera que tenemos una línea de flujo. Como sugiere la Figura 4.3.3, las otras líneas de flujo también son circunferencias. Su ecuación es

$$\mathbf{c}(t) = (r \cos(t - t_0), r \sin(t - t_0))$$

con r y t_0 constantes.

En muchos casos es imposible encontrar fórmulas explícitas para las líneas de flujo, lo que nos lleva a recurrir a métodos numéricos. La Figura 4.3.10 muestra una gráfica obtenida mediante un programa que calcula numéricamente líneas de flujo y las dibuja en la pantalla del computador.

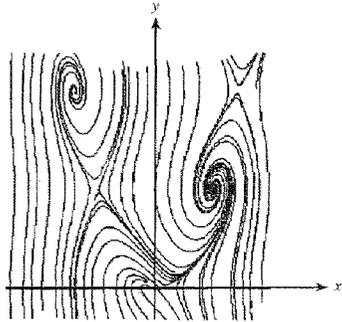


Figura 4.3.10. Curvas integrales del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ generadas por computador. Este dibujo fue obtenido usando el programa *3D-XplorMath*, disponible en la página web de Richard Palais <http://rsp.math.brandeis.edu/3D-XplorMath>.

Nota Histórica

El concepto de campo

El concepto de «campo», entendido como campo de vectores, tuvo un enorme impacto en el desarrollo de las bases conceptuales de la física y la ingeniería. Es realmente una de las ideas que supusieron un avance significativo en la historia del pensamiento humano. Es la noción que permite describir de modo sistemático las influencias sobre objetos y entre objetos que están separados espacialmente.

La idea de campo comenzó con el concepto de Newton de *campo gravitatorio*. En este caso, el campo gravitatorio describe la atracción de un cuerpo o grupo de cuerpos sobre otro. Análogamente, el campo eléctrico producido por un objeto o grupo de objetos cargados crea, de acuerdo con la ley de Coulomb, una fuerza sobre otro objeto cargado. El uso de campos vectoriales para describir este tipo de fuerzas ha conducido a una comprensión más profunda de las fuerzas atractivas y repulsivas en la naturaleza.

Sin embargo, fue el monumental descubrimiento de las ecuaciones de Maxwell, que describen la propagación de la energía electromagnética, el que consolidó el concepto de «campo» en el pensamiento científico. Este ejemplo es especialmente interesante, porque estos campos se pueden *propagar*. El contraste entre los campos electromagnéticos que se pueden propagar y el campo gravitatorio que implica una *acción instantánea a distancia* ha originado gran interés entre los filósofos de la ciencia.

La idea de Einstein es que la gravitación puede describirse en términos de las propiedades métricas del espacio-tiempo, y que en esta teoría los campos asociados también se pueden propagar, exactamente como el campo electromagnético, proporcionando por tanto una profunda evidencia filosófica de que la versión de Einstein de la gravitación

debería ser correcta. Estas ideas también han guiado los recientes esfuerzos para detectar ondas gravitatorias. Para una discusión más profunda del trabajo de Einstein, véase la Sección 7.7.

La idea de campo también se usa en ingeniería para describir sistemas elásticos e interesantes propiedades microestructurales de los materiales. En la física teórica moderna, el concepto de campo se usa para describir partículas elementales y es una herramienta central en los esfuerzos de los físicos teóricos modernos por unificar la gravedad con la mecánica cuántica de las partículas elementales. Es imposible imaginar un marco teórico moderno que no incorpore algún tipo de concepto de campo como ingrediente central.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 8, esbozar el campo vectorial dado o un pequeño múltiplo suyo.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (2, 2)$.
2. $\mathbf{F}(x, y) = (4, 0)$.
3. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.
4. $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$.
5. $\mathbf{F}(x, y) = (2y, x)$.
6. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -2x)$.
7. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.
8. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

En los ejercicios del 9 al 12, esbozar algunas líneas de flujo del campo vectorial dado.

9. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.
10. $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$.
11. $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$.

En los ejercicios del 13 al 16, demostrar que la curva dada $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo del campo de velocidades dado $\mathbf{F}(x, y, z)$.

13. $\mathbf{c}(t) = (e^{2t}, \log|t|, 1/t)$, $t \neq 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$.
14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t})$, $t > 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/2z)$.

15. $c(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$; $F(x, y, z) = (y, -x, z)$.
16. $c(t) = \left(\frac{1}{t^3}, e^t, \frac{1}{t}\right)$; $F(x, y, z) = (-3z^4, y, -z^2)$.
17. Demostrar que para colocar un satélite en una órbita a baja altura sobre la Tierra se necesita la mitad de la energía requerida para hacerlo escapar de la atracción de la Tierra (ignorar el efecto de la rotación terrestre).
18. Sea $c(t)$ una línea de flujo de un campo gradiente $F = -\nabla V$. Demostrar que $V(c(t))$ es decreciente como función de t .
19. Supongamos que todas las isoterma en una región son esferas concéntricas centradas en el origen. Demostrar que el campo vectorial que representa el flujo de energía apunta en la dirección del radio, bien hacia el origen, bien hacia fuera.
20. Esbozar el campo gradiente $-\nabla V$ para $V(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2)$, y la superficie equipotencial $V = 1$.

4.4. La divergencia y el rotacional

Para definir las operaciones divergencia y rotacional, vamos a utilizar el *operador nabla*, definido por

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Para funciones de una variable, el cálculo de una derivada puede interpretarse como una operación o proceso; es decir, dada una función $y = f(x)$, su derivada es el resultado de *operar* sobre y mediante el *operador* derivada d/dx . Análogamente, podemos escribir el gradiente como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y}$$

para funciones de dos variables y

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

para tres variables. En términos operacionales, el gradiente de f se obtiene tomando el operador ∇ y aplicándolo sobre f .

Definición de divergencia

Definimos la divergencia de un campo vectorial F formalmente tomando el producto escalar del operador ∇ con F .

Divergencia Si $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, la *divergencia* de F es el campo escalar

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Análogamente, si $F = (F_1, \dots, F_n)$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^n , su divergencia es

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

EJEMPLO 4.19 Calcular la divergencia de

$$F = x^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

Solución

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

Interpretación

La divergencia tiene una importante interpretación física. Si imaginamos que F es el campo de velocidades de un gas (o de un fluido), entonces $\operatorname{div} F$ representa la *razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o del fluido)*. Si $\operatorname{div} F < 0$, el gas (o fluido) se está *comprimiendo*. Para un campo vectorial en el plano $F(x, y) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$, la *divergencia*

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

mide la *razón de expansión del área*.

Esta interpretación se explica gráficamente del modo siguiente. Tomemos una pequeña región W alrededor de un punto x_0 . Para cada punto x de W , sea $x(t)$ la línea de flujo que parte de x . El conjunto de puntos $x(t)$ describe cómo fluye el conjunto W tras un tiempo t (véase la Figura 4.4.1).

Denotamos la región resultante en el instante t por $W(t)$ y sea $V(t)$ su volumen (o área, si estamos en dos dimensiones). Entonces, la razón relativa de cambio de volumen es la divergencia, más exactamente,

$$\frac{1}{V(0)} \frac{d}{dt} V(t) \Big|_{t=0} \approx \operatorname{div} F(x_0),$$

donde la aproximación se hace más y más exacta según W se contrae a x_0 . Se puede encontrar una prueba directa de este resultado en el suplemento de Internet, pero en el Capítulo 8 se presenta un argumento más natural, en el contexto de los teoremas sobre integrales del cálculo vectorial.

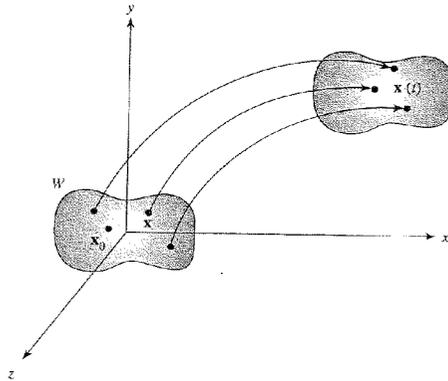


Figura 4.4.1. Deformación de una región W siguiendo las líneas de flujo de un campo vectorial.

EJEMPLO 4.20 Considerar el campo vectorial en el plano dado por $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i}$. Relacionar el signo de la divergencia de \mathbf{V} con la razón del cambio de áreas bajo el flujo.

Solución

Interpretamos \mathbf{V} como el campo de velocidades de un fluido en el plano. El campo vectorial \mathbf{V} apunta hacia la derecha para $x > 0$, y hacia la izquierda para $x < 0$, como podemos ver en la Figura 4.4.2. La longitud de \mathbf{V} es más corta cuando nos acercamos al origen. Cuando el fluido se mueve, se expande (el área del rectángulo sombreado aumenta), de manera que es de esperar que $\text{div } \mathbf{V} > 0$. En efecto, $\text{div } \mathbf{V} = 1$.

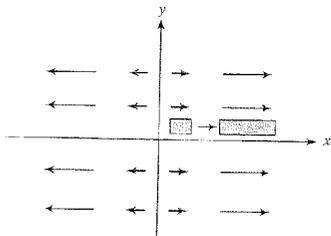


Figura 4.4.2. El fluido se está expandiendo.

EJEMPLO 4.21 Las líneas de flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ son semirrectas que parten del origen (véase la Figura 4.4.3).

Si estas líneas de flujo se corresponden con un fluido, entonces éste se está expandiendo conforme se aleja del origen, de modo que $\text{div } \mathbf{F}$ debería ser positiva. En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y = 2 > 0.$$

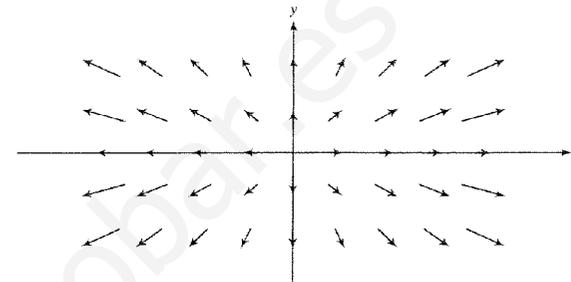


Figura 4.4.3. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 4.22 Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. A diferencia del caso anterior, aquí las líneas de flujo apuntan hacia el origen (véase la Figura 4.4.4). Por tanto, el fluido se está comprimiendo, de manera que esperamos que $\text{div } \mathbf{F} < 0$. Haciendo los cálculos, vemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (-x) + \frac{\partial}{\partial y} (-y) = -1 - 1 = -2 < 0.$$

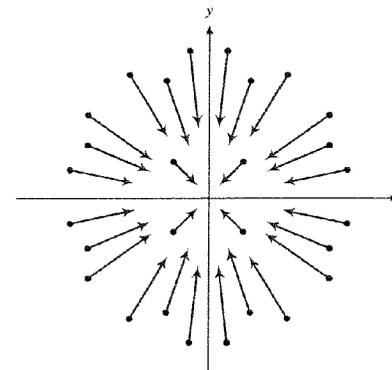


Figura 4.4.4. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 4.23 Como vimos en la última sección, las líneas de flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ son circunferencias concéntricas centradas en el origen, moviéndose en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Según la Figura 4.4.5, parece que el fluido ni se comprime ni se expande. Esto se confirma calculando

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (-y) + \frac{\partial}{\partial y} (x) = 0 + 0 = 0.$$

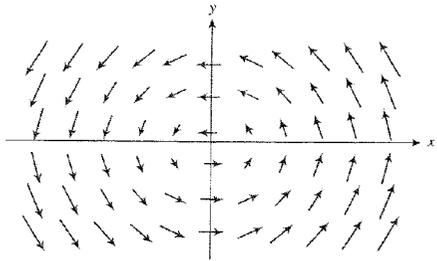
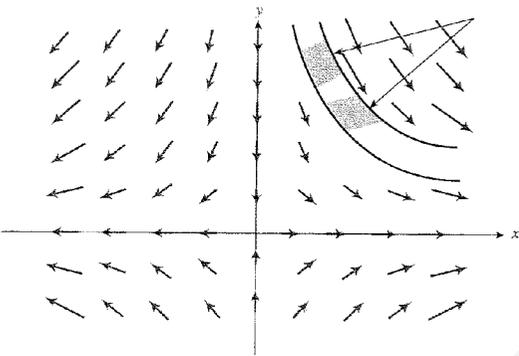


Figura 4.4.5. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ tiene divergencia cero.

EJEMPLO 4.24 En la Figura 4.4.6 se muestran algunas líneas de flujo del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Aquí nuestra intuición sobre expansión o compresión no es tan clara; sin embargo, es cierto que las regiones sombreadas tienen la misma área, y calculamos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 1 + (-1) = 0.$$



Las partículas del fluido se mueven de la región sombreada a la otra después de un intervalo de tiempo fijo. Las dos áreas coinciden.

Figura 4.4.6. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

El rotacional

Para calcular el rotacional, la segunda operación básica para campos vectoriales, tomamos formalmente el producto vectorial de ∇ con \mathbf{F} .

El rotacional de un campo vectorial Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces el *rotacional* de \mathbf{F} es el *campo vectorial*

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Si usamos una notación alternativa, y escribimos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, la fórmula del rotacional se escribe

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.25 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Hallar $\nabla \times \mathbf{F}$.

Solución

Utilizamos la fórmula anterior:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (y - 0)\mathbf{k}.$$

Por tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$.

EJEMPLO 4.26 Hallar el rotacional del campo $xy\mathbf{i} - \sin z\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

Sea $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - \sin z\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xy & -\operatorname{sen} z \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \cos z \mathbf{i} - x\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A diferencia de la divergencia, que se puede definir en \mathbb{R}^n para cualquier n , sólo definimos el rotacional en un espacio tridimensional (ó en el caso de vectores en el plano, suponiendo que su tercera componente es igual a cero).

El rotacional y las rotaciones

El significado físico del rotacional será discutido en el Capítulo 8, cuando estudiemos el teorema de Stokes; sin embargo, podemos considerar una situación específica, en la cual el rotacional está asociado con rotaciones.

EJEMPLO 4.27

Consideremos un sólido rígido B que gira alrededor de un eje L . El movimiento de rotación del cuerpo puede describirse mediante un vector ω a lo largo del eje de rotación, eligiendo su dirección de modo que el cuerpo gire en torno a ω , como en la Figura 4.4.7. Denominaremos al vector ω como **vector velocidad angular**. La longitud $\omega = \|\omega\|$ se toma de modo que coincida con la rapidez angular del sólido B , es decir, la rapidez de cualquier punto de B dividida por su distancia al eje de rotación L . El movimiento de los puntos, en el cuerpo rotante está descrito por el campo vectorial \mathbf{v} cuyo valor en cada punto es la velocidad en ese punto. Para hallar \mathbf{v} , sea Q un punto cualquiera en B , y sea α la distancia entre Q y L .

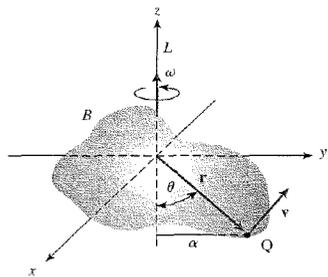


Figura 4.4.7. La velocidad \mathbf{v} y la velocidad angular ω de un sólido en rotación están ligadas por la fórmula $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

La Figura 4.4.7 muestra que $\alpha = \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta$, donde \mathbf{r} es el vector que parte del origen de coordenadas y termina en Q , y θ es el ángulo entre \mathbf{r} y el eje de rotación L . La velocidad tangencial

\mathbf{v} de Q se dirige en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre la tangente a una circunferencia paralela al plano xy de radio α , y tiene magnitud

$$\|\mathbf{v}\| = \omega \alpha = \omega \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta = \|\omega\| \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta.$$

La dirección y magnitud de \mathbf{v} implican que $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. Eligiendo un sistema de coordenadas en el cual L sea el eje z , podemos escribir $\omega = \omega \mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j},$$

y por tanto

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k} = 2\omega.$$

Es decir, para la rotación de un sólido rígido, el rotacional del campo de velocidades es un nuevo campo vectorial cuyo valor es el mismo en todos los puntos. Su dirección es la del eje de rotación, y su magnitud es el doble de la velocidad angular.

El rotacional y las rotaciones en un flujo

Si un campo vectorial representa el flujo de un fluido, entonces el valor de $\nabla \times \mathbf{F}$ en un punto es el doble de la velocidad angular de un pequeño sólido que rotase del mismo modo que lo hace el fluido cerca de ese punto. En particular, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P significa que el fluido está libre de rotaciones rígidas en P , es decir, no tiene remolinos. Otra justificación de esta idea depende del teorema de Stokes del Capítulo 8. Sin embargo, podemos decir informalmente que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ significa que si una *pequeña* rueda rígida dotada de paletas flota en el fluido, se moverá con él, pero no rotará alrededor de su eje. Tal campo vectorial se denomina **irrotacional**. Por ejemplo, se ha determinado a partir de experimentos que el movimiento de un líquido contenido en una cuba, mientras ésta se vacía por un desagüe en su parte inferior, es usualmente irrotacional excepto justo en el centro, a pesar de que el fluido esté girando alrededor del desagüe (véase la Figura 4.4.8). En el Ejemplo 4.28, las líneas de flujo del campo vectorial \mathbf{V} son

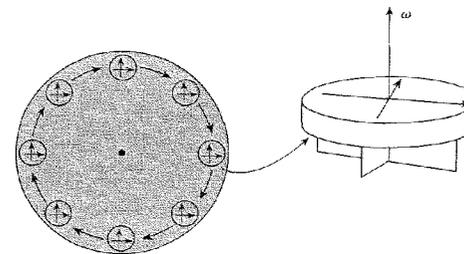


Figura 4.4.8. Observación desde arriba de un fluido en el que flota una rueda con paletas. El campo de velocidades $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ se irrotacional; la rueda no gira alrededor de su eje ω .

circunferencias centradas en el origen, a pesar de lo cual demostraremos que el flujo es irrotacional; por tanto, el lector debería estar prevenido ante la posible confusión que puede ocasionar el término «irrotacional».

EJEMPLO 4.28 Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

es irrotacional cuando $(x, y) \neq (0, 0)$ (es decir, excepto cuando \mathbf{V} no está definido).

Solución

El rotacional es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Los campos gradiente son irrotacionales

La siguiente identidad es una relación básica entre gradiente y rotacional, que se debería comparar con el hecho de que para cualquier vector \mathbf{v} se tiene $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

TEOREMA 1: El rotacional de un gradiente Sea f una función C^2 . Entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$, por definición tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Cada una de las componentes es cero, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

El recíproco de este teorema (un campo vectorial con rotacional cero, bajo hipótesis adecuadas, es un campo gradiente) se tratará en el Capítulo 8.

EJEMPLO 4.29 Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Demostrar que \mathbf{V} no es un campo gradiente.

Solución

Si \mathbf{V} fuera un campo gradiente, según el Teorema 1 debería verificar $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

de manera que \mathbf{V} no puede ser un gradiente.

Rotacional escalar

Hay una operación sobre campos vectoriales en el plano que está muy relacionada con el concepto de rotacional. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial en el plano, también puede interpretarse como un campo vectorial en el espacio tridimensional, para el cual la componente \mathbf{k} es cero y las otras dos componentes son independientes de la coordenada z . Entonces, el rotacional de \mathbf{F} se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

y siempre apunta en la dirección \mathbf{k} . La función

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

que depende de las variables x e y se denomina el **rotacional escalar** de \mathbf{F} .

EJEMPLO 4.30 Hallar el rotacional escalar de $\mathbf{V}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución

El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k},$$

de modo que el rotacional escalar, que es el coeficiente de \mathbf{k} , vale $1 + 2y$.

Los rotacionales tienen divergencia cero

A continuación, enunciamos una relación básica entre los operadores divergencia y rotacional.

TEOREMA 2: La divergencia de un rotacional Para cualquier campo vectorial \mathbf{F} de clase C^2 ,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Al igual que ocurría en la prueba de que el rotacional de un gradiente es cero, en este caso la demostración del teorema se basa en la igualdad de las derivadas cruzadas. El lector debería escribir los detalles. El resultado recíproco se estudiará en el Capítulo 8.

EJEMPLO 4.31 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial \mathbf{F} ; es decir, no existe ningún campo \mathbf{F} tal que $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$.

Solución

Si existiera un tal \mathbf{F} , según el Teorema 2 deberíamos tener $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Pero

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \neq 0,$$

de modo que \mathbf{V} no puede ser $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ para ningún \mathbf{F} .

El laplaciano

El *operador de Laplace* ∇^2 , que actúa sobre funciones f , se define como la divergencia del gradiente⁵:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Este operador desempeña un importante papel en muchas leyes físicas, como ya mencionamos en la Sección 3.1.

EJEMPLO 4.32 Demostrar que $\nabla^2 f = 0$ para

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y $r = \|\mathbf{r}\|$.

Solución

Las derivadas primeras son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Calculando las derivadas segundas, resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0. \end{aligned}$$

⁵ Nota de los traductores: otra notación muy habitual en la literatura para representar el operador de Laplace es el símbolo Δ .

Identidades vectoriales

En este momento tenemos a nuestra disposición cuatro operadores básicos: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. El siguiente cuadro contiene algunas fórmulas que son útiles cuando se calcula con campos vectoriales.

Identidades básicas del análisis vectorial

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para cualquier constante c .
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en aquellos puntos \mathbf{x} en los que $g(\mathbf{x}) \neq 0$.
5. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$.
6. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$.
7. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$.
8. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$.
9. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.
10. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.
11. $\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}$.
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$.
13. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.
14. $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.

EJEMPLO 4.33 Demostrar la identidad número 7 del cuadro anterior.

Solución

El campo vectorial $f\mathbf{F}$ tiene componentes fF_i para $i = 1, 2, 3$, y por tanto

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3).$$

Por otra parte, según la regla del producto, $(\partial/\partial x)(fF_1) = f\partial F_1/\partial x + F_1\partial f/\partial x$, con expresiones similares para los otros términos. Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} \\ &\quad - f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \end{aligned}$$

Vamos a utilizar estas identidades para repetir el Ejemplo 4.32.

EJEMPLO 4.32 Demostrar que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\nabla^2(1/r) = 0$.

Solución

Como en el caso del potencial gravitatorio, $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. En general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (véase el Ejercicio 30). Por la identidad $\nabla(f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{-3\mathbf{r}}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0. \end{aligned}$$

Nota Histórica

La divergencia y el rotacional

William Rowan Hamilton, en su investigación de los cuaterniones (tratada en la Sección 1.3) introdujo el *operador nabla*, definido formalmente como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Hamilton creía firmemente en la relevancia de este operador. Si $f(x, y, z)$ es una función escalar en \mathbb{R}^3 , entonces la «multiplicación» por ∇ nos da el gradiente de f .

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

que, por supuesto, nos da la dirección de ascenso más rápido (véase la Sección 2.6). Si

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

es un campo vectorial, entonces la «multiplicación cuaterniónica» de ∇ con \mathbf{V} nos da

$$\nabla \mathbf{V} = -\operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{V}$$

Por tanto, lo que ahora llamamos divergencia de \mathbf{V} es la parte escalar de este producto cambiada de signo, y $\text{rot } \mathbf{V}$ es la parte vectorial (consultar la discusión sobre los cuaterniones en la Sección 1.3).

Hasta donde sabemos, Hamilton nunca dio una interpretación física de la divergencia y del rotacional pero, a consecuencia de su profunda fe en ellos, sin duda creía que debían tener un importante sentido físico. Su confianza en su formalismo matemático estaba justificada, pero la explicación física de la divergencia y el rotacional tuvo que esperar hasta la publicación de *Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell. En él, Maxwell utilizó tanto la divergencia como el rotacional en sus ecuaciones para la interacción de campos eléctricos y magnéticos (las ecuaciones de Maxwell se tratarán en el Capítulo 8).

Curiosamente, Maxwell se refiere a la divergencia como *convergencia* y al rotacional como *rotación*⁶, un término que aún se utiliza en la literatura. Fue Josiah Gibbs (Figura 4.4.9) quien rebautizó *convergencia* y *rotación* con los términos más familiares que usamos hoy día —divergencia y rotacional.



Figura 4.4.9 Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

Maxwell dio una interpretación física de la divergencia utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, como hacemos en la Sección 8.4. Su interpretación del rotacional como una rotación fue bastante breve. Gibbs proporcionó una interpretación más elemental de la divergencia, como nosotros hicimos en esta sección. En el espíritu de Leibniz (quien creía en el significado de dx , dy , dz como cantidades infinitesimales), Gibbs imaginó un pequeño cubo de dimensiones dx , dy , dz colocado en un fluido. Las caras de este cubo tenían áreas $dy\,dz$, $dx\,dz$ y $dx\,dy$.

⁶ Nota de los traductores: en inglés, la palabra que se usa para designar el rotacional es *curl*, mientras que Maxwell utilizaba el término *rotation*.

En este punto, los estudiantes pueden estar interesados en escuchar a Gibbs, a través de las palabras de su estudiante E. B. Wilson:

Consideremos la cantidad de fluido que pasa a través de las caras del cubo que son paralelas al plano YZ , es decir, perpendiculares al eje X (véase la Figura 4.4.10).

La normal a la cara cuya coordenada x es menor, es decir, la normal a la cara izquierda del cubo es $-\mathbf{i}$. El flujo de sustancia a través de esta cara es

$$-\mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x, y, z) \, dy \, dz.$$

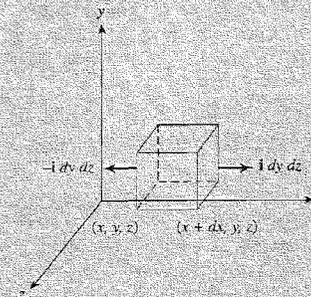


Figura 4.4.10 Un cubo con caras paralelas al plano YZ .

La normal a la cara opuesta, la cara cuya coordenada x es mayor, con un incremento dx , es $+\mathbf{i}$, y el flujo a través de ella es por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x + dx, y, z) \, dy \, dz &= \mathbf{i} \cdot \left[\mathbf{V}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx \right] dy \, dz \\ &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{V}(x, y, z) \, dy \, dz + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

El flujo total saliente a través de esas dos caras es entonces la suma algebraica de ambas cantidades. Esto es simplemente

$$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx \, dy \, dz = \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \, dy \, dz.$$

Análogamente, los flujos a través de los otros pares de caras del cubo son:

$$\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dx \, dy \, dz \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} dx \, dy \, dz.$$

Por tanto, el flujo total que sale del cubo es:

$$\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

Ésta es la cantidad neta de fluido que sale del cubo por unidad de tiempo. El cociente de esta cantidad dividida por el volumen del cubo, $\delta x \delta y \delta z$, da la tasa de disminución de la densidad. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ representa, por tanto, la disminución de la densidad, o la proporción en la que la materia está abandonando un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo, se denomina *divergencia*. Maxwell empleó el término *convergencia* para designar la tasa con la que el fluido se aproxima a un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Esto es la divergencia cambiada de signo. En el caso de que el fluido sea *incompresible*, debe salir del cubo tanta materia como entre en él. La variación total de su contenido debe ser por tanto cero. Por esta razón, la ecuación diferencial característica que debe satisfacer cualquier fluido incompresible es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del fluido. Esta ecuación se conoce frecuentemente como *ecuación hidrodinámica*. Se satisface por cualquier flujo de agua, pues el agua es prácticamente incompresible. La gran importancia de esta ecuación para el estudio de la electricidad se debe al hecho de que, de acuerdo a las hipótesis de Maxwell, el desplazamiento eléctrico obedece las mismas leyes que un fluido incompresible. Por tanto, si \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico:

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0.$$

La interpretación de Gibbs para el rotacional fue muy parecida a la que dimos en el Ejemplo 4.27 para la rotación de un sólido rígido. Wilson comenta que el análisis del significado del rotacional para el movimiento de un fluido era «bastante difícil». Incluso hoy día sigue siendo un concepto un tanto escurridizo, como puede verse en nuestra discusión tras el Ejemplo 4.27. En el Capítulo 8 proporcionaremos otra interpretación.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

1. $\mathbf{V}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - e^{yz}\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$.
2. $\mathbf{V}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.
3. $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + (y + \cos x)\mathbf{j} + (z + e^{yz})\mathbf{k}$.
4. $\mathbf{V}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} + (x + y + z)^2\mathbf{k}$.

5. La Figura 4.4.11 muestra algunas líneas de flujo y el movimiento de algunas regiones para un fluido que se mueve en el plano según un campo de velocidades \mathbf{V} . ¿En qué zonas $\text{div } \mathbf{V} > 0$ y en qué zonas $\text{div } \mathbf{V} < 0$?

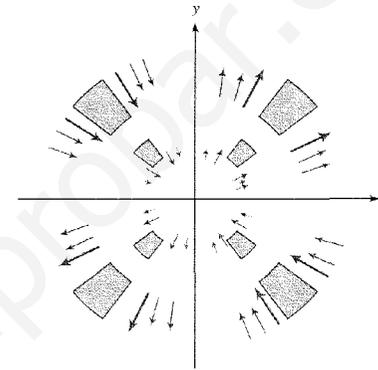


Figura 4.4.11 Líneas de flujo de un fluido que se mueve en el plano.

6. Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i}$ el campo de velocidades de un fluido en el espacio. Relacionar el signo de la divergencia con la tasa de variación de volumen bajo el flujo dado.
7. Esbozar algunas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta es consistente con el esbozo de las líneas de flujo.
8. Esbozar algunas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = -3x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta es consistente con el esbozo de las líneas de flujo.

En los ejercicios del 9 al 12, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

9. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} - x \sin(xy)\mathbf{j}$.
10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.
11. $\mathbf{F}(x, y) = \sin(xy)\mathbf{i} - \cos(x^2y)\mathbf{j}$.
12. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{y}\mathbf{i} - [y/(x + y)]\mathbf{j}$.

Calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$, de los campos vectoriales indicados en los ejercicios del 13 al 16.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$.
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Calcular el rotacional escalar de cada uno de los campos vectoriales dados en los ejercicios del 17 al 20.

17. $\mathbf{F}(x, y) = \text{sen } x\mathbf{i} + \text{cos } x\mathbf{j}$.

18. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$.

20. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Comprobar que $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ para las funciones indicadas en los ejercicios del 21 al 24.

21. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

22. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.

23. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$.

24. $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$.

25. Demostrar que $\mathbf{F} = y(\text{cos } x)\mathbf{i} + x(\text{sen } y)\mathbf{j}$ no es un campo gradiente.

26. Demostrar que $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ no es un campo gradiente.

27. Demostrar la identidad 10 de la lista de identidades vectoriales.

28. Supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. ¿Cuál de los campos siguientes tiene necesariamente divergencia nula?

a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$. b) $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$.

29. Sea $\mathbf{F} = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3z\mathbf{k}$, y $f = x^2y$. Calcular las cantidades siguientes:

a) ∇f . b) $\nabla \times \mathbf{F}$. c) $\mathbf{F} \times \nabla f$. d) $\mathbf{F} \cdot (\nabla f)$.

30. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar las identidades siguientes:

a) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$, $r \neq 0$; y, en general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ y $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$.

b) $\nabla^2(1/r) = 0$, $r \neq 0$; y, en general, $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.

c) $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$; y, en general, $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n$.

d) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; y, en general, $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

31. ¿Deben ser perpendiculares $\nabla \times \mathbf{F}$ y \mathbf{F} ?

32. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$.

a) Comprobar que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

b) Hallar una función f de manera que $\mathbf{F} = \nabla f$ (en el Capítulo 8 se darán técnicas para construir f en general. En este problema en particular, es posible encontrar la f pedida simplemente por

33. Demostrar que las partes real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial en el plano que es irrotacional e incompresible (aquí, $i = \sqrt{-1}$).

a) $(x - iy)^2$.

b) $(x - iy)^3$.

c) $e^{x-iy} = e^x(\text{cos } y - i \text{sen } y)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

En los ejercicios del 1 al 4, hallar el vector velocidad, el vector aceleración, la rapidez y la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

1. $\mathbf{c}(t) = (t^3 + 1, e^{-t}, \text{cos } (\pi t/2))$, en $t = 1$.

2. $\mathbf{c}(t) = (t^2 - 1, \text{cos } (t^2), t^4)$, en $t = \sqrt{\pi}$.

3. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \text{sen } t, \text{cos } t)$, en $t = 0$.

4. $\mathbf{c}(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, en $t = 2$.

5. Calcular los vectores tangente y aceleración para la hélice $\mathbf{c}(t) = (\text{cos } t, \text{sen } t, t)$ en el punto $t = \pi/4$.

6. Calcular los vectores tangente y aceleración para la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t)$ en el punto $t = \pi/4$, y dibujar un esquema del resultado.

7. Consideremos una partícula de masa m moviéndose a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, \text{sen } t, \text{cos } t)$. Calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = 0$.

8. a) Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\|\mathbf{c}'(t)\| = \text{constante}$, es decir, la curva está contenida en una esfera. Demostrar que $\mathbf{c}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}(t)$.

b) Sea \mathbf{c} una trayectoria cuya rapidez es siempre distinta de cero. Demostrar que \mathbf{c} tiene rapidez constante si y sólo si el vector aceleración \mathbf{c}'' es siempre perpendicular al vector velocidad \mathbf{c}' .

9. Expresar la longitud de arco de la curva $x^2 = y^3 = z^3$ entre $x = 1$ y $x = 4$ como una integral, utilizando una parametrización adecuada.

10. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + (\log t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2}t\mathbf{k}$ para $1 \leq t \leq 2$.

11. Una partícula se mueve alrededor de la circunferencia unidad en el plano xy según la fórmula $(x, y, z) = (\text{cos } (t^2), \text{sen } (t^2), 0)$, $t \geq 0$.

a) Determinar el vector velocidad y la rapidez de la partícula como funciones del parámetro t .

b) ¿En qué punto de la circunferencia debería liberarse la partícula con el fin de alcanzar un blanco situado en el punto $(2, 0, 0)$? (Téngase cuidado con el sentido en que se mueve la partícula alrededor de la circunferencia.)

c) ¿En qué instante de tiempo t debería ser liberada la partícula? (Hallar el mínimo $t > 0$ que cumpla la condición anterior.)

d) ¿Cuáles son la velocidad y rapidez en el instante de la liberación?

e) ¿En qué instante se alcanza el blanco?

12. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, donde k es una constante y $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t .
- Escribir las ecuaciones diferenciales que satisfacen las componentes de $\mathbf{r}(t)$.
 - Resolver las ecuaciones del apartado a) bajo las condiciones iniciales $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{r}'(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
13. Escribir en forma paramétrica la curva descrita por las ecuaciones $x - 1 = 2y + 1 = 3z + 2$.
14. Escribir en forma paramétrica la curva $x = y^3 = z^2 + 1$.
15. Demostrar que $\mathbf{c}(t) = (1/(1-t), 0, e^t/(1-t))$ es una línea de flujo del campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, z(1+x))$.
16. Dada una función de una variable f , definimos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$. Determinar qué ecuación debe satisfacer una función $g(t)$ de manera que

$$\mathbf{c}(t) = [\cos g(t)\mathbf{i} + \{\operatorname{sen} g(t)\}\mathbf{j}]$$

sea una línea de flujo para el campo \mathbf{F} .

Hallar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$ para los campos vectoriales de los ejercicios del 17 al 20.

17. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$.
18. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.
19. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$.
20. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Hallar la divergencia y el rotacional para los campos vectoriales dados en los Ejercicios 21 y 22 en los puntos indicados.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, en el punto $(1, 1, 1)$.
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)^3\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xy)\mathbf{j} + (\cos xyz)\mathbf{k}$, en el punto $(2, 0, 1)$.

Hallar el gradiente de las funciones dadas en los ejercicios del 23 al 26, y comprobar que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

23. $f(x, y) = e^{xy} + \cos(xy)$.
24. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
25. $f(x, y) = e^{x^2} - \cos(xy^2)$.
26. $f(x, y) = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$.
27. a) Sea $f(x, y, z) = xyz^2$; hallar ∇f .
- b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$.
- c) Calcular $\nabla \times (f\mathbf{F})$ utilizando la identidad 10 de la lista de identidades vectoriales. Comparar con el cálculo directo.

28. a) Sea $\mathbf{F} = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + (x^2 ye^z + z^2)$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.
- b) Hallar una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
29. Sea $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$, como en el Ejercicio 16. Calcular la divergencia y el rotacional del campo \mathbf{F} , y analizar las respuestas teniendo en cuenta los resultados del Ejercicio 16.
30. Sea una partícula de masa m , moviéndose a lo largo de la hélice elíptica $\mathbf{c}(t) = (4 \cos t, \operatorname{sen} t, t)$.
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la hélice en el instante $t = \pi/4$.
 - Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = \pi/4$.
 - Escribir una expresión (en términos de una integral) para la longitud de arco de la curva $\mathbf{c}(t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/4$.
31. a) Sea $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$, y sea $h(u)$ una función de una variable tal que $h'(1) = 1/2$. Sea $f = h \circ g$. Partiendo del punto $(1, 0, 0)$, ¿en qué dirección está cambiando f al 50% de su tasa máxima de variación?
- b) Para $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$, calcular $\mathbf{F} = \nabla g$ y comprobar directamente que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en cada punto (x, y, z) .
32. a) Escribir en forma paramétrica la curva determinada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $y = 1$.
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1, 1)$.
- c) Escribir una expresión integral para la longitud de arco de esta curva. ¿Cuál es el valor de esta integral?
33. En meteorología, el **gradiente negativo de presiones** \mathbf{G} es un vector que apunta desde las regiones de altas presiones hacia las direcciones de bajas presiones, perpendicular a las líneas de presión constante (**isobaras**).
- En un sistema de coordenadas xy ,

$$\mathbf{G} = -\frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Escribir una fórmula para la longitud del vector \mathbf{G} .

- Si el gradiente de presiones horizontales fuera la única fuerza horizontal actuando en el aire, el viento debería soplar directamente a través de las isobaras en la dirección de \mathbf{G} y, para una masa de aire dada, con aceleración proporcional a la longitud de \mathbf{G} . Explicar este hecho usando la segunda ley de Newton.
- Debido al efecto de la rotación terrestre, el viento no sopla en la dirección sugerida por el apartado b). En lugar de esto, obedece la **ley de Buys-Ballot**, que dice: «Si en el hemisferio norte, nos colocamos con la espalda en contra del viento, entonces la zona de altas presiones está a la derecha y la zona de bajas presiones a la izquierda». Dibujar un esquema e introducir coordenadas xy de modo que \mathbf{G} apunte en la dirección correcta.
- Enunciar e ilustrar gráficamente la ley de Buys-Ballot para el hemisferio sur, en el cual la orientación de altas y bajas presiones se invierte.

34. Una esfera de masa m , radio a y densidad uniforme tiene un potencial gravitatorio, denotado por u , y una fuerza gravitatoria, denotada por \mathbf{F} , a una distancia r del centro $(0, 0, 0)$, dados por las fórmulas:

$$u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}, \quad \mathbf{F} = -\frac{m}{a^3} \mathbf{r} \quad (r \leq a),$$

$$u = -\frac{m}{r}, \quad \mathbf{F} = -\frac{m}{r^3} \mathbf{r} \quad (r > a),$$

donde $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

- a) Comprobar que $\mathbf{F} = \nabla u$ dentro y fuera de la esfera.
 b) Comprobar que u satisface la ecuación de Poisson: $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 = \text{constante}$ dentro de la esfera.
 c) Demostrar que u satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 = 0$ fuera de la esfera.
35. Una hélice circular soportada en el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, con un desplazamiento vertical ρ en cada vuelta, puede describirse paramétricamente por

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = \rho \theta, \quad \theta \geq 0.$$

Una partícula se desliza a lo largo de la hélice, sin fricción, bajo la acción de la gravedad (que actúa paralela al eje z). Si la partícula sale de una altura $z_0 > 0$, entonces cuando pasa por la altura z su velocidad viene dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la aceleración de la gravedad, t es el tiempo y $0 \leq z \leq z_0$.

- a) Hallar la longitud de la parte de la hélice comprendida entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leq z_1 < z_0$.
 b) Hallar el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.
36. Una esfera de 10 centímetros de radio con centro en $(0, 0, 0)$ gira alrededor del eje z con velocidad angular 4, en una dirección tal que el sentido de giro, visto desde la parte positiva del eje z , es contrario al de las agujas del reloj.
- a) Hallar el vector de rotación $\boldsymbol{\omega}$ (véase el Ejemplo 4.27, en la Sección 4.4).
 b) Hallar la velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ cuando $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ está sobre el «ecuador».
 c) Hallar la velocidad del punto de la esfera de coordenadas $(0, 5\sqrt{3}, 5)$.
37. Hallar la velocidad de los estudiantes de una clase situada a una latitud 49°N , provocada por la rotación de la Tierra (ignorar el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento del Sol en la galaxia, etc.; el radio de la Tierra es de 6.378 km).

5

Integrales dobles y triples

Es a Arquímedes mismo (ca. 225 a.C.) a quien debemos la aproximación más cercana a la integración actual que podemos encontrar entre los griegos. Su primer avance notable en esta dirección tiene que ver con su demostración de que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios la del triángulo que tiene la misma base y el mismo vértice o dos tercios la del paralelogramo circunscrito.

D. E. Smith, History of Mathematics

En este capítulo y el siguiente estudiaremos la integración de funciones reales de varias variables; este capítulo trata las integrales de funciones de dos y tres variables, o *integrales dobles y triples*. La integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. Presentaremos diversas técnicas para calcular integrales dobles y triples, y consideraremos algunas aplicaciones.

5.1. Introducción

Esta sección se ocupa de algunos aspectos geométricos de la integral doble, aplazando hasta la Sección 5.2 un estudio más riguroso en términos de sumas de Riemann.

Integrales dobles como volúmenes

Consideremos una función continua de dos variables $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio R es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R se puede describir en