

Electricidad y Magnetismo



E.T.S.I.T.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

1.- INTRODUCCIÓN

La electrostática es el estudio de los efectos de las cargas eléctricas en reposo y de los campos eléctricos que no cambian con el tiempo. Aunque es la más simple de las situaciones del electromagnetismo, es fundamental para comprender los modelos electromagnéticos más complicados. La explicación de muchos fenómenos naturales (como los relámpagos) y los principios de varias aplicaciones industriales (como los osciloscopios, las impresoras de chorro de tinta ...) se basan en la electrostática.

Para la exposición de la asignatura emplearemos un enfoque deductivo, en el que a partir de la experimentación se deducen leyes que definen el comportamiento del campo eléctrico. Definimos un vector densidad de campo eléctrico y se especifica su divergencia y su rotacional en el espacio libre (donde las cargas nos están ligadas a estructuras materiales). Estos serán los *postulados fundamentales*, a partir de los cuales se derivan leyes como la ley de Gauss y la ley de Coulomb, que pueden usarse para determinar el campo eléctrico debido a diversas distribuciones de carga. También veremos el potencial electrostático y las relaciones entre las fuerzas y la energía electrostática. En aquellas situaciones donde no se conocen las distribuciones exactas de carga en todos los puntos, pero deben satisfacerse ciertas condiciones de frontera, es necesario emplear técnicas de resolución adicionales.

⊙ Definiciones

Para la electrostática en el espacio libre sólo tenemos que considerar una de las cuatro cantidades de campo vectoriales fundamentales del modelo electromagnético, la intensidad de campo eléctrico **E**.

La *intensidad de campo eléctrico*, **E**, se define como la fuerza por unidad de carga que experimenta una carga de prueba puntual estacionaria, al colocarse en una región donde existe un campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

De esta expresión se puede deducir lo siguiente:

→ el módulo del campo es proporcional al de la fuerza : \vec{E} ; \vec{F}

→ el campo y la fuerza tienen la misma dirección.

→ si la carga es positiva, \vec{E} y \vec{F} tienen el mismo sentido; si la carga es negativa, tendrán sentido contrario.

Electrostática

La fuerza \vec{F} se mide en Newtons (N) y la carga en Coulombs (C), por lo que las unidades del campo eléctrico serán Newtons por Coulombs (N/C), las cuales equivalen a Voltios por metro (V/m).

La carga eléctrica se presenta siempre en cantidades enteras de una unidad fundamental, el electrón ($e = 1.6 \times 10^{-19}$), por lo que nunca podrá haber carga menor que ésta. La carga de prueba será lo suficientemente pequeña como para no perturbar el campo eléctrico previamente existente.

Una relación inversa de la ecuación anterior nos da la fuerza \vec{F} sobre una carga estacionaria q en un campo eléctrico \vec{E} :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (\text{N})$$

⊙ Postulados fundamentales

Los dos postulados fundamentales en la electrostática en el espacio libre, en *forma diferencial*, especifican la divergencia y el rotacional de \vec{E} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

donde $\rho_v \equiv$ densidad volumétrica de carga libre (Cm^{-3})

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

$\epsilon_0 \equiv$ permitividad del espacio libre = 8.85×10^{-12} (F/m = C/V·m)

El segundo postulado es muy importante, ya que nos indica que el *campo electrostático es conservativo*. Estos dos postulados son sencillos e independientes del sistema de coordenadas y se pueden usar para derivar otras relaciones, leyes y teoremas de la electrostática ya que las operaciones de divergencia y rotacional implican derivadas espaciales. En las aplicaciones prácticas nos interesará obtener el campo total debido a una distribución de cargas. Esto se puede obtener mediante una formulación integral de los postulados anteriores.

Para la *formulación integral* de los postulados tenemos que recurrir al Teorema de Stokes y al Teorema de la Divergencia.

a.-) Para el primer postulado, tomamos la integral de volumen en ambos miembros, para un volumen V arbitrario.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dV$$

(*) (**)

Electrostática

Aplicando el Teorema de la divergencia al primer miembro:

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

En el segundo miembro tendremos que:

$$\int_v \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_v dv = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

donde Q_v es la carga libre encerrada por el volumen V .

Por tanto, la forma integral del primer postulado nos queda tal que:

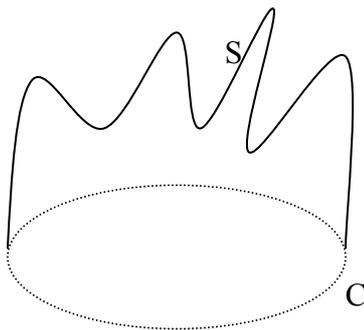
$$\boxed{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}}$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **TEOREMA DE GAUSS**, y su interpretación es la siguiente:

El flujo de salida total del campo electrostático \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada en el espacio libre es igual a la carga total libre encerrada por la superficie dividida por la permitividad del espacio libre, ϵ_0 .

La superficie S que aparece en el Teorema de Gauss recibe el nombre de *superficie Gaussiana* y representa cualquier superficie cerrada imaginaria en la que la componente perpendicular del campo eléctrico sea constante.

b.-) Para el segundo postulado, integramos en una superficie abierta y aplicamos el teorema de Stokes:



$$\int_s \vec{\nabla} \times \vec{E} ds = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow$$

-> Sólo depende de los puntos inicial y final

La integral de línea se aplica a un contorno cerrado arbitrario, c . La ecuación establece que la integral de línea escalar (o circulación) de la intensidad de campo electrostático a lo largo de una trayectoria cerrada es nula, lo cual implica que sólo depende de los puntos inicial y final, es decir, que el campo es conservativo.

Electrostática

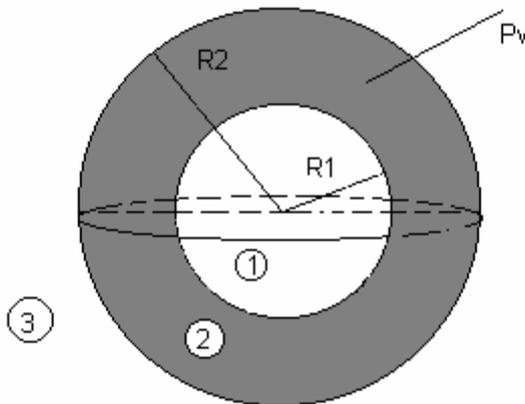
- Ejemplo del teorema de Gauss

Calcular el campo eléctrico en la siguiente distribución de cargas:

$$\rho_v = \begin{cases} \frac{a}{R^4} & \text{si } R_1 < R < R_2 \\ 0 & \text{si } R \leq R_1 ; R \geq R_2 \end{cases}$$

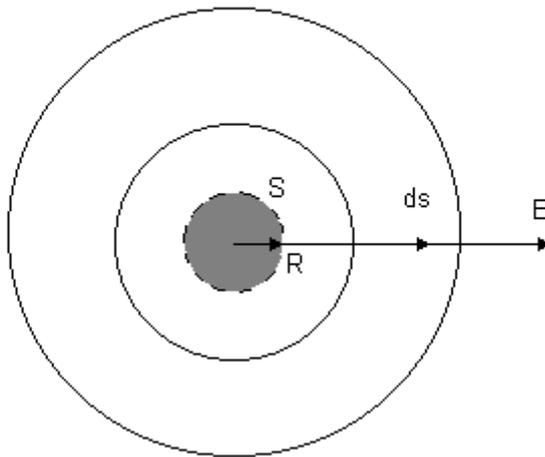
Solucion.-

Tenemos una distribución de carga esférica, en la que la distribución de cargas está encerrada entre dos esferas puntuales:



Tenemos que distinguir las tres zonas del espacio con las que tendremos que trabajar. En este caso hay tres, y como estamos ante un problema con simetría esférica podemos aplicar el teorema de Gauss, ya que la componente perpendicular del campo eléctrico será constante en la superficie de la esfera. Las superficies gaussianas que se eligen serán esferas centradas en cada una de la regiones:

Región 1: ($R \leq R_1$)



S = superficie gaussiana

Dado que \vec{E} y $d\vec{s}$ son paralelos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds$$

Sobre una esfera el campo \vec{E} es radial, por lo que sólo depende de la distancia al origen de la esfera. Debido a que ésta distancia es constante, también lo será el campo. Por tanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS$$

donde $\oint_S dS$ es la superficie de la esfera, que vale $4\pi R^2$. Por lo que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E4\pi R^2$$

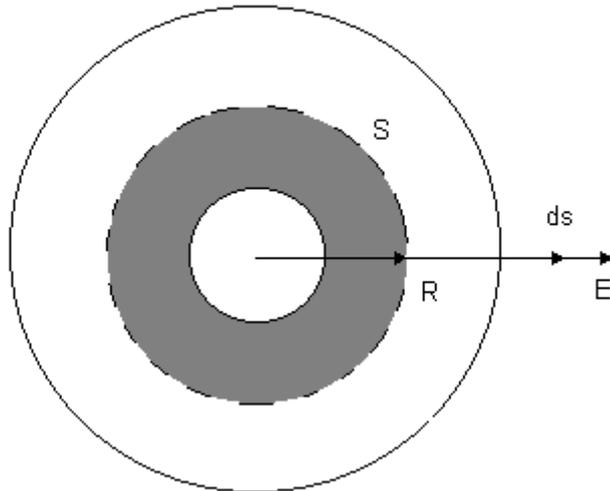
Aplicando el teorema de Gauss obtenemos que:

$$E4\pi R^2 = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

En esta región tenemos que $Q_v = 0$, ya que la superficie S no contiene ninguna carga, de lo que deducimos que en la región 1 no hay campo eléctrico.

$$\boxed{\vec{E}_1 = 0 \vec{a}_R}$$

Región 2: ($R_1 \leq R \leq R_2$)



S = superficie gaussiana

Procediendo de la misma forma que antes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds \Rightarrow E \oint ds = E4\pi R^2$$

Para el cálculo de la carga empleamos coordenadas esféricas, donde:

$$dv = R^2 \sin \theta \, dR d\theta d\phi$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana viene dada por:

$$Q_v = \int_{R_1}^R \rho_v \cdot dv = \int \frac{a}{R^4} \cdot R^2 \cdot \sin \theta \cdot dR \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Resolviendo la integral obtenemos:

$$Q_v = 2\pi a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right)$$

El teorema de Gauss queda:

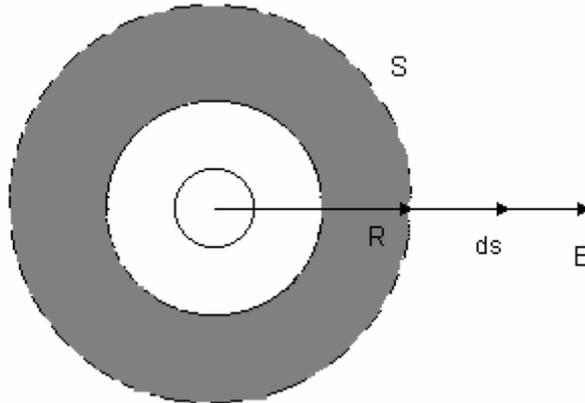
$$E4\pi R^2 = \frac{2\pi \cdot a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right)$$

Despejando obtenemos que el campo en la región 2 es:

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{a}{2\epsilon_0 R^2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \vec{a}_{R_1}}$$

Electrostática

Región 3: ($R > R_2$)



S = superficie Gaussiana

Al igual que antes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_s E ds \Rightarrow E \oint_s ds = E 4\pi R^2$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana la podemos calcular a partir de la que hallamos en la región 2, haciendo $R=R_2$.

$$Q_v = 2\pi a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

El Teorema de Gauss nos queda:

$$E 4\pi R^2 = \frac{2\pi \cdot a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Despejando obtenemos que el campo en la superficie 3 es:

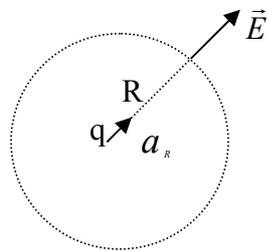
$$\vec{E}_3 = \frac{a}{2\epsilon_0 R^2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{a}_{R_1}$$

Observamos que en el exterior, el campo eléctrico es igual al creado por una carga puntual en el centro, de valor la carga total de la distribución.

2.- CAMPO ELÉCTRICO.-

⊙ Campo eléctrico de una carga puntual. Ley de Coulomb.

Consideremos el problema electrostático más simple, que consiste en una sola carga puntual q , en reposo, en el espacio libre ilimitado. Para hallar la intensidad de campo eléctrico, \vec{E} , creado por q , dibujamos una superficie esférica de radio arbitrario R con centro en q . Es decir, una superficie gaussiana alrededor de la fuente, a la cual se aplica el teorema de Gauss para determinar el campo. Puesto que una carga puntual no tiene direcciones preferentes, su campo eléctrico debe ser radial en todas partes y tener la misma intensidad en todos los puntos de la superficie esférica. El módulo de \vec{E} sólo puede ser una función de la distancia a la carga, y como esta distancia es constante, también lo será el campo \vec{E} .



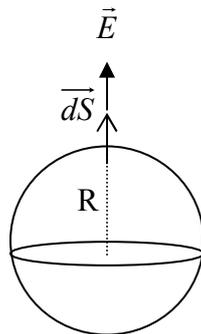
(a) Carga puntual en el origen.

Para obtener el campo aplicamos el Teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

$Q_v \equiv$ carga libre encerrada en S

$S \equiv$ cualquier superficie cerrada. Se elige una esfera concéntrica con la carga.



Como \vec{E} y $d\vec{s}$ son paralelos, tenemos que: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E \cdot ds = E \cdot 4\pi \cdot R^2$$

Electrostática

El campo es constante en la superficie de radio R y sale fuera de la integral:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$Q_v \equiv$ toda la carga que éste encerrada en la superficie hipotética.

$E \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow$ despejando el campo de esta ecuación y poniéndole el sentido radial al campo tenemos :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \vec{a}_R \left[\frac{N}{C} \right]}$$

donde $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \left[\frac{m}{F} \right]$ y el sentido del campo viene dado por el signo de la carga:

q+ = sentido hacia fuera

q- = sentido hacia dentro

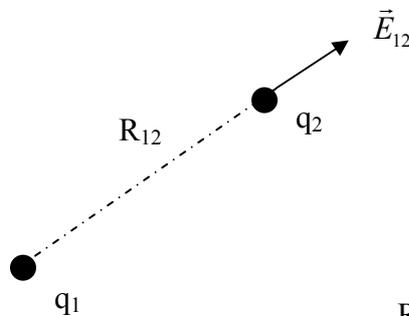
La ecuación anterior nos indica que el *campo eléctrico creado por una carga puntual* tiene dirección radial hacia fuera, y su intensidad es proporcional a la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga.

Nota :

El teorema de Gauss se aplica en problemas con simetría esférica, y en cilindros, hilos y placas de dimensiones infinitas.

\Rightarrow Ley de Coulomb

Cuando se coloca una carga puntual q_2 , en el campo creado por otra carga puntual q_1 , q_2 experimenta una fuerza \vec{F}_{12} debida al campo eléctrico de q_1 en q_2 . Dicho campo es \vec{E}_{12} :



$R_{12} \equiv$ distancia entre las cargas

En la introducción se había que:

Electrostática

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{F}_{12} = q_2 \cdot \vec{E}_{12} \quad (1)$$

\vec{E}_{12} es un campo creado por una carga puntual, cuya expresión hemos obtenido anteriormente:

$$\vec{E}_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \vec{a}_{12} \quad ; \quad \vec{a}_{12} \equiv \text{vector unitario que va de } q_1 \text{ a } q_2$$

Sustituyendo en (1), obtenemos la fuerza que actúa entre las dos cargas:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_{12}^2} \cdot \vec{a}_{12}$$

Esta expresión se conoce como la **LEY DE COULOMB** y nos dice que la fuerza que actúa entre dos cargas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. \vec{F}_{12} actúa en la línea que une las cargas: es una fuerza de repulsión cuando q_1 y q_2 tienen el mismo signo y una fuerza de atracción cuando las cargas tienen sentido opuesto.

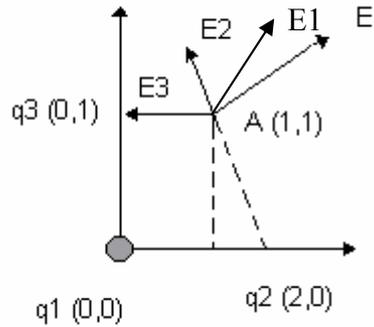
En el caso de varias cargas puntuales, el campo total en cualquier punto se obtiene aplicando el principio de superposición:

“ el campo total es la suma vectorial de los campos causados por cada una de las cargas individuales ”

- *Ejemplo de aplicación de la Ley de Coulomb para una distribución de cargas puntuales*

Calcular el campo eléctrico en el punto A (1,1) generado por la siguiente distribución de cargas puntuales. Calcular la fuerza que se ejercería sobre una carga de 5C colocada en dicho punto. DATOS: $q_1 = 2C$; $q_2 = 1C$; $q_3 = -3C$

Electrostática



Solucion.-

En general, el campo creado por una carga puntual viene dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{a}_R$$

Aplicando el Principio de Superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

→ Calculemos \vec{E}_1 :

$$q_1 = 2C$$

$$R_1 = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$\vec{a}_R = \cos 45 \vec{a}_x + \text{sen } 45 \vec{a}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_y$$

$$|\vec{a}_R| = 1$$

luego:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \quad \frac{V}{m}$$

→ Calculemos \vec{E}_2 :

$$q_2 = 1C$$

$$R_2 = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$\vec{a}_R = -\cos 45 \vec{a}_x + \text{sen } 45 \vec{a}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_y$$

$$|\vec{a}_R| = 1$$

Electrostática

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a}_y \right)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\vec{a}_x + \vec{a}_y \right) \quad \frac{V}{m}$$

→ Calculemos \vec{E}_3 :

$$q_3 = -3C$$

$$R = 1m$$

$$\vec{a}_R = \vec{a}_x$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{1^2} \vec{a}_x \Rightarrow$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-3 \vec{a}_x) \frac{V}{m}$$

Por lo tanto, tenemos que el campo total es:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{2}-12}{4} \cdot \vec{a}_x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \vec{a}_y \right] \frac{Nw}{C}}$$

Calculemos ahora la fuerza que se ejercería sobre una carga de 5C colocada en el punto A.

$$F = q \cdot \vec{E}$$

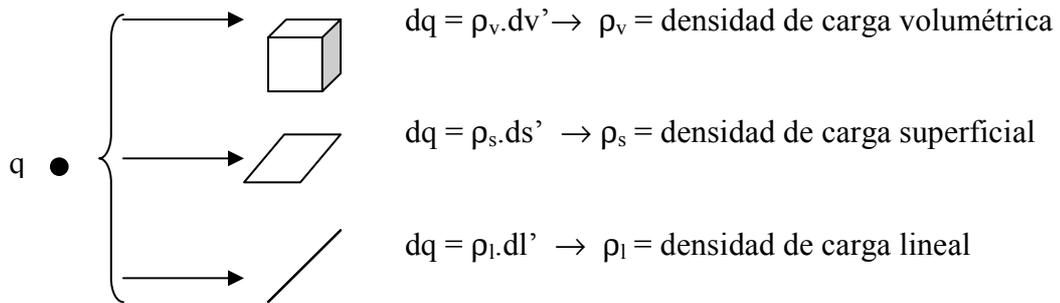
$$q = 5C$$

De modo que:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{5}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}-12}{4} \right) \cdot \vec{a}_x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \vec{a}_y \right] Nw}$$

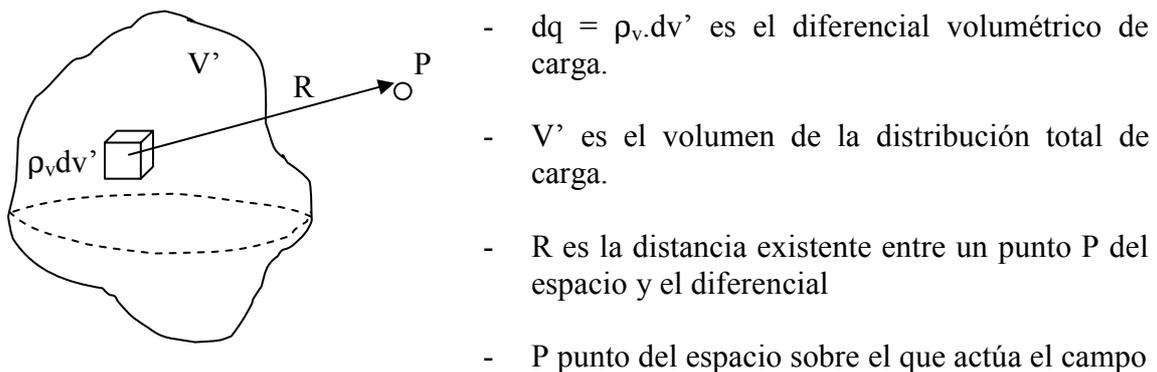
⊙ Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga

Para calcular campo eléctrico debido a una distribución continua de carga, se supone que un elemento infinitesimal de carga se comporta igual que una carga puntual. Tenemos tres elementos infinitesimales de carga: *volumen*, *superficial* y *lineal*, que en función de su respectiva densidad se pueden escribir como:



Con primas se denotan los puntos fuente (donde existen cargas), y sin primas denotamos los puntos campo (donde queremos hallar el campo electrostático).

Podemos obtener el campo eléctrico creado por una distribución de carga continua integrando (superponiendo) la contribución de un elemento de carga a toda la distribución de carga. Observémoslo en la figura siguiente donde se presenta una distribución de carga volumétrica.



La densidad de carga es, en términos generales, una función de las coordenadas. Ya que un elemento diferencial de cargas se comporta como una carga puntual, la contribución a la intensidad de campo eléctrico en el punto fuente P de la carga $dq = \rho_v \cdot dv'$ en un elemento de volumen diferencial dv' es:

Electrostática

Para una carga puntual :

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \vec{a}_R$$

Luego, para una carga infinitesimal:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \vec{a}_R$$

$d\vec{E} \equiv$ campo infinitesimal debido a dq en P

Integrado en toda la región donde exista carga, tenemos que:

a) Para una distribución volumétrica de carga:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v}{R^2} dv' \cdot \vec{a}_R$$

b) Para una distribución superficial de carga:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R^2} ds' \cdot \vec{a}_R$$

c) Para una distribución lineal de carga:

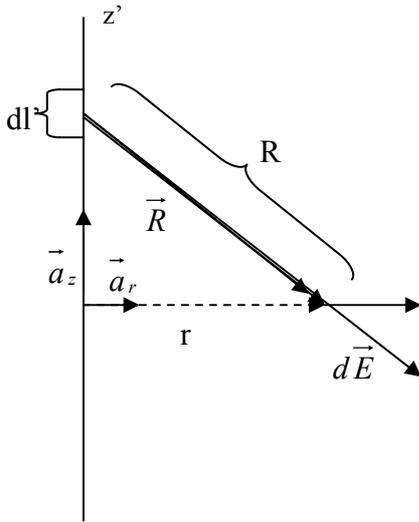
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_l}{R^2} dl' \cdot \vec{a}_R$$

Electrostática

- Ejemplo

Determinar la intensidad del campo eléctrico de una línea de carga recta, infinitamente larga, con densidad uniforme ρ_l (C/m) en el aire.

Solucion.-



Para una distribución lineal de carga:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l}{R^3} dl' \cdot \vec{R}$$

Siendo:

- R = distancia de un punto frente al punto campo P
- ρ_l = densidad lineal de carga (supuesta constante)
- \vec{R} = vector que va desde los puntos frente al punto campo

$$\vec{R} = R \cdot \vec{a}_R \quad (\text{Vector posición con respecto del diferencial con respecto a P})$$

Como tenemos una densidad lineal de carga, la expresión de la intensidad de campo a utilizar en el problema sería:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{R} \frac{\rho_l}{R^3} dl'$$

Debido a que la carga está distribuida a lo largo del eje z, se puede escribir que: $dl' = dz$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{R} \frac{\rho_l}{R^3} dz'$$

Para resolver la integral del campo, podemos observar que el problema tiene simetría cilíndrica, así que aplicaremos estas coordenadas:

$$r \vec{a}_r = \vec{R} + z' \vec{a}_z \rightarrow \text{Despejando...} \rightarrow \vec{R} = r \cdot \vec{a}_r - z' \cdot \vec{a}_z$$

Electrostática

Entonces:

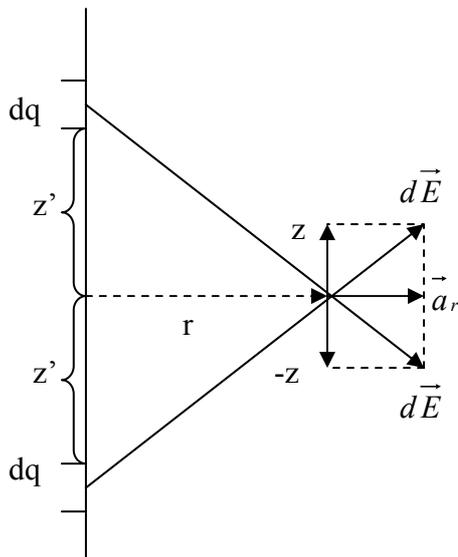
$$d\vec{E} = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r\vec{a}_r}{R^3} - \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z'\vec{a}_z}{R^3}$$

De aquí podemos dividir la ecuación en dos sub-expresiones, una dependiente únicamente de la coordenada r y otra de la coordenada z:

$$d\vec{E}_r = \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r\vec{a}_r}{R^3}$$

$$d\vec{E}_z = -\frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z'\vec{a}_z}{R^3}$$

Demostramos gráficamente que:



Como podemos ver, las componentes z de los vectores del campo se anulan (z y -z).

$$\vec{E} = \int_C d\vec{E} = \int_C d\vec{E}_r + \int_C d\vec{E}_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l dz'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r\vec{a}_r}{(z'^2 + r^2)^{3/2}}$$

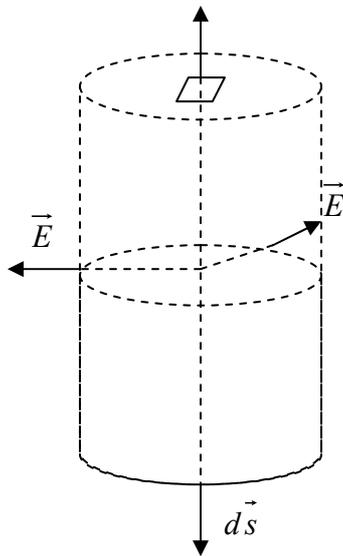
El campo no tiene componente vertical. Finalmente, resolvemos la integral y obtenemos que:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{a}_r}$$

• Ejemplo

Resolver el ejercicio anterior, mediante el teorema de Gauss:

Solucion.-



Como el hilo es infinito y $\rho_l = \text{cte} \Rightarrow \vec{E}$ es radial

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{sup. lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{sup. lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{sup. lateral}} E \cdot ds = E \int_{\text{sup. lateral}} ds$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S} \longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot ds$

Entonces, como la superficie gaussiana es un cilindro, se cumple que:

$$\int ds = 2\pi rL$$

La carga Q_v será la densidad de carga por la longitud donde esté encerrada:

$$Q_v = \rho_l \cdot L$$

Con lo que:

$$E \cdot 2\pi rL = \frac{\rho_l \cdot L}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r}$$

3. POTENCIAL ELÉCTRICO

Del postulado fundamental:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

se puede deducir que existe una función V , que denominaremos *potencial eléctrico* que cumple:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists V / \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

De esta expresión se deduce que:

- (1) El campo electrostático se dirige hacia los potenciales decrecientes.
- (2) El campo electrostático es perpendicular a las superficies equipotenciales

Conocido el potencial podemos determinar el campo con facilidad como una operación de gradiente, lo cual es más sencillo que un proceso de integración directa.

© Trabajo realizado por una carga puntual.

El potencial está muy ligado al concepto de trabajo en electrostática. El trabajo en electrostática es aquel que se realiza *en contra del campo*, cuando se mueve una carga desde un punto a otro. La expresión del trabajo viene dada por:

$$W = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

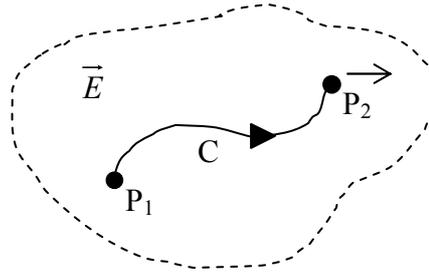
(Definición general de trabajo entre dos puntos P_1 y P_2)

Observamos que la expresión tiene signo negativo, esto se debe a lo mencionado anteriormente, el trabajo se realiza *en contra del campo*.

Supongamos que queremos calcular el trabajo necesario para llevar una carga puntual q , de la posición 1 a la 2, en contra de la fuerza ejercida por el campo:

Electrostática

$$W_{q1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_e$$



$$\vec{F}_e = q\vec{E} = q(-\vec{\nabla}V)$$

$$W_{q1-2} = \int_1^2 -q(-\vec{\nabla}V)d\vec{l} \quad \rightarrow \quad W_{q1-2} = q \int_1^2 \vec{\nabla}V d\vec{l}$$

$$\text{siendo } \vec{\nabla}V d\vec{l} = dV .$$

Nota:

Como el integrando es una diferencial exacta, el camino no interviene en el cálculo del trabajo.

$$W_{q1-2} = q \int_1^2 dV = q(V_2 - V_1) \quad \rightarrow \quad \frac{W_{q1-2}}{q} = V_2 - V_1$$

W/q es independiente del camino elegido. Si no fuese así, seríamos capaces de crear una trayectoria por donde el trabajo es el más pequeño y luego regresar por otra trayectoria, logrando así una ganancia neta en trabajo y energía. Este resultado iría contra el principio de conservación de la energía (“La energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma”).

Análogamente al concepto de energía potencial en la mecánica, podemos definir la energía potencial eléctrica por unidad carga con V (potencial eléctrico), tenemos que:

$$\boxed{\frac{W}{q} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad \rightarrow \quad \boxed{V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

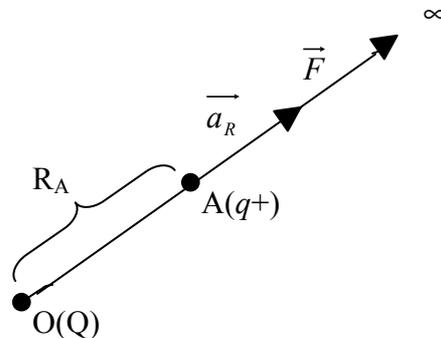
Lo que definimos con esta ecuación es una *diferencia de potencial (voltaje electrostático)* entre los puntos P_2 y P_1 . No podemos hablar del potencial *absoluto* de un punto, al igual que no podemos hablar de la fase absoluta de un fisor o una altitud absoluta de un lugar geográfico; primero tenemos que especificar un punto de referencia de inicio, en el caso de un fisor (usualmente en $t = 0$), o una altitud de referencia cero (por lo general, tomaríamos el nivel del mar). En la mayoría de los casos (aunque no en todos) el punto de potencial cero se toma en el infinito: $V_\infty = 0$ Cuando no está en el infinito (por ejemplo, cuando está “en tierra”), debe especificarse de forma explícita.

De esta ecuación podemos hacer dos observaciones:

1. El potencial *aumenta* al ir *en contra del campo eléctrico*.
2. Sabemos que la dirección de ∇V es normal a las superficies con V constante. Por lo tanto, si usamos **líneas de campo dirigidas** o **líneas de flujo** para indicar la dirección del campo \mathbf{E} , siempre serán perpendiculares a las **líneas equipotenciales** y a las **superficies equipotenciales**.

⊙ **Potencial eléctrico de una carga puntual**

Sea una carga puntual Q en el punto O (origen de coordenadas) y supongamos que queremos trasladar la unidad de carga positiva desde un punto A hasta el infinito.



- \vec{F} es la fuerza ejercida por el campo creado por Q .
- \vec{E} es el campo creado por Q .

Para hallar la expresión del potencial, se calcula el trabajo necesario para trasladar la unidad de carga positiva ($1C$) desde una distancia $R = a$ hasta el infinito:

$$W = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

eligiendo como camino para resolver la integral el más sencillo, ya que el trabajo no depende del camino que se elija porque el campo es conservativo. En este caso el camino será una recta que una los dos puntos.

$$W = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot (V_\infty - V_A) = \left\{ \begin{array}{l} V_\infty = 0 \\ q = 1C \end{array} \right\} = -V_A$$

Valiéndonos de la relación $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que:

Electrostática

$$W = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -V_A$$

(Ecuación del trabajo del campo eléctrico)

Utilizando la expresión del campo eléctrico deducida de la Ley de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \vec{a}_r$$

Sustituimos la expresión del campo dentro de la integral y considerando que $d\vec{l} = dR \cdot \vec{a}_R$ llegamos a la siguiente expresión para el trabajo:

$$W = -\int_{R_A}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \vec{a}_r \cdot dR \cdot \vec{a}_r$$

Resolviendo la integral llegamos a la expresión:

$$W = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_A} = -V_A$$

Se deduce la siguiente expresión para el potencial de una densidad de carga puntual Q a una distancia R_A de un punto A concreto:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_A}$$

(Ecuación del potencial para una única carga)

La expresión anterior se puede generalizar para cualquier caso en el que queramos calcular el potencial para una carga puntual, poniendo $Q \equiv$ el valor de la carga, y $R \equiv$ la distancia a la carga.

En el caso de varias cargas puntuales, por el **principio de superposición**, podemos decir que el potencial total en un punto es la suma de los potenciales de cada carga por separado sobre dicho punto, es decir:

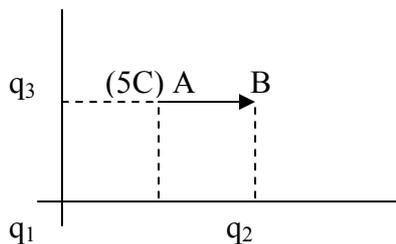
$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{|R_A - R_k|}$$

(Ecuación del potencial producido por n cargas sobre un punto concreto A)

• *Ejemplo*

Hallar el trabajo para trasladar una carga de 5C de A (1,1) hasta B (2,1)

Solucion.-



Características de las cargas:

$q_1 = 2C$ y se encuentra en (0,0)

$q_2 = 1C$ y se encuentra en (2,0)

$q_3 = -3C$ y se encuentra en (0,1)

Por la definición de diferencia de potencial explicada anteriormente podemos deducir que:

$$W_{AB} = q_{5c} (V_B - V_A)$$

Entonces, tendremos que calcular el potencial en cada uno de los puntos para poder hallar el trabajo. Para realizar esta operación, utilizaremos el principio de superposición para hallar los potenciales ejercidos por cada carga sobre la del punto A, para hallar después el potencial total en el punto.

→ Para V_A :

$$V_{A1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|R_A - R_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}}$$

$$V_{A2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{|R_A - R_2|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}}$$

$$V_{A3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3}{|R_A - R_3|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-3}{1} = \frac{-3}{4\pi\epsilon_0}$$

Por la ecuación dada antes para el principio de superposición tenemos que hacer:

Electrostática

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{|R_A - R_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{1} \right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$$

→ Para V_B :

$$V_{B1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{5}}$$

$$V_{B2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$V_{B3} = \frac{-3}{8\pi\epsilon_0}$$

Por la ecuación en la que aplicamos el principio de superposición tenemos que:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{|R_B - R_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1 - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right)$$

Finalmente, sustituimos los valores y resolvemos:

$$W_{AB} = q_{5c} (V_B - V_A) = 5 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 3 + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{15\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 35}{8\pi\epsilon_0} \right)$$

© Potencial eléctrico para una distribución continua de carga

En este caso vamos a suponer que el comportamiento de una carga puntual y de una carga infinitesimal es análogo para potencial.

Carga puntual

q



Distribución continua

dq

$$\begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & dV \\
 V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{q}{R} & \longrightarrow & dV = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{dq}{R}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \nearrow \rho_v dv' \quad ; \quad \rho_v \equiv \text{densidad volumétrica de carga.} \\
 \rightarrow \rho_s ds' \quad ; \quad \rho_s \equiv \text{densidad superficial de carga.} \\
 \searrow \rho_l dl' \quad ; \quad \rho_l \equiv \text{densidad lineal de carga.}
 \end{array}$$

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua confinada en una región dada se obtiene integrando la contribución de un elemento de carga infinitesimal sobre toda la región donde exista carga.

a.) Para una distribución volumétrica de carga tenemos:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v}{R} dv'} \quad V' \equiv \text{volumen de la distribución de carga}$$

b.) Para una distribución superficial de carga:

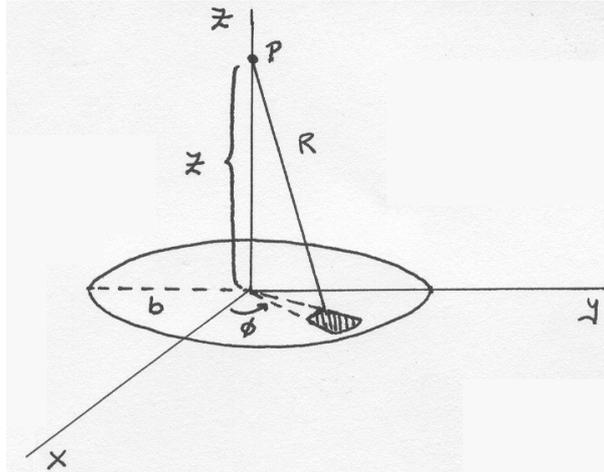
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds'} \quad S' \equiv \text{superficie de la distribución de carga}$$

c.) Para una distribución lineal de carga:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_l}{R} dl'} \quad L' \equiv \text{longitud de la distribución de carga}$$

• Ejemplo

Calcular la intensidad de un campo eléctrico en el eje de un disco circular de radio B con ρ_s uniforme.



Como podremos observar, el problema carece de suficiente simetría como para aplicar el teorema de Gauss. Viendo la geometría de la distribución de carga, podemos observar que dicha distribución es superficial, por lo que el potencial vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds'$$

De donde S' es la superficie donde existe la carga, que en este caso será toda la superficie del disco. En coordenadas cilíndricas tenemos que:

$$S' \equiv r']_0^b, \phi]_0^{2\pi}$$

siendo el diferencial de superficie:

$$ds' = r' dr' d\phi'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s r' dr' d\phi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \int_0^b \frac{r' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}} \right]$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + b^2} - z \right) \quad (\text{Para } z > 0)$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + b^2} + z \right) \quad (\text{Para } z < 0)$$

Por la definición del potencial eléctrico deducida del segundo postulado sabemos que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dz}\vec{a}_z$$

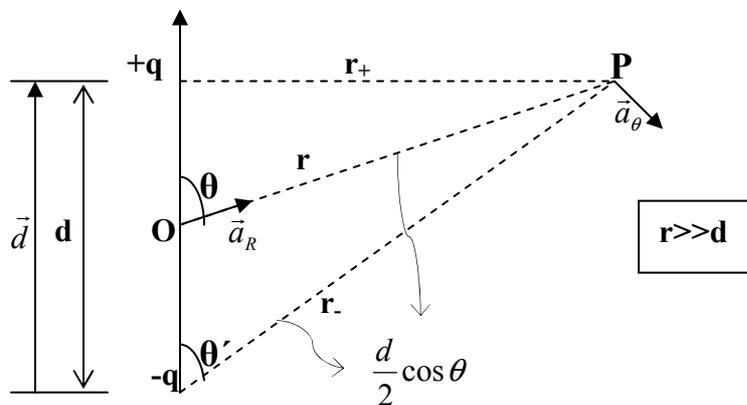
Finalmente, hallamos la intensidad del campo:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - b^2}} \right] \vec{a}_z \quad (\text{Para } z > 0)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \vec{a}_z \quad (\text{Para } z < 0)$$

4. DIPOLOS.-

El dipolo eléctrico está constituido por dos cargas, una positiva y otra negativa del mismo valor (+q y -q), separadas una distancia d , que se supondrá pequeña comparada con la distancia r que va desde el origen hasta el punto P en el que se desea conocer el potencial V y la intensidad del campo eléctrico E .



donde,

\vec{d} = vector, de módulo d , que va de q^- a q^+
 \vec{a}_r = vector unitario desde O hacia P

Por superposición el potencial en el punto P es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-q)}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (1)$$

Como se cumple que $r \gg d$ entonces $\theta = \theta'$ y podemos escribir r_+ y r_- como:

$$\begin{cases} r_+ \cong r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_- \cong r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1), tenemos que:

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cdot \cos \theta}{r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right)$$

con,

$$r \gg d \rightarrow r^2 \gg \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta$$

obtenemos:

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d \cdot \cos \theta}{r^2} \quad (2)$$

Si definimos \vec{a}_R como el *vector unitario* que va desde el origen hasta el punto \mathbf{P} , obtenemos que:

$$\vec{d} \cdot \vec{a}_R = d \cdot \cos \theta$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (2):

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{d} \cdot \vec{a}_R}{R^2}} \quad (3)$$

Es interesante destacar que el potencial debido a un dipolo disminuye con la inversa del cuadrado de la distancia r , mientras que para una carga puntual disminuye con la inversa de r .

© Momento Dipolar (\vec{p}).

Definimos el momento bipolar, \vec{p} , como un vector cuyo módulo es el producto de la carga q por la separación d , y que se dirige desde la carga negativa a la positiva:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (3), obtenemos una expresión más simple para el potencial eléctrico:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Esta ecuación es válida para puntos alejados del dieléctrico.

Por simetría, al ser las cargas puntuales, \vec{E} y V han de ser independientes del ángulo ϕ (en coordenadas esféricas).

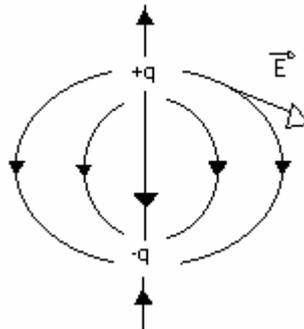
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial R} \vec{a}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{a}_\theta$$

Realizando las derivadas:

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

donde p es el módulo del momento dipolar.

Las líneas de campo eléctrico de un dipolo son de la forma:



5.- MEDIOS MATERIALES EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Eléctricamente, los materiales se pueden dividir en:

-Conductores o metales: Materiales en los que los electrones asociados a la capa más externa de los átomos pueden moverse libremente en su interior (cualquier metal).

-Aislantes o dieléctricos: En este tipo de materiales, todos los electrones están confinados en las órbitas atómicas (plástico, madera,...).

-Semiconductores: Sólo algunos de los electrones de las capas más externas de los átomos se pueden mover libremente en el interior de un material (silicio, germanio, etc).

En electrostática sólo consideraremos conductores ideales y aislantes ideales.

⊙ **Conductor en un campo eléctrico estático**

Sabemos que en electrostática las cargas permanecerán fijas. Si existiera un campo eléctrico en el interior de un conductor, los electrones de las capas atómicas externas se moverían. Por tanto, en electrostática, el campo eléctrico en el interior de un metal es *nulo*.

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0$$

Como el campo en el interior del conductor es nulo ($\vec{E}_{\text{int}} = -\vec{\nabla}V_{\text{int}} = 0$), el potencial en el interior es *constante*.

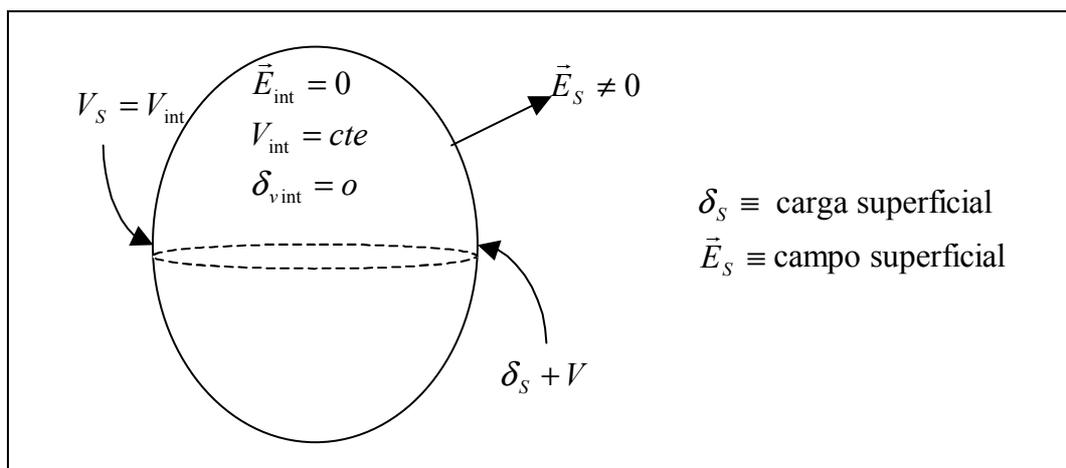
$$V_{\text{int}} = \text{cte}$$

Por otro lado, del postulado fundamental de la electrostática:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla}\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\delta_{V_{\text{int}}}}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{\text{int}} = 0 \end{array} \right\} \vec{\nabla}\vec{E}_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \delta_{V_{\text{int}}} = 0$$

Obtenemos que la densidad de carga libre en el interior del metal es *nula*.

En la superficie de un metal puede existir campo eléctrico, pero para que las cargas superficiales no se muevan tiene que ser perpendicular (normal) a la superficie.



Electrostática

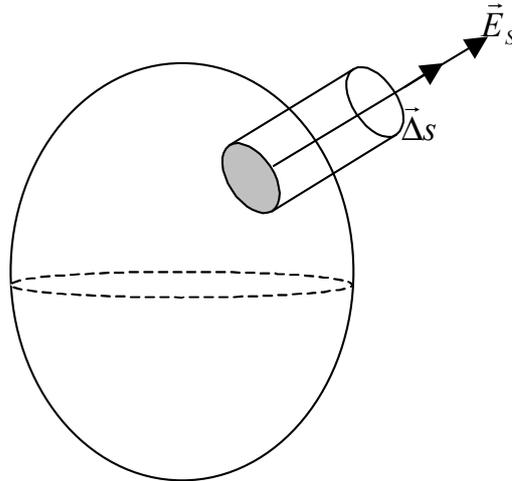
La componente tangencial del campo eléctrico superficial es nula, si no, las cargas se moverían en la superficie.

Por la continuidad del potencial eléctrico, el potencial en la superficie es igual al del interior lo que implica que *la superficie es equipotencial*

$$V_s = V_{\text{int}}$$

$$V_s \equiv \text{potencial en la superficie}$$

Aplicando el teorema de Gauss a un pequeño cilindro en la superficie del metal:



$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

donde,

$$Q_V = \rho_s \cdot \Delta s$$

Si S es la superficie del cilindro y se puede dividir entre la parte interna y la externa al metal, en el interior de ésta, la integral es nula, ya que el campo eléctrico es cero y en el exterior, sólo hay contribución al flujo a través de la tapa, ya que el campo es perpendicular a la superficie. Así:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = E_s \cdot \Delta S \quad \rightarrow \quad E_s \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E_s = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_s = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{a}_n}$$

donde \vec{a}_n es un vector unitario perpendicular a la superficie.

Cuanta más carga haya en la superficie, más intenso será el campo y éste será mayor donde exista más curvatura, ya que ahí se acumula más carga.

Como el potencial eléctrico es una función continua, en la superficie del metal es constante e igual que el potencial interior

⇒ **Capacidad de un metal**

Se define la capacidad de un conductor como el cociente entre la carga que existe entre la superficie y su potencial.

$$C = \frac{Q}{V}$$

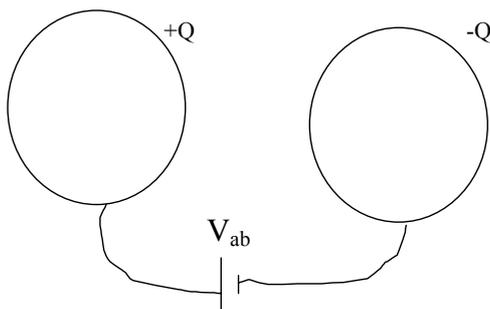
donde,

$C \equiv$ Capacidad [F≡Faradio]

$Q \equiv$ Carga en la superficie

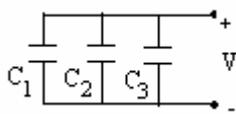
$V \equiv$ Potencial del conductor

Generalizando, la capacidad de dos conductores entre los que existe una diferencia de potencial V_{ab} , se define como:



$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

a) *Asociación en paralelo.*



Entre las armaduras de cada condensador existe la misma diferencia de potencial V . Las cargas de cada condensador q_1, q_2, \dots, q_n son proporcionales a sus respectivas capacidades C_1, C_2, \dots, C_n . La capacidad equivalente viene dada por:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_i C_i$$

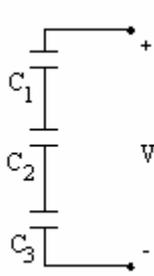
Si todos los condensadores tienen la misma capacidad, a , la capacidad equivalente vendrá dada por:

$$C = n \cdot a$$

donde n es el número de condensadores

b) *Asociación en serie.*

Electrostática



Todos los condensadores tienen, por influencia, la misma carga. La capacidad equivalente viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Si todos los condensadores tienen la misma capacidad, a , la expresión se reduce a:

$$C = \frac{a}{n}$$

donde n es el número de condensadores.

- Tipos de condensadores.

Teniendo en cuenta la disposición de las dos armaduras, el condensador recibe diferentes nombres, hablándose de condensador esférico, cilíndrico, plano, etc.



EJEMPLO.

La capacidad de un conductor es de 200pF . Determinar:

a) El potencial que adquiere cuando se le comunica una carga de $1\mu\text{C}$.

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ F}}{200 \cdot 10^{-12}} = 5 \cdot 10^3 \text{ voltios}$$

a) La carga almacenada en el mismo, si se encuentra a un potencial de 100V .

$$Q = V \cdot C = 100 \cdot 200 \cdot 10^{-12} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

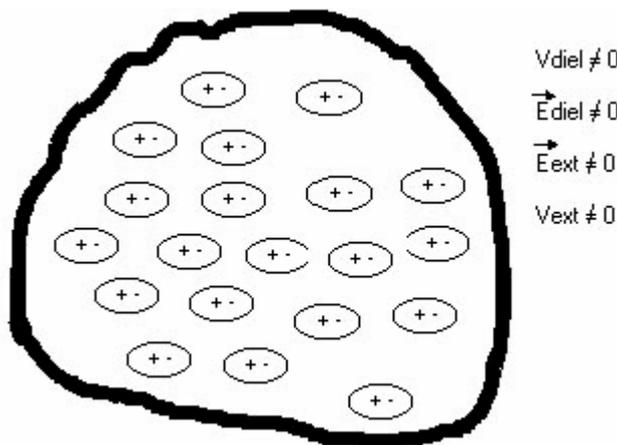
b) ¿Existe algún límite para la carga que puede adquirir este conductor?

En principio, la expresión $C=Q/V$ parece indicar que el conductor es capaz de almacenar cada vez más su potencial. En realidad no ocurre así; cuanto más carga almacena el conductor, mayor es el campo eléctrico que crea a su alrededor. Ello permite que el medio en que se encuentra, en general un dieléctrico, se vuelva conductor. De ese modo, se producirá la descarga del conductor a través del dieléctrico.

◉ Dieléctricos en un campo eléctrico estático

En ausencia de un campo eléctrico externo, las moléculas de un dieléctrico pueden ser polares o apolares. En caso de ser apolares es obvio que éstas, por sí mismas, no son capaces de generar ningún campo eléctrico. Pero incluso siendo las moléculas polares, al estar orientadas aleatoriamente, por excitación térmica, los campos debidos a ellas se cancelan entre sí, y el campo neto que producen es nulo.

En caso de existir un campo eléctrico externo, \vec{E}_{ext} , en cuyo interior se encuentre un dieléctrico, las moléculas de éste no sólo se polarizan en el caso de que fueran apolares, sino que además tienden a se orientarse en el sentido del campo. Ahora, los campos eléctricos asociados a los dipolos no se cancelan mutuamente, sino que contribuyen a generar un nuevo campo eléctrico asociado al dieléctrico, \vec{E}_{diel}



Por superposición el campo eléctrico y potencial totales serán la suma de la contribución externa y la del dieléctrico:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{diel}$$

$$V_{total} = V_{ext} + V_{diel}$$

⇒ Vector de Polarización

Se define *vector de polarización* \vec{P} como la densidad de volumen de momento dipolar dieléctrico cuando el volumen tiende a cero. Este vector nos facilitará el cálculo de \vec{E}_{diel} y V_{diel} .

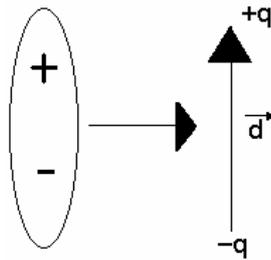
Electrostática

Asociando un momento dieléctrico, \vec{p} , a cada una de las moléculas polares según se muestra en la figura, se define el vector de polarización, \vec{P} , como la densidad de volumen de momento dipolar eléctrico, cuando el volumen tiende a cero.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Delta v'} \vec{p}}{\Delta v'} = \frac{d\vec{p}}{dv'}$$

$\vec{p} \equiv$ momento dipolar de cada molécula encerrada en $\Delta v'$
 $\Delta v' \equiv$ volumen cualquiera en el interior del dieléctrico

$$d\vec{p} = \vec{P} dv'$$



Como el potencial en los dipolos era:

$$V_{dipolo} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

a raíz de esta ecuación hallaremos el potencial en dieléctricos:

$$dV_{diel} = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_{diel} = \int_{V'} dV_{diel} = \int_{V'} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

por lo que,

$$V_{diel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{R^2} dv'$$

Se puede demostrar que V_{diel} se puede escribir como:

$$V_{diel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{R^2} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\delta_{ps}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\delta_{pv}}{R} dv'$$

donde,

$\vec{P}_{s'} \equiv \vec{P}$ en la superficie del dieléctrico

$\vec{a}_n \equiv$ vector normal y unitario a la superficie

$\vec{\delta}_{ps} \equiv$ densidad superficial de carga de polarización

$\delta_{pv} \equiv$ densidad volumétrica de carga de polarización

Electrostática

$$\begin{aligned}\delta_{ps} &= \vec{P}_{s'} \cdot \vec{a}_n \\ \delta_{pv} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\end{aligned}$$

Para utilizar estas expresiones, debemos conocer a priori \vec{P} , vector de polarización del dieléctrico, que depende de cada material.

El dieléctrico al ser neutro, la carga total de polarización, Q_{diel} , es nula. Por tanto se ha de cumplir que:

$$Q_{diel} = Q_{v'} + Q_{s'} = 0 \Rightarrow Q_{v'} = -Q_{s'}$$

siendo,

$$\begin{aligned}Q_{v'} &= \int_{V'} \rho_{pv} dv' \\ Q_{s'} &= \int_{S'} \rho_{ps} ds'\end{aligned}$$

Finalmente, una vez conocido el potencial eléctrico asociado al dieléctrico, su campo eléctrico asociado se podrá calcular como:

$$\vec{E}_{diel} = -\vec{\nabla} V_{diel}$$

⇒ Densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico.

El postulado fundamental en el espacio libre (sin moléculas) viene dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

donde ρ_v es la densidad volumétrica de carga libre

Debido a la presencia de cargas ligadas en dieléctricos, el postulado fundamental queda:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{(\rho_v + \rho_{pv})}{\epsilon_0} \\ \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_v + \rho_{pv}\end{aligned}$$

donde,

ϵ_0 es una constante

ρ_v es la carga libre

ρ_{pv} , es la carga de polarización que es igual a $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\vec{\nabla}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_v + \rho_{pv}$$

$$\vec{\nabla}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_v - \vec{\nabla} \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v$$

Obteniendo el nuevo postulado fundamental definido como:

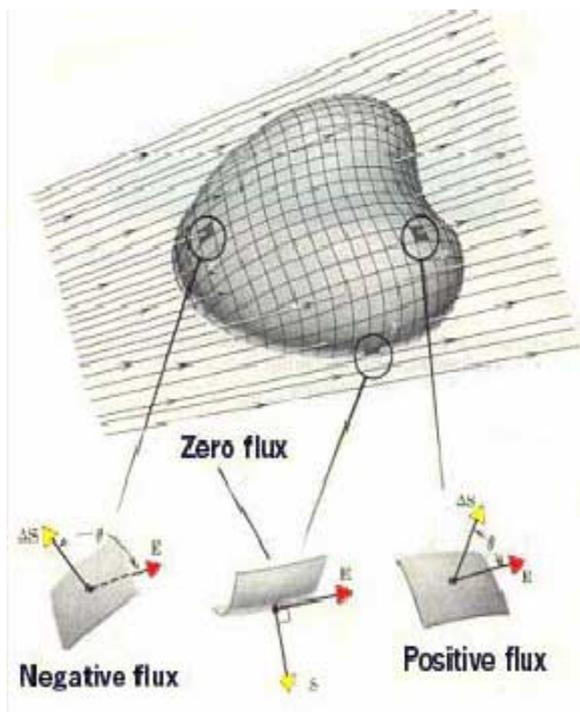
$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_v$$

donde:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

es la **densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico**. Sus dimensiones son de carga/superficie, y por lo tanto su unidad en el Sistema Internacional será C/m². En este parámetro estaría la información de si hay dieléctrico o no.

Integrando en un volumen V al nuevo postulado fundamental $\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_v$, y aplicando el teorema de la Divergencia, se llega al **teorema de Gauss generalizado**:



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_v$$

“El flujo del desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga libre encerrada por dicha superficie”

⇒ Constante Dieléctrica

Si nos encontramos ante un caso de dieléctrico lineal, el vector de polarización y el campo eléctrico son proporcionales:

$$\vec{P} = \epsilon_0 x_e \vec{E}$$

donde x_e es la susceptibilidad eléctrica (y es adimensional) y su valor depende del medio. Si sustituimos en la definición de \vec{D} obtendremos :

$$\vec{D} = \epsilon_0 x_e \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (x + 1) \vec{E}$$

y llamando ϵ a $\epsilon = \epsilon_0 (x + 1)$ que es la permitividad absoluta y viene dada en [F/m]=[C/V·m], obtendremos finalmente que :

$$\vec{D} = \vec{E} \epsilon$$

En un medio anisótropo las propiedades eléctricas dependen de la dirección, por lo que \vec{D} y \vec{E} no tienen por qué ser paralelos. En estos medios la permitividad absoluta se modela mediante una matriz.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Nosotros consideraremos medios isótropos, donde ϵ toma valores reales. Si además el medio es homogéneo ϵ es constante en todo él. Un material lineal, isótropo y homogéneo se dice que es simple ($\epsilon = cte$, real y positivo); es decir, el desplazamiento eléctrico es un vector con la misma dirección y sentido que el campo eléctrico.

Si nos encontramos en el vacío entonces tendremos que:

$$\vec{D} = \vec{E} \epsilon_0$$

Se define la permitividad relativa o **constante dieléctrica** como la relación entre la permitividad del medio y la del vacío:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = x_e + 1$$

de donde se deduce que en el vacío, $\epsilon = \epsilon_0$, $\epsilon_r = 1$ y $x_e = 0$, y en un dielectrico lineal, $\epsilon_r > 1$.

También se define la permitividad absoluta como:

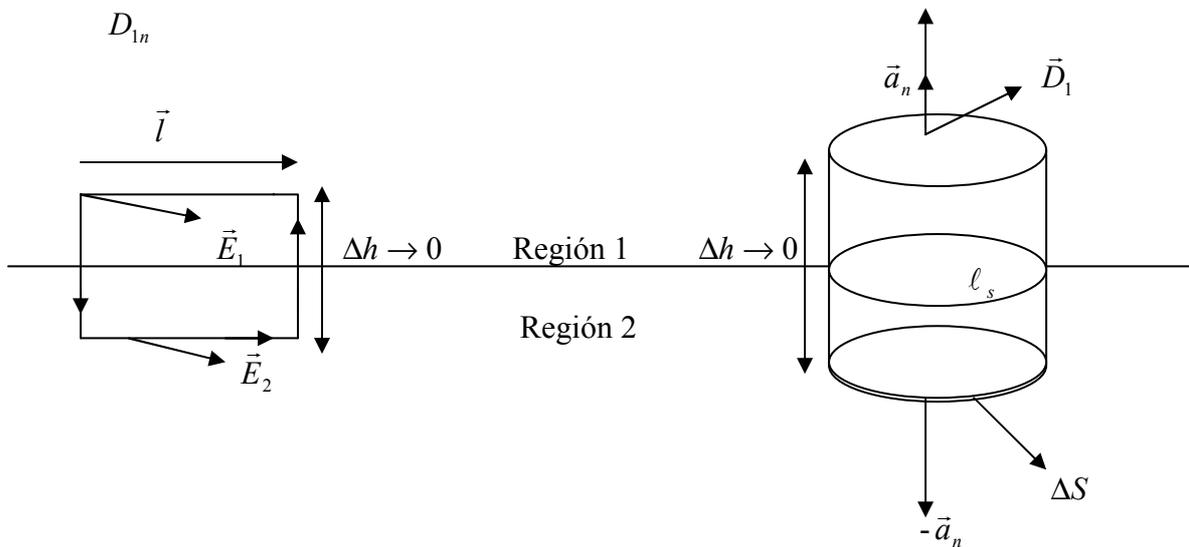
$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

La tabla que sigue proporciona el valor de la constante dieléctrica relativa de algunas sustancias:

Sustancia	ϵ_r	Sustancia	ϵ_r
Vacío	1	Cera	7-8
Aire	1,0006	Cuarzo	3-4
Agua (vapor)	1,0126	Mica	5-8
Agua(líquida)	80	Parafina	2,1-2,5
Aceite	2-5	Porcelana	6-8
Benceno	2,28	Poliestireno	2,5
Caucho	2-4	Vidrio	5-10

© **Condiciones de contorno para campos electrostáticos.**

Consideremos la entrecara entre dos dieléctricos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , y que ocupan las regiones 1 y 2 como vemos en la siguiente figura



- *Condiciones de contorno para la componente tangencial.*

Primero examinaremos las componentes tangenciales calculando $\oint_c \vec{E} d\vec{l} = 0$ alrededor de la trayectoria cerrada de la *figura de la izquierda*, cuando $\Delta h \rightarrow 0$:

$$\oint_c \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_2 \vec{l} + \vec{E}_1 (-\vec{l}) = E_{2t} l - E_{1t} l = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

Luego las componente tangencial del campo eléctrico se conserva al atravesar la superficie de separación de los dos medios.

Electrostática

- *Condiciones de contorno para la componente normal.*

Ahora empleando el teorema de Gauss sobre la *superficie de la derecha*:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q_v$$

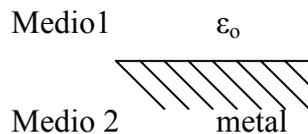
La única carga libre encerrada en S , cuando $\Delta h \rightarrow 0$, es la existente en la intercara, cuya densidad superficial de carga libre vale ℓ_s .

$$\Delta h \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} Q_v = \ell_s \Delta S \\ \oint \vec{D} d\vec{s} = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \ell_s \Delta S \end{array} \right. \rightarrow \boxed{D_{1n} - D_{2n} = \ell_s}$$

La componente normal al vector desplazamiento eléctrico sufre una discontinuidad al atravesar una superficie cargada, igual a la densidad superficial de carga en el punto de separación.

EJEMPLO.

Condiciones de contorno entre un metal y el vacío:



$$\begin{array}{l} E_2=0 \rightarrow D_2=0 \rightarrow D_{2n}=0 \\ D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \Rightarrow D_{1n}=\rho_s \\ D_{1n}=\epsilon_0 E_{1n}=\epsilon_0 E_1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} E_2=0 \\ D_{1n}-D_{2n} \\ D_{1n} \end{array}} \right\} E_1=\rho_s/\epsilon_0$$

Por ser un conductor el campo es perpendicular a su superficie

⇒ Rigidez Dieléctrica

Si a un dieléctrico le sometemos a campos eléctricos crecientes, a partir de un cierto valor de éste, el dieléctrico deja de comportarse como tal, empezando a conducir, diciéndose que el dieléctrico se ha perforado o ha sufrido ruptura.

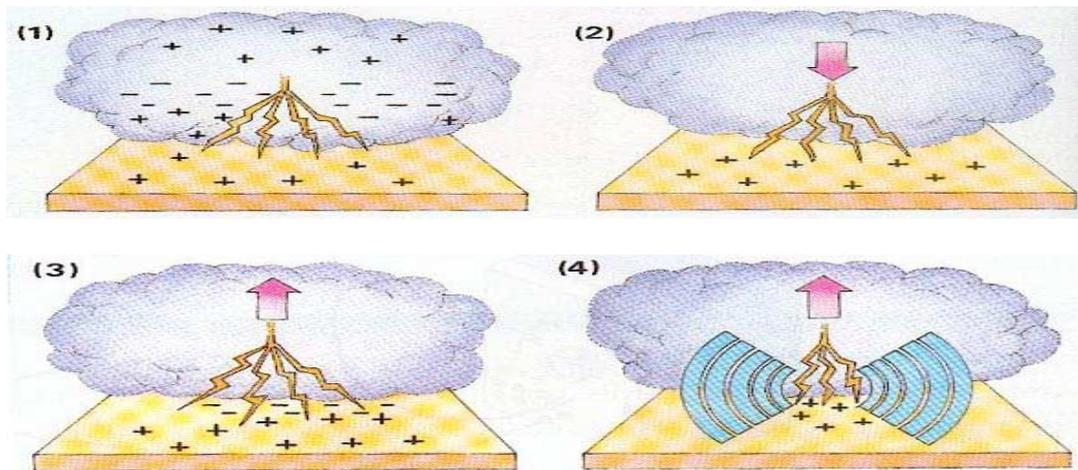
El valor numérico del campo para el cual esto sucede es característico de cada dieléctrico y se denomina *rigidez dieléctrica*. En la siguiente tabla se dan los valores de ésta para algunos dieléctricos:

Dieléctrico	Rigidez x 10^3 V/m
Aire	3
Porcelana	6
Aceite	12-15
Parafina	10
Papel	14-16
Poliestireno	22
Baquelita	24
Vidrio	25
Cuarzo (fundido)	30
Plexiglás	40

Los dieléctricos, además de aumentar la capacidad de los condensadores, realizan en éstos otras dos importantes misiones. Por una parte, aseguran la separación de las armaduras del condensador, las cuales deben estar muy próximas para aumentar la capacidad; por otra, al tener una rigidez dieléctrica superior a la del aire, permiten mantener diferencias de potencial entre las armaduras que no serían posibles sin ellos, ya que el aire resulta perforado para 3000 V/m, al ionizarse y empezar a conducir.

CURIOSIDAD.

Las tormentas y sus relámpagos.



Los relámpagos ocurren cuando se origina una gran carga positiva en las partes superiores congeladas de una nube y una gran carga negativa (junto con área positiva más pequeña) en la porción inferior de la nube, donde nace la descarga inicial (1). Como la base de la nube está cargada negativamente, es atraída hacia la tierra, normalmente positiva, y por fin el relámpago describe su camino conductivo a través del aire (2).

El ataque de vuelta es una descarga positiva desde el suelo a la nube y se ve como un rayo (3). La enorme onda de energía de la descarga de regreso –de 100 millones de voltios- que viaja hacia arriba por la línea conductiva da como resultado una detonación sónica conocida como trueno(4)-

PRACTICA CASERA.

Material necesario:

- un peine
- un grifo de agua.

Procedimiento a seguir:

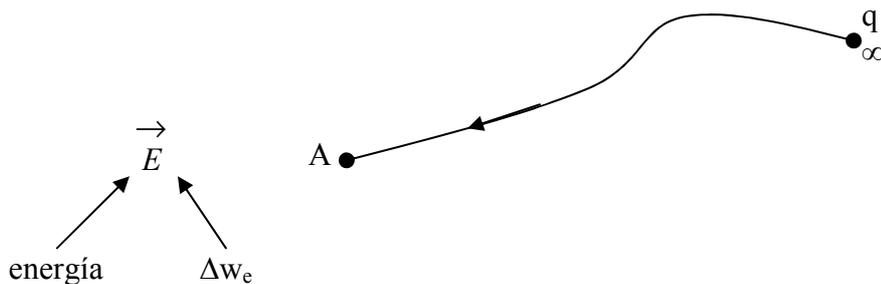
Abre el grifo de agua y regúlalo de manera que fluya un hilo muy fino. Coge ahora el peine y pásalo varias veces por el pelo, peinandote.

Una vez realizado lo anterior, aproxima el peine al agua; observarás que ésta es atraída por el peine, desviándose en su camino.

7. ENERGIA ELECTROSTÁTICA.-

© **Distribución discreta**

Supongamos una región donde existe un campo eléctrico \vec{E} , y queremos traer una carga q desde el infinito hasta un punto A.



(la energía asociada a este campo se le asocia otro elemento de energía Δw_e)

El trabajo para trasladar la carga q , en contra de la fuerza electrostática, supone un incremento de la energía electrostática del sistema Δw_e .

$$\Delta w_e = \int_{\infty}^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_{elec} = -q\vec{E} \Rightarrow \Delta w_e = \int_{\infty}^A (-q\vec{E}) \cdot d\vec{r} = \int_A^{\infty} q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \Delta w_e = -q \int_A^{\infty} \vec{\nabla} \cdot V d\vec{r} \Rightarrow \Delta w_e = -q \int_A^{\infty} dV \Rightarrow \Delta w_e = -q \cdot (V_{\infty} - V_A)$$



Electrostática

$$\Delta W_e = q \cdot V_A$$

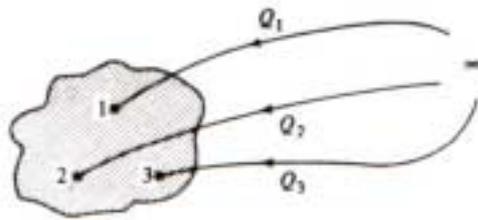
(este es el caso para una sola carga)

ΔW_e es el incremento de la energía electrostática por incorporar la carga q en el punto A. Se almacena en forma de energía potencial del sistema.

Supongamos ahora una región libre de carga con $\vec{E} = \vec{0}$ en todas partes, a la que queremos traer una distribución discreta de cargas. La energía potencial del sistema, W , será la suma de la energía potencial necesaria para traer cada una de las cargas:

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = \sum_{i=1}^n w_i$$

donde w_i es la energía para traer la carga i desde el infinito.



Analicemos el trabajo realizado para el caso en el que queremos trasladar tres cargas desde el infinito. El trabajo requerido para colocar la primera carga Q_1 , en la posición 1 es cero, ya que inicialmente no hay campo. Al mover la siguiente carga Q_2 , se requiere un trabajo igual al producto de la carga por el potencial creado por Q_1 en Q_2 . Para traer Q_3 , el trabajo es el producto de dicha carga por la suma de los potenciales debidos a Q_1 y Q_2 en Q_3 . Por tanto, el trabajo total realizado al colocar las tres cargas es:

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (Q_2 \cdot V_{21}) + (Q_3 \cdot V_{31} + Q_3 \cdot V_{32})$$

$$V_{ji} \equiv \text{potencial en el punto } j \text{ debido a la carga } Q_i.$$

Ahora, si traemos las cargas en orden inverso quedaría:

Electrostática

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + (Q_2 \cdot V_{23}) + (Q_1 \cdot V_{13} + Q_1 \cdot V_{12})$$

Sumando las dos expresiones obtenemos dos veces la energía almacenada:

$$2W_E = Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32})$$

El término $Q_1(V_{12} + V_{13})$ es el trabajo realizado en contra de los campos de Q_2 y Q_3 , así que $(V_{12} + V_{13}) = V_1$, es decir, potencial en la posición 1. Entonces:

$$2W_E = Q_1 \cdot V_1 + Q_2 \cdot V_2 + Q_3 \cdot V_3$$

Generalizando, para una distribución de n cargas discretas la energía electrostática viene dada por:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m \cdot V_m$$

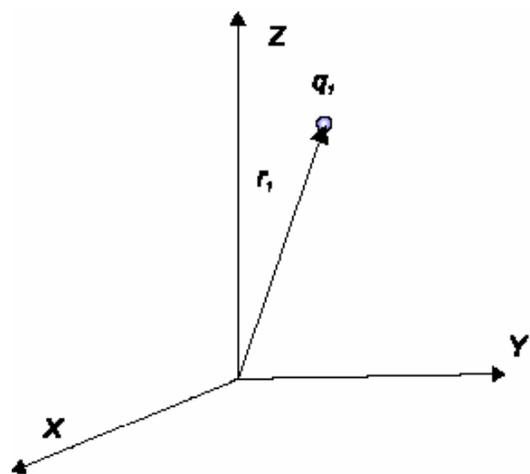
$V_m \equiv$ potencial en la posición de la carga Q_m , debido al resto de las cargas.

Otra forma de ver esto sería trayendo todas las cargas, una a una.

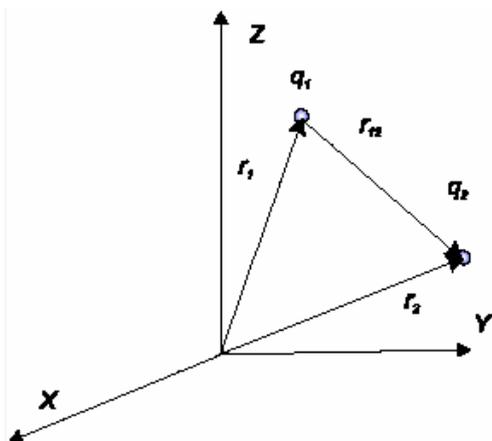
- **Para q_1 :**

$$W_1 = 0$$

Ya que antes no existe campo eléctrico.



- **Para traer q_2 :**



V_2 es el potencial en q_2 debido a q_1

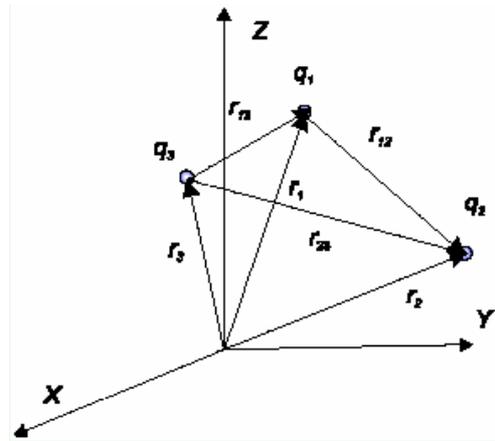
$$\left. \begin{aligned} w_2 &= q_2 V_2 \\ V_2 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r_{12}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$W_2 = q_2 \cdot \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r_{12}} \right)$$

- **Para traer q₃:**

$$\left. \begin{aligned} w_3 &= q_3 V_3 \\ V_3 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_o r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_o r_{23}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$



- **Para traer la carga n-ésima sería:**

$$W_n = \frac{q_n}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1}{r_{1n}} + \frac{q_2}{r_{2n}} + \dots + \frac{q_{(n-1)}}{r_{(n-1)n}} \right)$$

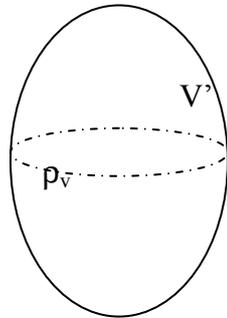
Sumando todas las contribuciones, se llega a que la energía del sistema es igual a:

$$W_n = \sum_{i=1}^N w_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^N q_i \cdot V_i$$

$V_i \equiv$ potencial electrostático en la posición que ocupa q_i , debido al resto de las cargas.

© **Distribución continua**

Queremos calcular la energía potencial electrostática almacenada en una distribución de carga continua, con densidad de carga libre ρ_v . Atribuyendo a una carga infinitesimal el comportamiento de una puntual:



$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow dq \\ q_i V_i &\rightarrow dq V = \rho_v \cdot V dv \end{aligned}$$

Si integramos en todo el volumen donde existe carga libre, V' , la energía electrostática del sistema vendrá dada por:

$$w_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho_v V dv$$

En función de \vec{E} y \vec{D}

$$\rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \Rightarrow w_e = \int_{V'} V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dv$$

Utilizando la siguiente propiedad:

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) = V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V \Rightarrow V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V$$

llegamos a:

$$w_e = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{V'} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) dv}_{\text{Teorema Divergencia}} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{V'} \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V dv}_{\vec{E} = -\vec{\nabla} V} = \frac{1}{2} \oint_{S'} V \vec{D} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

S' es la superficie que rodea a V' .

Electrostática

Como el resultado es independiente de V' , mientras dentro de V' se encuentren todas las cargas libres, se elige $V' = \infty$ ($R \rightarrow \infty$).

Entonces, como la dependencia con la distancia de las diferentes magnitudes involucradas es:

$$\left. \begin{array}{l} V \rightarrow \frac{1}{R} \\ \vec{D} \rightarrow \frac{1}{R^2} \\ d\vec{s} \rightarrow \frac{1}{R^2} \end{array} \right\} \oint_{s' \rightarrow \infty} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv}$$

Diferenciando la energía se obtiene:

$$\boxed{\frac{dW_e}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \cdot \vec{E}}$$

Esta expresión se conoce como **densidad volumétrica de energía**

Para un *medio lineal*: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, con lo que:

$$w_e = \frac{1}{2} \int_{v' \rightarrow \infty} \epsilon E^2 \, dv \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_e}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$\boxed{W_e = \frac{dW_e}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon E^2}$$

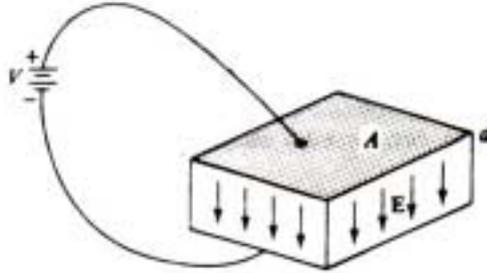
Existe energía allá donde exista campo eléctrico.

• Ejemplo

Un condensador de placas paralelas, tal que $C = \epsilon \cdot \left(\frac{A}{d} \right)$, tiene un voltaje constante V aplicado entre las placas. Encuentre la energía almacenada en el campo eléctrico.

Despreciando el efecto de bordes, el campo es $E = (V/d)$ entre las placas y $E=0$ en cualquier otro lugar.

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon \cdot E^2 dv = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 \int dv = \frac{\epsilon \cdot A \cdot V^2}{2d} = \frac{1}{2} CV^2$$



8.- ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE.-

Hasta ahora hemos visto técnicas de integración para determinar la intensidad del campo eléctrico, el potencial eléctrico y la densidad del flujo eléctrico de distribuciones de carga. A continuación expondremos otras técnicas, que consisten en resolver las ecuaciones diferenciales de Poisson y Laplace que rigen la electrostática. Para ello, será necesario especificar las condiciones en la frontera conductor-espacio libre (o dieléctrico).

Para obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace, partiremos de los postulados fundamentales de la electrostática en notación diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Sabemos que la naturaleza irrotacional de \mathbf{E} , indicada por la ecuación 1.2, nos permite definir un potencial eléctrico escalar V como:

$$\mathbf{E} = - \nabla V$$

En un medio lineal $D = \epsilon \cdot E$, y la ecuación anterior se convierte en:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_v$$

que, sustituyendo la relación entre el campo y el potencial, queda:

$$\nabla (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

donde ϵ puede depender de la posición. En el caso de un medio simple, por tanto homogéneo, ϵ es constante y se ve afectado por la divergencia. Así, despejando ϵ , tenemos que:

$$\epsilon \cdot \nabla \cdot \nabla V = -\rho_v$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

En la ecuación anterior se ha introducido el operador laplaciano, ∇^2 , que representa “la divergencia del gradiente” de cualquier potencial escalar. Dicha ecuación se conoce como ecuación de Poisson. En coordenadas cartesianas se tiene que:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \nabla \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Y la ecuación de Poisson queda como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

De forma similar, podemos obtener las siguientes expresiones de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas y esféricas.

- Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

- Coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Electrostática

La resolución de la ecuación de Poisson en tres dimensiones sujeta a condiciones en la frontera establecidas no es fácil. En aquellos puntos de un medio simple donde no haya cargas libres, $\rho_v = 0$, la ecuación 1.6 se reduce a la siguiente:

$$\nabla^2 V = 0$$

que se conoce como ecuación de Laplace. Ésta, como la ecuación de Poisson, ocupan un lugar muy importante dentro del electromagnetismo. En coordenadas cartesianas tenemos que la ecuación de Laplace queda,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

y expresiones análogas en coordenadas cilíndricas y esféricas, haciendo $\rho_v = 0$.

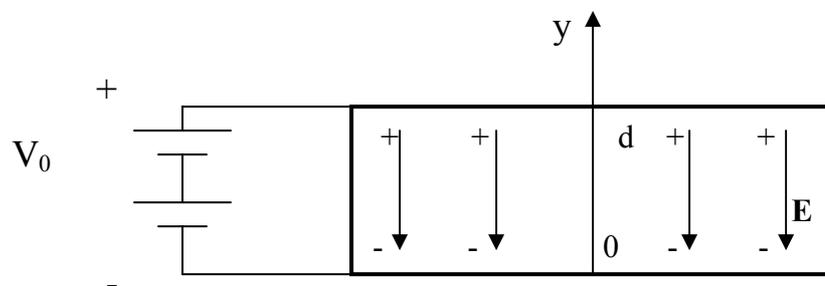
⊙ Problemas con valores en la frontera

A continuación veremos cómo resolver las ecuaciones de Poisson y Laplace cuando por la simetría del problema éstas sólo dependen de una sola variable. Lo haremos mediante la resolución de algunos ejemplos.

- *En coordenadas cartesianas.*

Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia d y se mantienen a potenciales de 0 y V_0 , como se ilustra en la figura. La región entre las placas está llena con una distribución continua de electrones que tiene densidad volumétrica de carga, $\rho_v = -\rho_0 y/d$. Suponga que el efecto marginal en los bornes es insignificante y determine:

- el potencial en cualquier punto entre las placas, y ,
- las densidades superficiales de carga en las placas.



Condensador de placas paralelas

SOLUCIÓN:

La ecuación determinante es la ecuación de Poisson, que en este caso, con el sistema de coordenadas elegido se simplifica a:

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d} y$$

ya que el campo eléctrico es perpendicular a las placas. Al integrar dos veces la ecuación anterior tenemos:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + C_1 y + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar con las condiciones en la frontera sobre las dos placas conductoras. Éstas son:

$$\text{-En } y = 0, V = 0 = C_2$$

$$\text{-En } y = d, V = V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d \Rightarrow C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}$$

Al sustituir los valores anteriores de C_1 y C_2 en el potencial se llega a la solución de la ecuación de Poisson:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) y$$

Por otro lado, sabemos que la intensidad del campo eléctrico es $-\nabla V$, que en coordenadas cartesianas será :

$$E(y) = -\mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} = -\mathbf{a}_y \left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d} y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) \right]$$

Las densidades superficiales de carga sobre las placas conductoras pueden determinarse por la condición de contorno en ellas para el campo eléctrico.

- En la placa inferior, $y = 0$.

$$\rho(0) = \epsilon_0 E(0) = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}$$

- En la placa superior, $y = d$.

$$\rho(d) = \epsilon_0 E(d) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{3}$$

En este caso, $\rho(0) \neq \rho(d)$, y ya no tiene sentido calcular la capacitancia.

Electrostática

- En coordenadas cilíndricas.

En aquellos casos donde hay simetría cilíndrica, es decir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cong 0$$

y la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

donde V es función únicamente de la dimensión radial r . Esta ecuación puede integrarse dos veces para dar:

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

donde las constantes de integración C_1 y C_2 están determinadas por las condiciones en la frontera de los problemas.

Y si el problema es tal que el potencial eléctrico sólo depende del ángulo ϕ , y no de las direcciones r y z , la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

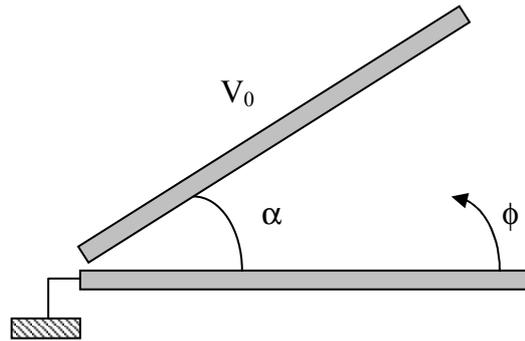
que integrando dos veces da lugar al siguiente potencial,

$$V(\phi) = K_1 \phi + K_2$$

con K_1 y K_2 a determinar por las condiciones de contorno. Veamos el siguiente ejemplo:

Dos planos conductores aislados infinitos que se mantienen a potenciales de 0 y V_0 constituyen una configuración en forma de cuña, como se ilustra en la figura. Determine las distribuciones de potencial en las regiones:

$$\begin{cases} 0 < \phi < \alpha \\ \alpha < \phi < 2\pi \end{cases}$$



Dos planos conductores aislados infinitos, mantenidos a potenciales constantes

SOLUCIÓN:

En este ejemplo tenemos que:

a) Para $0 \leq \phi \leq \alpha$:

$$\text{En } \alpha = 0: V(0) = 0 = K_2$$

$$\text{En } \phi = \alpha: V(\alpha) = V_0 = K_1 \alpha \rightarrow K_1 = \frac{V_0}{\alpha}$$

Por lo tanto, queda:

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\alpha} \phi$$

b) Para $\alpha \leq \phi \leq 2\pi$:

$$\text{En } \phi = \alpha: V(\alpha) = V_0 = K_3 \alpha + K_4$$

$$\text{En } \phi = 2\pi: V(2\pi) = 0 = 2\pi K_3 + K_4$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

$$K_3 = -\frac{V_0}{2\pi - \alpha}$$

y

$$K_4 = \frac{2\pi V_0}{2\pi - \alpha}$$

Finalmente, el potencial se puede expresar como:

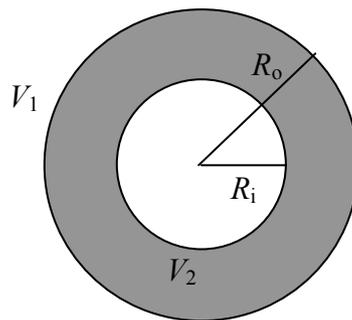
$$V(\phi) = \frac{V_0}{2\pi - \alpha} (2\pi - \phi)$$

Electrostática

- En coordenadas esféricas.

Se utiliza en caso de que el problema tenga simetría esférica, como en el siguiente ejemplo:

Los radios interior y exterior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son R_i y R_o , respectivamente. El espacio entre las capas está lleno con un material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial V_1 y la exterior a V_2 . Determine la distribución de potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace.



Dos capas conductoras concéntricas mantenidas a potenciales constantes

SOLUCIÓN:

Puesto que la situación presentada tiene simetría esférica, el potencial eléctrico es independiente de θ y de ϕ . Como además $\rho_v = 0$, se obtiene la siguiente ecuación unidimensional de Laplace:

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0$$

Al integrar una vez la ecuación anterior con respecto a R se tiene:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}$$

y una segunda integración produce:

$$V = -\frac{C_1}{R} + C_2$$

donde las dos constantes de integración C_1 y C_2 , se determinan a partir de las condiciones en la frontera en las dos capas conductoras.

- En $R = R_i$,

$$V(R_i) = V_1 = -\frac{C_1}{R_i} + C_2$$

Electrostática

- En $R = R_o$,

$$V(R_o) = V_2 = -\frac{C_1}{R_o} + C_2$$

La solución de las ecuaciones anteriores nos da:

$$C_1 = -\frac{R_o R_i (V_1 - V_2)}{R_o - R_i}$$

y

$$C_2 = \frac{R_o V_2 - R_i V_1}{R_o - R_i}$$

Por lo tanto, la distribución de potencial entre las dos capas es,

$$V(R) = \frac{1}{R_o - R_i} \left[\frac{R_o R_i}{R} (V_1 - V_2) + R_o V_2 - R_i V_1 \right], \quad R_i \leq R \leq R_o$$

Podemos observar en esta ecuación que V es independiente de la constante dieléctrica del material aislante.

⊙ Método de las variables separadas

Cuando se trata de resolver problemas que consisten en una serie de conductores que están a un potencial determinado, y el espacio entre conductores está vacío, el método a seguir consiste en resolver la ecuación de Laplace, empleando como condiciones de contorno, el potencial o el campo eléctrico en la superficie de los conductores. En general la solución es relativamente fácil cuando la geometría de los conductores y sus posiciones relativas permiten utilizar el método de separación de variables, es decir, se puede utilizar un sistema de coordenadas en el que se dan las condiciones de separabilidad. La separabilidad consiste en que la función potencial puede expresarse como producto de tres funciones, cada una de las cuales depende de una sola coordenada. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Entonces la ecuación de Laplace, en derivadas parciales, se transforma en tres ecuaciones diferenciales, una para cada coordenada. Supongamos que el potencial admite una solución de la forma:

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación de Laplace y dividimos por $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$:

Electrostática

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Como cada uno de los sumandos depende únicamente de su variable respectiva, la única forma de que este resultado sea cierto es que cada sumando sea una constante. O sea:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

donde las constantes α , β y γ tienen que satisfacer la siguiente condición:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

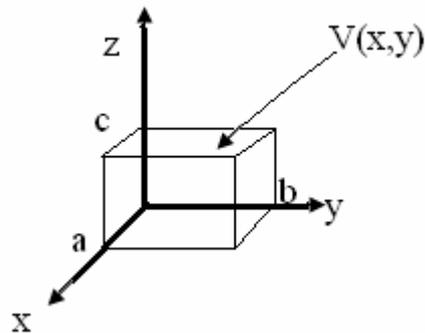
y dependerán de las condiciones de frontera sobre los conductores.

Las soluciones de las nuevas ecuaciones diferenciales de variable única son:

$$\begin{aligned} X(x) &= \text{sen}(\alpha x) \\ Y(y) &= \text{sen}(\beta y) \\ Z(z) &= \text{senh}(\gamma z) \end{aligned}$$

Veamos la metodología del método de separación de variables con el siguiente ejemplo:

Como se observa en la figura, tenemos un cubo en el que, el potencial es cero en todas las caras, salvo en la superficie (en la cara de arriba), que vale $V(x,y)$. Determinar la solución general del potencial en cualquier punto del espacio.



Si nos fijamos en las ecuaciones anteriores, es decir:

$$\begin{aligned} X(x) &= \text{sen}(\alpha x) \\ Y(y) &= \text{sen}(\beta y) \\ Z(z) &= \text{senh}(\gamma z) \end{aligned}$$

Para X e Y se cumplen las siguientes condiciones de contorno:

Electrostática

$$\text{-Para } x = a: V = 0 \rightarrow X(a) = \text{sen}\beta a = 0$$

$$\text{-Para } y = b: V = 0 \rightarrow Y(b) = \text{sen}\beta b = 0$$

Entonces:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{y} \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

donde: α_n y $\beta_m \in \mathbb{Z}$

Por lo que :

$$\gamma^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow \gamma_{n,m} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

Entonces tenemos que la solución particular será:

$$V_{m,n} = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) + \text{senh}\left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}z\right)$$

Y la solución general es la suma de las soluciones particulares. Así:

$$V(x, y) = \sum_{m,n} V_{m,n} \cdot A_{m,n}$$

donde $A_{m,n}$ se calcula con la siguiente condición de contorno:

$$\text{- En } z = c, V = (x, y)$$

Y haciendo el desarrollo en serie de Fourier de $V(x, y)$ se llega a que:

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab \text{sen}(\gamma_{m,n} \cdot c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy dx$$

9.- MÉTODO DE LAS IMÁGENES.-

Hay problemas con condiciones en la frontera en los que la resolución de la ecuación de Poisson o de Laplace directamente es muy compleja. En estos casos, a veces, algunas de las distribuciones de carga de un problema pueden sustituirse por

otras, llamadas cargas imagen, de forma que se pueda calcular el potencial de forma sencilla. La condición que deben cumplimentar las cargas imagen es que se conserven las condiciones de contorno del problema original. A este método se le conoce como Método de las Imágenes y la solución obtenida será válida en aquellas regiones donde permanecen cargas originales.

Antes de profundizar en el método es necesario conocer el teorema de la unicidad, que dice que una solución de la ecuación de Poisson que satisface un conjunto de condiciones en la frontera o contorno, es una solución única.

Por este teorema, si encontramos una solución para un problema que cumple un conjunto de condiciones en la frontera, ésta es la única solución posible, independientemente del método usado.

Veamos como se aplica el método de las imágenes con varios ejemplos:

© **Carga puntual cercana a un plano conductor**

Una carga positiva Q está situada a una distancia d de un plano conductor infinito conectado a tierra, como se muestra en la figura 1. Calcule:

- a) el potencial en un punto arbitrario $P(x,y,z)$ de la región $y > 0$.
- b) la distribución de carga inducida sobre la superficie del plano conductor.

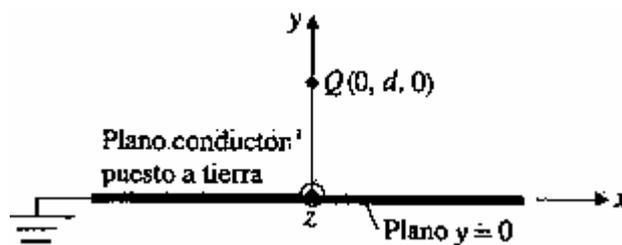


Figura 1

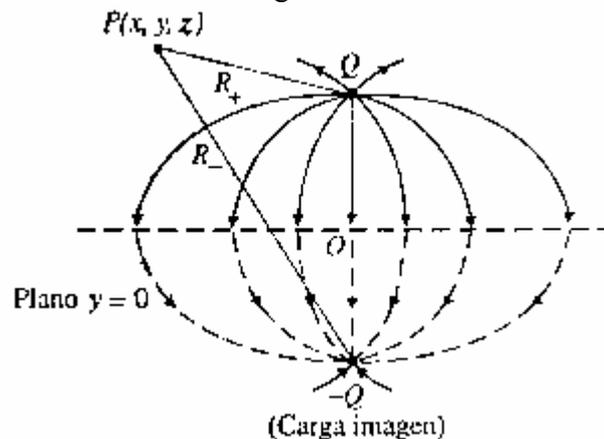


Figura 2

SOLUCIÓN:

Una forma de hacerlo es resolviendo la ecuación de Poisson para $y > 0$, sujeta a la condición en la frontera: $V = 0$ en $y = 0$. No obstante, de esta forma sería muy difícil hallar la solución, por lo que resolvemos el problema mediante el método de las imágenes.

Para ello, eliminamos el plano conductor y lo sustituimos por la carga puntual imagen $-Q$, en $y = -d$ (figura 2). De esta forma no cambian las condiciones en la frontera, ni por tanto la situación en la región $y > 0$. Observando la figura 2 podemos escribir el potencial en cualquier punto debido a las dos cargas como:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

donde R_+ y R_- son, respectivamente, la distancia a las cargas Q y $-Q$. Por tanto:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right]$$

Vemos que para $y=0$: $V(x, 0, z) = 0$. Puesto que se satisfacen las condiciones en la frontera, la expresión para V es la solución única para $y > 0$.

Calculemos ahora la densidad superficial de carga inducida en el plano. Ésta es:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y \Big|_{y=0}$$

ya que el campo eléctrico en el plano $y = 0$ es perpendicular a éste, por existir un conductor. O sea,

$$\left(E_z \Big|_{y=0} = E_x \Big|_{y=0} = 0 \right)$$

Por tanto, necesitamos conocer primero el campo, cuya expresión general sería:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y(y+d) + \mathbf{a}_z z}{\left[x^2 + (y+d)^2 + z^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y(y-d) + \mathbf{a}_z z}{\left[x^2 + (y-d)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right]$$

En la superficie del conductor el campo vale:

$$\mathbf{E} = E_y(y=0)\mathbf{a}_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2d}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \mathbf{a}_y$$

con lo que ρ_s vale:

$$\rho_s = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}}$$

El método de las imágenes sólo puede usarse para determinar los campos en la región donde no se encuentran las cargas imagen. Por ello, en el ejemplo anterior, no podemos usar Q y $-Q$ para calcular V ó E en $y < 0$. De hecho, en esta región, valen 0.

⊙ Línea de carga cercana a un cilindro conductor paralelo

Consideremos ahora el problema de una línea de carga con densidad lineal ρ_l (C/m), situada a una distancia d del eje de un cilindro conductor paralelo, de radio a (suponemos que la línea y el conductor son infinitamente largos).

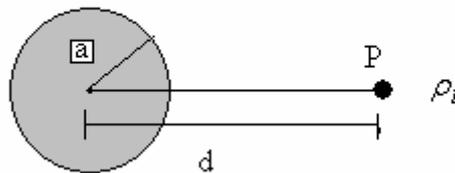


Figura 3

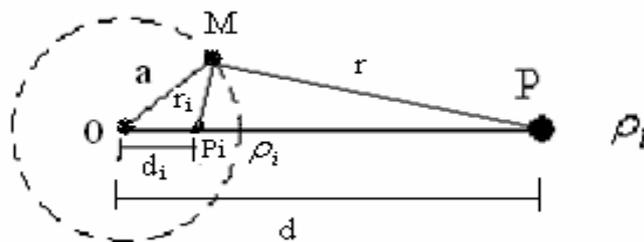


Figura 4

Hemos de tener en cuenta las siguientes observaciones: la imagen debe ser una línea de carga paralela dentro del cilindro, para que la superficie cilíndrica (en $r = a$) sea equipotencial. Esta línea tendrá una densidad de carga ρ_i . Debido a la simetría del problema con respecto a la línea OP , la línea de carga imagen debe estar a lo largo de OP . Supongamos que está en el punto P_i a una distancia d_i del eje.

Por simplicidad, supongamos que:

Electrostática

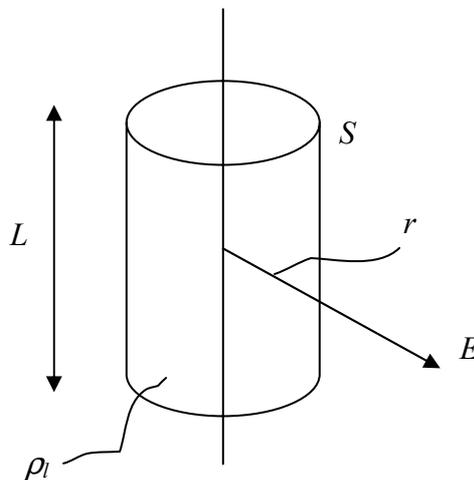
$$\rho_i = -\rho_l$$

Veamos ahora si con esta carga origen se obtiene un valor para d_i , de forma que la superficie $r = a$ sea equipotencial. Si es así, la solución que se obtenga para V será válida para puntos exteriores al conductor cilíndrico.

El potencial eléctrico a una distancia r de una línea de carga, con densidad ρ_l , puede determinarse integrando el campo de la forma:

$$V = -\int_{r_0}^r \mathbf{E}_r dr$$

ya que por simetría, el campo sólo tiene componente radial, con su módulo dependiendo de la distancia a la línea. Para hallar el campo, aplicamos el teorema de Gauss a una superficie concéntrica S , de radio r y longitud L , como indica la figura:



$$\oint_S \mathbf{E} ds = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S E ds = \int_{\text{sup. lateral}} E ds = E \int_{\text{sup. lateral}} ds = 2\pi r L$$

y como $Q_v = \rho_l L$, tenemos que:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{a}_r$$

con lo que el potencial viene dado por:

$$V = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

Electrostática

Obsérvese que se ha calculado el potencial entre dos puntos, a una distancia r y r_0 respectivamente de la línea de carga. Esto es porque el punto de referencia del potencial cero no puede estar en el infinito, ya que si hacemos $r_0 = \infty$ en la ecuación anterior V sería infinito.

El potencial en un punto sobre o fuera de la superficie del cilindro, se obtiene sumando las contribuciones de ρ_l y ρ_i . Por ello, para un punto M sobre la superficie del cilindro, el potencial VM vale ($\rho_l = -\rho_i$).

$$V_M = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_i}$$

donde r y r_i son, respectivamente, las distancias desde cualquier punto de la superficie del conductor cilíndrico a las cargas ρ_l y ρ_i . Por tanto:

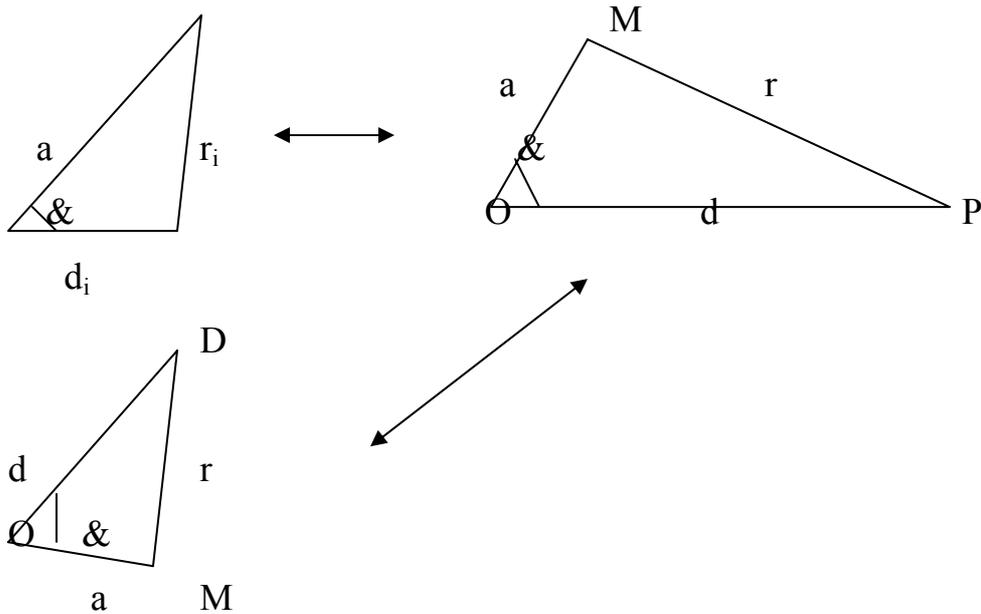
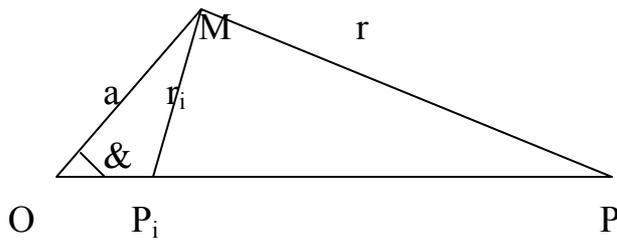
$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_i}$$

Hemos elegido el punto de referencia del potencial cero en un punto equidistante de ρ_l y ρ_i , para que sean iguales los términos en $\ln r_0$ y se cancelen ; si no hubiésemos tenido que añadir un término constante al lado derecho de la ecuación anterior. Así, la superficie del conductor será equipotencial si

$$\frac{r}{r_i} = cte \quad \forall M$$

El punto Pi debe estar situado de manera que los triángulos OMPi y OPM sean semejantes. Estos triángulos ya tienen un ángulo común, α , con lo que a partir de las figuras

Electrostática



$$\frac{r_i}{r} = \frac{d}{a} = \frac{a}{d_i}$$

De la última igualdad podemos ver que:

$$d_i = \frac{a^2}{d}$$

Por tanto, la línea de carga imagen $\rho_i = -\rho_l$ colocada a una distancia d_i del centro del cilindro conductor, hacia la derecha, en la línea que une P_l con el centro del cilindro conductor, puede entonces sustituir al cilindro conductor, y podemos determinar V y E en cualquier punto fuera de su superficie. Por simetría, vemos que la superficie cilíndrica paralela que rodea a la carga original ρ_l , con radio a , y eje a una distancia d_i a la derecha de P , también es una superficie equipotencial.

Esto nos permite calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de transmisión abierta formada por dos conductores paralelos de sección transversal circular. Lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

⊙ **Capacidad de dos alambres paralelos**

Determine la capacitancia por unidad de longitud entre dos largos alambres conductores circulares paralelos de radio a . Los ejes de los alambres están separados una distancia D .

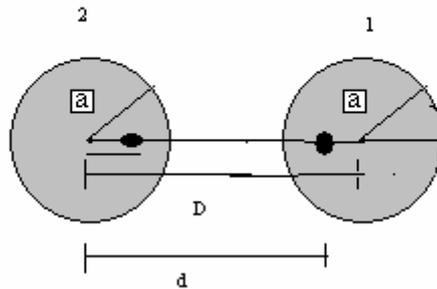


Figura 5

SOLUCIÓN:

Si observamos la figura vemos que las superficies equipotenciales de los dos alambres pueden considerarse como generadas por un par de líneas de carga, $+\rho_l$ y $-\rho_l$, separadas por una distancia $D - 2d_i = d - d_i$. La diferencia de potencial entre los dos alambres es la que existe entre dos puntos cualesquiera de los alambres respectivos.

Denotemos con los subíndices 1 y 2 los alambres que rodean a las líneas de carga equivalentes, $+\rho_l$ y $-\rho_l$, respectivamente. Por tanto:

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

Y, de la misma forma:

$$V_1 = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

Observamos que V_1 es una cantidad negativa, mientras que V_2 es positiva, porque $a < d$. La capacitancia por unidad de longitud es:

$$C = \frac{\rho_l}{V_2 - V_1} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

donde

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d} \Rightarrow d^2 = Dd - a^2 \Rightarrow d^2 - Dd + a^2 = 0$$

Electrostática

de donde obtenemos (la solución negativa carece de sentido)

$$d = \frac{1}{2} \left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2} \right)$$

sustituyendo:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left[(D/2a) + \sqrt{(D^2/4a^2) - 1} \right]} \quad (\text{F/m})$$

Como:

$$\ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] = \cosh^{-1} x, \quad \text{para } x > 1$$

haciendo $x = D/2a$ la capacidad puede escribirse también como:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{F/m})$$

Cuando el diámetro de los alambres es muy pequeño, en comparación con la distancia que los separa, $(D/2a) \gg 1$, la capacidad se puede aproximar a:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(D/a)} \quad (\text{F/m})$$

Magnetostática

INTRODUCCIÓN

Introducir el concepto de campo requirió una gran dosis de imaginación por parte de los físicos, pues es difícil caer en la cuenta de que lo realmente importante en el estudio del campo electromagnético no son las cargas ni las partículas, sino el campo el campo entre ellas.

En un principio se creía que la electricidad y el magnetismo eran fenómenos aislados. La conexión entre ellos no se conoció hasta el siglo XIX, cuando Hans Christian Oersted descubrió que una corriente eléctrica influye sobre la orientación de la aguja de una brújula. Experimentos subsiguientes, realizados por Ampère y otros, demostraron que las corrientes eléctricas atraen trocitos o limaduras de hierro y que corrientes paralelas se atraen entre sí. Ampère entonces propuso un modelo teórico del magnetismo que todavía sirve de base a la teoría moderna del magnetismo: *la fuente fundamental del magnetismo no es un polo magnético, sino la corriente eléctrica*. La interacción magnética básica es la fuerza magnética que existe entre dos cargas en movimiento relativo. Lo mismo que en el caso de la fuerza eléctrica, se considera que la fuerza magnética se transmite con otro agente, el campo magnético. Como una carga móvil constituye una corriente eléctrica, la interacción magnética puede considerarse como la *interacción entre corrientes*.

Las corrientes constantes crean campos magnéticos invariables en el tiempo. Todas las cargas en movimiento generan campos magnéticos. Pero si las corrientes son estacionarias (DC), el campo magnético producido es estático. El estudio de este tipo de campo se denomina **MAGNETOSTÁTICA**. Para saber la dirección y el sentido de un campo magnético se aplica la regla de la mano derecha a la corriente por la que es generado.

© Intensidad de corriente

Caracterizaremos primeramente a la corriente eléctrica. En general, la densidad de corriente, \vec{J} , se define como:

$$\vec{J} = \rho_v \cdot \vec{v} = \text{densidad de corriente de convección (cargas en movimiento)}$$

$$\rho_v = \text{densidad de carga volumétrica}$$

$$\vec{v} = \text{velocidad del portador de carga}$$

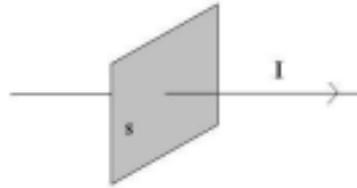
La densidad de corriente tiene la misma dirección que la velocidad con que se mueven las cargas. El sentido es el mismo que el de la velocidad si las cargas son positivas, y opuesto si son negativas.

Para una superficie abierta, se define la intensidad de corriente I como:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Donde $s \equiv$ superficie abierta atravesada por la corriente

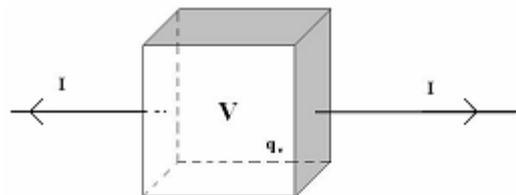
$$[I] = \text{Amperio (A)} = \frac{\text{Culombio}}{\text{segundo}} \left(\frac{\text{C}}{\text{s}} \right)$$



Para un volumen dado, se cumple que la corriente que fluye a través de ese volumen es igual a la variación temporal de la carga en su interior

$$I = \frac{dq_v}{dt}$$

Donde $q_v \equiv$ Cargas en el volumen



⊙ Resistencia en medios óhmicos

Atendiendo a las causas que puedan dar lugar a una corriente eléctrica (un campo eléctrico, un campo magnético...) , nos limitaremos a la más habitual: *la existencia de un campo eléctrico*. Se ha encontrado experimentalmente que en muchos conductores, para una temperatura dada y campos eléctricos no muy intensos, se puede establecer una relación fenomenológica de proporcionalidad entre las variables microscópicas de causa, \vec{E} , y efecto, \vec{J} . Los medios conductores que verifican esta relación de proporcionalidad se denominan medio lineales u óhmicos:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

donde σ es la conductividad del material y \vec{E} es el campo eléctrico.

Sea un conductor de sección transversal constante, A , y longitud ΔL , al que se aplica una diferencia de potencial V_{ab} . Como consecuencia, existe un campo eléctrico uniforme en su interior (si el medio es homogéneo), que origina una fuerza neta sobre los electrones, por lo que se genera una corriente eléctrica de sentido contraria al campo. Se cumple entonces que:

$$V_{ab} = E \cdot \Delta L \longrightarrow E = \frac{V_{ab}}{\Delta L}$$

Expresión, que sustituida en la densidad de corriente para un medio óhmico, da lugar a que:

$$J = \sigma \cdot E \equiv \sigma \frac{V_{ab}}{\Delta L}$$

La corriente que atraviesa una superficie abierta se define como:

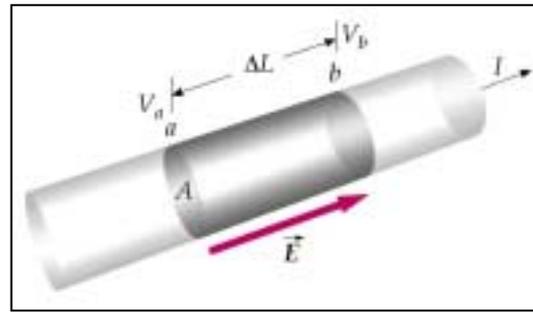
$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

donde:

$I \equiv$ intensidad de corriente (Amperio)

$\vec{J} \equiv$ densidad de corriente

$S \equiv$ superficie que atraviesa la corriente



Por lo que en medios óhmicos:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\vec{E} \parallel d\vec{s}} \int_S \sigma \cdot E \cdot ds = \sigma \cdot E \int_S ds = \sigma \cdot E \cdot S = \sigma \cdot \frac{V_{ab} S}{\Delta L} \longrightarrow V_{ab} = \frac{\Delta L}{\sigma S} I$$

Se define entonces la resistencia del material entre los puntos a y b, R_{ab} , como:

$$R_{ab} = \frac{\Delta L}{\sigma S}$$

En general, para un conductor de sección S, longitud L y conductividad σ la resistencia vale: $R = \frac{L}{\sigma S}$ y su unidad es $[R] = \Omega$.

Se define la conductancia, G, como la inversa de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \cdot \frac{S}{L}; \text{ siendo su unidad } [G] = \frac{1}{\Omega} = S (\text{Siemens})$$

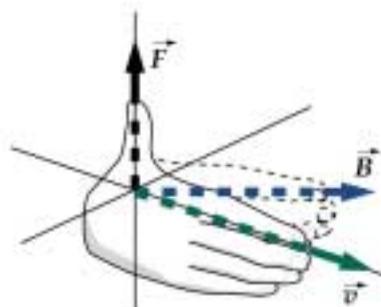
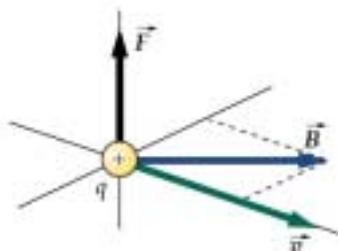
⊙ Ecuación de la fuerza de Lorentz

Sea un campo magnético, caracterizado por un vector \vec{B} , en una región del espacio. Si una carga eléctrica, q , atraviesa dicha región con una velocidad \vec{v} , sobre dicha carga se ejerce una fuerza magnética, \vec{F}_m , que viene dada por:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{B} \equiv$ Densidad de flujo magnético

$$[\vec{B}] = \text{Tesla (T)} = \frac{\text{Weber}}{\text{metro}^2} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right)$$



Si además en dicha región existe un campo eléctrico \vec{E} , la fuerza electrostática sobre la carga vale:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

con lo que la fuerza total electromagnética es:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La unidad de la densidad de flujo magnético es:

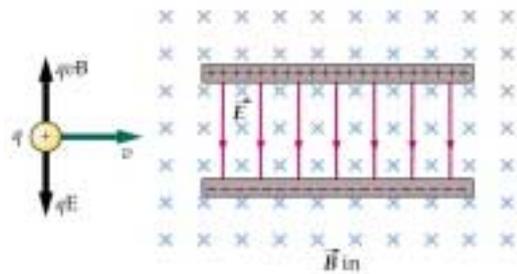
$$[B] = \frac{Wb}{m^2} = T, \text{ donde,}$$

$Wb \equiv \text{weber}$, $T \equiv \text{Tesla}$.

Ejemplo 1:

Campo eléctrico y magnético cruzados en el interior de un condensador de placas plano-paralelas. Cuando una partícula positiva se mueve hacia la derecha experimenta una fuerza eléctrica dirigida hacia abajo qE y otra fuerza magnética dirigida hacia arriba qvB . Si estas fuerzas se equilibran, la velocidad ha de cumplir que:

$$v = E/B.$$

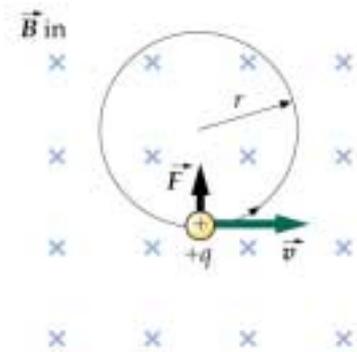


Ejemplo 2:

Sea una partícula cargada que se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético. La fuerza magnética que experimenta es perpendicular a su velocidad, como muestra la figura, haciendo que ésta se mueva en una órbita circular. El radio de la circunferencia que describe la partícula viene dado por la expresión:

$$R = \frac{mv}{qB}, \text{ que se obtiene de igualar la fuerza}$$

magnética a la 2ª ecuación de Newton.



⊙ Postulados fundamentales de la Magnetostática en el espacio libre

Para estudiar la Magnetostática (*campos magnéticos estáticos*) en el espacio libre sólo tenemos que considerar el vector de densidad de flujo magnético, \vec{B} . Los dos postulados fundamentales de la magnetostática que definen la divergencia y el rotacional de \vec{B} en el vacío, y son:

- (1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- (2) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

donde,

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \equiv$ permeabilidad magnética en el vacío

\vec{J} = densidad de corriente libre

Formulación integral de los postulados fundamentales.

Primer Postulado:

Integrando (1) en un volumen V y aplicando el teorema de la divergencia:

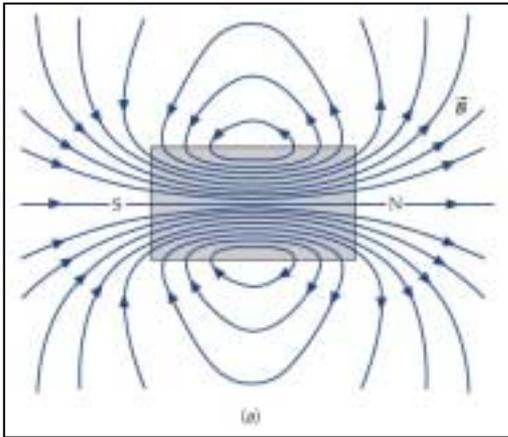
$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dv = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Fórmula de la divergencia}).$$

Luego:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0}$$

Esto nos dice que no hay fuentes de campo magnético (no hay cargas magnéticas aisladas), o lo que es equivalente, que las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. Esta ecuación también se conoce como la expresión de la ley de la conservación del flujo magnético, pues establece que el flujo magnético total de salida a través de cualquier superficie cerrada es cero.

Ejemplo:



Si partiésemos el imán en dos trozos, se volverían a formar dos nuevos imanes, cada uno con sus correspondientes polos. Así pues, no existe el monopolo magnético; no existen fuentes escalares del campo magnético, al contrario del campo eléctrico (cargas). En consecuencia, existe un flujo hacia adentro (o negativo) en el interior del imán y un flujo hacia fuera (o positivo) fuera de él. El flujo total de la superficie completa es cero.

Segundo Postulado:

Integrando (2) en una superficie abierta S , apoyada en un camino cerrado C :

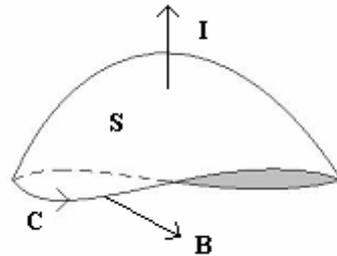
$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Por el teorema de Stokes:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

De esta manera obtendremos lo que va a denominarse la ley de Ampere:

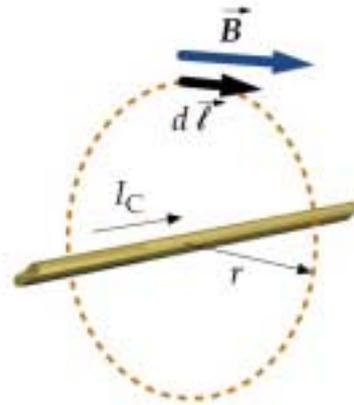
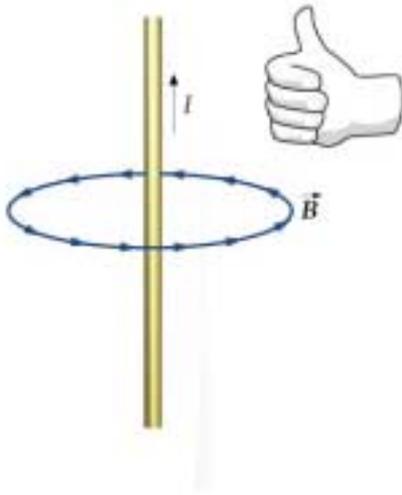
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



Esta expresión se conoce como **LEY DE AMPERE** que dice que la circulación de la densidad de flujo magnético a lo largo de cualquier trayectoria cerrada, C, en el vacío, es igual a μ_0 veces la corriente libre que atraviesa cualquier superficie abierta apoyada en C.

Ejemplo:

Por un hilo recto infinito, por el que circula una corriente I. Calcular el campo magnético creado.



Apl
icando la Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Sabiendo que,

$$\vec{B} = B_\phi \vec{a}_\phi$$

$$d\vec{l} = r \vec{a}_\phi d\phi$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{B=cte} B \oint_C dl = B 2\pi r$$

$$\vec{B} = B_\phi \vec{a}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

© **Vector potencial magnético**

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, podemos asegurar que \vec{B} es solenoidal. Como consecuencia de esto, se puede expresar \vec{B} como el rotacional de otro campo vectorial, digamos \vec{A} , de manera que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3)$$

El campo vectorial \vec{A} , definido de esta manera, se denomina potencial magnético vector. Su unidad en el sistema internacional es $[\vec{A}] = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-1}$.

Ahora bien, \vec{A} se elige de forma que cumpla (3) y su divergencia sea nula: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Entonces, además se cumple que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} &\longrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} &\xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} -\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Esta es la ecuación diferencial de la magnetostática en el espacio libre. Para conocer su solución, recordemos que en electrostática la ecuación de Poisson tenía por solución:

$$\text{Ecuación de Poisson} \equiv \vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho_v}{\epsilon_0} \longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v}{R} dv'$$

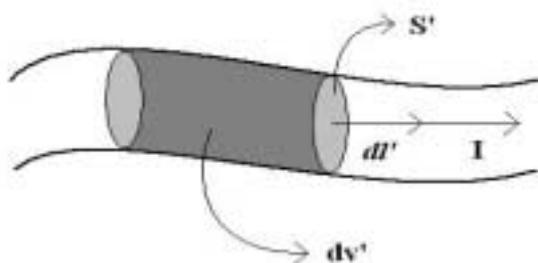
Por analogía, en magnetostática $\equiv \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \longrightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dv'}$,

donde:

$V' \equiv$ región donde existe corriente.

$R \equiv$ distancia del punto fuente (corrientes) al punto campo.

Apliquemos esta expresión para el caso de un hilo conductor:



con:

$\vec{S}' \equiv$ sección del hilo.

$d\vec{l} \equiv$ desplazamiento infinitesimal a lo largo del hilo.

\vec{S}' y $d\vec{l}$ se eligen en la dirección y sentido de \vec{J} .

Como:

$$d\vec{v}' = \vec{S}' \cdot d\vec{l}' \rightarrow \vec{J} \cdot d\vec{v}' = \vec{J} \cdot \vec{S}' \cdot d\vec{l}' = I \cdot d\vec{l}'$$

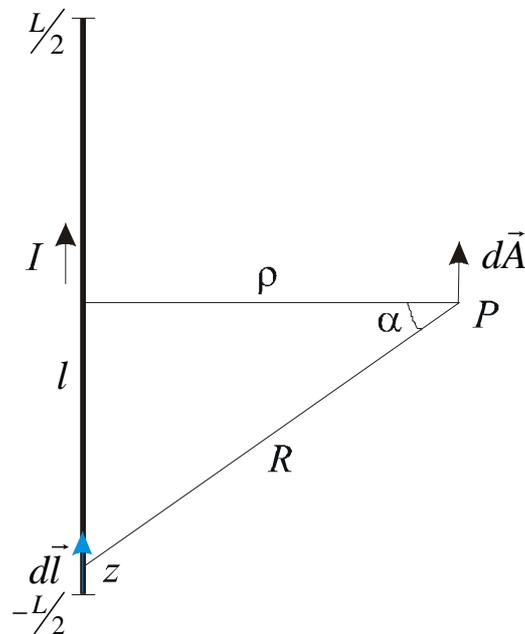
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l}'}{R} \rightarrow$$

Con lo que para un hilo conductor el potencial vector se puede expresar como :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{R}$$

Ejemplo: Potencial magnético vector debido a un hilo recto finito por el que circula una corriente I .

Consideramos la longitud L y el hilo centrado.



El potencial creado por un elemento diferencial es: $d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{R}$, por lo que si lo extendemos a todo el hilo, con $d\vec{l} = dz \cdot \vec{a}_z$ y teniendo en cuenta la simetría del problema, tenemos que:

$$\vec{A} = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a}_z \int_0^{L/2} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resolviendo la integral:

$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln[z + (\rho^2 + z^2)^{1/2} - \ln \rho]_0^{L/2} \vec{a}_z$, si consideramos que $\rho^2 \ll L^2$, obtenemos el siguiente resultado:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left[\frac{L}{\rho} \right] \vec{a}_z$$

© Ley de Biot Savart

Expresa la densidad de flujo magnético \vec{B} , creado por un hilo conductor por el que circula una intensidad de corriente I. Para obtener esta ley se parte de que:

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, siendo:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l}}{R}$$

Sustituyendo:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l}}{R} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \oint_C \frac{d\vec{l}}{R}$$

Intercambiando el orden de la integral y el rotacional:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{l}}{R}$$

Como:

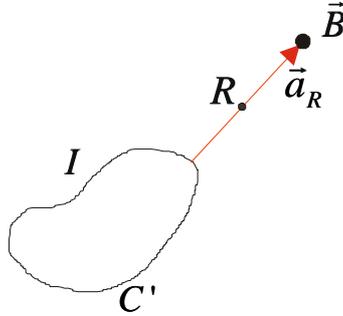
$$\vec{\nabla} \times \frac{d\vec{l}}{R} = \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \text{ se cumple que:}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \quad \text{Ley de Biot-Savart}$$

donde:

$R \equiv$ distancia del punto fuente (corrientes) al punto campo.

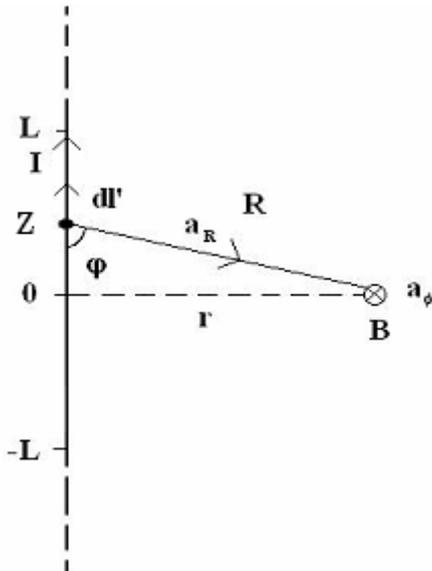
$\vec{a}_R \equiv$ vector unitario del punto fuente al punto campo.



Nota: Esta ley es también válida para curvas abiertas.

Ejemplo:

Sea un hilo recto de longitud $2L$, por el que circula una corriente I .



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

$$d\vec{l}' \times \vec{a}_R = dy \cdot \text{sen}(180^\circ - \varphi) \cdot \vec{a}_\phi$$

$$\text{sen}(180^\circ - \varphi) = \text{sen}\varphi = \frac{r}{R} ; R = \sqrt{r^2 + y^2}$$

Con lo que:

$$d\vec{l}' \times \vec{a}_R = \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}} dy \cdot \vec{a}_\phi \quad . \text{ Así:}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}} \vec{a}_\phi dy \cdot \frac{1}{r^2 + y^2} \right) \vec{a}_\phi = cte \rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a}_\phi \int_{-L}^L \frac{r}{(r^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \vec{a}_\phi$$

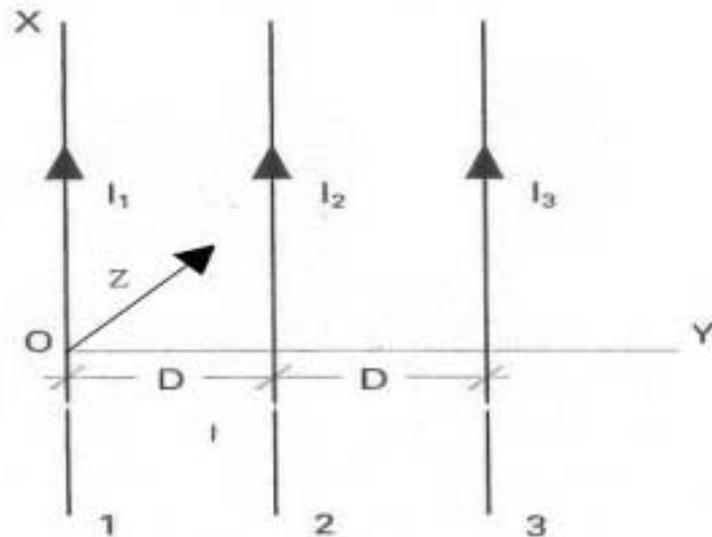
Si el hilo fuera infinito ($L = \infty$), se obtiene el mismo resultado que el calculado con la ley de Ampere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

Problema:

Tres conductores rectilíneos infinitamente largos, paralelos, coplanarios y separados entre sí una distancia D, están recorridos por corrientes I1, I2 e I3 del mismo sentido como se indica en la figura. Calcular los campos magnéticos B que cada conductor crea en los puntos ocupados por los otros dos.

$$\begin{aligned} \vec{i} &\equiv \vec{a}_x \\ \vec{j} &\equiv \vec{a}_y \\ \vec{k} &\equiv \vec{a}_z \end{aligned}$$



Los campos creados por el conductor 1 en los conductores 2 y 3 son, respectivamente :

$$\vec{B}_1(2) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot D} \vec{k} \qquad \vec{B}_1(3) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4 \cdot \pi \cdot D} \vec{k}$$

Los campos creados por el conductor 2 en los conductores 1 y 3 son, respectivamente :

$$\vec{B}_2(1) = \frac{-\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot D} \vec{k}$$

$$\vec{B}_2(3) = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot D} \vec{k}$$

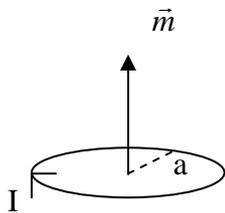
Finalmente, los campos creados por el conductor 3 en los conductores 1 y 2 son, respectivamente :

$$\vec{B}_3(1) = \frac{-\mu_0 \cdot I_3}{4 \cdot \pi \cdot D} \vec{k}$$

$$\vec{B}_3(2) = \frac{-\mu_0 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot D} \vec{k}$$

© Dipolo magnético

Un dipolo magnético es una espira circular por la que circula una corriente I



a = Radio del dipolo
I = Corriente del dipolo

Se define el momento dipolar magnético \vec{m} como: $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$

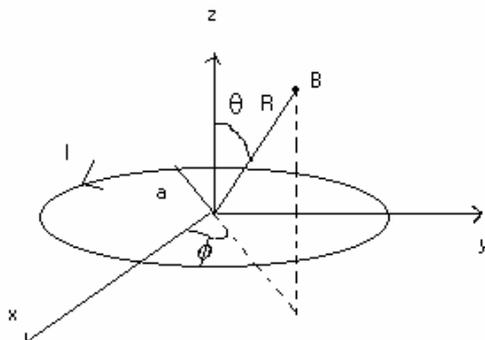
Siendo $\vec{S} =$ Vector superficie del dipolo

}

$$|\vec{S}| = \pi \cdot a^2$$

La dirección y sentido siguen la regla de la mano derecha con I

Calculemos la densidad de flujo magnético generada por un dipolo magnético, en puntos muy alejados. Hallemos primeramente el potencial magnético vector



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\vec{a}_x \cdot b \cdot \sin\alpha}{r} d\alpha, \quad \text{siendo:} \quad r = R^2 + b^2 - 2R \cdot b \cdot \cos\varphi$$

$$R \cdot \cos\varphi = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \sin\theta \cdot \sin\alpha \right)^{-1/2} \cong \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2b}{R} \sin\theta \cdot \sin\alpha \right)^{-1/2} \cong$$

desarrollo en serie

$$\frac{1}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin\theta \cdot \sin\alpha + \dots \right)$$

$$\vec{A} = \int_0^{2\pi} \frac{-\vec{a}_x \cdot b \cdot \sin\alpha}{r} d\alpha = -\vec{a}_x \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{b}{R} \sin\alpha \right) \cdot \sin\theta \cdot d\alpha = (-\vec{a}_x) \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b^2}{4R^2} \sin\theta$$

En un punto cualquiera del espacio :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b^2}{4R^2} \sin\theta \vec{a}_\phi \text{ en coordenadas esféricas}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b^2}{4R^3} (\vec{a}_R \cdot 2 \cos\theta + \vec{a}_\theta \cdot \sin\theta)$$

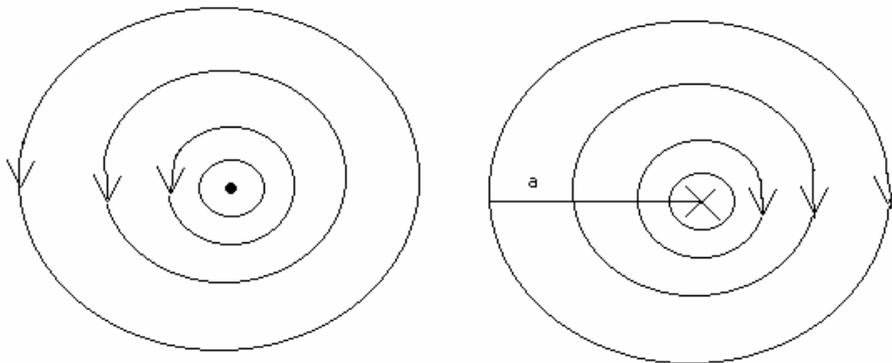
Para puntos alejados del dipolo magnético ($R \gg a$)

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{R^3} \cos\theta$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{R^3} \sin\theta$$

$$B_\phi = 0$$

Las líneas de campo del dipolo magnético son:



● Magnetización y densidades de corriente equivalentes

- Cuando los e^- giran alrededor de los átomos, se forman dipolos magnéticos microscópicos.
- Normalmente, salvo los imanes, los dipolos magnéticos microscópicos se orientan aleatoriamente dando lugar a un momento magnético dipolar total nulo



- Al aplicar un campo magnético externo los dipolos magnéticos se orientan, dando lugar a un momento magnético dipolar total no nulo.
- Existe un vector análogo al vector de polarización:

Se define vector de magnetización \vec{M}

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Delta v} \vec{m}}{\Delta v}$$


\vec{m} \equiv Momento magnético dipolar de los átomos (e^- alrededor del núcleo) en el volumen Δv

\vec{M} \equiv Densidad volumétrica de momento dipolar magnético por unidad de volumen

$[\vec{M}] = Am^{-1}$



\vec{B}_e \equiv Densidad de flujo magnético externo (debido a las corrientes libres)

\vec{B}_i \equiv Densidad de flujo inducido por los dipolos

\vec{B} \equiv Densidad de flujo Total

Al igual que en los dieléctricos se asociaba a la polarización cargas superficiales y volumétricas de polarización equivalentes, se puede asociar a un material magnético densidades de corrientes superficiales y en volumen mediante \vec{M} , para describir \vec{B}_i

Experimentando se cumple que:

$$\vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{M}$$

Tenemos del postulado fundamental que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_e = \mu_0 \vec{j} \quad \text{siendo } \vec{j} \text{ la densidad de corriente libre}$$

Aplicando $\vec{\nabla} \times$ en $\vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{M}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j} mv$$

por analogía con $\vec{\nabla} \times \vec{B}_e = \mu_0 \vec{j}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{ind} = \mu_0 \vec{j} mv$$

Entonces

$$\vec{j} mv = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \text{densidad de corriente en volumen de magnetización}$$

$$\left[\vec{j} mv \right] = \frac{A}{m^2} = \frac{C}{Sg \cdot m^2} \quad \text{Si } \vec{M} \text{ es cte } \rightarrow jmv = 0 \rightarrow \text{la corriente de los dipolos}$$

magnéticos se compensa entre ellos, dando lugar a una corriente neta nula en el interior del material

Se puede demostrar que la densidad superficial de corriente de magnetización

$$\vec{j} ms \text{ vale:}$$

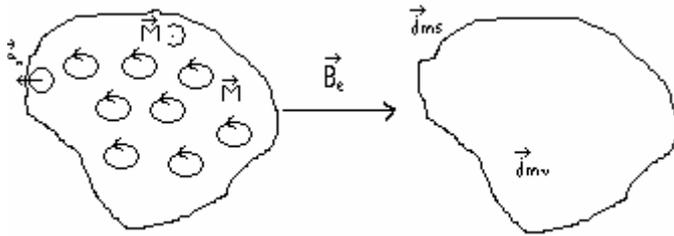
$$\vec{j} ms = \vec{M} \times \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_n = \text{Vector normal a la Superficie}$$

$$\left[\vec{j} ms \right] = \frac{A}{m} = \frac{C}{Sg \cdot m} \quad \text{Nota: La dirección y el sentido de } \vec{j} ms \text{ vienen dados por el}$$

producto vectorial de \vec{M} y \vec{a}_n

En resumen:



© Intensidad de campo magnético y permeabilidad relativa.
Ley de Ampère generalizada

Tenemos que $\vec{\nabla} \times \vec{B}_{ext} = \mu_0 \cdot \vec{j}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{B}_{int} = \mu_0 \cdot \vec{j}_{mv}$

$\vec{B}_{ext} \equiv$ densidad de flujo magnético debido a las corrientes libres (\vec{j})

$\vec{B}_{int} \equiv$ densidad de flujo magnético debido a las corrientes de magnetización en volumen (\vec{j}_{mv})

Sumando:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}_{ext} + \vec{B}_{int}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \vec{j}_{mv}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \vec{j}_{mv} \quad \vec{j}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{M} \rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \cdot \vec{M}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}$$

Postulado fundamental: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$

$\vec{H} \equiv$ intensidad de campo magnético

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre} \leftarrow \text{Ley de Ampère generalizada} :$$

"La circulación de la intensidad del campo magnético, \vec{H} , a lo largo de una trayectoria cerrada, C, es igual a la corriente total libre que atraviesa cualquier superficie apoyada en C."

En un medio magnético lineal se cumple experimentalmente que:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad \chi_m \equiv \text{susceptibilidad magnética} : \text{ mide la capacidad de los momentos magnéticos microscópicos a alinearse con el campo externo.}$$

- El material se denomina paramagnético si $\chi_m > 0$.
- El material se denomina diamagnético si $\chi_m < 0$.
- Si $\chi_m \gg 1$, el material es ferromagnético.

Entonces :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\mu_r \equiv \text{permeabilidad relativa} \quad \mu \equiv \text{permeabilidad absoluta}$$

La permeabilidad relativa sirve para comparar la facilidad con que se pueden magnetizar los diferentes materiales.

En un medio inhomogéneo μ cambia según el punto del espacio; si es homogéneo, no.

Si el medio es homogéneo e isótropo, μ es un número real positivo y constante.

Los medios que son lineales, homogéneos e isótropos se llaman medios simples.

© Comportamiento de los materiales magnéticos

Habíamos definido la susceptibilidad magnética, χ_m , como un coeficiente de proporcionalidad sin dimensiones entre la magnetización, \mathbf{M} , la intensidad del campo magnético, \mathbf{H} y la permeabilidad relativa μ_r , como $1 + \chi_m$.

Los materiales magnéticos pueden entonces clasificarse de manera general en tres grupos principales, de acuerdo con sus valores de μ_r . Se dice que un material es:

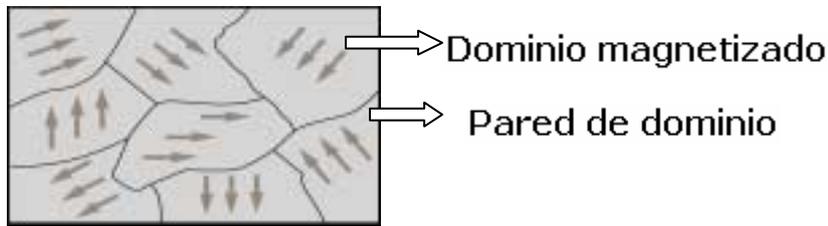
- Diamagnéticos, si $\mu_r \leq 1$ (χ_m es un número negativo muy pequeño)
- Paramagnéticos, si $\mu_r \geq 1$ (χ_m es un número positivo muy pequeño)
- Ferromagnéticos, si $\mu_r \gg 1$ (χ_m es un número positivo grande)

El diamagnetismo se debe al movimiento de los electrones alrededor de los núcleos atómicos. Materiales diamagnéticos son el cobre, oro, germanio, plata, entre otros. El magnetismo estudiado hasta ahora es aplicable a estos materiales.

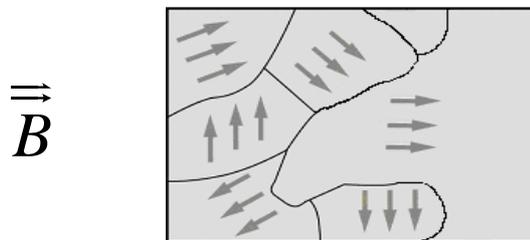
Por otro lado, el paramagnetismo se debe a los momentos dipolares magnéticos asociados a la rotación de los electrones (spin). Tómese como ejemplo el aluminio, magnesio, titanio o tungsteno. Este tipo de magnetismo queda fuera de este presente curso.

Finalmente, el ferromagnetismo puede explicarse en función de dominios magnetizados. De acuerdo con este modelo, un material ferromagnético está compuesto por varios dominios pequeños. Estos dominios están totalmente magnetizados, en el

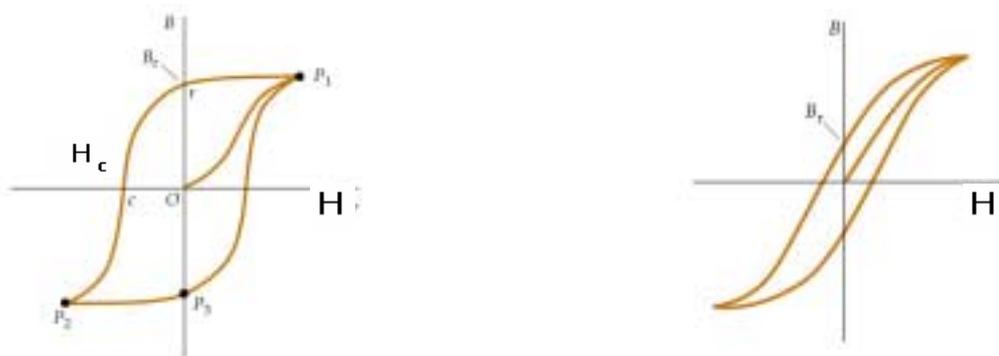
sentido de que contienen dipolos magnéticos alineados, como resultado del movimiento de traslación de los electrones alrededor de los núcleos atómicos, incluso en ausencia de un campo magnético externo aplicado.



Cuando se aplica un campo magnético externo a un material ferromagnético, las paredes de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo aplicado se mueven de manera tal que los volúmenes de estos dominios crecen, a expensas de los otros dominios (estos otros se reducen). Como resultado, aumenta la densidad de flujo magnético inducido.



Los movimientos de las paredes de los dominios son reversibles en el caso de la aplicación de un campo débil. Sin embargo, si el campo aplicado es muy intenso los movimientos de las paredes de los dominios ya no son reversibles y se produce también una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado. Éste fenómeno de retardo de la magnetización con respecto al campo que la produce se denomina **histéresis**. Si el campo aplicado es más fuerte el movimiento de la pared de dominio y la rotación del dominio ocasionarán, en esencia, una alineación total de los momentos magnéticos con respecto al campo aplicado, diciéndose que el material magnético se ha saturado. Esta situación se corresponde con el punto P_1 de la curva de histéresis.



Curvas de histéresis en el plano B-H de un material magnético

Si el campo magnético aplicado se reduce a cero, desde el valor en P_1 , la densidad del flujo magnético no se anula, sino que toma el valor B_r . Este valor se denomina *densidad de flujo residual* o *remanente* (Wb/m^2), y depende de la máxima intensidad de campo aplicado. La existencia de dicha densidad de flujo residual en un material ferromagnético hace posible la existencia de imanes permanentes. Finalmente para anular totalmente la densidad de flujo residual, habría que aplicar un campo magnético negativo, H_c , llamado *campo coercitivo*.

Si elevásemos la temperatura de un material ferromagnético hasta el punto en el que la energía térmica excede la energía de acoplamiento de los momentos dipolares magnéticos, los dominios magnetizados se desorganizan. Esta temperatura se conoce como **temperatura de Curie**, y por encima de ella el material deja de comportarse como un material ferromagnético, y se comporta como una sustancia paramagnética. Los ejemplos más conocidos son el cobalto, níquel o el hierro.

⊙ Condiciones en la frontera para campos magnetostáticos

Para resolver problemas relacionados con campos magnéticos en regiones que tienen propiedades físicas diferentes, es necesario estudiar las condiciones de frontera que deben satisfacer los vectores \vec{B} y \vec{H} en las superficies de separación de dichos medios.

Recordando lo visto en electroestática, se cumplía que:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_v \rightarrow E_{1n} - E_{2n} = \rho_s \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \rightarrow E_{1t} - E_{2t} = 0\end{aligned}$$

Aplicando técnicas similares a las usadas entonces, podemos derivar las condiciones en la frontera para magnetoestática a partir de las ecuaciones fundamentales:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \rightarrow B_{1n} - B_{2n} = 0 \rightarrow \mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \rightarrow H_{1t} - H_{2t} = j_{sn} \quad \Longrightarrow \quad \text{Corriente libre en la} \\ & \hspace{15em} \text{interfase, normal a la sección transversal.}\end{aligned}$$

donde los dominios de integración han sido una pequeña caja cilíndrica y una pequeña trayectoria cerrada, respectivamente, que incluyen la superficie de separación.

A partir de la divergencia nula del campo \vec{B} , expresada en la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, podemos llegar directamente a la conclusión de que, la componente normal de \vec{B} es continua a través de una superficie de separación; es decir: $B_{1n} = B_{2n}$.

En el caso de materiales simples, $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$ y $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$ por lo tanto la ecuación $B_{1n} = B_{2n}$ se convierte en:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

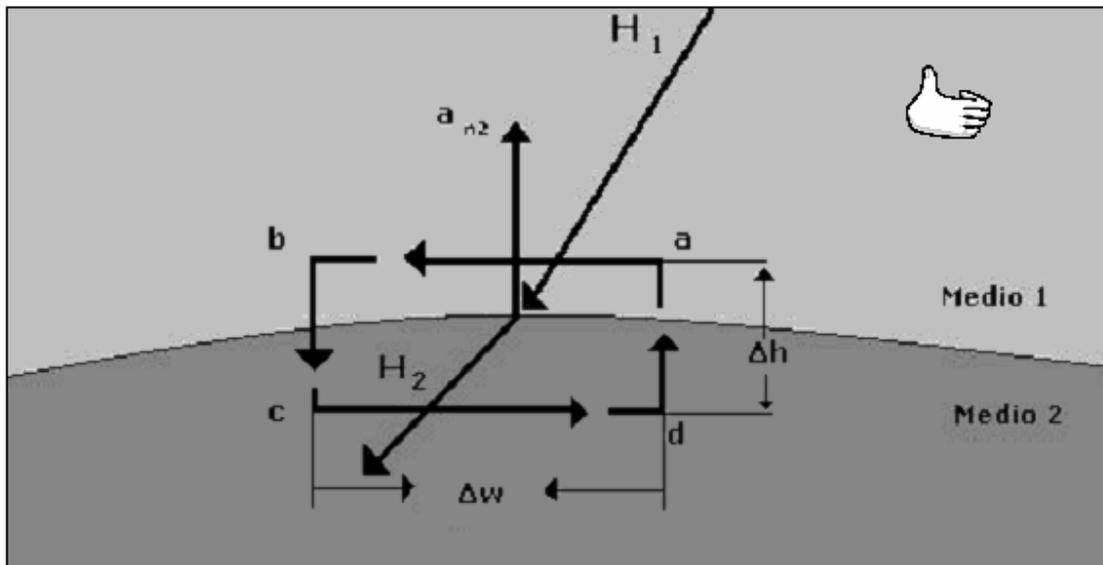
La componente tangencial de un campo magnético no será continua si hay una corriente superficial en la superficie de separación. Podemos derivar la condición en la frontera de las componentes tangenciales de \vec{H} , aplicando la ley de Ampere a una

trayectoria cerrada $abcd$ (ver figura) en la superficie de separación de ambos medios. Al hacer que los lados $bc = da = \Delta h$ se aproximen a cero, tenemos que :

$$\oint_{abcd} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} \cdot \Delta w + H_{2t} \cdot (-\Delta w) = j_{sn} \Delta w$$

Dividiendo por $\Delta w \longrightarrow H_{1t} - H_{2t} = j_{sn}$

donde j_{sn} es la densidad superficial de corriente en la superficie de separación, y normal al contorno. La dirección de j_{sn} sigue la regla de la mano derecha, según el sentido de la trayectoria. El sentido positivo de j_{sn} , con la trayectoria elegida en la figura, es hacia fuera del papel.



Si las conductividades de dichos medios son finitas, las corrientes vienen dadas por densidades de corriente en volumen, y las corrientes libres superficiales no están definidas en la superficie de separación. Por lo tanto, j_{sn} , es igual a cero y la componente tangencial de \vec{H} es continua a través de la frontera de casi todos los medios físicos; es discontinua únicamente cuando se supone la superficie de separación con un conductor ideal perfecto o con un superconductor. De ésta manera, en general, se cumple que :

$$H_{1t} = H_{2t}$$

© **Inductancias e inductores**

Sean dos espiras cerradas cercanas, C_1 y C_2 , que limitan las superficies S_1 y S_2 , respectivamente. Si fluye una corriente I_1 en C_1 , se creará un campo magnético \mathbf{B}_1 . Una parte del flujo magnético ocasionado por \mathbf{B}_1 atravesará la superficie S_2 , limitada por C_2 . Denotemos este flujo mutuo Φ_{12} . Luego:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \equiv \text{Flujo debido a } I_1 \text{ a través de } C_2$$

Por la ley Biot-Savart $\vec{B}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{a}_{12}}{R^2}$, sólo vemos que B_1 es directamente proporcional a I_1 ; por lo tanto, Φ_{12} también lo es. Tenemos pues que (suponiendo el medio simple, $\mu = \text{cte}$):

$$\Phi_{12} = I_1 \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_2} \left[\oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \right] d\vec{s}_2 \right\}$$

Llamando L_{12} a:

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_2} \left[\oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \right] d\vec{s}_2$$

se cumple que :

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 \rightarrow L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \equiv \text{Coeficiente de inductancia mutua}$$

donde la constante L_{12} se denomina inductancia mutua entre las espiras C_1 y C_2 , su unidad es el Henrio (H). El coeficiente de inductancia mutua es constante, sólo depende de la geometría del inductor y de la permeabilidad del material.

Cabe destacar que el coeficiente de inductancia mutua, L_{21} , sería igual a L_{12} utilizando el mismo planteamiento.

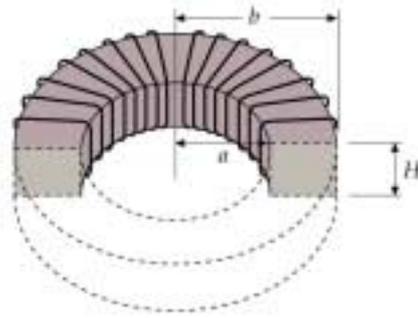
La autoinductancia del circuito se define como el flujo magnético ligado por unidad de corriente en el propio circuito, es decir:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_{11}}; \Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

Un conductor dispuesto en la forma adecuada (como un alambre conductor enrollado formando una bobina) para proporcionar cierta cantidad de autoinductancia se conoce como inductor. Así como un condensador puede almacenar energía eléctrica, un inductor puede almacenar energía magnética.

Ejemplo:

Alrededor de un marco toroidal de sección transversal rectangular se enrollan muy juntas N vueltas de alambre. Suponiendo que la permeabilidad del medio es μ_0 , determine la autoinductancia de la bobina toroidal.



Para este problema vamos a utilizar coordenadas cilíndricas ya que el toroide tiene simetría alrededor de su eje. Suponiendo una corriente I en el alambre conductor, al aplicar la ley de Ampère a la trayectoria circular con radio r ($a < r < b$) hallamos:

$$\vec{B} = \vec{a}_\phi B,$$

$$d\vec{l} = \vec{a}_\phi r d\phi,$$

son lo que:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B r d\phi = 2\pi B r.$$

Se obtiene este resultado porque tanto B como r son constantes en la trayectoria circular C . Puesto que ya la trayectoria encierra una corriente total NI , tenemos:

$$2\pi r B = \mu_0 NI$$

y

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$$

Con lo que el flujo en una sección transversal del toroide será:

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s} = \int_s \left(\vec{a}_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right) \cdot \left(\vec{a}_\phi H dr \right) = \frac{\mu_0 NIH}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIH}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Teniendo en cuenta las N espiras, el flujo total a través de la bobina, Λ será:

$$\Lambda = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 HI}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Con lo que finalmente obtenemos para el coeficiente de autoinducción:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 H}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Observamos que la autoinductancia no es una función de la corriente (para un medio de permeabilidad constante) y que es proporcional al cuadrado del número de vueltas. El hecho de que las espiras estén enrolladas muy juntas es para minimizar el flujo ligado a cada espira individual.

© **Energía magnética en términos de cantidades de campo**

Cuando analizamos la energía Electroestática, W_e , llegamos a la conclusión que era conveniente expresar ésta en términos de las cantidades de campo **E** y **D**. Siguiendo la misma línea, observemos las siguientes relaciones análogas entre las cantidades en Electroestática y en la Magnetoestática.

Electroestática	Magnetoestática
\vec{E}	\vec{B}
\vec{D}	\vec{H}
ϵ	$1/\mu$

De esta analogía podemos obtener la energía magnetoestática, W_m :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D} \vec{E} dv \rightarrow W_m = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{H} \vec{B} dv \quad (\text{J})$$

Los límites de la integral se refieren a todo el espacio en el que exista campo magnético.

Cabe resaltar que si el medio es lineal, es decir, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, entonces:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \frac{B^2}{\mu} dv \quad (\text{J})$$

Por otro lado, la densidad de energía magnética por unidad de volumen, w_m , es igual a:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (\text{J/m}^3)$$

Cuando el medio es lineal

Resulta interesante comprobar como a partir de la energía magnética almacenada, calculada en términos de \vec{B} o \vec{H} , muchas veces podemos determinar la autoinductancia de forma más sencilla, y viceversa.

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$L = \text{autoinductancia}$
 $I = \text{corriente del circuito}$

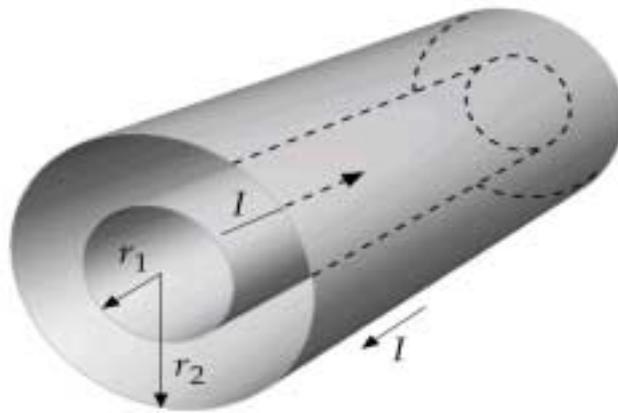
Para dos circuitos por los que circula la corriente I_1 e I_2 respectivamente la relación es:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \pm \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2$$

Cuando L_{11} y L_{22} son los coeficientes de autoinductancia en cada uno de los circuitos, y L_{12} es el coeficiente de inductancia mutua el signo del último sumando de la ecuación anterior depende de si los campos se oponen o no. (- si se oponen)

Ejemplo:

Use la energía magnética almacenada para determinar la inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión coaxial llena de aire que tiene un conductor interno sólido de radio r_1 , y un conductor externo muy delgado de radio r_2 . Por ellos circula una corriente I igual pero de sentido contrario, tal y como se indica en la figura.



Supongamos que fluye una corriente uniforme I por el conductor interno y que regresa por el conductor externo. La energía magnética por unidad de longitud almacenada en el conductor interno es:

$$W'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{r_1} B_1^2 2\pi r dr$$

Como en el interior del conductor interno:

$$B_1 = \frac{\frac{r^2}{r_1^2} I \mu_0}{2\pi r} = \frac{r I \mu_0}{2\pi r_1^2}$$

entonces:

$$W'_{m1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \text{ (J/m)}$$

La energía magnética por unidad de longitud almacenada en la región entre los conductores externo e interno es:

$$W'_{m2} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} B_2^2 2\pi r dr$$

Como $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$W'_{m2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{J/m})$$

Para fuera del conductor externo no existe campo magnético (las corrientes al aplicar el teorema de Ampere se compensan), por lo que la energía magnética es cero

Con la relación anteriormente mencionada entre la autoinductancia y la energía magnética almacenada tenemos:

$$L' = \frac{2}{I^2} (W'_{m1} + W'_{m2}) = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{H/m})$$

© Fuerza sobre un conductor

Consideremos un elemento de un conductor dl con sección transversal S . Si hay N portadores de carga (electrones) por unidad de volumen que se mueven a una velocidad \vec{v} en la dirección de dl , la fuerza magnética sobre el elemento diferencial es, por la ley de Lorentz:

$$d\vec{F}_m = -eNS |dl| \vec{v} \times \vec{B}$$

donde e es la carga electrónica. Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\rho_v = -eN$$

La ecuación quedaría:

$$d\vec{F}_m = \rho_v \vec{dl} s (\vec{v} \times \vec{B}) = \rho_v \vec{v} S (\vec{dl} \times \vec{B}) = \vec{j} S (\vec{dl} \times \vec{B})$$

\downarrow
 \vec{j}

\downarrow
 I

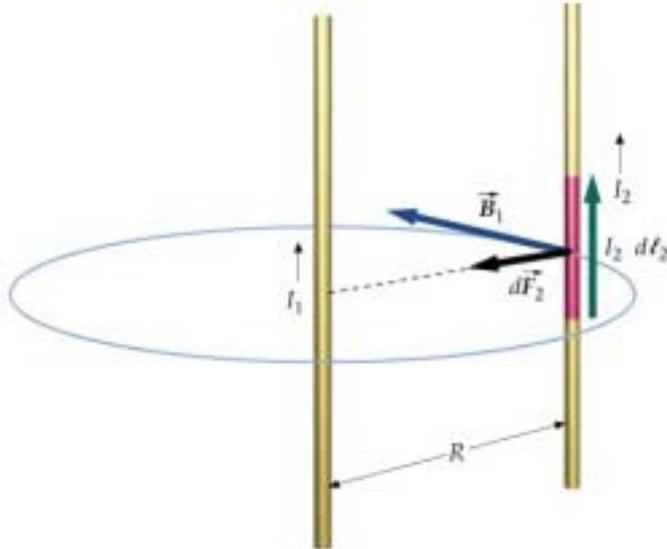
Finalmente obtenemos la expresión:

$$d\vec{F}_m = I (\vec{dl} \times \vec{B}) \implies \vec{F}_m = I \oint_C \vec{dl} \times \vec{B} \quad (\text{N})$$

Esta última expresión nos da la fuerza magnética total sobre un circuito por el que circula una corriente en un campo magnético.

Ejemplo:

Determina la fuerza por unidad de longitud entre dos alambres conductores planos, paralelos e infinitamente largos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 en la misma dirección. Los alambres están separados una distancia R .



Consideremos que los alambres se encuentran en el plano yz y designemos el alambre de la izquierda como el circuito 1. Si usamos \vec{F}_2 para designar la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre 2, tenemos:

$$\vec{F}_2 = I_2 (\vec{a}_z \times \vec{B}_1)$$

donde \vec{B}_1 , la densidad de flujo magnético en el alambre 2, establecido por la corriente I_1 en el alambre 1, es constante sobre el alambre 2. Ya que existe simetría cilíndrica al ser los alambres infinitos podemos aplicar la ley circuital Ampère que da lugar a:

$$\vec{B}_1 = -\vec{a}_x \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Al sustituir la ecuación anterior en la expresión:

$$\vec{F}_2 = I_2 (\vec{a}_z \times \vec{B}_1)$$

Se obtiene:

$$\vec{F}_2 = -\vec{a}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \quad (\text{N/m})$$

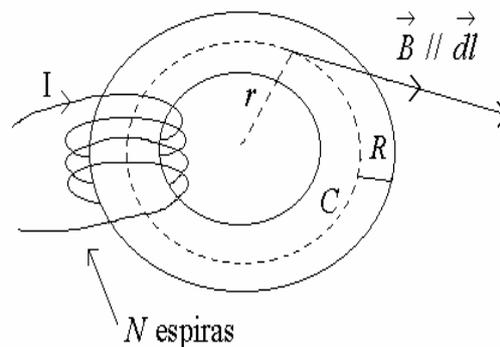
Vemos que la fuerza sobre el alambre 2 lo atrae hacia el alambre 1. Por lo tanto, la fuerza entre dos alambres por los que circulan corrientes en la misma dirección es una fuerza de atracción (a diferencia de la fuerza entre dos cargas de la misma polaridad, que es de repulsión), y viceversa.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS.-

© Definición de circuito magnético.

Se define un circuito magnético como cualquier sistema formado por fuentes de campo magnético (imanes, circuitos) y materiales ferromagnéticos, en el que el flujo magnético se encuentre confinado. Veámoslo con un ejemplo.

Sea un núcleo ferromagnético con forma toroidal, en el que se bobinan N vueltas de un hilo por el que circula una corriente I . Supongamos que queremos calcular el flujo magnético que circula a través del toroide, ϕ .



siendo,

$R \ll r$, para poder suponer que B es constante dentro del material
 $R \equiv$ radio de la sección del toroide
 $C \equiv$ circunferencia de radio r

Entonces el flujo valdrá:

$$\phi = B \pi R^2$$

Par calcular B , aplicamos *la ley de Ampère* generalizada en C .

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{B}{\mu} dl = \mathfrak{I}$$

donde se ha tenido en cuenta que \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos, por lo que:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot dl \cdot \cos(0) = B \cdot dl$$

Consideremos que el medio ferromagnético se encuentra dentro de la zona lineal, con lo que μ es constante. Tendremos que:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{B}{\mu} 2\pi r$$

Por otro lado, la corriente que atraviesa el círculo de radio r es igual al número de espiras, N , veces la corriente que circula por ellas

$$\mathfrak{I} = N \cdot I$$

Como:

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r} \rightarrow \phi = \frac{NI \mu \pi R^2}{2\pi r}$$

Despejando,

$$NI = \phi \frac{2\pi r}{\mu \pi R^2} \rightarrow M = \phi \cdot \mathfrak{R}$$

donde llamaremos a M y \mathfrak{R} respectivamente fuerza magnetomotriz y reluctancia. En un circuito magnético general, se tiene que:

$$M = \phi \cdot \mathfrak{R}$$

siendo la reluctancia,

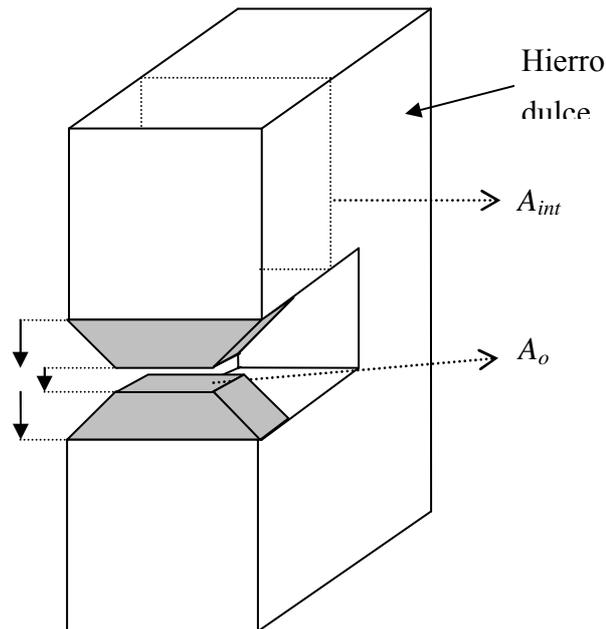
$$\mathfrak{R} = \frac{\text{Longitud}}{\mu \cdot \text{seccion}}$$

Nótese que la relación entre la fuerza magnetomotriz y el flujo magnético es análoga a la **ley de Ohm** en circuitos eléctricos ($V = I \cdot R$), considerando la siguiente correspondencia entre cantidades eléctricas y magnéticas.

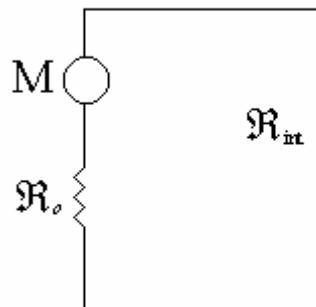
⊙ **Correspondencia entre circuitos eléctricos y magnéticos.**

CIRCUITOS ELECTRICOS	CIRCUITOS MAGNETICOS
Corriente I	Flujo magnético ϕ
Corriente de densidad \vec{j}	Densidad de flujo magnético \vec{B}
Conductividad σ	Permeabilidad μ
Fuerza electromotriz ξ	Fuerza magnetomotriz M
\vec{E}	\vec{H}
Resistencia R	Reluctancia \mathfrak{R}
Conductancia $\frac{1}{R}$	Permeancia $\frac{1}{\mathfrak{R}}$

© Circuito magnético con imán permanente.



El circuito magnético equivalente será:



en el que al material y al espacio entre los imanes se les ha asociado respectivamente una reluctancia \mathcal{R}_{int} y \mathcal{R}_o , de valor,:

$$\mathcal{R}_{int} = \frac{l_{int}}{\mu_{int} \cdot A_{int}} \quad \mathcal{R}_o = \frac{l_o}{\mu_o}$$

siendo

$l_{int} \equiv$ longitud del material

$A_{int} \equiv$ sección del material.

$l_o \equiv$ separación de los imanes.

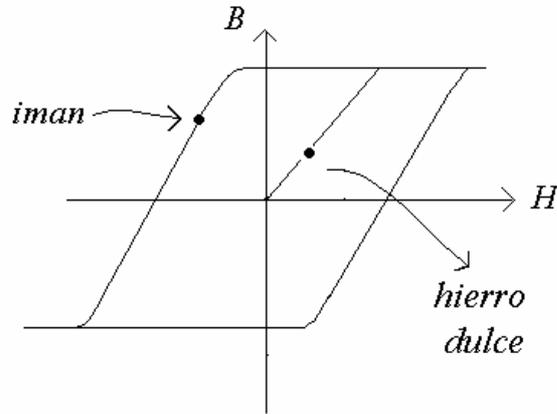
$A_o \equiv$ sección en los polos extremos de los imanes.

$M \equiv$ fuerza magnetomotriz, origen del flujo magnético

Para conocer el valor de la fuerza magnetomotriz, y el flujo magnético en el circuito, se aplica la ley de Ampere generalizada a lo largo de una trayectoria que recorra el circuito magnético. Como no existen corrientes libres en el circuito magnético se cumple que:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathcal{I} = 0$$

Al resolver la integral, se considera que el material magnético (hierro dulce) opera en la región lineal, es decir, que \vec{B} y \vec{H} tienen igual dirección y sentido. Sin embargo, en un imán tienen igual dirección pero sentidos opuestos, según se indica en la siguiente figura.



Por tanto se cumple que,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{int}} \cdot l_{\text{int}} - H_{\text{iman}} \cdot l_1 + H_0 l_0 - H_{\text{iman}} \cdot l_2 = 0$$

$$H_{\text{iman}} (l_1 + l_2) = H_{\text{iman}} \cdot l_{\text{iman}} = H_0 l_0 + H_{\text{int}} \cdot l_{\text{int}}$$

Por otro lado, el flujo magnético es el mismo en el material, entrehierro e imán, por lo que:

$$\phi = B_0 \cdot A_0 = B_{\text{iman}} \cdot A_{\text{iman}} = B_{\text{int}} \cdot A_{\text{int}}$$

siendo A_{iman} la sección interna del material. Teniendo en cuenta la relación entre la intensidad del campo magnético y la densidad de flujo magnético:

$$B_{\text{int}} = \mu_{\text{int}} \cdot H_{\text{int}}$$

$$B_0 = \mu_0 \cdot H_0$$

se llega a las siguientes relaciones:

$$H_{\text{int}} = \frac{\phi}{\mu_{\text{int}} \cdot A_{\text{int}}}$$

$$H_0 = \frac{\phi}{\mu_0 \cdot A_0}$$

La fuerza magnetomotriz del circuito, M , es debida al imán por lo que valdrá

$$M = H_{\text{iman}} \cdot l_{\text{iman}}$$

que llevando a la expresión obtenida mediante la ley de Ampere da lugar a,

$$M = H_0 \cdot l_0 + H_{\text{int}} \cdot l_{\text{int}}$$

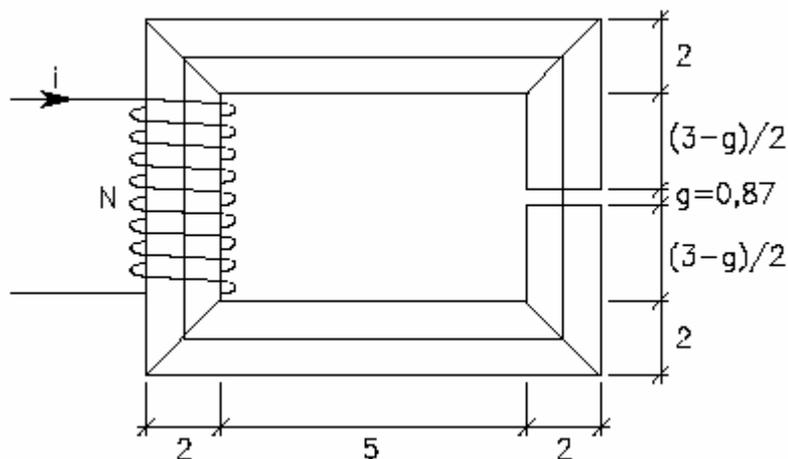
$$\phi = \frac{M}{\frac{l_0}{\mu_0 \cdot A_0} + \frac{l_{\text{int}}}{\mu_{\text{int}} \cdot A_{\text{int}}}}$$

Introduciendo las reluctancias del entrehierro y del material, se llega a la siguiente expresión que relaciona el flujo magnético del circuito, su fuerza magnetomotriz y las reluctancias existentes

$$\phi = \frac{M}{\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_{\text{int}}}$$

© **Problema nº 1.**

Sea el circuito magnético de la figura, cuya sección transversal es de 4 cm² y la longitud del entrehierro 0.87 cm. La corriente aplicada al bobinado es 1 A, y el número de espiras 700. La permeabilidad relativa es 5000. Se desea calcular la magnitud del flujo magnético que se obtiene en el entrehierro y el tanto por ciento de error que se comete al no tener en cuenta el núcleo magnético.



Solución.-

Calculemos primeramente las reluctancias existentes en el circuito magnético. En el material magnético:

$$l_h = 2 \times 2 + 5 + (5 - g) = 24 - g \text{ cm y } A_h = 4 \text{ cm}^2 = 0.0004 \text{ m}^2$$

$$\mathfrak{R}_h = \frac{l_h}{\mu_h A_h} = \frac{(24 - g) 10^{-2}}{5000 \mu_0 4 10^{-4}} = \frac{24 - g}{8\pi} 10^5 = 92031 \frac{\text{Av}}{\text{Wb}}$$

En el entrehierro:

$$l_g = 0.0087 \text{ m y } A_g = (2 + g)(2 + g) 10^{-4} = 0.00082369 \text{ m}^2$$

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_o A_g} = \frac{g}{\mu_o \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 17308099 \text{ (AVWb}^{-1}\text{)}$$

Con lo que,

$$\phi = \frac{Ni}{R_h + R_g} = \frac{700}{92301 + 17308099} = 4,02 \cdot 10^{-5} \text{ (Wb)}$$

Despreciando el núcleo magnético:

$$\phi' = \frac{Ni}{R_g} = \frac{700}{17308099} = 4,04 \cdot 10^{-5} \text{ (Wb)}$$

El error cometido será:

$$\varepsilon = \frac{\phi' - \phi}{\phi} \cdot 100 = 0,5 \%$$

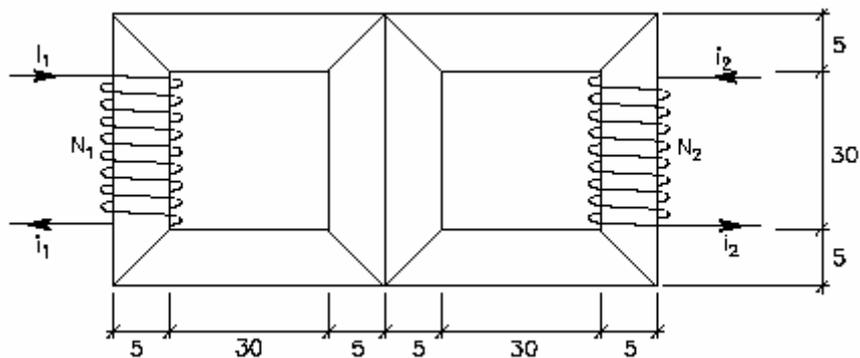
En caso de no existir entrehierro, la intensidad necesaria para lograr el mismo flujo será:

$$\mathcal{R}_t = \frac{l_t}{\mu A_t} = \frac{24 \cdot 10^{-2}}{\mu_o 3000 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 159154,94 \frac{\text{Av}}{\text{Wb}}$$

$$i' = \frac{\phi R_t}{N} = 9,07 \text{ (mA)}$$

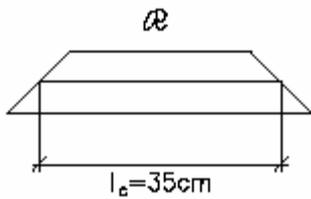
© **Problema n° 2.**

En el circuito de la siguiente figura, las dimensiones están dadas en centímetros, siendo la dimensión transversal del núcleo magnético de 10 cm. La permeabilidad relativa del material es de 3000. La corriente aplicada a cada bobinado es $i_1=1 \text{ A}$ e $i_2=1.5 \text{ A}$ y el número de espiras del bobinado de la izquierda es $N_1=700$.



Se quiere calcular el número de espiras necesario en el segundo bobinado, N_2 , para que por la columna central del núcleo magnético circule un flujo de 0.05 Wb.

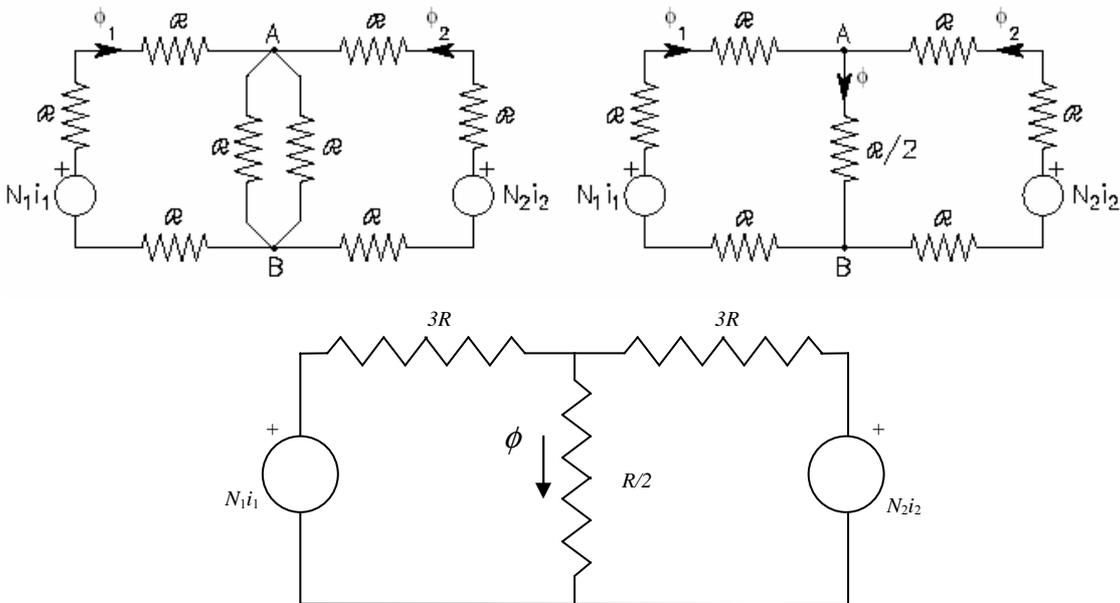
Solución.-



Las reluctancias son combinaciones serie o paralelo de la siguiente reluctancia genérica:

$$\mathfrak{R} = \frac{l_c}{\mu A} = \frac{0.35}{3000\mu_0 0.005} = \frac{0.35}{15\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{7}{300} \left[\frac{Av}{Wb} \right]$$

Quedando el circuito magnético equivalente, tras agrupar reluctancias, de la siguiente forma:



Resolviendo el circuito, aplicando superposición:

$$\phi = \frac{N_1 i_1}{\frac{3}{7}R + 3R} + \frac{N_2 i_2}{\frac{3}{7}R + 3R}$$

Con lo que despejando el número de espiras de la segunda bobina,

$$N_2 = \frac{\left(\frac{3}{7}R + 3R \right) \phi - N_1 i_1}{i_2} = \boxed{2009}$$

Ecuaciones de Maxwell

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos tratado el caso de cargas eléctricas en reposo (electrostática) o bien en movimiento pero con velocidad constante (Magnetostática). En estos casos, se puede estudiar el campo eléctrico del magnético, como si ambos fueran fenómenos independientes.

Para el caso de corrientes variables en el tiempo los modelos estudiados son inadecuados, ya que no se pueden desligar los efectos eléctricos de los magnéticos. En este tema veremos que un campo magnético variable induce un campo eléctrico, y viceversa.

Finalmente, enunciaremos las **ECUACIONES DE MAXWELL**, que explican los fenómenos electromagnéticos en su totalidad, y comprobaremos que las leyes empleadas en electrostática y en Magnetostática son casos particulares de éstas.

⊙ Flujo del campo magnético

Veamos al principio el caso de una superficie plana S que se encuentra en un campo magnético B . Flujo magnético a través de la superficie S se llama a:

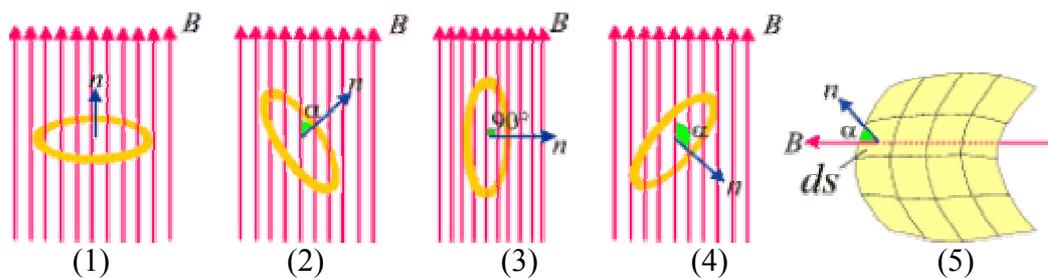
$$\phi = \beta \cdot S \cdot \cos(x)$$

x es la dirección entre la normal n y la dirección del campo B .

► En la parte inferior se observan varias orientaciones de un aro (aquí le llamamos una espira) de superficie S con respecto al campo magnético.

A partir de que el propio flujo magnético de una espira con corriente a través de la superficie que ella misma encierra siempre es positivo se define el signo. La dirección positiva de la normal de acuerdo a la regla de la mano derecha es en la dirección del campo formado por la espira con corriente.

En el caso de que la superficie no sea plana, esta se debe dividir en pequeñas superficies ds tal que cada una de ellas se pueda considerar plana, calcular el flujo para cada una de ellas y luego sumar los flujos de todas las superficies ds .



1. En este caso la dirección de la normal a la superficie está dirigida en el mismo sentido del campo magnético. La espira "abarca" el máximo posible de líneas de fuerza y su valor es: $\phi = \beta \cdot S$.

2. Aquí el flujo magnético a través de la espira ya no es el máximo. Su valor es $\phi = \beta \cdot S \cdot \cos \alpha$

3. En este caso el flujo magnético es cero. Ninguna línea de inducción pasa a través de la superficie de la espira. $\phi = 0$

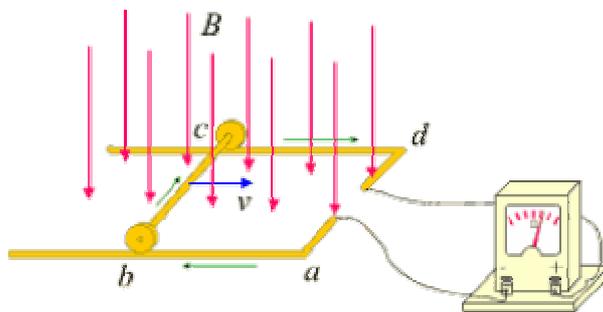
4. En este caso el ángulo entre la normal a la espira y el campo magnético es mayor que 90° . Obteniéndose un valor negativo para el flujo. La espira tiene "su derecho".

5. La figura muestra cómo se determina el flujo para una de las superficies ds. El flujo total es la suma de todos los flujos a través de todas las superficies.

Ejemplo 1:

Barra que se desplaza en un campo magnético

Imaginemos un experimento como el que se muestra en la figura.



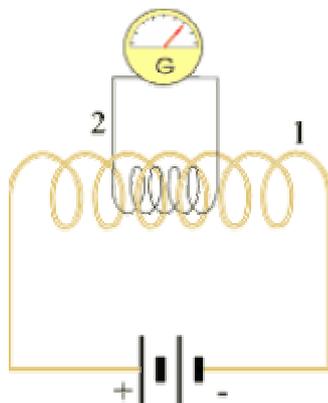
En un campo magnético se halla ubicada una espira abcd uno de cuyos lados es móvil (bc en la figura). La espira está conectada a un galvanómetro.

Al mover el lado bc el galvanómetro muestra la presencia de corriente inducida. Al mover el lado bc hacia la izquierda (aumento de la superficie abcd) la corriente inducida tiene una dirección, y al mover bc hacia la derecha (disminución de la superficie abcd) la corriente tiene la dirección contraria.

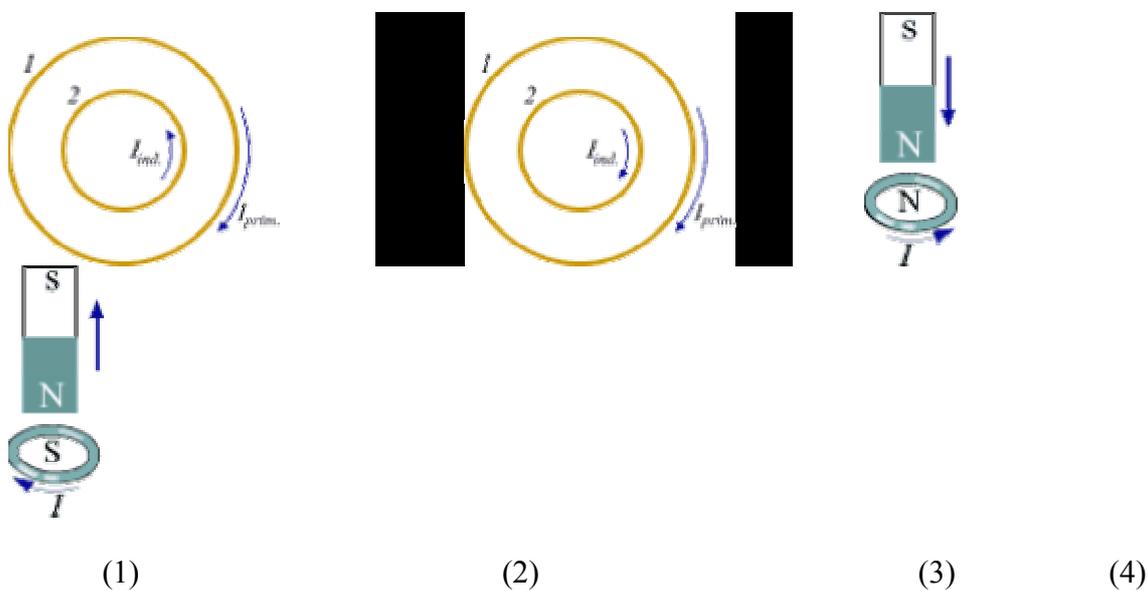
Si la superficie de la espira fuera paralela al campo magnético la variación de la superficie no causaría ninguna corriente de inducción.

© **Ley de Lenz**

Trataremos de expresar aquí una regla general que determina la dirección de la corriente de inducción. Consideraremos en primer lugar el siguiente esquema:



La bobina 1 contiene dentro la bobina 2. La primera de ellas está conectada a una batería y la segunda a un galvanómetro .



1. Aumento de B

Relación entre las direcciones de las corrientes primaria $I_{prim.}$ y la corriente inducida $I_{ind.}$. Aquí está aumentando el campo magnético. Nótese que la corriente en 2 forma un campo en dirección inversa.

2. Disminución de B

En esta ocasión el campo magnético se está debilitando. La corriente inducida forma un campo en la misma dirección del primario.

3. El imán se acerca

Dirección de la corriente inducida en la espira al acercarse el imán. Hay repulsión entre los dos elementos.

4. El imán se aleja

Dirección de la corriente inducida en la espira al alejarse el imán. Hay atracción entre los dos elementos.

En el primer caso cuando aumenta el campo magnético, y por consiguiente el aumento del flujo magnético, la corriente en las bobinas 1 y 2 poseen direcciones contrarias; en el cuando el campo magnético disminuye así como el flujo magnético ambas corrientes poseen igual dirección. En otras palabras se puede decir que cuando la causa de la inducción es el aumento del campo magnético entonces la corriente inducida está dirigida tal que debilita el campo magnético inicial. Al contrario cuando la inducción es a causa del debilitamiento del campo magnético el campo magnético de la corriente inducida refuerza el campo magnético inicial. En base a esto podríamos formular así la ley de Lenz:

La corriente de inducción siempre posee una dirección tal, que su campo magnético contrarresta o compensa la variación del flujo magnético del campo que dio origen a esta corriente.

Esta ley sin excepción en todos los casos de inducción. A la derecha se puede apreciar el caso en que el imán se acerca a una espira (podría ser la espira al imán) y el caso en que el imán se aleja de la espira (o la espira del imán).

Nótese que cuando en las espiras aparece una corriente inducida podemos atribuirles un norte y un sur como a cualquier imán. Cuando se acerca el polo norte del imán, este se ve enfrentado al norte de la espira. Cuando se aleja tenemos arriba de la espira el polo sur. Como sabemos en el primer caso hay repulsión y en el segundo caso atracción. De esta manera podemos enunciar la ley de Lenz en su forma original.

La corriente de inducción siempre tiene tal dirección que su interacción con el campo magnético primario se opone al movimiento origen de la inducción.

Esta ley está obviamente de acuerdo con la conservación de la energía. Supongamos que las direcciones de las corrientes fueran las contrarias a las que se muestran en las figuras. Entonces en el primer caso al acercarse el imán y ser sur el polo superior habría una atracción y entonces el imán sin ayuda se acercaría aceleradamente hacia la espira. De esta manera sin necesidad de un trabajo externo obtendríamos una aceleración continua del imán y una corriente cada vez mayor en la espira capaz de hacer un trabajo.

● Ley de inducción de Faraday

Michael Faraday descubrió en 1831 uno de los fenómenos más interesantes del electromagnetismo. Experimentalmente, estableció que al variar el flujo magnético que atraviesa una espira se induce una corriente. El postulado fundamental de la inducción electromagnética se enuncia como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación es aplicable a todos los puntos del espacio, sea cual sea su naturaleza. Así pues, la intensidad del campo eléctrico en una región de densidad de flujo magnético variable es no conservativa, y no podemos expresarla como el gradiente negativo de un potencial escalar.

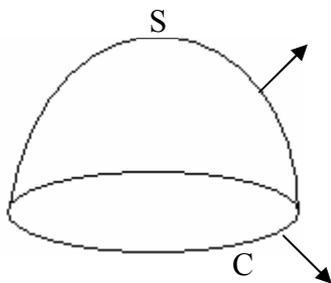
Operando con la relación anterior podemos obtener nuevas ecuaciones válidas en forma integral. Integrando sobre una superficie abierta y aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Así, la ley de Faraday se complementó con los trabajos de Lenz, que estableció que cuando varía el flujo magnético que atraviesa un circuito, éste reacciona de tal manera que se opone a la causa que produjo la variación.

De esta afirmación proviene el carácter negativo de la ecuación, conocida desde entonces como **Ley de Faraday-Lenz**. Su origen tuvo lugar al desarrollar el siguiente problema:

Tomemos una superficie abierta S delimitada por una curva C, y apliquemos la ley de Faraday-Lenz:



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Si definimos:

$$\boxed{\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

donde ε es la fuerza electromotriz inducida en el circuito con contorno C, medida en Voltios, y llamando Φ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

al flujo magnético que atraviesa cualquier superficie S apoyada en C, cuya unidad es el Weber, entonces tenemos que:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

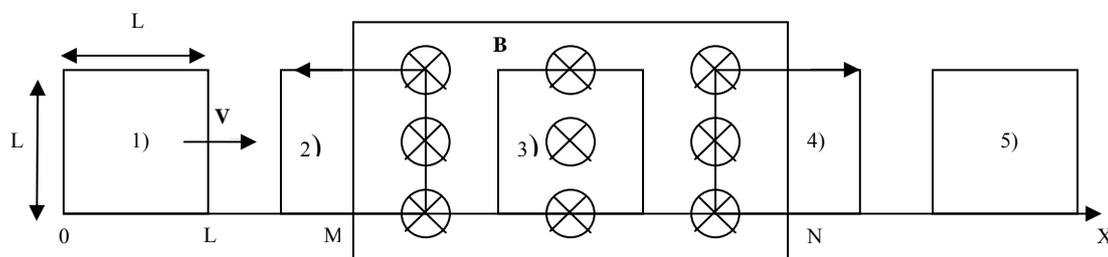
Esta ecuación es la forma más conocida de la ley de Faraday-Lenz, cuyo enunciado establece que:

“El flujo magnético a través de una superficie abierta S, genera una fuerza electromotriz inducida en el circuito cerrado estacionario sobre el que se apoya S, igual a menos la variación temporal de ese flujo. Esta fuerza electromotriz inducida fluye en dirección tal que se opone a la variación del flujo magnético que la origina.”

Ejemplo 2:

Una espira cuadrada de lado L, partiendo de A, se mueve con velocidad $\vec{v} = v \cdot \vec{a}_x \equiv cte$ desde A hasta C. En el tramo M-N existe un campo magnético uniforme y perpendicular al plano en el que se mueve la espira. Si la espira tiene una resistencia R, calcular la corriente que circula por ella durante el recorrido (se desprecia el campo magnético producido por la propia espira).

Podemos distinguir 5 casos, representados en la siguiente figura:



La ley de Faraday-Lenz nos dice que la fuerza electromotriz en la espira es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

y por la ley de Ohm tenemos que la corriente que circula por ella vale:

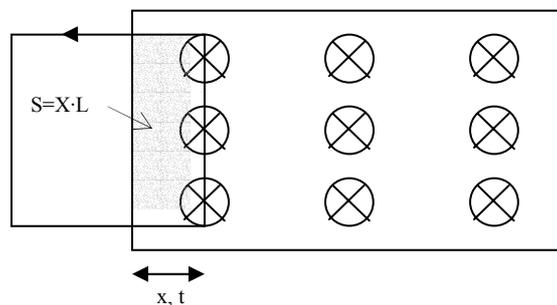
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Casos:

- 1) La espira está totalmente fuera del campo magnético y se mueve con velocidad constante hacia él: como no hay flujo magnético que atraviese la espira:

$$\phi = 0 \rightarrow \mathcal{E} = 0 \rightarrow I = 0$$

- 2) La espira comienza a introducirse en la región del campo magnético en el instante $t=0$:



Al ser la velocidad constante, el tramo que se introduce de la espira en el campo magnético tiene por longitud: $x = v \cdot t$

La sección de la espira atravesada por el campo será entonces:

$$S = x \cdot L = v \cdot t \cdot L$$

Calculamos el flujo, y a partir de él la f.e.m. inducida y la corriente:

$$\phi = B \cdot S = vtLB \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -vLB \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{vLB}{R}$$

- 3) La espira se mueve con velocidad constante con toda su superficie dentro de la región del campo magnético, que también es constante. Luego el flujo a través de ella es constante:

$$\phi = B \cdot S = B \cdot L^2 = cte \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow I = 0$$

- 4) La espira sale del campo magnético. Es la situación inversa que en el caso 2), con el flujo disminuyendo en lugar de aumentando, por tanto, la fuerza electromotriz es la misma pero en sentido contrario:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = vLB \rightarrow I = \frac{vLB}{R}$$

La corriente recorre la espira en sentido horario.

- 5) La situación es la misma que en el primer caso, con la espira completamente fuera del campo magnético. Podemos afirmar que $I=0$

⊙ Corriente de desplazamiento

Continuidad de la carga

Un postulado fundamental del electromagnetismo es el principio de conservación de la carga, que nos dice que la carga no se crea ni se destruye. La expresión matemática de este principio se extrae del siguiente razonamiento:

Sea un volumen V cualquiera limitado por una superficie S que encierra una carga Q_v . La corriente que lo atraviesa viene dada por

$$I = -\frac{dQ_v}{dt}$$

Cuando la carga entra al cuerpo, la corriente es menor que cero y cuando sale de él, es positiva. Por otro lado tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} I &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \\ Q_v &= \int_V \rho_v \cdot dv \end{aligned} \right\} I = \oint_S \vec{J} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

donde ρ_v es la densidad de carga y \vec{J} el vector densidad de corriente libre. Por el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv$$

A partir de estas ecuaciones se extrae la notación integral del principio de conservación de la carga:

$$\boxed{\int_V -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv} \quad \forall V$$

Esta expresión es válida para cualquier volumen. Entonces, en notación diferencial, la conservación de la carga se expresa como:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}$$

Densidad de corriente de desplazamiento

Un postulado fundamental de la magnetostática es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

Esta ecuación, sin embargo, no es consistente con el requisito de conservación de la carga en una situación variable con el tiempo, como se extrae de la divergencia del rotacional, que ha de ser idénticamente nulo para cualquier campo vectorial:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \vec{J} \rightarrow -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

derivada que es sólo cierta cuando la carga no varía con el tiempo (Magnetostática).

Maxwell introduce el concepto de corriente de desplazamiento para evitar ésta incoherencia. Esto permite establecer el que la corriente es continua, ya sea en forma de cargas en movimiento, ya sea en forma de energía electromagnética.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D \rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \vec{J} + \vec{\nabla} \vec{J}_D = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{J}_D$$

El valor de la corriente de desplazamiento será:

$$\vec{\nabla} \vec{J}_D = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta que: $\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_v$

obtenemos:

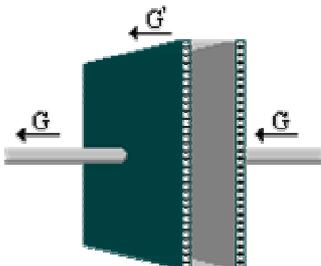
$$\vec{\nabla} \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{\nabla} \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \vec{J}_D = \vec{\nabla} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde \vec{D} es el vector desplazamiento. Como consecuencia podemos expresar el vector desplazamiento eléctrico como:

$$\boxed{\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{[\vec{J}_D] = A \cdot m^{-2}}$$

Al fin y al cabo, lo que viene a expresar el vector desplazamiento eléctrico es que la energía electromagnética se puede propagar en ausencia de medios materiales (ondas). Un campo eléctrico variable con el tiempo producirá un campo magnético, aunque no exista un flujo de corriente libre, es decir, incluso si $\vec{J} = 0$.

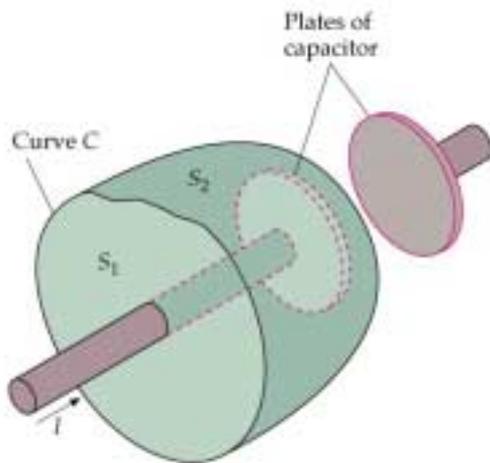


Por ejemplo, en el caso de los condensadores, una densidad de corriente \vec{J} (G en la figura) entra por la placa positiva y abandona el condensador por la negativa. La corriente eléctrica no es continua a través del dieléctrico que separa a las placas debido a que no hay transporte de

carga a través de éste. Sin embargo, la densidad de corriente de desplazamiento \vec{J}_D en el dieléctrico es exactamente igual a \vec{J} , manteniéndose entonces el concepto de continuidad de la corriente.

Generalización de la Ley de Ampère:

La ley de Ampère generalizada incluye un término extra al sumar a la corriente de conducción la corriente de desplazamiento:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d$$

La corriente total, $I + I_d$, se debe a la variación de las cargas libres en las placas del condensador:

$$I + I_d = \frac{dQ}{dt}$$

A través de la superficie S_1 , la corriente se debe únicamente a la carga libre que circula por el conductor, I ($I_d=0$). Sin embargo, a través de la superficie S_2 , como en el interior del condensador no fluyen cargas libres, la corriente es exclusivamente corriente de desplazamiento, I_d ($I=0$).

Para la corriente de desplazamiento se tiene entonces que:

$$I_d = \int_{S_2} \vec{J}_D d\vec{s} = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{D} d\vec{s}$$

Llamando ϕ_D al flujo del desplazamiento eléctrico a través de S_2 :

$$\phi_D = \int_{S_2} \vec{D} d\vec{s}$$

en general, para cualquier problema electromagnético:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \phi_D$$

La nueva expresión de la ley de Ampère es análoga a la ley de Faraday

$$\boxed{\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}}$$

Esta analogía puede enunciarse diciendo que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (ley de Faraday) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético (ley de Ampère generalizada).

⊙ Ecuaciones de Maxwell

En 1873, Maxwell publicó la monumental obra *Tratado de electricidad y magnetismo*, en la que presentó una síntesis de los conocimientos de este tema. Maxwell formuló matemáticamente la ley de Faraday. La síntesis fue hecha en términos de un conjunto de ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de Maxwell, que contenían como fondo físico los descubrimientos de Oersted, Ampère, Faraday y otros científicos anteriores.

Forma diferencial	Forma integral	Comentario
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	Ley de Faraday-Lenz generalizada: relaciona el flujo del campo magnético con el campo eléctrico. La integral de circulación del campo eléctrico es la variación del flujo magnético.
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$	Ley circuital de Ampère generalizada: expresa cómo las líneas de campo magnético rodean una superficie por la que circula una corriente o hay una variación del flujo eléctrico. La integral de circulación del campo eléctrico es proporcional a la corriente y la variación del flujo eléctrico.
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_v$	Ley de Gauss: el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada.
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Ley de Gauss para el magnetismo: implica la no existencia de monopolos magnéticos, ya que en una superficie cerrada el número de líneas de campo que entran equivale al número de líneas que salen.

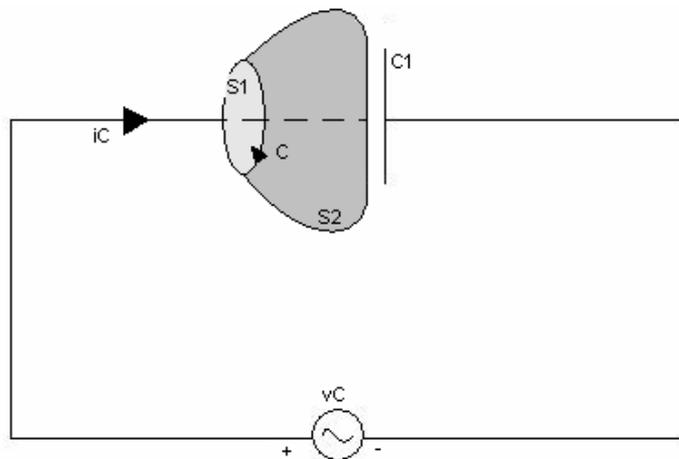
Estas cuatro ecuaciones, junto con las leyes de la fuerza, son las leyes fundamentales de la teoría electromagnética clásica. Rigen todos los fenómenos electromagnéticos en medios que son estacionarios con respecto al sistema de referencia usado. Son válidas en el margen de frecuencias desde cero a las más altas frecuencias de microondas, inclusive muchos fenómenos a las frecuencias de la luz. Sin embargo, éstas son leyes macroscópicas y como tales deben aplicarse a regiones o volúmenes cuyas dimensiones sean más grandes que las dimensiones atómicas. Análogamente los intervalos de tiempo de observación deben ser lo suficientemente largos para permitir promediar las fluctuaciones atómicas.

Las ecuaciones integrales presentan algunas restricciones matemáticas, como que los campos sean integrables y que existan las derivadas temporales del flujo eléctrico y magnético. En la mayoría de las situaciones físicas estas condiciones se satisfacen. Por otro lado, si los campos son continuos y derivables, las ecuaciones integrales pueden

convertirse en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Esta conversión se cumple aplicando el teorema de Stokes y el de la divergencia. Las expresiones diferenciales son relaciones de punto por naturaleza y se aplican a medios continuos. La información acerca de los medios discontinuos, tales como cuando intervienen contornos, deben obtenerse a partir de las ecuaciones de Maxwell en forma integral.

Ejemplo 3:

Una fuente de tensión alterna de amplitud V_0 , y frecuencia angular ω , $v_c = V_0 \text{sen} \omega t$, está conectada a un condensador de placas paralelas C_1 como se muestra en la figura.



- a) Compruebe que la corriente de desplazamiento en el condensador es la misma que la corriente de conducción en los alambres.

La corriente de conducción en el alambre de conducción es

$$i_c = C_1 \frac{dv_c}{dt} = C_1 V_0 \omega \cos \omega t$$

Para un condensador de placas paralelas con área A , separación entre placas d y medio dieléctrico con permitividad ϵ , la capacitancia es:

$$C_1 = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Si aparece un voltaje v_c entre las placas, la intensidad de campo eléctrico uniforme E en el dieléctrico es igual a:

$$E = v_c/d \quad (\text{despreciando los efectos de borde})$$

de manera que:

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V_0}{d} \text{sen} \omega t$$

La corriente de desplazamiento es entonces:

$$i_D = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \left(\epsilon \cdot \frac{A}{d} \right) V_0 \omega \cos \omega t = C_1 V_0 \omega \cos \omega t = i_C$$

tal y como queríamos comprobar.

- b) *Determine la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre.*

Podemos hallar la intensidad de campo magnético a una distancia r del alambre de conexión aplicando la ley circuital generalizada de Ampère al contorno C de la figura. Podemos elegir dos superficies abiertas genéricas con borde C: una superficie circular plana S_1 , por fuera del condensador, o una superficie curva S_2 que pasa por el medio dieléctrico. La simetría alrededor del alambre asegura una H_ϕ constante a lo largo del contorno C. La integral de línea del lado izquierdo de la 2ª ecuación de Maxwell es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\phi$$

En el caso de la superficie S_1 sólo el primer término del lado derecho de dicha ecuación es distinto de cero, ya que no se depositan cargas sobre el alambre y, por consiguiente, $\vec{D} = 0$.

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i_C = C_1 V_0 \omega \cos \omega t$$

Por otro lado, no fluye corriente de conducción por la superficie S_2 , ya que esta pasa por el medio dieléctrico. El lado derecho de la ecuación sería 0 si no estuviera allí la 2ª integral de superficie. Esto daría lugar a una contradicción, pero se elimina con la inclusión del término de corriente de desplazamiento de Maxwell. Como vimos en el apartado a), $i_C = i_D$. Por tanto, obtenemos el mismo resultado independientemente de la superficie. Igualando las integrales anteriores tenemos que:

$$H_\phi = \frac{C_1 V_0}{2\pi r} \omega \cos \omega t$$