UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso 2015-2016
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=(6-x)e^{x/3}$, se pide:

- **a)** (1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
- **b)** (1 punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
- **c)** (1 punto) Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva y = f(x) en el punto x = 0.

Solución.

a. **Dominio**: $D[f(x)]=D[(6-x)]\cap D\left[e^{x/3}\right]=R\cap R=R$

Asíntotas verticales: Son rectas de la forma x = a / a∉ D[f(x)] y $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x)=\frac{k}{0}$. No tiene porque su Dominio es R

Asíntotas horizontales: Son rectas de la forma y = L / $L=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\, f(x)\in R$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\, f(x)=\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\,(6-x)\cdot e^{x/3}\overset{\infty\cdot 0}{=}\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\,\frac{6-x}{e^{-x/3}}\underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\,\frac{-1}{e^{-x/3}\cdot\frac{-1}{3}}=\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\,\frac{3}{e^{-x/3}}=\frac{3}{\infty}=0$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}}\, f(x)=\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}}\,(6-x)\cdot e^{x/3}=-\infty\cdot\infty=-\infty$$

La función tiene asíntota horizontal hacia menos infinito (y = 0).

Asíntota oblicua: La función puede tener oblicua hacia +∞ por carecer hacia ese infinito de horizontal (y = mx + n).

$$m=\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}}\,\frac{f(x)}{x}=\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}}\,\frac{(6-x)\cdot e^{x/3}}{x}=\underset{x\to+\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{6}{x}-1\right)\cdot e^{x/3}=\left(\frac{6}{\infty}-1\right)\cdot e^{\infty/3}=(0-1)\cdot\infty=-\infty$$

No tiene asuntota oblicua hacia +∞

Cortes con OX (y = 0): $0=(6-x)e^{x/3}:\begin{cases}6-x=0: x=6\\ e^{x/3}\neq 0\ \forall x\in R\end{cases}\Rightarrow$ Punto de corte con OX en $(6,0)$

Corte con OY (x = 0): $y=(6-0)e^{0/3}=6\cdot 1=6\Rightarrow$ Punto de corte con OY $(0,6)$

b. $f'(x)=-1\cdot e^{x/3}+(6-x)\cdot e^{x/3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{e^{x/3}}{3}(3-x)$

Monotonia y extremos relativos. Por ser una función continua en R, se estudian los extremos relativos de la función, y a partir de estos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Extremos relativos: $f'(x)=0: \frac{e^{x/3}}{3}(3-x)=0: \begin{cases} e^{x/3}\neq 0\ \forall x\in R \\ 3-x=0: x=3 \end{cases}$ $f(3)=(6-3)e^{3/3}=3e$

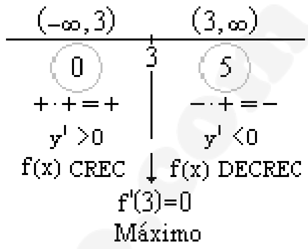
$$f''(x)=\frac{e^{x/3}}{3}\cdot\frac{1}{3}(3-x)+\frac{e^{x/3}}{3}(-1)=-\frac{x\cdot e^{x/3}}{9} \qquad f''(3)=-\frac{3\cdot e^{3/3}}{9}=-\frac{e}{3}<0$$

En $(3, f(3))=(3, 3e)$ la función tiene un máximo relativo.

Por ser continua y tener un máximo en x = 3: $\begin{cases} (-\infty, 3) & \text{Creciente} \\ (3, \infty) & \text{Decreciente} \end{cases}$

Otra forma de resolver el apartado seria estudiando los signos y ceros de la derivada.

$$f'(x)=0: \frac{e^{x/3}}{3}(3-x)=0: \begin{cases} e^{x/3}\neq 0\ \forall x\in R \\ 3-x=0: x=3 \end{cases}$$

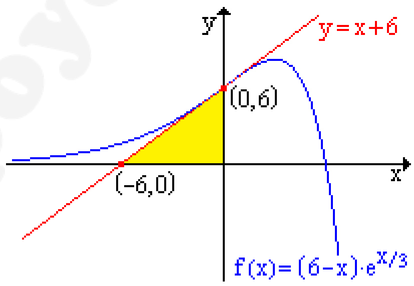


c. Ecuación de la recta tangente a la función en x = 0:

$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=(6-0)e^{0/3}=6\cdot 1=6 \qquad f'(0)=\frac{e^{0/3}}{3}(3-0)=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

$$y-6=1\cdot(x-0) \qquad y=x+6$$



Conocida la recta tangente, el área del triángulo determinado por la tangente y los ejes coordenado se puede calcular de dos formas diferentes.

Por cálculo integral: $\text{Área} = \int_{-6}^{0}(x+6)dx=\left(\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-6}^{0}=\left(\frac{0^2}{2}+6\cdot 0\right)-\left(\frac{(-6)^2}{2}+6\cdot(-6)\right)=$

$$=0-(18-36)=18\,u^2$$

Conocidos los puntos de corte, el área del triángulo es $\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}$

Los puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados son:

- OX (y = 0): x + 6 = 0 x = –6. (0, –6)
- OY (x = 0): y = 0 + 6 = 6. (6, 0)

$$A=\frac{6\cdot 6}{2}=18\,u^2$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

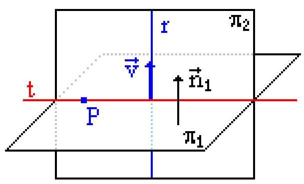
Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ y $s\equiv\{(2+\lambda, 1-3\lambda, \lambda); \lambda\in R\}$

a) (1 punto) Obtener la recta que pasa por el punto P(1, 0, 5) y corta perpendicularmente a r.
b) (1 punto) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.
c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Solución.

a. El problema se puede hacer de dos formas diferentes, por intersección de planos o calculando la proyección del punto sobre la recta.

Por intersección de planos: La recta que buscamos t, se puede calcular por intersección de los planos π_1 y π_2, siendo π_1 el plano perpendicular a r y que contiene a P y π_2, el plano que contiene a r y a P



$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} : \begin{cases} A(1, 3, 0) \\ \vec{v}(2, -3, 1) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el plano π_1 es perpendicular a la recta r, el vector normal del plano será igual al vector de dirección de la recta, por lo tanto la ecuación del general del plano tendra la siguiente forma:

$$2x - 3y + z + K = 0 \quad \forall K \in R$$

El parámetro K se calcula sustituyendo las coordenadas del punto P en la ecuación del plano.

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 5 + K = 0 : \quad K = -7$$

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0$$

El plano π_2 se puede calcular con el haz de planos de arista r, particularizando para el punto P.

Haz de planos de arista r: $x - 2z - 1 + K(x + y + z - 4) = 0 \quad \forall K \in R$

Plano del haz que contiene a P: $1 - 2 \cdot 5 - 1 + K(1 + 0 + 5 - 4) = 0$; $-10 + 2K = 0$; $K = 5$

$$\pi_2 \equiv x - 2z - 1 + 5(x + y + z - 4) = 0$$

$$\pi_2 \equiv 6x + 5y + 3z - 21 = 0$$

La recta t, es la intersección de π_1 y π_2.

$$t \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 7 = 0 \\ 6x + 5y + 3z - 21 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = 0 \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in R$$

Por proyección ortogonal. La otra forma de resolver el problema es calculando la proyección ortogonal de P sobre r (M), siendo en este caso la recta t la que pasa por P y M

La coordenadas del punto M se calculan mediante la intersección de la recta r con el π_1, plano perpendicular a r que contiene a P.

$$M : \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r \to \pi_1} 2(1 + 2\lambda) - 3(3 - 3\lambda) + \lambda - 7 = 0 : \lambda = 1 \Rightarrow M(1 + 2 \cdot 1, 3 - 3 \cdot 1, 1)$$

$$M(3, 0, 1)$$

El vector de dirección de la recta se puede obtener mediante el segmento $\overrightarrow{PM}$

$$\overrightarrow{PM} = (3 - 1, 0, 1 - 5) = (2, 0, -4) = 2(1, 0, -2)$$

$$t : \begin{cases} M(3, 0, 1) \\ \overrightarrow{PM}(1, 0, -2) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

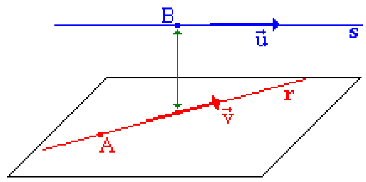
b. El plano que se busca σ, debe cumplir las siguiente condiciones: $\begin{cases} r \subset \sigma \\ s \parallel \sigma \end{cases}$, de la recta r por estar contenida en el plano, se utilizará el punto A y el vector $\vec{v}$, y de la recta s, por ser paralela solo se utilizara el vector $\vec{u}$

$$\sigma \equiv \begin{cases} A(1, 3, 0) \\ \vec{v}(2, -3, 1) \\ \vec{u}(1, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}(x - 1) - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(y - 3) + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} z = 0$$

$$\sigma \equiv y + 3z - 3 = 0$$

c. La recta s es paralela al plano σ, por lo tanto todos los puntos de la recta s están a igual distancia del plano σ, y como el plano σ contiene a la recta r, la distancia entre las rectas r y s se puede calcular como distancia de un punto de s al plano σ.



$$d(r-s) = d(B(2,1,0) - \sigma \equiv y + 3z - 3 = 0)$$

$$d(r-s) = \frac{|1+3\cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$

Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & -1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solución.

a.
$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & -1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\alpha & -4\alpha\\ 5\alpha & -\alpha\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\alpha & -4\alpha\\ 5\alpha & -\alpha\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\alpha & -4\alpha\\ 5\alpha & -\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 4\beta & \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\alpha+\beta & -4\alpha\\ 5\alpha+4\beta & -\alpha+\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Identificando}} \begin{cases}3\alpha+\beta = 3 & -4\alpha = -8\\ 5\alpha+4\beta = -2 & -\alpha+\beta = -5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = -3\end{cases}$$

b.
$$A = \lambda\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda+1 & 2\lambda\\ \lambda & 3\lambda+1\end{pmatrix}$$

Para que el rg A = 2, el determinante de A debe ser distinto de cero.

$$\det A = \begin{vmatrix}2\lambda+1 & 2\lambda\\ \lambda & 3\lambda+1\end{vmatrix} = 4a^2+5a+1 = (4a+1)\cdot(a+1) = 0 : \begin{cases}a = -1\\ a = -1/4\end{cases}$$

$$\forall a \neq -1, -\frac{1}{4}\ \ |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.

Cierta fundación ha destinado 247 000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución.

Definición de las variables: - x ≡ Número de becas concedidas a grado universitario
- y ≡ Número de becas concedidas a formación profesional
- z ≡ Número de becas concedidas a postgrado

El enunciado permite plantear tres ecuaciones

1ª. *Se conceden 115 becas.*

$$x + y + z = 115$$

2ª. *247 000 € repartidos en 3000 € en grado universitario, 2000 € en formación profesional y 1500 € en postgrado.*

$$3000x + 2000y + 1500z = 247000$$

Simplificando:

$$6x+4y+3z=494$$

3ª. *Se han concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado*

$$y=2z$$

Ordenando se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que se puede resolver por el método de Gauss o el de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 115 \\ 6x + 4y + 3z = 494 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 3 & 494 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{E_2-6E_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot E_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{2E_3-E_2}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 0 & -7 & -196 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 115 \\ 2y + 3z = 196 \\ -7z = -196 \end{cases} : z=\frac{-196}{-7}=28$$

$$\begin{cases} x + y + 28 = 115 \\ 2y + 3\cdot 28 = 196 \end{cases} = \begin{cases} x + y = 87 \\ 2y = 112 \end{cases} : y=\frac{112}{2}=56 : \{x + 56 = 87 : x=31$$

Solución: $(31, 56, 28)$

Método de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 115 \\ 6x + 4y + 3z = 494 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-8+0+6-(0-12+3)=7\neq 0 \quad \text{S.C.D.}$$

- $x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 115 & 1 & 1 \\ 494 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{7}=\dfrac{217}{7}=31$
- $y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 115 & 1 \\ 6 & 494 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{7}=\dfrac{392}{7}=56$
- $z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 494 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{7}=\dfrac{196}{7}=28$

Solución: $(31, 56, 28)$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1-a \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.
b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

Solución.

a. Al sistema lo caracterizan las matrices de coeficientes (A) y ampliada (A*).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -2a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \quad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le n = 3$$

Si el $|A| \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3,$ sistema compatible determinado, por lo tanto, se discute el tipo de solución del sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - a - 4 - (2 + 2a - 2 - 2a) = a^2 - a - 2 = (a+1)\cdot(a-2)\,;\ |A| = 0 : \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Discusión:

i. Si $a \ne -1, 2$. $|A| \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3,$ **sistema compatible determinado**

ii. Si $a = -1$. $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada solo se tienen en cuenta los menores orlados al menor de orden dos distinto de cero de la matriz de coeficientes. De los dos posibles menores orlados $(\{C_1, C_2, C_3\}; \{C_1, C_2, C_4\})$, el primero de ellos es el determinante de la matriz de coeficientes, que para $a = -1$ es nulo, por lo tanto solo nos queda por estudiar el segundo menor orlado. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3 \ne \text{rg } A,$ **sistema incompatible.**

iii. Si $a = 2$. $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada se opera de forma análoga al caso anterior y por tanto solo queda por estudiar un menor orlado al menor de orden 2 distinto de cero $(\{C_1, C_2, C_4\})$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 2 = \text{rg } A,$$ **sistema compatible indeterminado.**

b. Si $a \ne -1, 2$. Sistema compatible determinado. Método de Cramer. $|A| = (a+1)\cdot(a-2)$

- $$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)} = a$$

- $$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-(a-2)^2}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-(a-2)}{a+1}$$
- $$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{(2a-1)\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{2a-1}{a+1}$$

Si a = 2. Sistema compatible indeterminado. Rango del sistema 2, por lo tanto, el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes. Para no equivocarnos en la selección de las ecuaciones linealmente independientes, se toman las ecuaciones que contienen al menor de orden dos distinto de cero $\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$, la 2ª y la 3ª.

$$S': \begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. Para resolver el sistema se transforma una de las variables en parámetro y se resuelven las otras dos variables en función del parámetro. Para no equivocarnos en la elección de la variable, se toma como parámetro la variable cuyos coeficientes no formaron parte del menor de orden 2 distinto de cero, en este caso la z.

$$S': \begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} 2x + y = 2+2\lambda \\ -x + y = -1-\lambda \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene x: $3x = 3 + 3\lambda \Rightarrow x = 1 + \lambda$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación se obtiene y.

$$-1-\lambda + y = -1 - \lambda \Rightarrow y = 0$$

Solución: $(1+\lambda, 0, \lambda)\ \forall\, \lambda \in R$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución.

a. La continuidad de una función por intervalos se estudia en los puntos excluidos del dominio y en los puntos frontera

$D[f(x)] = R$

El único punto donde es necesario estudiar la continuidad es en x = 0.

Para que la función sea continua en x = 0, se debe cumplir:

$$\underset{x \leftrightarrow 0^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x \leftrightarrow 0^+}{\text{Lím}}\ f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x\leftrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\leftrightarrow 0^-}\frac{1}{5-x}=\frac{1}{5-0}=\frac{1}{5}\ ;\quad \lim_{x\leftrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\leftrightarrow 0^+}\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5+0}=\frac{1}{5}\ ;\quad f(5)=\frac{1}{5-0}=\frac{1}{5}$$

Coincide todo $\left(\lim_{x\leftrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\leftrightarrow 0^+} f(x)=f(x)=\frac{1}{5}\right)$, la función es continua en R

Asíntotas verticales no tiene por ser su dominio todo R.

Asíntotas horizontales: son recta de la forma: $y=L\,/\,L=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$L=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5-x}=\frac{1}{5-(-\infty)}=0$$
$$L=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5+\infty}=0$$

Asíntota horizontal y = 0

b. la derivabilidad de la función, como en el caso de la continuidad, se estudia únicamente en el punto frontera (x = 0).

Para que la función sea derivable ele en $x = 0$, se debe cumplir: $\lim_{x\to 0^-} D[f(x)]=\lim_{x\to 0^+} D[f(x)]$

$$\text{Si}\quad x<0\quad D[f(x)]=\left(\frac{1}{5-x}\right)'=\frac{0\cdot(5-x)-1\cdot(-1)}{(5-x)^2}=\frac{1}{(5-x)^2}$$
$$\text{Si}\quad x>0\quad D[f(x)]=\left(\frac{1}{5+x}\right)'=\frac{0\cdot(5+x)-1\cdot 1}{(5+x)^2}=\frac{-1}{(5+x)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} D[f(x)]&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(5-x)^2}=\frac{1}{25}\\ \lim_{x\to 0^+} D[f(x)]&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(5+x)^2}=\frac{-1}{25}\end{aligned}\right\}:\ \lim_{x\to 0^-} D[f(x)]\neq\lim_{x\to 0^+} D[f(x)]$$

La función no es derivable en x = 0.

Para x ≠ 0, la derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases} D\left[\dfrac{1}{5-x}\right] & \text{si}\quad x<0\\[2ex] D\left[\dfrac{1}{5+x}\right] & \text{si}\quad x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si}\quad x<0\\[2ex] \dfrac{-1}{(5+x)^2} & \text{si}\quad x>0\end{cases}$$

c. Aplicando las propiedades de la regla de Barrow, la integral ase descompone en suma de integrales.

Si c es un punto interior al intervalo $[a,b]$, se verifica:

$$\int_a^c f(x)\cdot dx+\int_c^b f(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{5-x}dx+\int_0^1\frac{1}{5+x}dx=-\int_{-1}^{0}\frac{-1}{5-x}dx+\left(\mathrm{Ln}|5+x|\right]_0^1=-\left(\mathrm{Ln}|5-x|\right]_{-1}^{0}+\left(\mathrm{Ln}|5+x|\right]_0^1=$$

$$=-\mathrm{Ln}|5-0|-\left(-\mathrm{Ln}|5-(-1)|\right)+\mathrm{Ln}|5+1|-\mathrm{Ln}|5+0|=-\mathrm{Ln}5+\mathrm{Ln}6+\mathrm{Ln}6-\mathrm{Ln}5=2\mathrm{Ln}\frac{6}{5}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima 2 puntos

Sea π el plano que contiene a los puntos A(0, 2, 1), B(1, 0, 1) y C(–1, –2, –1). Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Solución.

Primero se calcula la ecuación plano π que contiene a los puntos A, B y C.

La ecuación del plano se obtiene con dos de los vectores que forman los tres puntos y uno de los puntos.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,2,1) \\ \overrightarrow{AB} = (1-0, 0-2, 1-1) = (1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1-0, -2-2, -1-1) = (-1,-4,-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la 1ª fila:

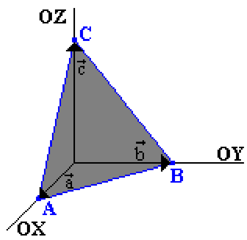
$$\pi \equiv -4x - 2y + 6z - 2 = 0 \qquad \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0$$

Conocida la ecuación del plano, se calculan los puntos de corte del plano con los ejes coordenados. La forma mas sencilla es pasar la ecuación general a ecuación canónica.

$$\pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0 \qquad \pi \equiv 2x + y - 3z = -1 \qquad \pi \equiv \frac{2x}{-1} + \frac{y}{-1} + \frac{-3z}{-1} = \frac{-1}{-1}$$

$$\pi \equiv \frac{x}{-1/2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{1/3} = 1$$

Los puntos de corte son: $\begin{cases} A(-1/2, 0, 0) \\ B(0, -1, 0) \\ C(0, 0, 1/3) \end{cases}$, y por tanto, el tetraedro queda



determinado por los vectores: $\begin{cases} \vec{a}(-1/2, 0, 0) \\ \vec{b}(0, -1, 0) \\ \vec{c}(0, 0, 1/3) \end{cases}$ y su volumen es:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{36} u^3$$

Ejercicio 4. Calificación máxima 2 puntos

Dado el plano π ≡ 3x + 3y + z – 9 = 0, se pide:

- **a)** (1 punto) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.
- **b)** (1 punto) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Solución.

a. El plano que se pide σ, se obtiene con dos vectores paralelos al plano linealmente independientes y un punto del plano.

Como el plano σ contiene al eje OX, cualquier punto del eje estará contenido en el plano, el mas sencillo (O(0,0,0)), y el vector representante del eje $\left(\vec{i}(1,0,0)\right)$, también estará contenido en el plano. El otro vector se obtiene del normal al plano π $\left(\vec{n}_\pi(3,3,1)\right)$, porque si r σ y π son perpendiculares, $\vec{n}_\pi$ es paralelo a σ.

$$\sigma \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{i}(1,0,0) \\ \vec{n}_\pi(3,3,1) \end{cases} : \sigma \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando se obtiene la ecuación de σ

$$\sigma \equiv y - 3z = 0$$

b. Se pide lo que se conoce como el pie de la perpendicular al plano trazada desde el origen, es decir el punto de intersección del plano π con la recta perpendicular al plano que pasa por el origen.

La recta r, perpendicular al plano que pasa por el origen tiene por determinación lineal:

$$r \equiv \begin{cases} \text{Punto } O(0,0,0) \\ \text{Vector } \vec{n}_\pi(3,3,1) \end{cases} : r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \ \forall\, \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto M del plano más próximo al origen (pie de la perpendicular) es la intersección de r con el plano π.

$$M = \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0 \end{cases} \qquad \text{Sustituyendo r en } \pi \quad 3\cdot 3\lambda + 3\cdot 3\lambda + \lambda - 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{9}{19} \Rightarrow M = \begin{cases} x = 3\cdot\frac{9}{19} = \frac{27}{19} \\ y = 3\cdot\frac{9}{19} = \frac{27}{19} \\ z = \frac{9}{19} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$