UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO

Curso 2015/2016 JUNIO

MATERIA: MATEMATICAS II

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, donde Ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

- **a)** (1 puntos) Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- **b)** (0’5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva y = f(x), en x = 2.
- **c)** (1’5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución.

a. Las expresiones parciales de la función, son continuas en los intervalos donde se definen, por lo tanto, para que la función sea continua en R, deberá ser continua en el punto frontera (x = 0).

Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x} = \dfrac{\operatorname{Ln}(1-0)}{1-0} = \dfrac{\operatorname{Ln}1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(xe^{-x}\right) = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0 \\ f(0) = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0 \end{array}\right\} : \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en todo R.

b. La ecuación de la recta tangente en x = 2 en forma punto-pendiente es:

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$$

$$f(2) = 2\cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

$$\left(xe^{-x}\right)' = 1\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (1-x)e^{-x}$$

$$f'(2) = (1-2)\cdot e^{-2} = \frac{-1}{e^2}$$

Sustituyendo los valores en la expresión de la recta:

$$y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}\cdot(x-2)$$

c. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{1-x}\,dx=\left\{\begin{array}{c}\int f^n(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C\\ n=1\\ f(x)=\mathrm{Ln}(1-x)\to f'(x)=\frac{-1}{1-x}\end{array}\right\}=-1\cdot\int_{-1}^{0}\mathrm{Ln}(1-x)\frac{-1}{1-x}\,dx=\left(-\frac{(L(1-x))^2}{2}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{(L(1-0))^2}{2}-\left(-\frac{(L(1-(-1)))^2}{2}\right)=\frac{\mathrm{Ln}^2 2}{2}$$

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx\overset{\text{PARTES}}{=}\left\{\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{array}\right\}=\left(x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=\left(-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$$

$$=\left(-xe^{-x}+\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1=\left(-e^{-x}(1+x)\right]_0^1=\left(-e^{-1}(1+1)\right)-\left(-e^{-0}(1+0)\right)=1-\frac{2}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{\mathrm{Ln}^2 2}{2}+1-\frac{2}{e}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

a) (1’5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1’5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB=A$.

Solución.

a. Para despejar la matriz X se tienen en cuenta las propiedades de las operaciones con matrices y las propiedades de la inversa.

- **i.** El producto de matrices no es conmutativo, por lo que para obtener una igualdad equivalente se multiplicarán los dos miembros de la igualdad por la misma matriz y en el mismo orden.
- **ii.** El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad
- **iii.** La matriz identidad es el elemento neutro respecto del producto de matrices
- **iv.** $\left(D^{-1}\cdot C^{-1}=(CD)^{-1}\right)$

$$X(CD)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)\xrightarrow{\left(D^{-1}\cdot C^{-1}=(CD)^{-1}\right)}X(CD)^{-1}=A+X\left((CD)^{-1}-B\right)$$

$$X(CD)^{-1}=A+X(CD)^{-1}-XB$$

Simplificando los términos iguales:

$$A-XB=0$$

Se despeja X utilizando la inversa de B

$$XB=A\ ;\quad XB\cdot B^{-1}=A\cdot B^{-1}\ ;\quad X\cdot I=A\cdot B^{-1}\ ;\quad X=A\cdot B^{-1}$$

b. Se despeja la matriz Y empleando la inversa de B

$$YB=A\ ;\quad YB\cdot B^{-1}=A\cdot B^{-1}\ ;\quad YI=A\cdot B^{-1}\ ;\quad Y=A\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\operatorname{adj}B)^t\qquad |B|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}\underset{F_3=F_3-F_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&0&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\0&2\end{vmatrix}=-1\cdot(-2)=2$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{adj}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$X = A\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+0+1 & -4+0+0 & 2+0-1 \\ -1+0-1 & -2+0+0 & 1+0+1 \\ -2+2-1 & -4+2+0 & 2+0+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0'5 puntos) Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0'5 puntos) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 puntos) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano x = y.

Solución.

a. Si los planos son paralelos, sus vectores normales deberán ser proporcionales.

$$\vec{n}_{\pi_1} = k\cdot\vec{n}_{\pi_2}$$

$$(a, 1, -1) = k\cdot(1, a, 1) \ \Rightarrow\ \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv -x + y - z + 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

b. Si los planos son perpendiculares, sus vectores normales también lo serán, y por tanto, su producto escalar será nulo.

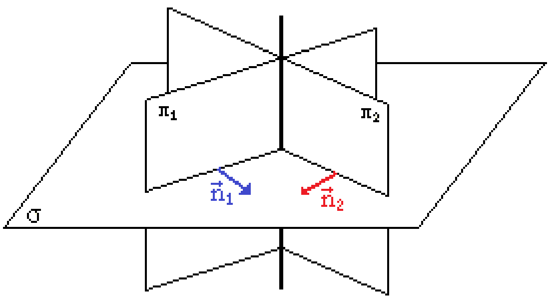
$$\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \circ \vec{n}_{\pi_2} = 0$$

$$(a, 1, -1)\circ(1, a, 1) = 0 \ \Rightarrow\ a\cdot 1 + 1\cdot a + (-1)\cdot 1 = 0$$

$$2a - 1 = 0\ ;\ a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv \frac{1}{2}x + y - z + 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + \frac{1}{2}y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

c. Como puede observarse en la figura adjunta, si la recta r, intersección de π_1 y π_2, es perpendicular al plano $\sigma \equiv x - y = 0$, los vectores normales de los plano π_1 y π_2 $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, deberán ser perpendiculares al vector normal de $\sigma\,(\vec{n}_\sigma)$.



$$\begin{cases} \vec{n}_1 \circ \vec{n}_\sigma = 0 \\ \vec{n}_2 \circ \vec{n}_\sigma = 0 \end{cases};\ \begin{cases} (a, 1, -1)\circ(1, -1, 0) = 0 \\ (1, a, 1)\circ(1, -1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ 1 - a = 0 \end{cases};\ a = 1 \ \Rightarrow\ \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - z + 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el punto P(2, 1, –1), determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos A(0, 2, –1), B(1, –3, 0) y C(2, 1, 1)

Solución.

Se calcula el plano π determinado por los puntos A, B y C.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0, 2, -1) \\ \overline{AB} = (1, -5, 1) \\ \overline{AC} = (2, -1, 2) \end{cases};\ \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-(-1) \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

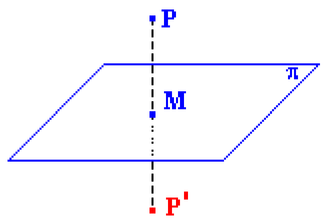
Desarrollando el determinante por los elementos de la 1ª fila:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (y-2) + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Operando los menores y ordenando y simplificando:

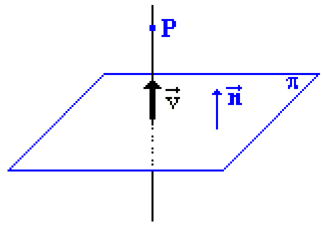
$$\pi \equiv x - z - 1 = 0$$

Conocido el plano, se calcula el simétrico de P(2, 1, –1) respecto del plano π: El simétrico de P respecto de π (P') se calcula como simétrico de P respecto de M, siendo M la proyección ortogonal de P sobre π como se observa en la figura.



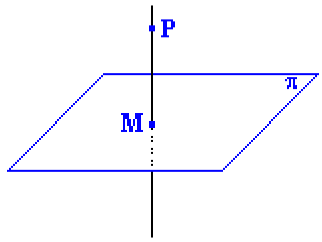
Pasos:

1) Se calcula la recta r, perpendicular a π que contiene a P
2) Se calcula M como intersección de r y π.
3) Conocidos P y M se calculan las coordenadas de P' con las ecuaciones del punto medio de un segmento.



1) $$r : \begin{cases} r \perp \pi \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_\pi = (1, 0, -1) \\ P(2, 1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

2) $$M : \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ \pi : x - z - 1 = 0 \end{cases} \text{Sustituyendo r en } \pi : (2+\lambda) - (-1-\lambda) - 1 = 0$$



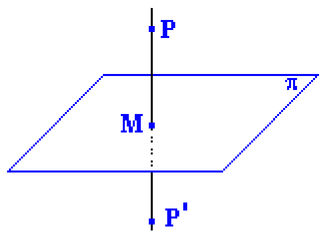
$$2\lambda + 2 = 0 \quad ; \quad \lambda = -1$$

$$M = \begin{cases} x_m = 2 + (-1) = 1 \\ y_m = 1 \\ z_m = -1 - (-1) = 0 \end{cases} : M(1, 1, 0)$$

3) Teniendo en cuenta que M es el punto medio de $\overrightarrow{P'P}$, se calculan las coordenadas de P' despejando de las coordenadas del punto medio.

$$M = \left(\frac{x_p + x_{p'}}{2}, \frac{y_p + y_{p'}}{2}, \frac{z_p + z_{p'}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{x_p + x_{p'}}{2} \Rightarrow x_{p'} = 2x_m - x_p = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ y_m = \dfrac{y_p + y_{p'}}{2} \Rightarrow y_{p'} = 2y_m - y_p = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ z_m = \dfrac{z_p + z_{p'}}{2} \Rightarrow x_{p'} = 2z_m - z_p = 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \end{cases}$$



$$P'(0, 1, 1)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ 5x & + & (m+1)y & + & 2z & = & 4 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.
b) (0'5 puntos) Resolverlo en el caso m = 0.
c) (0'5 puntos) Resolverlo en el caso m = 2.

Solución.

a. El sistema esta definido por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg}\, A \le \text{rg}\, A^* \le n = 3$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, $\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^* = n = 3$, sistema compatible determinado, por lo tanto, se discute el sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 10 + m^2 + m - (-5m + 2 + 6m + 6) = m^2 - 4$$

$$|A| = 0 \quad ; \quad m^2 - 4 = 0 \quad ; \quad m = \pm 2$$

Discusión:

i. Si $m \ne \pm 2$. $|A| \ne 0 \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 3$. **Sistema compatible determinado.**

ii. Si $m = 2$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg}\, A < 3$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \ne 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada, $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ se parte del menor de orden dos distinto de cero y se estudian sus menores orlados, de los dos posibles, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}\, A^* = 2 = \text{rg}A \ne n$. **Sistema compatible indeterminado.**

iii. Si $m = -2$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg}\, A < 3$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \ne 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$. Para estudiar el rango de la matriz ampliada, $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ se parte del menor de orden dos distinto de cero y se estudian sus menores orlados, de los dos posibles, solo que queda por estudiar el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \Rightarrow \text{rg}\, A^* = 3 \ne \text{rg}A$. **Sistema incompatible.**

b. Para m = 0, $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{cases}$ teniendo en cuenta la discusión del apartado a, sistema compatible determinado. Se puede resolver por el método de Cramer o por el método de Gauss.

Método de Cramer: $|A| = m^2 - 4 \overset{m=0}{=} -4$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8}{-4} = -2\ ;\ y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-28}{-4} = 7\ ;\ z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$$

Solución: $\left(-2, 7, \frac{7}{2}\right)$

Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -2 \\ 5 & 1 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} = \{E_1 \leftrightarrow E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 5 & 1 & 2 & \vdots & 4 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 4 & -6 & \vdots & 7 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \{2E_3 - 3E_2\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 4 & -6 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 7 \end{pmatrix} = \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 4y - 6z = 7 \\ 2z = 7 \end{cases} : z = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} x - y + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 \\ 4y - 6 \cdot \frac{7}{2} = 7 \end{cases} ;\ \begin{cases} x - y = -9 \\ 4y = 28 \end{cases} y = 7 :\ \{x - 7 = -9\ :\ x = -2$$

Solución: $\left(-2, 7, \frac{7}{2}\right)$

c. Para m = 2, $\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$ teniendo en cuenta la discusión del apartado a, sistema compatible indeterminado de rango 2, por lo tanto solo tiene dos ecuaciones linealmente independientes. Se seleccionan como independientes las ecuaciones que contienen los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se transforma una variable en parámetro y se resuelve en función de este, se toma como parámetro la variable cuyos coeficientes no formaron el menor de orden 2 $(z = \lambda)$.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 - 2\lambda \\ x - y = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones se calcula x

$$4x = -1 - 4\lambda\ ;\ \ x = \frac{-1}{4} - \lambda$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación, se despeja y:

$$\frac{-1}{4} - \lambda - y = -2 - 2\lambda\ ;\ \ y = \frac{7}{4} + \lambda$$

Solución: $\left(\frac{-1}{4} - \lambda, \frac{7}{4} + \lambda, \lambda\right)\ \forall\ \lambda \in R$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:

a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono ABCD es un paralelogramo.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.

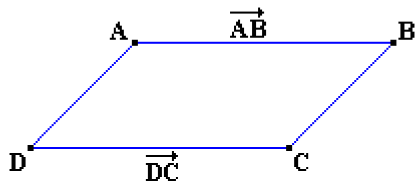
c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano ABCD es el punto medio del paralelogramo

Solución.

a. Si los cuatro puntos son coplanarios, el $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AD}\end{pmatrix}=2\Rightarrow\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AD}\end{vmatrix}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0-0,6-5,4-3)=(0,1,1)\\\overrightarrow{AC}=(2-0,4-5,2-3)=(2,-1,-1)\\\overrightarrow{AD}=(2-0,3-5,1-3)=(2,-2,-2)\end{array}\right\}:\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AD}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&-1\\2&-2&-2\end{vmatrix}=0$$

Si ABCD forman un paralelogramo, con los vértices consecutivos, los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ deberán ser equipolentes (igual modulo, dirección y sentido), en definitiva iguales.



$$\overrightarrow{AB}=(0-0,6-5,4-3)=(0,1,1)$$
$$\overrightarrow{DC}=(2-2,4-3,2-1)=(0,1,1)$$

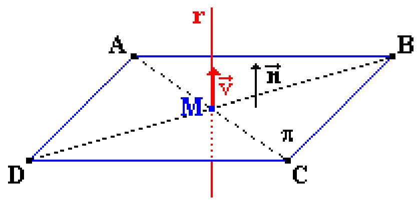
$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales, por lo tanto son equipolentes y sus vértices forman un paralelogramo.

b. $\text{Area}(ABCD)=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(0,1,1)\times(2,-2,-2)=\left(\begin{vmatrix}1&1\\-2&-2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&1\\2&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2&-2\end{vmatrix}\right)=(0,2,-2)$$

$$\text{Area}(ABCD)=|(0,2,-2)|=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

c. Se pide calcular la recta perpendicular al plano que determinan los cuatro puntos y que pasa por el centro del paralelogramo, tal como muestra la figura.



La recta r buscada tiene como vector de dirección el vector normal del plano, el cual es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(0,2,-2)$.

El punto M es el punto es el punto medio del los segmento $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$

$$M=\left(\frac{0+2}{2},\frac{5+4}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{0+2}{2},\frac{6+3}{2},\frac{4+1}{2}\right)=\left(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r\equiv\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{9}{2}+2\lambda\quad\forall\lambda\in R\\z=\dfrac{5}{2}-2\lambda\end{cases}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima 2 puntos

a) (1 punto) Determine el polinomio f(x), sabiendo que $f'''(x)=12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1)=1$; $f''(1)=4$.

b) (1 punto) Determine el polinomio g(x), sabiendo que $g''(x)=6$, para todo $x \in R$ y además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx=5 \quad , \quad \int_0^2 g(x)\,dx=14$$

Solución.

a. Por definición de función derivada:

$$f'''(x)=\frac{df''(x)}{dx}$$

Separando variables e integrando se obtiene la primitiva de $f''(x)$

$df''(x)=f'''(x)\cdot dx$ Integrando los dos miembros de la igualdad $\int df''(x)=\int f'''(x)\cdot dx$

$$f''(x)=\int 12\cdot dx=12x+C_1$$

La solución particular se calcula con el dato $f''(1)=4$

$$f''(1)=12\cdot 1+C_1=4 \quad ; \quad C_1=-8 \quad ; \quad f''(x)=12x-8$$

Repitiendo el procedimiento se obtiene a $f'(x)$ y de esta, se llega a $f(x)$

$$f''(x)=\frac{df'(x)}{dx} \quad ; \quad df'(x)=f''(x)\cdot dx \quad ; \quad \int df'(x)=\int f''(x)\cdot dx \quad ; \quad f'(x)=\int (12x-8)\cdot dx=\frac{12x^2}{2}-8x+C_2$$

La solución particular se calcula con el dato $f'(1)=1$

$$f'(1)=6\cdot 1^2-8\cdot 1+C_2=1 \quad ; \quad C_2=3 \quad ; \quad f'(x)=6x^2-8x+3$$

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx} \quad ; \quad df(x)=f'(x)\cdot dx \quad ; \quad \int df(x)=\int f'(x)\cdot dx \quad ; \quad f(x)=\int \left(6x^2-8x+3\right)\cdot dx$$

$$f(x)=\frac{6x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+3x+C_3=2x^3-4x^2+3x+C_3$$

La solución particular se calcula con el dato $f(1)=3$

$$f(1)==2\cdot 1^3-4\cdot 1^2+3\cdot 1+C_3=3 \quad ; \quad C_3=2$$

$$f(x)=2x^3-4x^2+3x+2$$

b. Operando de la misma forma que en el apartado anterior, se obtiene g(x).

$$g''(x)=\frac{dg'(x)}{dx} \quad ; \quad dg'(x)=g''(x)\cdot dx \quad ; \quad \int dg'(x)=\int g''(x)\cdot dx \quad ; \quad g'(x)=\int 6\cdot dx=6x+C_1$$

$$g'(x)=\frac{dg(x)}{dx} \quad ; \quad dg(x)=g'(x)\cdot dx \quad ; \quad \int dg(x)=\int g'(x)\cdot dx \quad ; \quad g(x)=\int (6x+C_1)\cdot dx$$

$$g(x)=\frac{6x^2}{2}+C_1x+C_2=3x^2+C_1x+C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2, se dan los datos $\int_0^1 g(x)\,dx=5$ y $\int_0^2 g(x)\,dx=14$, con los que se puede plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\int \left(3x^2+C_1x+C_2\right)dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C=x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\left(x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x\right]_0^1=\left(1^3+\frac{C_1}{2}1^2+C_2\cdot 1\right)-\left(0^3+\frac{C_1}{2}0^2+C_2\cdot 0\right)=5 \quad ; \quad \frac{1}{2}C_1+C_2=4$$

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\left(x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x\right]_0^2=\left(2^3+\frac{C_1}{2}2^2+C_2\cdot 2\right)-\left(0^3+\frac{C_1}{2}0^2+C_2\cdot 0\right)=14 \quad ; \quad 2C_1+2C_2=6$$

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 8 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases} : \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Ejercicio 4. Calificación máxima 2 puntos

Estudie la continuidad y la derivabilidad en x = 0 y en x = 1 de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ |x\,\text{Ln}x| & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$, donde Ln denota el logaritmo neperiano.

Solución.

El primer paso para estudiar la continuidad y derivabilidad de la función es expresar el valor absoluto como función por intervalos.

Teniendo en cuenta que la función Ln x es negativa en el intervalo (0, 1) y positiva en (1, +∞):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x\,\text{Ln}x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x\,\text{Ln}x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad en x = 0, Se estudia el límite y el valor de la función en el punto.

- $\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}\, 0 = 0$
- $\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}(-x\text{Ln}x) \overset{0\cdot\infty}{=} \underset{x\to 0}{\text{Lím}} \dfrac{\text{Ln}x}{-\frac{1}{x}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \underset{x\to 0}{\text{Lím}} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \underset{x\to 0}{\text{Lím}} \dfrac{x^2}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}\, x = 0$
- $f(0) = 0$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\, f(x) = f(0) \qquad \text{Continua en } x = 0$$

Continuidad en x = 1

- $\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}(-x\text{Ln}x) = -1\cdot\text{Ln}1 = 0$
- $\underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 1}{\text{Lím}}(x\text{Ln}x) = 1\cdot\text{Ln}1 = 0$
- $f(0) = 1\cdot\text{Ln}1 = 0$

$$\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\, f(x) = f(1) \qquad \text{Continua en } x = 1$$

Derivabilidad.

$$(x\cdot\text{Ln}x)' = 1\cdot\text{Ln}x + x\cdot\frac{1}{x} = \text{Ln}x + 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ -(\text{Ln}x + 1) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \text{Ln}x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Derivabilidad en x = 0

- $\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\, f'(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}\, 0 = 0$
- $\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\, f'(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lím}}(-\text{Ln}x - 1) = -\infty$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\, f'(x) \ne \underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\, f'(x) \quad \text{No derivable en } x = 0$$

Derivabilidad en x = 1

- $\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\, f'(x) = \underset{x\to 1}{\text{Lím}} -(\text{Ln}x + 1) = -1$
- $\underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\, f'(x) = \underset{x\to 1}{\text{Lím}}(\text{Ln}x + 1) = 1$

$$\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\, f'(x) \ne \underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\, f'(x) \quad \text{No derivable en } x = 1$$