PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2016

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral: $f(x)=\int \frac{(x-1)^2}{x+1}dx=\int \frac{x^2-2x+1}{x+1}dx$

Como es una función racional, dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$f(x)=\int \frac{x^2-2x+1}{x+1}dx=\int (x-3)dx+\int \frac{4}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|+C$$

Como $f(0)=0\Rightarrow 0=0+0+0+C\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|$

La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=\frac{1}{2}-3+4\ln 2=-\frac{5}{2}+4\ln 2$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}\Rightarrow f'(1)=0$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+\frac{5}{2}-4\ln 2=0\cdot(x-1)\Rightarrow y=-\frac{5}{2}+4\ln 2$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln x$ (ln representa logaritmo neperiano).
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

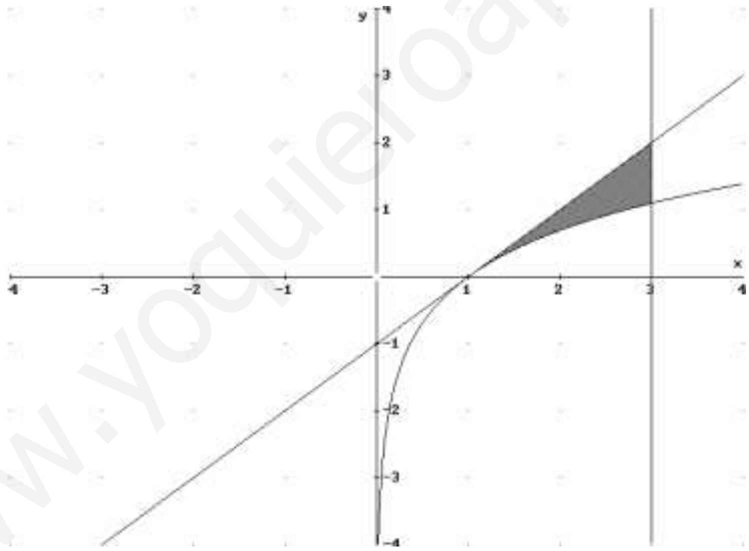
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=Ln1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x-1$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_1^3(x-1-\ln x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x-x\ln x+x\right]_1^3=\left[\frac{x^2}{2}-x\ln x\right]_1^3=\left(\frac{9}{2}-3\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1\right)=4-3\ln 3\ u^2$$

La integral de $\ln x$ la hacemos por partes

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Considera la función *f* dada por $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ para $x>0$.

a) Halla todas las primitivas de *f*.

b) Halla $\int_1^3 f(x)\,dx$

c) Determina la primitiva de *f* que toma el valor 3 para $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la integral de $\sqrt{x}$ y la integral de $\dfrac{\ln x}{x}$ por separado.

$$I_1=\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}$$

$$I_2=\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Hacemos un cambio de variable: $t=\ln x$; $dt=\dfrac{1}{x}dx$

$$I_2=\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int t\cdot dt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

Con lo cual, todas las primitivas de *f* son: $F(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{(\ln x)^2}{2}+C$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\left[\frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^3=\left(\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{(\ln 3)^2}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)=2\cdot\sqrt{3}+\frac{(\ln 3)^2}{2}-\frac{2}{3}$$

c) Calculamos la primitiva que cumple: $F(1)=3$

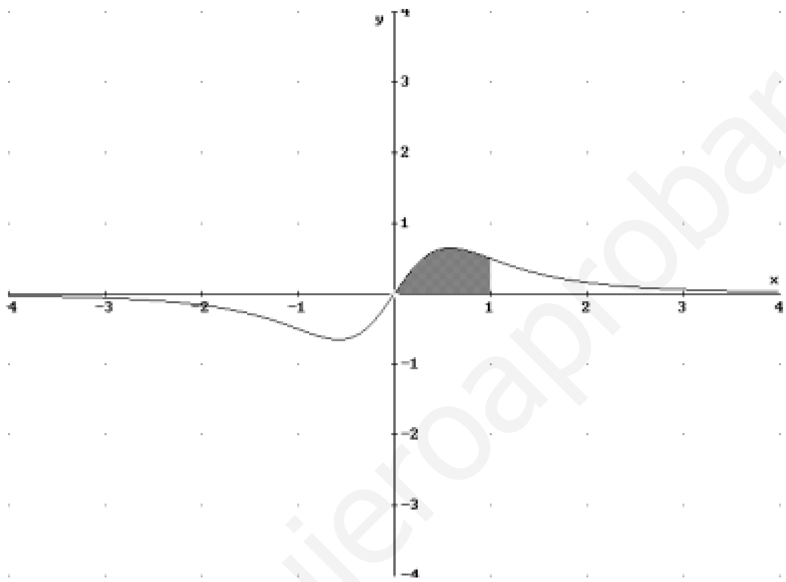
$$F(1)=3\Rightarrow\frac{2\cdot\sqrt{1^3}}{3}+\frac{(\ln 1)^2}{2}+C=3\Rightarrow\frac{2}{3}+C=3\Rightarrow C=\frac{7}{3}$$

Con lo cual, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{(\ln x)^2}{2}+\dfrac{7}{3}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las recta $x=0$ y $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo del recinto cuya área nos piden calcular



El área que nos piden viene dada por: $A=\int_0^1 \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Hacemos un cambio de variable: $t=x^2+1\ ;\ dt=2x\,dx$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$Si\ \ x=0\ \Rightarrow\ t=x^2+1=1$$
$$Si\ \ x=1\ \Rightarrow\ t=x^2+1=2$$

Con lo cual:

$$A=\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\ u^2$$

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ae^{x}-bx$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x=0$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=e-\frac{3}{2}$. Halla los valores de *a* y *b*.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada de la función.

$$f'(x)=ae^{x}-b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Tangente horizontal en $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow a-b=0$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=e-\frac{3}{2}\Rightarrow\int_0^1 (ae^{x}-bx)\,dx=\left[ae^{x}-\frac{bx^{2}}{2}\right]_0^1=ae-\frac{b}{2}-a=e-\frac{3}{2}$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=1$; $b=1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m>0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de *f* y el eje OX.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX

$$\frac{3x(2m-x)}{m^3}=0\Rightarrow 6mx-3x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2m$$

Vemos que función va por encima y cuál por debajo:

$$x=m\Rightarrow\begin{cases} f(x)=\dfrac{3m(2m-m)}{m^3}=\dfrac{3}{m}>0 \\ Eje\ OX\Rightarrow y=0\end{cases}$$

Luego, la función $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$ va por encima del eje OX

$$A=\frac{1}{m^3}\int_0^{2m}(6mx-3x^2)\ dx=\frac{1}{m^3}\left[\frac{6mx^2}{2}-\frac{3x^3}{3}\right]_0^{2m}=\frac{1}{m^3}\left(12m^3-8m^3\right)=4\ u^2$$

Calcula el valor de $a > 0$ para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral

$$\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(2+x^2)\right]_0^a = \frac{1}{2}\left[\ln(2+a^2)-\ln 2\right] = 1$$

Resolvemos la ecuación:

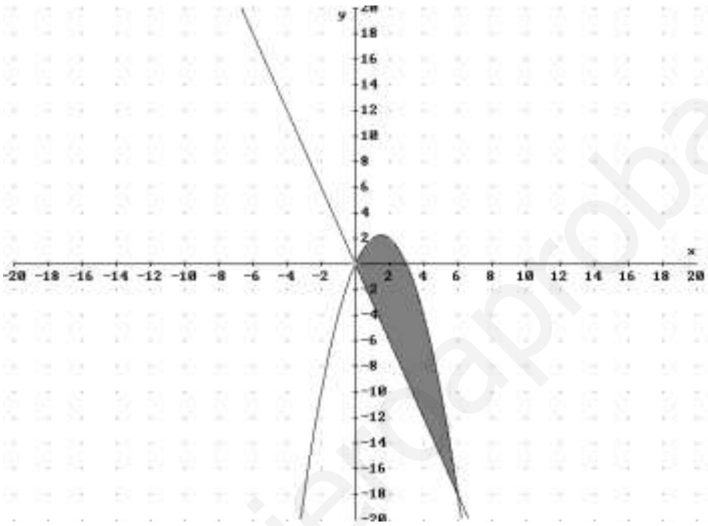
$$\frac{1}{2}\left[\ln(2+a^2)-\ln 2\right] = 1 \Rightarrow \ln\frac{2+a^2}{2} = 2 \Rightarrow e^2 = \frac{2+a^2}{2} \Rightarrow a = +\sqrt{2e^2-2} = 12'77$$

Ya que $a > 0$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-x^2+mx$ siendo $m>0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=-mx$ y calcula el valor de *m* para que el área de dicho recinto sea 36.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=-mx \\ y=-x^2+mx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2mx=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=2m .$$

$$36=\int_0^{2m}(-x^2+mx-(-mx))\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2mx^2}{2}\right]_0^{2m}=\left[-\frac{(2m)^3}{3}+\frac{2m(2m)^2}{2}\right]=-\frac{8m^3}{3}+\frac{8m^3}{2}=$$

$$=\frac{8m^3}{6}\Rightarrow m^3=27\Rightarrow m=3$$

Calcula $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\, dx$ ***(sugerencia : $t=\sqrt{2x+1}$)***

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{2x+1}$, vamos a calcular cuánto vale dx y x:

$$dt=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2x+1}}dx \Rightarrow dx=\sqrt{2x+1}\,dt=t\,dt$$

$$t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2}$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int\frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx=\int\frac{t^2\,dt}{2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+1+t}=\int\frac{t^2\,dt}{t^2+t}=\int\frac{tdt}{t+1}$$

Dividimos y descomponemos:

$$\int\frac{tdt}{t+1}=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t-\ln|t+1|=\sqrt{2x+1}-\ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|+C$$

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f''(x)=-2\,sen\,2x \quad , \quad f(0)=1 \quad y \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos:

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int -2\,sen\,2x\,dx=-\int 2\,sen\,2x\,dx=-(-\cos 2x)=\cos\,2x+C$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\cos\,2x+C)\,dx=\frac{1}{2}sen\,2x+Cx+D$$

Calculamos los valores de las constantes con los datos del problema

$$f(0)=1\Rightarrow D=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow C\cdot\frac{\pi}{2}+1=0\Rightarrow C=-\frac{2}{\pi}$$

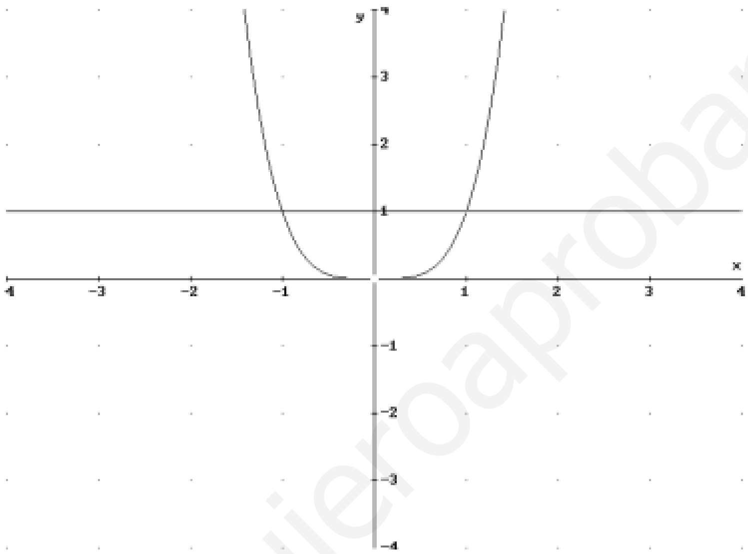
Luego, la función que nos piden es: $f(x)=\frac{1}{2}sen\,2x-\frac{2}{\pi}x+1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de *f* formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones. La recta paralela al eje OX tiene de ecuación $y=a$



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4=a \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{a}.$$

Como el recinto es simétrico respecto al eje OY, calculamos el área para $x>0$ y la multiplicamos por 2

$$\frac{8}{5}=2\cdot\int_0^{\sqrt[4]{a}}(a-x^4)\,dx=2\left[ax-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}}=2\cdot\left[a\sqrt[4]{a}-\frac{(\sqrt[4]{a})^5}{5}-0\right]=2\cdot\left[a\sqrt[4]{a}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{5}\right]=\frac{8a\sqrt[4]{a}}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{5}=\frac{8a\sqrt[4]{a}}{5}\Rightarrow 1=a\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a^5}\Rightarrow a^5=1\Rightarrow a=1$$

Calcula $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{t^2}{1+t}2tdt=\int \frac{2t^3}{1+t}dt$$

Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I=\int \frac{2t^3}{1+t}dt=\int\left(2t^2-2t+2-\frac{2}{1+t}\right)dt=\frac{2t^3}{3}-t^2+2t-2\ln|1+t|=\frac{2(\sqrt{x})^3}{3}-x+2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$