PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2016

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta *r* dada por $\left.\begin{array}{r} y+2z=0 \\ x=1 \end{array}\right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.
b) Calcula la distancia de *P* a la recta *r* y el punto simétrico de *P* respecto a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\left.\begin{array}{r} y+2z=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2t \\ z=t \end{array}\right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u}=(0,-2,1)$.

Todos los planos perpendiculares a *r* tienen de ecuación: $-2y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto *P*:

$$-2y+z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 0+5+D=0 \Rightarrow D=-5$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2y+z-5=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-2y+z-5=0 \Rightarrow -2\cdot(-2t)+t-5=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(1,-2,1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM}=(0,-2,-4)$, es decir:

$$\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\ u$$

Si llamamos $P'=(a,b,c)$, se cumple que el punto M es el punto medio del segmento PP', luego:

$$\frac{1+a}{2}=1 \Rightarrow a=1 \ ; \ \frac{0+b}{2}=-2 \Rightarrow b=-4 \ ; \ \frac{5+c}{2}=1 \Rightarrow c=-3$$

Por lo tanto, el simétrico es: $P'=(1,-4,-3)$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas *r* y *s*, calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *s* a paramétricas y calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,1,1) \\ \vec{u} = (2,-1,0) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1,0,-1) \\ \vec{v} = (-2,1,0) \end{cases}$$

Como las componentes de los dos vectores directores de las rectas son proporcionales, los vectores son paralelos y las rectas paralelas, por lo tanto, las rectas son coplanarias.

El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-2)$ y $\vec{u}$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,1,1)$ a la recta *s*. Para ello calculamos un plano perpendicular a *s* y que pase por el punto $A = (1,1,1)$

$$-2x + y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-1-2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 5t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5}$$

Luego, el punto de corte es el $M = \left(-1 + \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{5} - 1, -\frac{3}{5} - 1, -1 - 1\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right)$, luego:

$$d = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}}\ u$$

La distancia entre las rectas es el lado del cuadrado, luego su área será: $S = d^2 = \frac{36}{5}\ u^2$

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos *A*, *B*, *C* y *D* siendo

$$\boldsymbol{A(1,0,-1),\ B(3,2,1)\ \text{y}\ C(-7,1,5)}$$

a) Determina las coordenadas del punto *D*.
b) Calcula el área del paralelogramo.
c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal *AC* es: $M=\left(\dfrac{1-7}{2},\dfrac{0+1}{2},\dfrac{-1+5}{2}\right)=\left(-3,\dfrac{1}{2},2\right)$

El punto medio de la diagonal *BD*, también es *M*, luego si llamamos $D(a,b,c)$, se tiene que cumplir:

$$M=\left(\frac{3+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-3,\frac{1}{2},2\right)\Rightarrow D(-9,-1,3)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(2,2,2)$ y $\vec{AD}=(-10,-1,4)$ y aplicamos la fórmula del área del paralelogramo.

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ -10 & -1 & 4\end{vmatrix}=(10,-28,18)$$

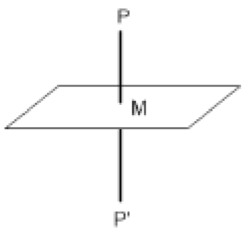
$$\boldsymbol{S}=|\vec{AB}\wedge\vec{AD}|=\sqrt{10^2+28^2+18^2}=\sqrt{1208}=34'75\ u^2$$

c) El plano viene definido por el punto $A=(1,0,-1)$ y los vectores $\vec{AB}=(2,2,2)$ y $\vec{AD}=(-10,-1,4)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 2 & -10\\ y & 2 & -1\\ z+1 & 2 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5x-14y+9z+4=0$$

Se considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x-y+z+1=0$.
a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.
b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\left\{\begin{aligned} x-2y&=1 \\ z&=3\end{aligned}\right.$
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,-1,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-1+t\end{array}\right.$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2\cdot(1+2t)-1\cdot(-t)+1\cdot(-1+t)+1=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{b+0}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{c-1}{2}=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow c=-\dfrac{5}{3}$

Luego, el punto simétrico es el $P'\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

b) Calculamos el vector director de la recta $\left\{\begin{aligned} x-2y&=1 \\ z&=3\end{aligned}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=t \\ z=3\end{array}\right.\Rightarrow\vec{u}=(2,1,0)$

El plano que nos piden viene definido por el punto $P(1,0,-1)$, el vector $\vec{u}=(2,1,0)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(2,-1,1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-2y-4z-5=0$$

Sea *r* la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea *s* la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta *r* pasa por el punto $A=(1,-1,0)$ y su vector director es $\vec{u}=(-1,0,1)$. La recta *s* pasa por el punto $B=(2,2,2)$ y su vector director es $\vec{v}=(1,0,2)$. Las rectas se cruzan si el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(-1,0,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{AB}=(1,3,2)$ es tres. Vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3+6=9\neq 0 \Rightarrow \text{ El rango vale 3 y las rectas se cruzan.}$$

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r\equiv\begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x=2+s \\ y=2 \\ z=2+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A=(1-t,-1,t)$ y cualquier punto de la recta *s* tendrá de coordenadas $B=(2+s,2,2+2s)$. El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(1+s+t,3,2+2s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow -1-s-t+2+2s-t=0\Rightarrow 1+s-2t=0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 1+s+t+4+4s-2t=0\Rightarrow 5+5s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=0$; $s=-1$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,-1,0) \ ; \ B=(1,2,0)$$

La recta perpendicular viene definida por el punto $A=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, luego:

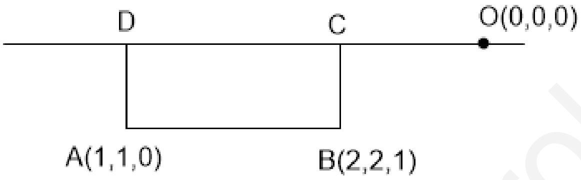
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, por lo tanto: $d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{9}=3\ u$

Considera un rectángulo de vértices consecutivos *A, B, C* y *D* siendo $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$.
Sabiendo que la recta *r* que contiene a los puntos *C* y *D* pasa por el origen de coordenadas se pide:
a) Halla unas ecuaciones paramétricas de *r*.
b) Calcula el área del triángulo *ABC*.
c) Determina las coordenadas del punto *D*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



La recta que pasa por *C* y *D* tiene el mismo vector director que la recta que pasa por *A* por *B*, luego, su ecuación es: $r \equiv \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

b) Con el punto $B(2,2,1)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0 \Rightarrow 2+2+1+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow x+y+z-5=0$$

Las coordenadas del punto *C* son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-5=0 \Rightarrow t+t+t-5=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3} \Rightarrow C=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(1,1,1)$; $\vec{AC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (1,-1,0)=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ u^2$$

c) Con el punto $A(1,1,0)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0 \Rightarrow 1+1+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

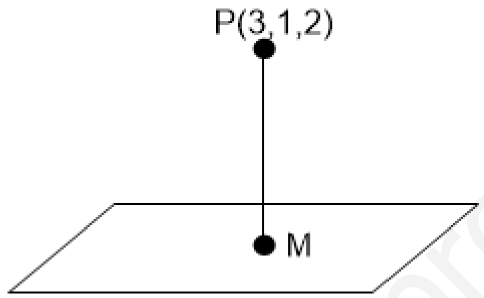
Las coordenadas del punto *D*, son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-2=0 \Rightarrow t+t+t-2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Considera el plano π de ecuación $x+2y+z=1$.
a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3,1,2)$.
b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=2+t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $1\cdot(3+t)+2\cdot(1+2t)+1\cdot(2+t)-1=0 \Rightarrow t=-1$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $M=(3+t,1+2t,2+t)=(2,-1,1)$

b) El plano paralelo tendrá de ecuación: $x+2y+z=D$. Calculamos los puntos de corte con los ejes coordenados: $A=(D,0,0)$; $B=\left(0,\dfrac{D}{2},0\right)$; $C=(0,0,D)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=\left(-D,\dfrac{D}{2},0\right)$; $\vec{AC}=(-D,0,D)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo: $S=\dfrac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|=$

$$=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & \frac{D}{2} & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\left(\frac{D^2}{2},D^2,\frac{D^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^4}{4}+D^4+\frac{D^4}{4}}=\sqrt{6}\Rightarrow D=\pm 2$$

Luego, la ecuación del plano paralelo es: $x+2y+z=2$ *ó* $x+2y+z=-2$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por *B* y es perpendicular a *s*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A=(1,1,0) \\ \vec{u}=\vec{AB}=(2,-2,1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(-1,0,-1) \\ \vec{v}=(-2,1,-1) \end{cases}.$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $\vec{u}=(2,-2,1)$ y $\vec{v}=(-2,1,-1)$
La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-0 & -2 & 1 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2z=0$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) El vector normal del plano es el vector director de *s*, luego: $-2x+y-z+D=0$

y queremos que pase por el punto *B*:

$$-2\cdot 3-1-1+D=0 \Rightarrow D=8$$

El plano que nos piden es: $-2x+y-z+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=8-2t+s \end{cases}$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x+y+z+3=0 \qquad y \qquad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación general del plano π'

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3+z+6+y=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$$

Pasamos la recta r a paramétricas $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 3t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar como punto genérico de la recta $P = (1+2t, -1+t, 3t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π', tenemos que $d(P,\pi) = d(P,\pi')$, luego:

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \Rightarrow \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+6t|}{\sqrt{3}} = \frac{|9+6t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+6t| = |9+6t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3+6t = 9+6t \Rightarrow \textit{No tiene solución}$$

$$3+6t = -9-6t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P = (-1,-2,-3)$$

Considera el plano π de ecuación $6x-my+2z=1$ y la recta *r* dada por $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$

a) Calcula *m* en el caso en que la recta *r* es perpendicular al plano π .
b) ¿Existe algún valor de *m* para el que la recta *r* esté contenida en el plano π ?.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta $\vec{u}=(-3,2,-1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(6,-m,2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{6}{-3}=\frac{-m}{2}=\frac{2}{-1}\Rightarrow m=4$$

b) Pasamos la recta a implícitas

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}\Rightarrow \begin{cases} 2x-2=-3y-3 \\ -x+1=-3z-6 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-1 \\ -x+3z=-7 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones: $\begin{cases} x+3y=-1 \\ -x+3z=-7 \\ 6x-my+2z=\ \ 1 \end{cases}$

La recta está contenida en el plano si $Rango(A)=Rango(M)=2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & -m & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=54+6+3m=0\Rightarrow m=-20\Rightarrow \begin{cases} m=-20\Rightarrow Rango\ A=2 \\ m\neq -20\Rightarrow Rango\ A=3 \end{cases}$$

$$m=-20\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -7 \\ 6 & 20 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-6F_1]{F_2+F_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-\frac{2}{3}F_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{3} \end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=3$$

Luego, no hay ningún valor de *m* para el cuál la recta esté contenida en el plano.

Considera el punto $A(1,-1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *A* respecto a *r*.
b) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y pasa por *A*.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a *r* y que pasa por *A*. El vector director de la recta $(2,-1,0)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x-y+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,-1,1)$.

$$2x-y+D=0 \Rightarrow 2\cdot 1-1\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=-3$$

Luego, el plano es: $2x-y-3=0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x-y-3=0 \Rightarrow 2\cdot(1+2\lambda)-(1-\lambda)-3=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(1+\frac{4}{5},1-\frac{2}{5},1\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5},1\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $A'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,1)+(a,b,c)}{2}=\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5},1\right) \Rightarrow A'=\left(\frac{13}{5},\frac{11}{5},1\right)$$

b) De la recta *r* sabemos que: $B(1,1,1)$ y $\vec{u}=(2,-1,0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto *B* y los vectores $\vec{u}=(2,-1,0)$ y $\vec{AB}=(0,2,0)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4z-4=0 \Rightarrow z-1=0$$

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 3+\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = 3+s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1+s, 3+s, -s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1+s-t, 3+s-t, -s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 1+s-t+3+s-t-s-t = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1+s-t+3+s-t+s+t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 1$; $s = -1$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1,1,1) \ ; \ B = (0,2,1)$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\vec{AB}$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2} \ u$$