

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula  $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

### R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx = \int -1 dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx$$

Calculamos las raíces del denominador:  $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1; x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$  y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow -1=3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2} dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)} dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)} dx =$$

$$= -x - \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + C$$

Determina la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que  $f''(x) = \ln(x)$  y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto  $P(1, 2)$ . (  $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).  
**MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x) = \int \ln(x) dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(x); & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx; & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x \ln x - x + C) dx = \int x \ln x dx - \int x dx + \int C dx = \int x \ln x dx - \frac{x^2}{2} + Cx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot x dx - \frac{x^2}{2} + Cx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + Cx + D = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + Cx + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(x); & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx; & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Calculamos el valor de las constantes  $C$  y  $D$ .

$$\text{Tangente horizontal} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Pasa por el punto } (1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1 \cdot \ln 1}{2} - \frac{3}{4} + 1 + D \Rightarrow D = \frac{7}{4}$$

$$\text{Luego, la primitiva que nos piden es: } f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}$$

Calcula  $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$  (Sugerencia  $\sqrt{x+2} = t$ )

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es  $t = \sqrt{x+2}$ , vamos a calcular cuánto vale  $dx$  y  $x$ :

$$dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+2}} dx \Rightarrow dx = 2 \cdot \sqrt{x+2} dt = 2t dt$$

$$t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2 - 2$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2t dt}{(t^2-2-2) \cdot t} = \int \frac{2t dt}{(t^2-4) \cdot t} = \int \frac{2 dt}{(t^2-4)}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t+2)}{t^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$ , y  $B$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t = 2 \Rightarrow 2 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$t = -2 \Rightarrow 2 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{2 dt}{(t^2-4)} = \int \frac{A dt}{t+2} + \int \frac{B dt}{t-2} = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + \frac{1}{2} \ln|t-2| + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

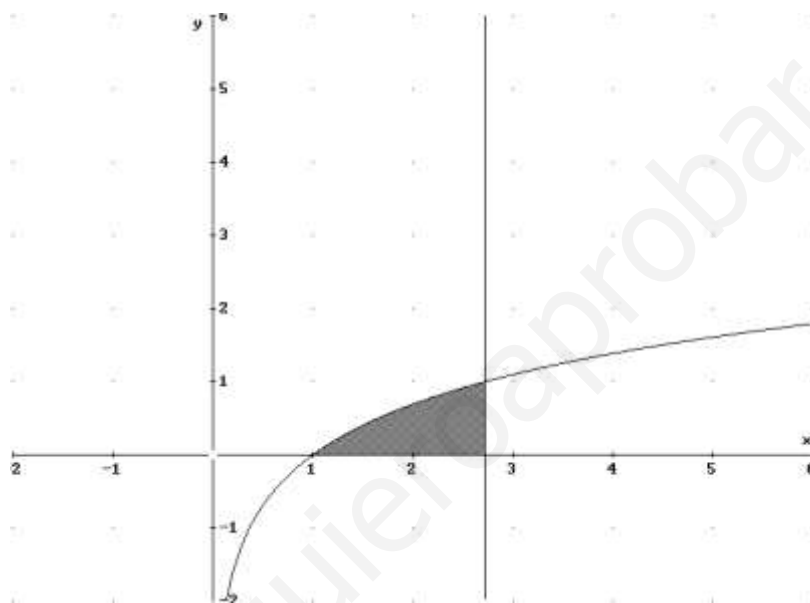
$$\int \frac{2 dt}{(t^2-4)} = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + \frac{1}{2} \ln|t-2| + C = -\frac{1}{2} \ln|\sqrt{x+2}+2| + \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x+2}-2| + C$$

Sea  $g$  la función definida por  $g(x) = \ln(x)$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de  $a > 1$  para el que el área del recinto limitado por la gráfica de  $g$ , el eje de abscisas y la recta  $x = a$  es 1.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

El recinto es:



Calculamos el área.

$$A = \int_1^a \ln x \, dx$$

Hacemos la integral por partes:

$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx$ $dv = dx; \quad v = x$	$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$
--	--

$$A = \int_1^a \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^a = (a \ln a - a) - (1 \ln 1 - 1) = a \ln a - a + 1 = 1 \Rightarrow a \ln a - a = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow e^1 = a$$

Luego:  $a = e$

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = |\ln(x)|$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta  $y = 1$ .

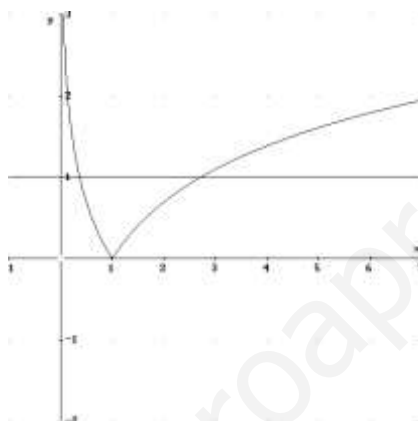
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con la recta  $y = 1$ .

c) Calcula el área del recinto citado.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ -\ln x = 1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^1 [1 - (-\ln x)] dx + \int_1^e [1 - (\ln x)] dx = [x + x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x - x \ln x + x]_1^e = \frac{1}{e} + e - 2$$

Recuerda que la integral de  $\ln x$  es por partes:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x; & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx; & v &= x \end{aligned}$$

Calcula  $\int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Hacemos la integral por partes.

$$\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \int e^{2x} \cdot \cos x dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \left[ e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x dx \right]$$

$$\begin{aligned} u &= e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$I = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \left[ e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot I \right]$$

$$I + 4I = -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$$

$$I = \frac{-e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x}{5} + C$$

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano) y sea  $F$  la primitiva de  $f$  tal que  $F(1) = 2$ .

a) Calcula  $F'(e)$ .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $F$  en el punto de abscisa  $x = e$ .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Como  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , entonces:  $F(x) = \int f(x) dx$ , y además:  $F'(x) = f(x)$ .

Por lo tanto:

$$F'(e) = f(e) = \frac{\ln e}{2e} = \frac{1}{2e}$$

b) Calculamos  $F(x)$ . Para ello hacemos el cambio de variable  $\ln x = t$ , con lo cual

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{2x} dx = \int \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} + C = \frac{(\ln x)^2}{4} + C$$

$$\text{Como } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{(\ln 1)^2}{4} + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Por lo tanto: } F(x) = \frac{(\ln x)^2}{4} + 2$$

Calculamos la recta tangente que nos piden:  $y - F(e) = F'(e) \cdot (x - e)$

$$F(e) = \frac{(\ln e)^2}{4} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$F'(e) = f(e) = \frac{\ln e}{2e} = \frac{1}{2e}$$

Luego, la recta tangente es:  $y - \frac{9}{4} = \frac{1}{2e} \cdot (x - e)$



Sean  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = \sqrt{2x}$  y  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

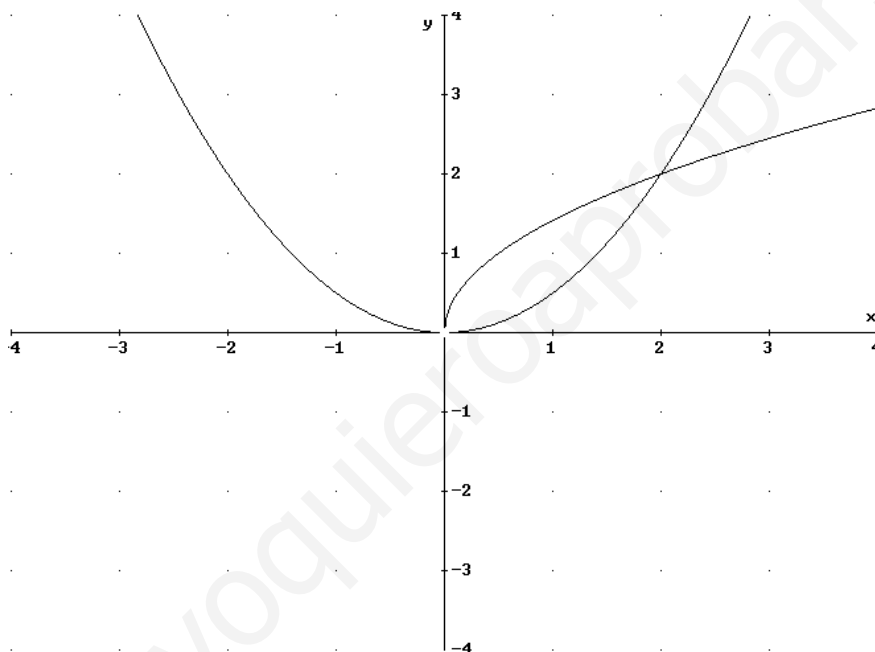
a) Halla los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

## RESOLUCIÓN

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



En el dibujo vemos que los puntos de corte son el  $(0,0)$  y  $(2,2)$ .

b) Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^2 \left[ \sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \left[ \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Calcula el valor de  $a > 1$  sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola  $y = -x^2 + ax$  y la recta  $y = x$  es  $\frac{4}{3}$ .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + ax \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (1-a)x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = a-1$$

Calculamos el área:

$$A = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-1} = -\frac{(a-1)^3}{3} + \frac{a(a-1)^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini, sale que  $a = 3$

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$  para  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$  y sea  $F$  la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $P(2, \ln 2)$  ( $\ln$  denota logaritmo neperiano).

a) Calcula la recta tangente a la gráfica de  $F$  en el punto  $P$ .

b) Determina la función  $F$ .

**MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Como  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , entonces:  $F(x) = \int f(x) dx$ , y además:  $F'(x) = f(x)$ .

Calculamos la recta tangente que nos piden:  $y - F(2) = F'(2) \cdot (x - 2)$

$$F(2) = \ln 2$$

$$F'(2) = f(2) = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego, la recta tangente es:  $y - \ln 2 = \frac{5}{4} \cdot (x - 2)$

b) Calculamos  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} dx$

Las raíces del denominador son:  $x = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A \cdot x \cdot (x-1) + B(x-1) + C \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular  $A$ ,  $B$  y  $C$  sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser  $x = 2$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = C \Rightarrow C = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow 5 = 2A + B + 4C \Rightarrow A = -1$$

Con lo cual:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x-1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = -\ln x + \frac{1}{x} + 2 \ln(x-1) + C$$

Como  $F(x)$  pasa por el punto  $(2, \ln 2)$  entonces:  $\ln 2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} + 2 \ln 1 + C \Rightarrow C = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

Por lo tanto:  $F(x) = -\ln x + \frac{1}{x} + 2 \ln(x-1) + 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

Calcula  $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx$ .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral  $F(x) = \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx$ , que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left[ x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx \right] = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2; \quad du = 2x dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= \left[ -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left( -\pi^2 \cdot \cos \pi + 2\pi \cdot \operatorname{sen} \pi + 2 \cos \pi \right) - \left( -0^2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0 + 2 \cos 0 \right) = \\ &= \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x) = |x^2 - 4|$

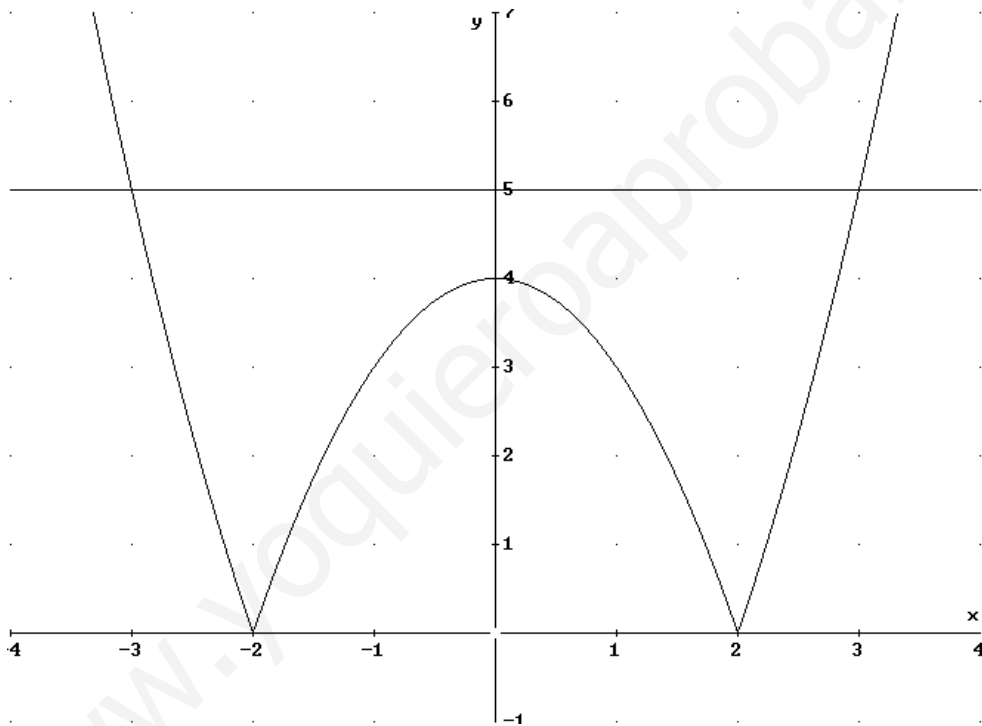
a) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$ .

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la recta  $y = 5$ .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ , y hacemos el dibujo



b) Vemos por el dibujo que es simétrica respecto el eje OY, luego:

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[ \int_0^2 (5 + x^2 - 4) dx + \int_2^3 (5 - x^2 + 4) dx \right] = 2 \left[ \int_0^2 (1 + x^2) dx + \int_2^3 (9 - x^2) dx \right] = \\ &= 2 \left( \left[ x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 \right) = 2 \left( \left[ 2 + \frac{8}{3} \right] + \left[ 27 - \frac{27}{3} \right] - \left[ 18 - \frac{8}{3} \right] \right) = \frac{44}{3} u^2 \end{aligned}$$