SELECTIVIDAD MATEMATICAS II

2° BACHILLERATO LOGSE

FRANCISCO FERNÁNDEZ MORALES

Contiene todas las pruebas planteadas en Andalucía en las convocatorias de Junio y Septiembre, y los modelos de examen propuestos por los Coordinadores, resueltos razonadamente.

Proyecto Sur

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

EXAMEN JUNIO 1996

Opción A

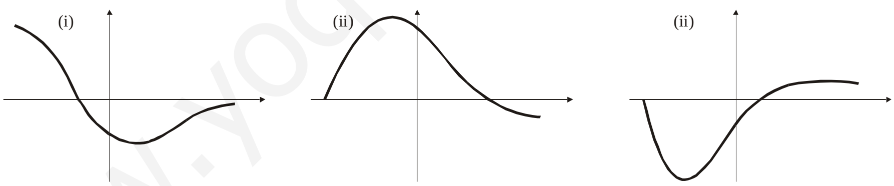
EJERCICIO 1. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 300t\,(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas.

(1) [1 PUNTO]. Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

(2) [0´75 PUNTOS]. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

(3) [0´75 PUNTOS]. Representa gráficamente la función de capacidad de concentración.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Las gráficas (i), (ii) y (iii) corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable *f*, su función *f´* y una primitiva *F* de *f*. Identifica cada gráfica con su función justificando la respuesta.



EJERCICIO 3. **(1)** [1 PUNTO]. Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$? Justifica la respuesta.

(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Desde el origen de coordenadas pueden trazarse dos rectas tangentes a la circunferencia que tiene su centro en el punto (3, 0) y cuyo radio vale 3/2 ¿Cuáles son las ecuaciones de dichas rectas tangentes?

Opción B

EJERCICIO 1. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva

$$y = \frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{para } x > 1.$$

En el punto P = (2, -4/3) la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

(1) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(2) [0´5 PUNTOS]. Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

(3) [1 PUNTO]. Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De una función integrable $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene

$$|f(x)| \le 1 + x^2$$

De los números -3, -2, -1, 2´5 y 2´75, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \ ?$$

Justifica la respuesta.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

(1) [0´75 PUNTOS]. ¿Existe una solución del mismo en la que y=0?

(2) [0´75 PUNTOS]. Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

(3) [0´75 PUNTOS]. Haz una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto (3, 2) y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones

$$r \equiv 2x + 3y - 7 = 0, \qquad s \equiv x - 3y + 4 = 0.$$

Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

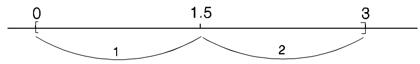
Para calcular los intervalos en los que la capacidad de concentración aumenta y en los que disminuye, necesitamos la función primera derivada:

$$f(t) = 300t(3 - t) = -300t^2+900\,t \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -600t + 900.$$

Obtengamos el valor que anula a esta derivada:

$$-600t + 900 = 0 \quad \Rightarrow \quad 600t = 900 \quad \Rightarrow \quad t = 3/2 = 1.5 \text{ horas.}$$

El punto que tomaremos como referencia para la construcción de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento será el punto en donde la derivada es cero, en nuestro caso t=1.5. Este punto lo situamos sobre el eje de abscisas, y teniendo en cuenta que la función sólo está definida en el intervalo cerrado [0, 3], construiremos los dos posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento (Ver fig.): [0, 1.5[y]1.5, 3].



Elijamos valores intermedios de cada uno de esos intervalos, por ejemplo, el 1 y el 2, y sustituyámoslos en la primera derivada, según nos salga mayor o menor que cero, la función en el intervalo correspondiente será creciente o decreciente. Veámoslo:

$$f'(1) = -600 \cdot 1 + 900 = 300 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{creciente en} \ [0, 1.5[$$

$$f'(2) = -600 \cdot 2 + 900 = -300 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{decreciente en} \ ]1.5, 3]$$

La concentración es nula cuando $f(t)$ = 0. Calculemos el valor de t que hace cero a la función:

$$-300t^2+900t = 0 \ \Rightarrow \ -t^2+3t = 0 \ \Rightarrow \ t\,(-t + 3) = 0 \ \Rightarrow \ t=0 \ \text{ y } \ t=3,$$

es decir, a las 0 horas y a las 3 horas la concentración es nula.

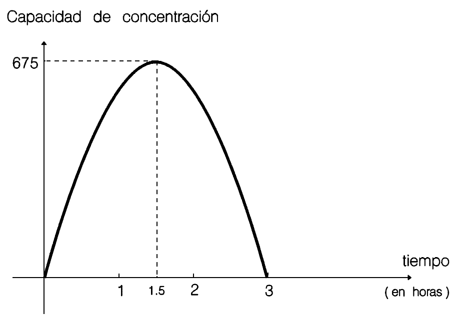
(2) El mejor momento de concentración coincide con el máximo de concentración, o sea, con el valor que anulaba a la primera derivada, $f'(t) = 0 \Rightarrow t$=1.5 horas, ya que en dicho instante la función pasa de ser creciente a decreciente.

No es preciso, por tanto, comprobar que dicho valor hace a la segunda derivada menor que cero.

(3) La gráfica de $f(t)$ es una parábola, y con los datos de que disponemos de los apartados anteriores, será la situada al lado.

Para mayor precisión sólo hay que calcular el valor máximo:

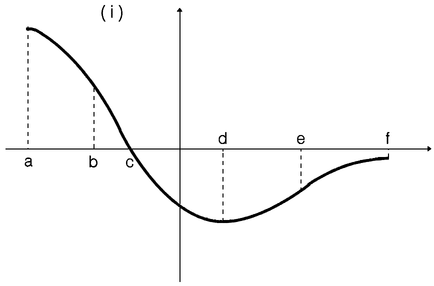
$f\,(1.5) = 300 \times 1.5\,(3-1.5) = 675.$

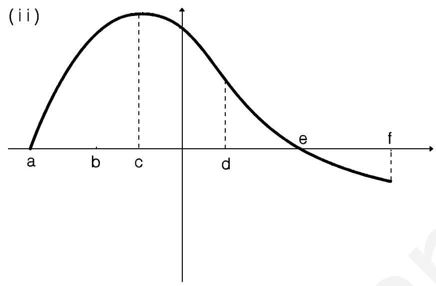


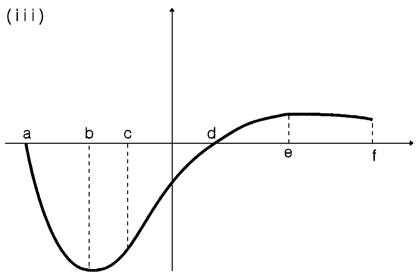
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Para identificar las gráficas correspondientes a una función $f(x)$, a la de su función derivada $f'(x)$ y a la de una primitiva de $f(x)$, $F(x)$, tendremos en cuenta que $F(x)$ al ser una primitiva de $f(x)$ verificará que $F'(x)=f(x)$, por lo que realmente lo que tendremos que localizar son las gráficas de $F(x)$, la de su función derivada $F'(x)=f(x)$ y la de la derivada segunda de $F(x)$ o la primera de $f(x)$, $F''(x)=f'(x)$.

Diferenciemos diversos puntos característicos del eje de abscisas mediante letras; las gráficas que nos han dado quedarán así:







Veamos las características de la gráfica (i):

1) En el intervalo (a, d) es decreciente $\Rightarrow$ la función derivada es negativa en (a, d), es decir, la gráfica quedaría por debajo del eje de abscisas.
2) En el intervalo (d, f) es creciente $\Rightarrow$ la función derivada es positiva en (d, f), es decir, la gráfica quedaría por encima del eje de abscisas.
3) En el punto de abscisa "d" presenta un mínimo $\Rightarrow$ la función derivada es cero en dicho punto y además cambia de signo (de negativa a positiva).
4) En el punto de abscisa "a" presenta un punto de tangencia horizontal por la derecha $\Rightarrow$ la derivada por la derecha es cero.

La gráfica que presenta todas estas características es la (iii), por lo que en un principio ésta sería la gráfica de la función derivada de la (i).

Observemos más características de la gráfica i).

5) En el intervalo (a, c) es cóncava $\Rightarrow$ la función segunda derivada es negativa, es decir, la gráfica de esta función quedaría por debajo del eje de abscisas.
6) En el intervalo (c, e) es convexa $\Rightarrow$ la función segunda derivada es positiva, es decir, la gráfica de esta función quedaría por encima del eje de abscisas.
7) En el intervalo (e, f) es cóncava $\Rightarrow$ la función segunda derivada es negativa, es decir, la gráfica de esta función quedaría por debajo del eje de abscisas.
8) Los puntos "c" y "e" son puntos de inflexión $\Rightarrow$ la función segunda derivada es cero en dichos puntos.

No hay ninguna gráfica que presente las características 5), 6), 7) y 8), luego la gráfica (i) no puede ser la correspondiente a la función *F(x)*, ya que la gráfica de *F´´(x)* no está.

Veamos ahora las características de la gráfica (ii):

1) En el intervalo (a, c) es creciente $\Rightarrow$ la función derivada es positiva en (a, c), es decir, la gráfica quedaría por encima del eje de abscisas.
2) En el intervalo (c, f) es decreciente $\Rightarrow$ la función derivada es negativa en (c, f), es decir, la gráfica quedaría por debajo del eje de abscisas.

3) En el punto de abscisa "c" presenta un máximo $\Rightarrow$ la función derivada es cero en dicho punto y además cambia de signo (de positiva a negativa).

La gráfica que presenta estas tres características es la (i), por lo que en un principio ésta sería la gráfica de la función derivada de la (ii).

4) En el intervalo (a, d) es cóncava $\Rightarrow$ la función segunda derivada es negativa, es decir, la gráfica de esta función quedaría por debajo del eje de abscisas.
5) En el intervalo (d, f) es convexa $\Rightarrow$ la función segunda derivada es positiva, es decir, la gráfica de esta función quedaría por encima del eje de abscisas.
6) EL punto "d" es un punto de inflexión $\Rightarrow$ la función segunda derivada es cero en dicho punto.

La gráfica que presenta las características 4), 5) y 6) es la (iii), por lo que en un principio ésta sería la gráfica de la función segunda derivada de la (ii).

Veamos ahora las características de la gráfica (iii):

1) En el intervalo (a, b) es decreciente $\Rightarrow$ la función derivada es negativa en (a, b), es decir, la gráfica quedaría por debajo del eje de abscisas.
2) En el intervalo (b, e) es creciente $\Rightarrow$ la función derivada es positiva en (b, e), es decir, la gráfica quedaría por encima del eje de abscisas.
3) En el intervalo (e, f) es decreciente $\Rightarrow$ la función derivada es negativa en (e, f), es decir, la gráfica quedaría por debajo del eje de abscisas.
4) En el punto de abscisa "b" presenta un mínimo $\Rightarrow$ la función derivada es cero en dicho punto y además cambia de signo (de negativa a positiva).
5) En el punto de abscisa "e" presenta un máximo $\Rightarrow$ la función derivada es cero en dicho punto y además cambia de signo (de positiva a negativa).

No hay ninguna gráfica que presente todas estas características a la vez, luego la gráfica (iii) no puede ser la correspondiente a la función $F(x)$, ni a la de $F'(x)=f(x)$.

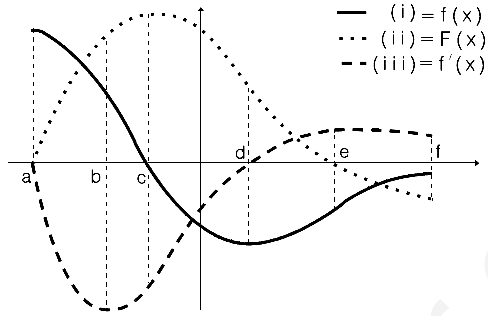
Observemos más características de la gráfica iii)

6) En el intervalo (a, c) es convexa $\Rightarrow$ la función segunda derivada es positiva, es decir, la gráfica de esta función quedaría por encima del eje de abscisas.
7) En el intervalo (c, f) es cóncava $\Rightarrow$ la función segunda derivada es negativa, es decir, la gráfica de esta función quedaría por debajo del eje de abscisas.
8) El punto "c" es un punto de inflexión $\Rightarrow$ la función segunda derivada es cero en dicho punto.

La gráfica que presenta las características 6), 7) y 8) es la gráfica (i), es decir, en principio esta gráfica (i) podría ser la gráfica de la función derivada segunda de la (iii), por lo que esta otra, la (iii), tendría que ser la gráfica de $F(x)$ pero hace un momento hemos visto que no podía serlo porque no existe ninguna gráfica de la función primera derivada de la (iii).

En consecuencia, la gráfica (i) se corresponde con la función $f(x)$, la gráfica (ii) con la de $F(x)$ y la (iii) con la de $f'(x)$.

Al superponer las tres gráficas, podemos comprobar todo lo visto anteriormente.



SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Supongamos que A y B son dos matrices cuadradas de orden n, comprobemos si es o no cierta la relación $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + AB + BA + B^2$$

al aplicar las propiedades de las potencias y de la distributiva, la última expresión que hemos obtenido, en principio, no coincide con la expresión de la relación que pretendemos demostrar, es decir:

$$A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$AB + BA \neq 2AB$$

ya que AB+BA no es igual que 2AB, lo será sólo cuando AB=BA, o sea, en aquellos casos que A y B sean matrices que gocen de la propiedad conmutativa respecto de la multiplicación, propiedad que en general no se satisface.

(2) Para calcular, según los valores de "a", el rango de la matriz siguiente, procederemos mediante el método de Gauss.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Antes de triangular inferiormente,
Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-12 \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.
Intercambiemos a continuación las columnas 2ª y 4ª.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 6 \\ 0 & 3a-12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Hemos obtenido una fila de ceros, y el coeficiente de la diagonal principal, el $a_{22}=3a-12$ puede ser o no cero.

Veamos lo que ocurre en cada caso.

* Si $a_{22} = 0$ ⇒ $3a-12 = 0$ ⇒ $a = 4$ ⇒ obtenemos dos filas de ceros y sólo una distinta de cero por lo que el rango de la matriz M es 1.

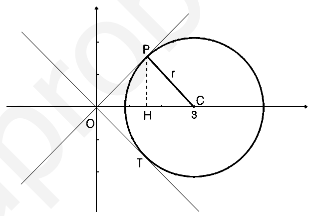
* Si $a_{22} \neq 0$ ⇒ $3a-12 \neq 0$ ⇒ $a \neq 4$ ⇒ obtenemos una fila de ceros y dos distintas de cero por lo que el rango de la matriz M es 2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, la que nos dice el problema tiene su centro en (3, 0) luego, a=3 y b=0, y de radio $\frac{3}{\sqrt{2}}$, sustituyendo estos valores tendremos:

$$x^2 + y^2 - 6x + 9 - \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0.$$

Si observamos el dibujo, y tenemos en cuenta que la recta tangente a la circunferencia en un punto es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, $\overline{OP} \perp \overline{PC}$, tendremos:



$$\overline{OP}^2 + r^2 = \overline{OC}^2 \Rightarrow \overline{OP}^2 + \frac{9}{2} = 9 \Rightarrow \overline{OP}^2 = \frac{9}{2}$$

Por otro lado, si el punto P tiene de coordenadas (x_0, y_0), se verificarán dos cosas:

- el triángulo OHP es rectángulo en H, y por tanto, $x_0^2 + y_0^2 = \frac{9}{2}$
- por pertenecer a la circunferencia, la satisfará, $x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + \frac{9}{2} = 0.$

Sustituyamos el valor de la primera expresión en la segunda:

$$\frac{9}{2} - 6x_0 + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x_0 = 3/2 = 1.5 \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{9}{2} - x_0^2} = \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

luego el punto P tiene de coordenadas (1.5, 1.5), y el punto T(1.5, -1.5).

La ecuación de la tangente a P y que pasa por el origen es:

$$\frac{x-0}{1.5-0} = \frac{y-0}{1.5-0} \quad \Rightarrow \quad y = x$$

La ecuación de la tangente a T y que pasa por el origen es:

$$\frac{x-0}{1.5-0} = \frac{y-0}{-1.5-0} \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad [1]$$

La derivada de la función $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ es:

$$y' = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$$

El valor de la derivada en el punto de tangencia de abscisa x_0=2, será:

$$f'(x_0) = y'(2) = \frac{2(2^2+1)}{(1-2^2)^2} = \frac{10}{9}$$

El valor de la función en el punto de tangencia de abscisa x_0=2 es:

$$y_0 = y(2) = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$$

Sustituyendo estos valores en [1], obtendremos la ecuación de la recta tangente:

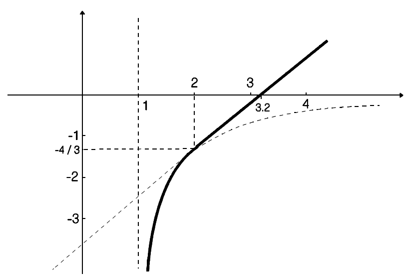
$$y - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{9}(x - 2) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

(2) El punto en el que la partícula encuentra al eje OX, coincide con el de la intersección de la recta tangente con el eje de abscisas; lo calcularemos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta tangente y la del eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32}{10} = 3.2$$

luego el punto es el (3.2, 0).

(3) Si observamos la función deducimos que existen dos valores que anulan al denominador, el 1 y el -1, que son las dos posibles asíntotas verticales que tiene la función, pero al estar definida sólo para valores mayores que 1, bastará hacer el estudio de la existencia la asíntota x=1, así como estudiar la posición de la gráfica de dicha función respecto de la misma. No obstante no habrá ningún punto de la trayectoria en el que la partícula encuentre o corte a la asíntota vertical, sino que se aproximará a ella. La gráfica de la trayectoria de la partícula es la reflejada al margen.



Veamos si x=1 es una asíntota vertical, para lo cual se ha de verificar que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2}{1 - 1^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

En consecuencia, no hay ningún punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical, sino que se desplazaría asintóticamente con respecto a ella a lo largo de su trayectoria, de forma que a medida que x se aproxima a 1 por la derecha el valor de y se aproxima o tiende a -∞.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función $f(x)$ verifica que $|f(x)| \leq 1 + x^2$, entonces también se verificará, teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto, que

$$-(1 + x^2) \leq f(x) \leq 1 + x^2,$$
$$-x^2 - 1 \leq f(x) \leq 1 + x^2,$$

como las funciones $-x^2-1$, $f(x)$ y $1+x^2$ son funciones integrables en el intervalo [-1, 1], por la propiedad de comparación tendremos que si

$$-x^2-1 \leq f(x) \leq 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} (-x^2-1)\,dx \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} (1+x^2)\,dx$$

calculemos la primera y tercera integral para saber entre qué valores se encontraría la segunda integral y así decidir qué valores podría tomar dicha integral.

$$\int_{-1}^{1} (-x^2-1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{-1}{3} - (-1)\right) = -\frac{8}{3} \approx -2.6666$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{-1}{3} + (-1)\right) = \frac{8}{3} \approx 2.6666$$

luego el valor de la integral que nos piden estará comprendida entre los valores

$$-2.6666 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2.6666$$

por tanto los números que pueden ser el valor de esta integral serían el -2, el -1 y el 2´5.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Supongamos que sí exista una solución del sistema en la que y=0, para lo cual sustituiremos dicho valor en el sistema y lo resolveremos.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - z = 4 \\ x - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{array}\right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y apliquemos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $-3 \cdot$ [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. La última ecuación es trivial (la eliminamos), nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es por tanto un sistema compatible determinado. terminemos de resolverlo.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la segunda fila por -3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, podemos despejar las incógnitas:
$x = 3$, $z = 2$, $y = 0$ (valor inicial)

Hemos encontrado una solución en la que y=0.

(2) El sistema homogéneo asociado al sistema dado es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y apliquemos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Hemos triangulado inferiormente. La última ecuación es trivial (la eliminamos). Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, terminemos de resolverlo simplificando previamente la segunda ecuación por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & z \\ 0 & 2 & z \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2z \\ 0 & 2 & z \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 1ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 2 & z \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución será:
$x = z$, $y = z/2$.

Sustituyamos la incógnita secundaria z por un parámetro t, tendremos finalmente:

$$x = t, \qquad y = \frac{1}{2}t, \qquad z = t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

(3) Resolvamos el sistema dado poniéndolo directamente en forma matricial y aplicando el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: $2 \cdot$ [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot$ [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente. La última ecuación es trivial (la eliminamos). Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, terminemos de resolverlo simplificando previamente la 2ª ecuación por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4+z \\ 0 & 2 & -2+z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2+2z \\ 0 & 2 & -2+z \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+z \\ 0 & 2 & -2+z \end{array}\right)$$

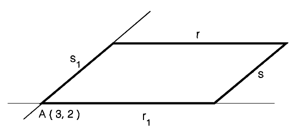
El sistema está diagonalizado, la solución será:
$x = 1+z, \quad 2y = -2+z \quad \Rightarrow \quad x = 1 + z, \quad y = -1 + z/2.$

Sustituyamos la incógnita secundaria z por un parámetro t, tendremos finalmente:

$$x = 1 + t, \qquad y = -1 + \tfrac{1}{2}t, \qquad z = t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

El sistema geométricamente representa las ecuaciones de tres planos en el espacio, al resolver dicho sistema, la solución del mismo se corresponde con la ecuación de una recta, que es precisamente la recta donde se cortan los tres planos.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Veamos si el punto A pertenece a la recta r o a la s, para ello sustituiremos sus coordenadas en las respectivas ecuaciones:

$A \in r? \Rightarrow 2\cdot 3+3\cdot 2-7=5\neq 0 \Rightarrow A \notin r \quad ; \quad A \in s? \Rightarrow 3-3\cdot 2+4=1\neq 0 \Rightarrow A \notin s$

en consecuencia, la situación sería parecida a la del dibujo.

La ecuación de la recta r_1 al ser paralela a la recta r, será de la forma:

$$2x + 3y + C = 0,$$

y al pasar por el punto A, se verificará: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -12$

luego la ecuación de la recta r_1 es: $r_1 \equiv 2x + 3y - 12 = 0$.

La ecuación de la recta s_1 al ser paralela a la s, será de la forma: $x - 3y + D = 0$,

y al pasar por el punto A, se verificará: $3 - 3 \cdot 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 3$

luego la ecuación de la recta s_1 es: $s_1 \equiv x - 3y + 3 = 0$.

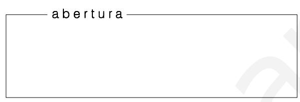
UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

EXAMEN SEPTIEMBRE 1996

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m. de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m. sin vallar tal como se muestra en la figura:



Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

EJERCICIO 2. Las coordenadas (a,b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva $y = \text{sen}(x)$ y la porción del eje OX comprendida entre $x=0$ y $x=\pi/2$, vienen dadas por:

$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x\, sen(x)\, dx}{\int_0^{\pi/2} sen(x)\, dx} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{\int_0^{\pi/2} (sen(x))^2\, dx}{2\int_0^{\pi/2} sen(x)\, dx}$$

(1) [1 PUNTO]. Describe el método de integración por partes.
(2) [1´5 PUNTOS]. Utiliza dicho método para calcular el centro de gravedad de la lámina sabiendo que

$$\int_0^{\pi/2} (sen(x))^2\, dx = \frac{\pi}{4}$$

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$ax + by + 1 = 0$$
$$a'x + b'y + c = 0$$

se sabe que $x=1$, $y=2$ es una solución y que $x=7$, $y=3$ es otra solución. ¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema?, ¿cuántas tiene?, ¿cuáles son?

EJERCICIO 4. Considera los puntos A = (2, -1, -2) y B = (-1, -1, 2)
(1) [1 PUNTO]. Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales.
(2) [1´5 PUNTOS]. Encuentra un punto C sobre la recta r de ecuaciones

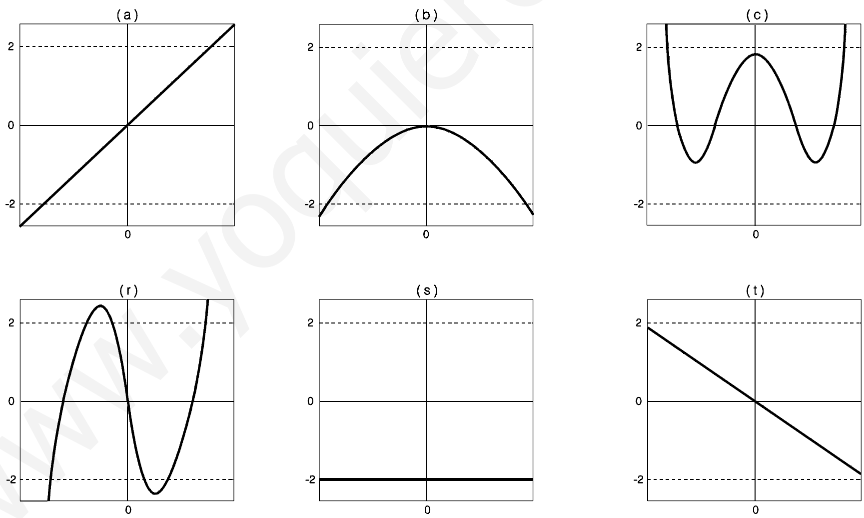
$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Las gráficas (a), (b) y (c) corresponden, respectivamente, a tres funciones derivables *f*, *g* y *h*. ¿Podrían representar las gráficas (r), (s) y (t) a las gráficas de $f\,'$, g' o h' (no necesariamente en ese orden)? Justifica la respuesta en cada caso.



EJERCICIO 3. Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo *t* se encuentra en el punto (1+*t*, 3+*t*, 6+2*t*).
(1) [0´5 PUNTOS]. ¿Es esta trayectoria una línea recta? Si es así, escribe sus ecuaciones de dos formas distintas.

(2) [1 PUNTO]. Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación $x - 2y + z - 7 = 0$.
(3) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto (1, 1, 0).

EJERCICIO 4. **(1)** [1 PUNTO]. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden que tienen inversa. Razona si su producto A·B también tiene inversa.
(2) [1´5 PUNTOS]. Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determina si C·D tiene inversa y, en ese caso, hállala.

SOLUCIONES Opción A

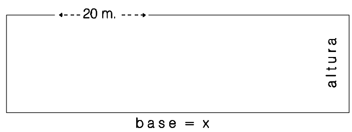
SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

El área de la parcela rectangular es

Área = base x altura

Llamemos x a la base de dicha parcela, la altura lógicamente será

$$altura = \frac{80 - x - (x - 20)}{2} = 50 - x$$



luego la expresión de la función área es

$A(x) = x(50-x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = 50x - x^2$

calculemos el máximo de esta función

$$A'(x) = 50 - 2x \quad \Rightarrow \quad 50 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

$$A''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad A''(25) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{hay un máximo en } x=25.$$

La parcela tendrá área máxima con las dimensiones:

base = x = 25 m. y altura = $50-x = 50 - 25 = 25$ m.

El valor de dicha área máxima es: $A(25) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$ m^2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Si u y v son dos funciones derivables, entonces la diferencial del producto de ambas funciones, como sabes, es: $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$

Si integramos los dos miembros

$$\int d(u \cdot v) = \int u\, dv + \int v\, du \qquad \Rightarrow \qquad u \cdot v = \int u\, dv + \int v\, du$$

Despejando el primer sumando del segundo miembro, tendremos

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

hemos obtenido la fórmula de la integración por partes.

Para usar esta fórmula es preciso reconocer que la integral de la expresión que se nos plantea es posible expresarla como producto de dos factores, *u* y *dv*, y observar que tanto la obtención de *v* mediante la integración de la *dv*, como el de la integral de *v·du* son cálculos más sencillos y cómodos que el cálculo directo de la integral de *u·dv*.

La experiencia para reconocer si una integral se resuelve o no por partes es importante, pero también lo es el disponer de una amplia relación de integrales típicas que caracterizan a este tipo de integrales.

(2) Para obtener las coordenadas (a, b) del centro de gravedad, procederemos calculando cada una de las integrales que aparecen en las expresiones que nos da el problema. Empecemos por la integral

$$\int_0^{\pi/2} x\, sen(x)\, dx$$ integral que la vamos a hacer por partes:

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = sen(x)\, dx \quad ; \quad v = \int dv = \int sen(x)\, dx = -\cos(x)$$

$$\int_0^{\pi/2} x\, sen(x)\, dx = \Big[-x\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(x)\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-0\cdot\cos(0)) + \Big[sen(x)\Big]_0^{\pi/2} = 0 + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) = 1$$

Calculemos la integral de los denominadores

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\, dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 0 - (-1) = 1$$

Luego las coordenadas del centro de gravedad son:

$$a = \frac{1}{1} = 1, \qquad y \qquad b = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\cdot 1} = \frac{\pi}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \left(1,\ \frac{\pi}{8}\right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

El sistema al tener dos soluciones, deberá tener infinitas, ya que los sistemas si son compatibles tienen o una única solución (sistemas compatibles determinados) o infinitas (sistemas compatibles indeterminados), por tanto se trata de un sistema compatible indeterminado, es decir, presenta infinitas soluciones y no sólo dos.

Al ser un sistema compatible indeterminado y tener dos ecuaciones y dos incógnitas, el sistema será uniparamétrico, lo que significa que una de las ecuaciones es múltipla de la otra, o sea, que si resolvemos el sistema por Gauss, al triangular, la última ecuación nos debe salir una ecuación trivial, por tanto la solución será una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, pero tendremos que calcular "a" y "b" o "a´", b´" y "c´".

Sustituiremos cada una de las dos soluciones en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la primera.

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ 7a + 3b = -1 \end{array}\right\}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y apliquemos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 7 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -11 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 11 · [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 11 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, podemos despejar las incógnitas:
$a = 1/11, \qquad b = -6/11$

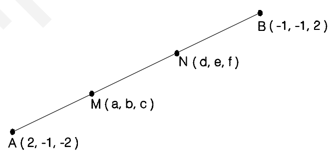
Sustituyamos estos valores en la primera ecuación del sistema dado:

$$\frac{1}{11}x - \frac{6}{11}y + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - 6y + 11 = 0$$

despejemos, por ejemplo, la x para obtener finalmente el conjunto de soluciones del sistema en forma paramétrica

$$x = -11 + 6y \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -11 + 6t \\ y = t \end{array}\right. \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(1) Calculemos las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento AB en tres partes iguales. Si observamos el dibujo, se verificará:

$$2\,\vec{AM} = \vec{MB} \qquad \Rightarrow$$

$$2[(a, b, c) - (2, -1, -2)] = (-1, -1, 2) - (a, b, c) \qquad \Rightarrow$$

$$2(a-2, b+1, c+2) = (-1-a, -1-b, 2-c) \qquad \Rightarrow$$

$$(2a-4, 2b+2, 2c+4) = (-1-a, -1-b, 2-c) \qquad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 2a-4 = -1-a & \Rightarrow & a = 1 \\ 2b+2 = -1-b & \Rightarrow & b = -1 \\ 2c+4 = 2-c & \Rightarrow & c = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M = \left(1, -1, -\frac{2}{3}\right)$$

El punto N lo obtendremos de forma similar:

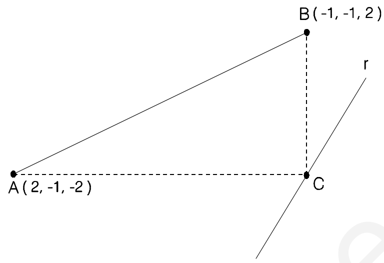
$$\vec{AN} = 2\,\vec{NB} \quad \Rightarrow \quad (d, e, f) - (2, -1, -2)] = 2[(-1, -1, 2) - (d, e, f)] \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} d-2 = -2-2d & \Rightarrow & d = 0 \\ e+1 = -2-2e & \Rightarrow & e = -1 \\ f+2 = 4-2f & \Rightarrow & f = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad N = \left(0, -1, \frac{2}{3}\right)$$

(2) Expresemos la ecuación de la recta r en paramétricas

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right.$$

las coordenadas del punto C que está sobre esta recta son C=(1+t, 1-t, 1+2t).



Al tener que ser el triángulo ABC rectángulo en C, se ha de verificar que los vectores AC y BC son perpendiculares, y por tanto, su producto escalar es cero:
$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$$

Las coordenadas de estos vectores son:

$$\vec{AC} = (1+t,\ 1-t,\ 1+2t) - (2,\ -1,\ -2) = (t-1,\ 2-t,\ 3+2t)$$

$$\vec{BC} = (1+t,\ 1-t,\ 1+2t) - (-1,\ -1,\ 2) = (2+t,\ 2-t,\ 2t-1)$$

Multipliquemos escalarmente los dos vectores

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-1,\ 2-t,\ 3+2t) \cdot (2+t,\ 2-t,\ 2t-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(t-1)(2+t) + (2-t)(2-t) + (3+2t)(2t-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2t-2+t^2-t+4-2t-2t+t^2+6t+4t^2-3-2t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$6t^2 + t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \nearrow \ \dfrac{1}{3} \\ \searrow \ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

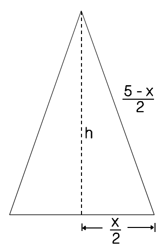
Hemos obtenido dos valores para el parámetro t, por lo que al sustituirlos en las coordenadas del punto C, significa que existen dos puntos C sobre la recta r:

$$C_1 = \left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right) \qquad ; \qquad C_2 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

El perímetro de los triángulos isósceles es 5, si la base es *x*, cada uno de los lados iguales medirán la mitad de 5-*x*. La base *x* sólo toma valores del intervalo]0, 2´5[.



$$h = \sqrt{\left(\frac{5-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+x^2-10x}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{25-10x}}{2}$$

El área de los triángulos es

$$A(x) = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{25-10x}}{2}}{2} = \frac{1}{4}\, x\, \sqrt{25-10x}$$

Obtengamos la función primera derivada de A

$$A'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{25-10x} + \frac{1}{4}\, x\, \frac{-10}{2\sqrt{25-10x}} = \frac{1}{4}\sqrt{25-10x} - \frac{5}{4}\,\frac{x}{\sqrt{25-10x}}$$

igualemos a cero la primera derivada para calcular los posibles máximos o mínimos relativos.

$$\frac{1}{4}\sqrt{25-10x} - \frac{5}{4}\,\frac{x}{\sqrt{25-10x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25-10x-5x}{\sqrt{25-10x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 25-15x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

La función A es continua y derivable en su dominio]0, 2´5[. Los intervalos de monotonía son:

* si $0 < x < 5/3 \quad \Rightarrow \quad A'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad A(x)$ es creciente en]0, 5/3[

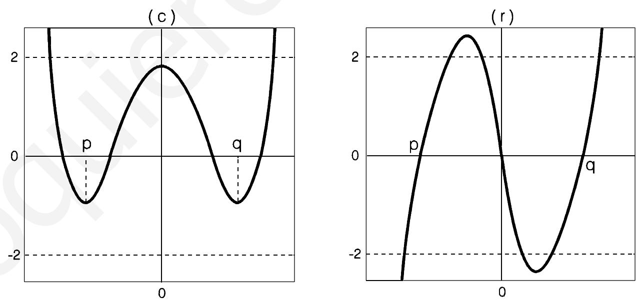
* si $5/3 < x < 2´5$ ⇒ $A´(x) < 0$ ⇒ $A(x)$ es decreciente en]5/3, 2´5[.
Como no está definida la función en los extremos del intervalo, deducimos que el valor de x=5/3, es el valor de la base del triángulo que hará máxima a la función área.

El lado igual medirá: $\frac{5-x}{2} = \frac{5-\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{3}$, se trata por tanto de un triángulo equilátero.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

La gráfica de la función (a) es creciente en todo el intervalo donde está definida luego los valores que toma la función derivada en dicho intervalo son positivos, es decir, mayores que cero, por lo que la gráfica de la función derivada debe encontrase sólo por encima del eje de abscisas; pero ni la (r), (s) y (t) lo están, en consecuencia, ninguna de éstas representa a la gráfica de la función derivada de la (a).

La gráfica de la función (b) es creciente para los valores de x menores de cero y decreciente para los mayores de cero, luego la función derivada tiene que ser positiva para los primeros valores y negativa para los segundos, o lo que es lo mismo, la gráfica tiene que estar situada por encima del eje de abscisas para los valores menores de cero y por debajo para los mayores de cero. Asimismo en el punto de abscisa 0 existe un máximo relativo por lo que la derivada en dicho punto es cero, luego la gráfica de la función derivada corta al eje de abscisas en el punto 0. La gráfica (t) es la única que podría representar a la de la función derivada de la (b).



La gráfica de la función (c) es decreciente para los valores de x menores que p y para los del intervalo (0,q), por lo que la función derivada es negativa para dichos valores estando su gráfica situada debajo del eje de abscisas; mientras que es creciente en el intervalo (p,0) y para valores mayores que q, lo que implica que la función derivada es positiva y su gráfica estará situada por encima del eje de abscisas. Asimismo en los puntos de abscisa p, 0 y q, existen extremos relativos por lo que la función derivada en dichos puntos es cero, luego la gráfica de la función derivada corta al eje de abscisas en los puntos p, 0 y q. La gráfica (r) es la única que podría representar a la de la función derivada de la (c).

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) La trayectoria sí es una línea recta ya que las coordenadas de cualquier punto dependen de un sólo parámetro luego los puntos de dicha trayectoria están alineados en una sola dirección.

Las ecuaciones de la trayectoria en forma paramétrica son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

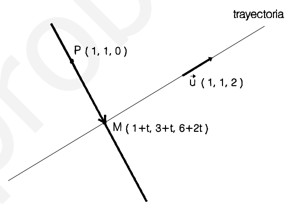
Las ecuaciones de la trayectoria en forma continua son:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$$

(2) El instante en el que el punto M esté en el plano será cuando sus coordenadas satisfagan la ecuación de dicho plano, para ello, sustituiremos las variables x, y y z de la ecuación del plano por las del punto M

$$x - 2y + z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+t - 2(3+t) + 6+2t - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6$$

(3) La ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,1,0) y corta perpendicularmente a la trayectoria, es la de la recta que pasa por el punto P y por el punto genérico M(1+t, 3+t, 6+2t) de la trayectoria, con la condición de que el vector que determinan los puntos P y M sea perpendicular a la dirección de la trayectoria.



El vector $\vec{PM}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PM} = (1+t,\ 3+t,\ 6+2t) - (1,\ 1,\ 0) = (t,\ 2+t,\ 6+2t) \qquad [1]$$

Este vector es perpendicular al de dirección de la trayectoria, $\vec{u} = (1,\ 1,\ 2)$, luego el producto escalar de ambos es cero:

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad (t,\ 2+t,\ 6+2t) \cdot (1,\ 1,\ 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t + 2 + t + 12 + 4t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$6t = -14 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{7}{3}$$

si sustituimos este valor de t en [1] obtendremos las coordenadas del vector $\vec{PM}$

$$\vec{PM} = (t,\ 2+t,\ 6+2t) = \left(-\frac{7}{3},\ 2-\frac{7}{3},\ 6-\frac{14}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

La ecuación de la recta que nos piden es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}\lambda \\ y = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ z = \frac{4}{3}\lambda \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Las matrices A y B tienen por matriz inversa respectivamente a A^{-1} y B^{-1}. Demostremos que la matriz $A\cdot B$ tiene matriz inversa, es decir, existe una matriz $(A\cdot B)^{-1}$ que satisface

$$(A\cdot B) \cdot (A\cdot B)^{-1} = I \qquad [1]$$

$$(A\cdot B)^{-1} \cdot (A\cdot B) = I \qquad [2]$$

Partimos de la igualdad

$A\cdot B = A\cdot B$ multipliquemos a la derecha por la matriz B^{-1}

$A\cdot B\cdot B^{1} = A\cdot B\cdot B^{1}$ teniendo en cuenta que $B\cdot B^{-1} = I$
$A\cdot B\cdot B^{1} = A\cdot I$ como I es la matriz unidad
$A\cdot B\cdot B^{1} = A$ multipliquemos a la derecha por la matriz A^{-1}
$A\cdot B\cdot B^{1}\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1}$ teniendo en cuenta que $A\cdot A^{-1} = I$
$A\cdot B\cdot B^{1}\cdot A^{-1} = I$ por la propiedad asociativa del producto de matrices
$(A\cdot B)\cdot(B^{1}\cdot A^{-1}) = I$ el resultado que obtenemos es que la matriz producto $A\cdot B$ tiene como matriz inversa la matriz $B^{-1}\cdot A^{-1}$, verificándose [1].

Análogamente procederemos para demostrar que también lo es por la izquierda.
$A\cdot B = A\cdot B$ multipliquemos a la izquierda por la matriz A^{-1}
$A^{-1}\cdot A\cdot B = A^{1}\cdot A\cdot B$ teniendo en cuenta que $A^{1}\cdot A = I$
$A^{-1}\cdot A\cdot B = I\cdot B$ como I es la matriz unidad
$A^{-1}\cdot A\cdot B = B$ multipliquemos a la izquierda por la matriz B^{-1}
$B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot B = B^{1}\cdot B$ teniendo en cuenta que $B^{-1}\cdot B = I$
$B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot B = I$ por la propiedad asociativa del producto de matrices
$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = I$ el resultado que obtenemos es que la matriz producto $A\cdot B$ tiene como matriz inversa la matriz $B^{-1}\cdot A^{-1}$, verificándose finalmente [2].

En definitiva, la matriz producto $A\cdot B$ tiene inversa, $(A\cdot B)^{1}$, cumpliéndose que:

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

es decir, que la inversa del producto de dos matrices que tienen inversa coincide con el producto de sus matrices inversas en orden contrario.

(2) Calculemos la matriz producto $C\cdot D$

$$C\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz inversa de esta matriz por el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz $C\cdot D$ la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de $C\cdot D$, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de $C\cdot D$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $3\cdot[2^a f.] - 2\cdot[1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2\cdot[1^a f.] + [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 6.
Simplifiquemos la 2ª fila por 4.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

A la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz $C\cdot D$ tiene inversa, siendo la inversa la matriz que queda a la derecha: es decir:

$$(C\cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 1 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es

$$N(t) = 1000\,(25 + te^{-t/20}), \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 100.$$

¿Cuánto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instantes se alcanzan, respectivamente, dichos valores extremos?

EJERCICIO 2. Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde x=a hasta x=b viene dado por

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Si la fuerza es $F(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde x=3 hasta x=5.

(2) [1 PUNTO]. Determina razonadamente si la fuerza $G(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza F anterior para el mismo desplazamiento.

EJERCICIO 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [1 PUNTO]. ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?

(2) [1´5 PUNTOS]. Discute sus soluciones según los valores de α e interpreta geométricamente el resultado.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Determina el punto simétrico del (0,0,0) respecto del plano de ecuación $x + 2y + 3z = 1$ y calcula el cuadrado de la distancia entre dichos puntos (el (0,0,0) y su simétrico).

Opción B

EJERCICIO 1. Considera la curva de ecuación $y = x\sqrt{x}\ \ (x \geq 0)$.

(1) [1´5 PUNTOS]. ¿Cuál es el punto de la curva más cercano al punto $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$?

(2) [1 PUNTO]. Deduce de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De todas las primitivas de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + x|x|$ determina aquélla cuya gráfica pasa por el punto (1,0).

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Discute, según los valores de a, la posición relativa de la recta r de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + (a+1)z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

respecto del plano $ax + 2y + 3z = 3$.

EJERCICIO 4. Dado $x \in \mathbb{R}$, considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

(1) [1 PUNTO]. Calcula $A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(2) [1´5 PUNTOS]. Prueba que A tiene inversa y hállala.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La función $N(t)$ es una función continua por tratarse del producto de una función polinómica, t, por una función exponencial, $e^{-t/20}$, que son continuas, y el producto de funciones continuas da lugar a otra función continua, por tanto los máximos y mínimos absolutos se alcanzarán en los puntos de derivada cero o en los extremos del intervalo.

La función derivada es:

$$N'(t) = 1000\left(e^{\frac{-t}{20}} + t\,e^{\frac{-t}{20}} \cdot \frac{-1}{20}\right) = 1000\,e^{\frac{-t}{20}}\left(1 - \frac{t}{20}\right) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 100.$$

Calculemos los valores que anulen a la primera derivada

$$1000\, e^{\frac{-t}{20}} \left(1 - \frac{t}{20} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nearrow e^{\frac{-t}{20}} \neq 0 \\ \searrow 1 - \dfrac{t}{20} = 0 \;\Rightarrow\; t = 20 \end{cases}$$

Obtengamos el valor de la función en este punto de derivada cero y en los extremos del intervalo, es decir, en los instantes, t=20, t=0 y t=100,

$$N(20) = 1000\,(25 + 20\, e^{-20/20}) = 1000\,(25 + 20\, e^{-1}) = 32357'85094 \simeq 32358$$

$$N(0) = 1000\,(25 + 0 \cdot e^{0/20}) = 25000$$

$$N(100) = 1000\,(25 + 100 \cdot e^{-100/20}) = 25673'79469$$

El número máximo de bacterias es ≃ 32358, y el número mínimo es 25000; los instantes en los que se alcanzan, respectivamente, dichos valores son en el 20 y en el 0.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) El trabajo para ir desde x=3 hasta x=5 será:

$$W = \int_3^5 \frac{2}{(x-1)^2}\, dx = \int_3^5 2(x-1)^{-2}\, dx = 2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_3^5 = -2\,(4^{-1} - 2^{-1}) = \frac{1}{2}$$

(2) Teniendo en cuenta que el trabajo viene representado por el área encerrada debajo de la curva, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos de abscisas 3 y 5, bastará comprobar, por ejemplo, si *F(x) > G(x)* para cualquier punto de dicho intervalo, si es así, la fuerza *F(x)* realiza más trabajo que la fuerza *G(x)*.

Supongamos pues, que *F(x) > G(x)* ⇒

$$\frac{2}{(x-1)^2} > \frac{2}{(x^2+1)^2} \qquad \text{para } \forall\; x \in [3,\,5] \qquad [1]$$

Simplificando por 2: $\dfrac{1}{(x-1)^2} > \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

como $x \in [3,\,5]$ los denominadores no se anulan para ningún valor de ese intervalo, podemos quitar denominadores: $(x^2+1)^2 > (x-1)^2$

las bases de las potencias son siempre positivas ya que $x \in [3,\,5]$, luego podemos simplificar los cuadrados: $x^2 + 1 > x - 1$

pasemos todo al primer miembro y resolvamos la inecuación

$$x^2 - x + 2 > 0$$

para ello resolveremos primeramente la ecuación:

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

observamos que no tiene solución la ecuación, por lo que para resolver la inecuación bastará sustituir un valor cualquiera de dicho intervalo, por ejemplo el 4, en la misma y comprobar si se satisface o no:

$$x^2 - x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 4^2 - 4 + 2 = 14 > 0$$

como se satisface, significa que todos los valores del intervalo verifican la desigualdad [1], luego la fuerza *F(x)* realiza más trabajo que la fuerza *G(x)*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) La matriz de coeficientes no tendrá inversa para aquellos valores de α que hagan que el rango de la matriz sea menor que tres. Calculemos el rango por Gauss y discutamos los diferentes casos que se presenten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Coloquemos la tercera fila en primer lugar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 0 & \alpha-10 & 5 \\ 0 & -21 & \alpha+12 \end{pmatrix}$$

Cambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 0 & -21 & \alpha+12 \\ 0 & \alpha-10 & 5 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -21 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 21 · [3ªf.] + (α-10) · [2ªf.].

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 0 & -21 & \alpha+12 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha-15 \end{pmatrix}$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede ser cero, en cuyo caso obtendríamos una fila de ceros y consecuentemente la matriz de coeficientes no tendría inversa.

Supongamos que este coeficiente a_{33} sea cero, es decir,

$$\alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$$

para los valores de α, 3 y -5, la matriz de coeficientes no tendría inversa.

(2) Discutamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Coloquemos la tercera fila en primer lugar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & \alpha-10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \alpha+12 & 3 \end{array}\right)$$

Cambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \alpha+12 & 3 \\ 0 & \alpha-10 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -21 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 21 · [3ªf.] + (α-10) · [2ªf.].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \alpha+12 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha^2+2\alpha-15 & 3\alpha-9 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente y los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Estudiemos los diferentes casos que puedan presentarse.

* Si se anula a_{33} $\Rightarrow$ $a_{33}=0$ $\Rightarrow$ $\alpha^2+2\alpha-15=0$ $\Rightarrow$ $\alpha = \begin{array}{l} \nearrow\ 3 \\ \searrow\ -5 \end{array}$

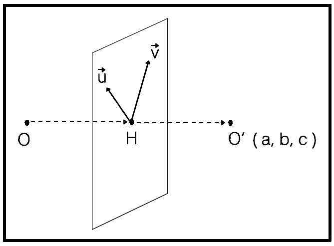
al salirnos dos valores, tendremos que analizar lo que ocurre en cada uno de ellos:

** Si $\alpha = 3$ $\Rightarrow$ la última ecuación, $(\alpha^2+2\alpha-15)z = 3\alpha-9$, sería 0=0, que es una ecuación trivial y la podemos eliminar, quedándonos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero, por lo que tendremos un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, ya que nos sobraría una incógnita, la solución coincidiría pues con la ecuación de una recta común a los tres planos.

** Si $\alpha = -5$ $\Rightarrow$ la última ecuación, $(\alpha^2+2\alpha-15)z = 3\alpha-9$, sería 0=-24, que es una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible y en consecuencia los tres planos no tienen ningún punto en común.

* Si no se anula a_{33} $\Rightarrow$ $a_{33}\neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha\neq 3$ y $\alpha\neq -5$ $\Rightarrow$ que para todos los valores de α distintos de 3 y -5, la última ecuación no es ni trivial ni absurda, el sistema tendría tres ecuaciones y tres incógnitas, sería un sistema compatible determinado, con solución única, por lo que los tres planos se cortarían en un punto.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



Llamemos O´al simétrico de O respecto del plano. Elegiremos un punto H genérico de dicho plano, que satisfaga lo siguiente:

El vector $\vec{OH}$ sea perpendicular a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de dirección del plano, y además $\vec{OH} \equiv \vec{HO}´$

Para calcular los vectores de dirección del plano, expresemos la ecuación del mismo, $x + 2y + 3z = 1$, en forma paramétrica; bastará resolver el sistema de 1 ecuación con 3 incógnitas, expresémoslo en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Al resolverlo por Gauss, observamos que está ya triangulado, es un sistema compatible indeterminado biparamétrico, nos sobran dos incógnitas, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como parámetros:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1-2y-3z \end{array}\right)$$

Despejemos la incógnita principal, la x, $\Rightarrow$ $x = 1 - 2y - 3z$

Expresemos las incógnitas secundarias y y z, como los parámetros α y β, nos quedará la ecuación del plano en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

En esta ecuación del plano leeremos que sus vectores de dirección son:

$$\vec{u}\,(-2,\ 1,\ 0) \quad ; \quad \vec{v}\,(-3,\ 0,\ 1)$$

Un punto genérico H del plano tendrá de coordenadas: H(1-2α-3β, α, β).

Construyamos el vector $\vec{OH}$

$$\vec{OH} = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta) - (0,0,0) = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta)$$

e impongamos la condición que dijimos al principio, de que el vector $\vec{OH}$ es perpendicular a los vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano, luego los productos escalares del vector $\vec{OH}$ con cada uno de dichos vectores de dirección será cero:

$$\begin{cases} \vec{OH}\cdot\vec{u} = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta)\cdot(-2,\ 1,\ 0) = 0 \\ \vec{OH}\cdot\vec{v} = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta)\cdot(-3,\ 0,\ 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+4\alpha+6\beta+\alpha = 0 \\ -3+6\alpha+9\beta+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5\alpha+6\beta = 2 \\ 6\alpha+10\beta = 3 \end{cases}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 3 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos la matriz.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 6 · [1ªf.].

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 14 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 14 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 7 · [1ªf.] - 3 · [2ªf.].

$$\left(\begin{array}{cc|c} 35 & 0 & 5 \\ 0 & 14 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª ecuación por 5.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 3 \end{array}\right)$$

Nos quedan dos ecuaciones y dos incógnitas. Es un sistema compatible determinado. Despejemos las incógnitas α y β:

La solución será:

$$\begin{cases} 7\alpha = 1 \\ 14\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{7} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{14}$$

Sustituyamos α y β en las coordenadas del punto H y en las del vector $\vec{OH}$.

Por tanto el punto H tendrá de coordenadas:

$$H = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta) = \left(1-\frac{2}{7}-\frac{9}{14},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14}\right) = \left(\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14}\right)$$

Y el vector $\vec{OH}$ será:

$$\vec{OH} = (1-2\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta) = \left(\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14}\right)$$

Sea O´(a, b, c) el punto simétrico del O respecto del plano, las coordenadas del vector $\vec{HO'}$ serán: $\vec{HO'} = (a,\ b,\ c) - \left(\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14}\right) = \left(a-\frac{1}{14},\ b-\frac{1}{7},\ c-\frac{3}{14}\right)$

se verificará que $\vec{OH} \equiv \vec{HO'} \Rightarrow \left(\frac{1}{14},\ \frac{1}{7},\ \frac{3}{14}\right) = \left(a-\frac{1}{14},\ b-\frac{1}{7},\ c-\frac{3}{14}\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{14} = a-\frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} = b-\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} = c-\frac{3}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \\ b = \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \\ c = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Luego el punto O´ simétrico del O respecto del plano será:

$$O'\left(\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7}\right)$$

La distancia del punto O al O´ es:

$$dist(O,O') = |\vec{OO'}| = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

por tanto el cuadrado de la distancia entre ambos puntos es 2/7.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Un punto genérico de la curva será de la forma $Q\left(x,\ x\sqrt{x}\right)$. Construyamos la función distancia del punto $P=\left(\frac{1}{2},0\right)$ a un punto Q cualquiera de la curva.

$$dist(P,Q) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x\sqrt{x}-0\right)^2} = \sqrt{x^3+x^2-x+\frac{1}{4}}$$

El punto de la curva más cercano a P coincidirá con el que haga mínima esta distancia. Para calcular el mínimo de esta función, basta calcular el valor de *x* que haga mínima a esta otra:

$$d(x) = x^3+x^2-x+\frac{1}{4}$$

para ello, obtengamos primeramente los valores que anulen a la primera derivada

$$d'(x)=3x^2+2x-1 \quad\Rightarrow\quad 3x^2+2x-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm4}{6}= \begin{matrix}\nearrow \frac{1}{3}\\ \searrow -1\end{matrix}$$

Estudiemos la monotonía de la función *d(x)*, que es continua y derivable para $x \geq 0$.

* si $0 \leq x < 1/3$ $\Rightarrow$ $d'(x) < 0$ $\Rightarrow$ *d(x)* es decreciente en [0, 1/3[.
* si $1/3 < x$ $\Rightarrow$ $d'(x) > 0$ $\Rightarrow$ *d(x)* es creciente en]1/3, +∞[.

Luego la función distancia tiene un mínimo relativo en $x = 1/3$, que también será el mínimo absoluto. El punto de la curva más cercano a P es el $Q\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. La ordenada se ha obtenido sustituyendo el valor de *x* en la curva.

(2) No existe ningún punto en la curva que sea el que está más lejos de P, porque en la función distancia no hemos encontrado ningún valor que perteneciendo al dominio de la curva haga máxima la función.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Expresemos la función *f(x)*, que es continua en ℝ, como una función a trozos:

$$f(x) = 1+x|x| = \begin{cases} 1-x^2 & Si\ \ x<0 \\ 1+x^2 & Si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

calculemos las primitivas de esta función:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \int(1-x^2)dx = x-\frac{x^3}{3}+C_1 & Si\ \ x<0 \\ \int(1+x^2)dx = x+\frac{x^3}{3}+C_2 & Si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

como esta función integral también es continua en ℝ, lo ha de ser en el punto 0, por lo que los límites laterales y el valor de la función en el punto 0 han de coincidir:

$$\lim_{x\to0^+}\int f(x)=\lim_{\substack{x\to0^+\\x>0}}\left(x+\frac{x^3}{3}+C_2\right)=C_2\ ;\ \lim_{x\to0^-}\int f(x)=\lim_{\substack{x\to0^-\\x<0}}\left(x-\frac{x^3}{3}+C_1\right)=C_1\ ;\ \int f(0)=C_2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}\int f(x) = \lim_{x\to0^-}\int f(x) = \int f(0) \qquad\Rightarrow\qquad C_1 = C_2$$

teniendo en cuenta que las constantes tiene que ser iguales, las primitivas de *f(x)* serán:

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C & Si \quad x < 0 \\ x + \frac{x^3}{3} + C & Si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Para obtener la primitiva cuya gráfica pasa por el punto (1,0), sustituiremos la *x* por 1 y el valor de la función por 0, en el trozo definido para valores de *x*=1>0

$$1 + \frac{1}{3} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{4}{3}$$

luego la primitiva de *f(x)* que pasa por dicho punto es

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} & Si \quad x < 0 \\ x + \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} & Si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Para discutir, según los valores de a, la posición relativa de la recta y el plano, bastará con discutir el sistema formado por las ecuaciones de ambos.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + (a+1)z = 3 \\ -x + y + z = 1 \\ ax + 2y + 3z = 3 \end{array}\right\}$$

Pongámoslo en forma matricial y utilicemos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a+1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a+1 & 3 \\ a & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + a · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a+3 & 5 \\ 0 & 2+a & 3+a & 3+a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 4 · [3ªf.] - (2+a) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a+3 & 5 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & -a+2 \end{array}\right)$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede o no ser cero. Discutamos ambos casos.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -a^2-a+6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

** Si $a = -3 \Rightarrow$ la última ecuación sería, 0 = 5, que es absurda, lo que significa que el sistema es incompatible y por tanto la recta y el plano son paralelos.

** Si $a = 2 \Rightarrow$ la última ecuación sería, 0 = 0, que es trivial, nos quedaría un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico y por tanto la recta estaría contenida en el plano.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow a \neq -3$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ la última ecuación no es absurda ni trivial por lo que el sistema estará formado por tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado y por tanto la recta y el plano se cortan en un punto.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Efectuemos el producto de las matrices $A \cdot A^t$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) & -sen(x) \\ sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(x) + sen^2(x) & -\cos(x)\, sen(x) + sen(x) \cos(x) \\ -sen(x) \cos(x) + \cos(x)\, sen(x) & sen^2(x) + \cos^2(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el resultado del producto de ambas matrices es la matriz unidad.

(2) Para probar y calcular que la matriz A tiene inversa usaremos el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de A la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A. (Nota: da igual esta disposición o la contraria). Si no apareciese la matriz unidad a la izquierda porque saliese al menos una fila de ceros entonces A no tendría inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & sen(x) & 1 & 0 \\ -sen(x) & \cos(x) & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = \cos(x) \neq 0$.
Daría igual suponer que $sen(x) \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: cos(x) ·[2ªf.] + sen(x) ·[1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & sen(x) & 1 & 0 \\ 0 & sen^2(x)+\cos^2(x) & sen(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

Simplifiquemos teniendo en cuenta la fórmula fundamental de la trigonometría.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & sen(x) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & sen(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.]-sen(x) ·[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & 0 & 1-sen^2(x) & -sen(x)\cos(x) \\ 0 & 1 & sen(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

Sustituyamos $1-sen^2(x)$ por $\cos^2(x)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & 0 & \cos^2(x) & -sen(x)\cos(x) \\ 0 & 1 & sen(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ªf. por cos(x). Ya que supusimos que $\cos(x) \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(x) & -sen(x) \\ 0 & 1 & sen(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

La matriz que hemos obtenido a la derecha es la matriz inversa de A, ya que a la izquierda la que tenemos es la matriz unidad y no ha salido ninguna fila de ceros.

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -sen(x) \\ sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 2 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo [a,b] al número

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Para hacer un estudio sobre la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene dada por

$$f(x) = 1 + 2x\,\mathrm{Ln}(x) \qquad (0 \le x \le 5),$$

donde $\mathrm{Ln}(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

(1) [1 PUNTO]. Describe el método de integración por partes.

(2) [1´5 PUNTOS]. Encuentra, usando el modelo descrito, el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = 2xe^{x} + \frac{x^3-2}{x^2+4}$$

en el punto de abscisa x=0.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Determina una matriz X que verifique la relación

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) [1 PUNTO]. Calcula el determinante de la matriz X hallada.

EJERCICIO 4. Sea $\mathbb{C}$ la circunferencia de ecuación

$$\mathbb{C} \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$$

(1) [1 PUNTO]. Calcula el centro y el radio de $\mathbb{C}$.
(2) [1 PUNTO]. Calcula el punto B que es diametralmente opuesto del punto A=(-1,7).
(3) [0´5 PUNTOS]. ¿Cuál es la posición relativa de las rectas tangentes a $\mathbb{C}$ en los puntos A y B?

Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Describe el procedimiento de integración por partes.
(2) [1´5 PUNTOS]. Determina una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que su función derivada viene dada por $f\,'(x) = \mathrm{Ln}((x+3)(x+1))$ y que $f(0) = \mathrm{Ln}(27)$, donde $\mathrm{Ln}(x)$ representa el logaritmo neperiano de *x*.

EJERCICIO 2. La función *f* definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3}, & si \quad x \neq 3; \\ 1, & si \quad x = 3; \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real.
(1) [1´5 PUNTOS]. ¿Cuánto vale a?
(1) [1 PUNTO]. Para dicho valor de a, ¿cuánto vale $f\,'(3)$?

EJERCICIO 3. **(1)** [2 PUNTOS]. Encuentra el ángulo que forman las diagonales $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$ del paralelogramo ABCD en el que A = (2,1,0), B = (0,0,0) y C = (0,-1,2).
(2) [0´5 PUNTOS]. ¿Es un cuadrado? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

halla a, b, c y d sabiendo que
(i) el vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1,-1,-1),
(ii) el producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la tercera columna de A por el vector (1,0,1) es (-2,3,2), y
(iii) el rango de la matriz A es 2.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Describamos el método de la integración por partes.

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, *u(x)* y *v(x)* es:

$$D\left[u(x)\cdot v(x)\right] = v(x)\cdot u'(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

expresemos la fórmula anterior en notación diferencial.

$$d\left[u(x)\cdot v(x)\right] = v(x)\cdot du(x) + u(x)\cdot dv(x)$$

despejemos el último sumando.

$$u(x)\cdot dv(x) = d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - v(x)\cdot du(x)$$

integremos los dos miembros de la igualdad

$$\int u(x)\cdot dv(x) = \int d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - \int v(x)\cdot du(x)$$

teniendo en cuenta que la integral de la diferencial de una función es la propia función, nos quedará:

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$$

que más abreviadamente podemos expresar así:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

(2) El valor medio de la capacidad de memorizar del niño será:

$$m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (1 + 2x\,Ln(x))\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (1 + 2x\,Ln(x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 dx + \frac{1}{2}\int_1^3 2x\,Ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_1^3 + \int_1^3 x\,Ln(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_1^3 + \int_1^3 x\,Ln(x)\,dx = \frac{1}{2}(3-1) + \int_1^3 x\,Ln(x)\,dx = 1 + \int_1^3 x\,Ln(x)\,dx \qquad [1]$$

calculemos, por partes, esta última integral,

$$u = Ln(x) \quad ; \quad du = \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$dv = x\,dx \quad ; \quad v = \int x\,dx = \tfrac{x^2}{2}$$

$$\int_1^3 x\,Ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{9Ln(3)}{2} - \frac{Ln(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx =$$

$$= \frac{9}{2}Ln(3) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2}Ln(3) - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}Ln(3) - 2$$

sustituyendo el valor obtenido de la integral en [1], tendremos que el valor medio será:

$$m = 1 + \int_1^3 x\,Ln(x)\,dx = 1 + \frac{9}{2}Ln(3) - 2 = \frac{9}{2}Ln(3) - 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Obtengamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (0, f(0)).

La ecuación de la recta tangente sería: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

Calculemos $f(0)$:

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3-2}{x^2+4} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^0 + \frac{0-2}{0+4} = -\frac{1}{2}$$

Calculemos ahora $f'(0)$, pero antes $f'(x)$:

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2(x^2+4) - (x^3-2)2x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(0) = 2e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 + \frac{0-0}{(0+4)^2} = 2 + 0 + 0 = 2$$

La ecuación de la recta tangente quedará así:

$$y + \tfrac{1}{2} = 2(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - \tfrac{1}{2}$$

La ecuación de la recta normal a f en el mismo punto es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para calcular una matriz X que verifique la relación

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

se ha de cumplir que la matriz situada a la izquierda de la X tenga inversa. Para probar y calcular que dicha matriz tiene inversa usaremos el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de la matriz, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de la matriz, es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliquemos a la izquierda, en la relación [1], los dos miembros de la igualdad por esta matriz inversa que hemos obtenido.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Calculemos el determinante de la matriz anteriormente hallada.

$$|X| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 24 - (-3) = 27$$

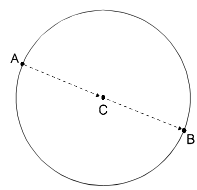
SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Nos dan la circunferencia $\mathbb{C} \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, y teniendo en cuenta la expresión general de una circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2+b^2-r^2 = 0 \quad \Rightarrow$

$$-2a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \qquad ; \qquad -2b = -6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$$-12 = a^2+b^2-r^2 \quad \Rightarrow \quad -12 = 4 + 9 - r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 5.$$

Luego el centro es el punto C(2, 3) y el radio es 5.



(2) Los puntos A y C determinan un vector que es igual que el que determinan los puntos C y B, es decir: $\vec{AC} = \vec{CB}$

$$\vec{AC} = (2, 3) - (-1, 7) = (3, -4)$$

Supongamos que el punto B tenga de coordenadas (m,n)

$$\vec{CB} = (m, n) - (2, 3) = (m-2, n-3)$$

$$\vec{AC} = \vec{CB} \Rightarrow (3, -4) = (m-2, n-3) \Rightarrow \begin{cases} \nearrow\ 3 = m-2 \Rightarrow m = 5 \\ \searrow\ -4 = n-3 \Rightarrow n = -1 \end{cases}$$

luego el punto B diametralmente opuesto al A tiene de coordenadas B(5, -1).

(3) Las rectas tangentes a los puntos A y B, por ser estos diametralmente opuestos, son rectas paralelas, pues ambas son perpendiculares al diámetro común.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La derivada de un producto de dos funciones derivables, *u(x)* y *v(x)*, es:

$$D\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

expresemos la fórmula anterior en notación diferencial.

$$d\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

despejemos el último sumando.

$$u(x)\cdot dv(x) = d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - v(x)\cdot du(x)$$

integremos los dos miembros de la igualdad

$$\int u(x)\cdot dv(x) = \int d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - \int v(x)\cdot du(x)$$

como la integral de la diferencial de una función es la propia función, nos quedará:

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$$

que más abreviadamente podemos expresar así:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Para usar esta fórmula es preciso reconocer que la integral de la expresión que se nos plantea es posible expresarla como producto de dos factores, *u* y *dv*, y observar que tanto la obtención de *v* mediante la integración de la *dv*, como el de la integral de *v·du* son cálculos más sencillos y cómodos que el cálculo directo de la integral de *u·dv*.

(2) Obtengamos, inicialmente, todas las primitivas de *f´(x)*.

$$f(x)=\int f´(x)\,dx = \int Ln((x+3)(x+1))\,dx = \qquad [1]$$

calculemos la integral mediante el procedimiento de integración por partes

$$u = Ln((x+3)(x+1)) \quad ; \quad du = \frac{x+1+x+3}{(x+3)(x+1)}\,dx = \frac{2x+4}{(x+3)(x+1)}\,dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

continuando desde [1]

$$= x\,Ln((x+3)(x+1)) - \int \frac{2x^2+4x}{(x+3)(x+1)}\,dx = \qquad [2]$$

la última integral es una integral racional impropia, ya que los grados de los polinomios del numerador y del denominador son iguales, efectuemos la división.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+4x & x^2+4x+3 \\ \cline{2-2} -2x^2-8x-8 & 2 \\ \cline{1-1} \quad -4x-6 & \end{array}$$

Calculemos la integral racional anterior.

$$\int \frac{2x^2+4x}{(x+3)(x+1)}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{-4x-6}{(x+3)(x+1)}\,dx = 2x + \int \frac{-4x-6}{(x+3)(x+1)}\,dx = \qquad [3]$$

como las raíces del denominador son -3 y -1, raíces simples, la descomposición del integrando en fracciones elementales es:

$$\frac{-4x-6}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4x-6}{(x+3)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x+3)}{(x+3)(x+1)} \qquad [4]$$

igualemos los numeradores: $-4x-6 = A(x+1)+B(x+3)$

sustituyamos, en esta última expresión, la *x* por los valores -3 y -1:

$$x=-3 \;\Rightarrow\; 6=-2A \;\Rightarrow\; A=-3$$

$$x=-1 \;\Rightarrow\; -2=2B \;\Rightarrow\; B=-1$$

volviendo a [3] y sustituyendo el integrando por la descomposición efectuada en [4], y dándole a los coeficientes A y B los valores recién calculados, tendremos:

$$=2x+\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{B}{x+1}dx = 2x+\int\frac{-3}{x+3}dx+\int\frac{-1}{x+1}dx = 2x-3Ln(x+3)-Ln(x+1)$$

por último, sustituyamos el resultado obtenido de la integral racional en [2]:

$$= x\,Ln((x+3(x+1)) - 2x + 3Ln(x+3) + Ln(x+1) + C$$

con lo que hemos determinado el conjunto de primitivas de *f´(x)*:

$$f(x) = x\,Ln((x+3(x+1)) - 2x + 3Ln(x+3) + Ln(x+1) + C$$

Como la función *f(x)* verifica que *f*(0) = Ln(27):

$$f(0) = 0 \cdot Ln((0+3(0+1)) - 0 + 3Ln(0+3) + Ln(0+1) + C = Ln(27) \Rightarrow$$

$$3\,Ln(3) + C = Ln(3^3) \Rightarrow C = 3\,Ln(3) - 3\,Ln(3) \Rightarrow C = 0$$

luego la función f(x) será:

$$f(x) = x\,Ln((x+3(x+1)) - 2x + 3Ln(x+3) + Ln(x+1)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) La función *f(x)* es derivable en todo ℝ, luego será también continua en ℝ, estudiemos qué valor o valores de "a" hacen que la función sea continua.

Si $x \neq 3$, la función es un cociente de funciones polinómicas que son continuas en luego el cociente es también una función continua en todo ℝ salvo para el valor que anula al denominador, que en este caso es el 3, pero no pertenece al dominio particular o intervalo que estamos considerando que son los valores de $x \neq 3$.

El problema está precisamente en dicho punto. Para que una función sea continua en un punto se ha de verificar que los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coincidan. Veámoslo si lo es en $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} \frac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} = \frac{9-3a-9+3a}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-(a+3)}{1} = 3-a$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} \frac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} = \frac{9-3a-9+3a}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-(a+3)}{1} = 3-a$$

$$f(3) = 1$$

La indeterminación de $\frac{0}{0}$, se ha destruido haciendo uso de la Regla de L´Hôpital, derivando independientemente el numerador y el denominador.

Como los límites laterales coinciden entre sí y además deben coincidir con el valor de f(3), igualemos los límites con el valor de la función:

$$3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$$

la función será continua en el punto 3, y por tanto en ℝ, cuando "a" valga 2.

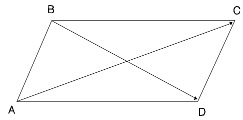
(2) Sustituyamos en *f(x)* el valor de "a" por 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & si \;\; x \neq 3; \\ 1, & si \;\; x = 3; \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}, & si \;\; x \neq 3; \\ 1, & si \;\; x = 3; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & si \;\; x \neq 3; \\ 1, & si \;\; x = 3; \end{cases} \Rightarrow f(x) = x-2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Obtengamos la función derivada *f ´(x)*: *f ´(x)* = 1 ⇒ *f ´* (3) = 1.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



(1) Calculemos primeramente las coordenadas del punto D(a,b,c), que ha de verificar: $\vec{AB} = \vec{DC} \quad \Rightarrow$

$$(0,\ 0,\ 0) - (2,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 2) - (a,\ b,\ c) \quad \Rightarrow$$

$$(-2,\ -1,\ 0) = (-a,\ -1-b,\ 2-c) \Rightarrow \begin{cases} -2 = -a & \Rightarrow & a = 2 \\ -1 = -1-b & \Rightarrow & b = 0 \\ 0 = 2-c & \Rightarrow & c = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (2,\ 0,\ 2)$$

Obtengamos ahora el ángulo que forman las diagonales $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$.

$$\vec{AC} = (0,\ -1,\ 2) - (2,\ 1,\ 0) = (-2,\ -2,\ 2)$$

$$\vec{BD} = (2,\ 0,\ 2) - (0,\ 0,\ 0) = (2,\ 0,\ 2)$$

$$cos\left(\vec{AC},\ \vec{BD}\right) = \frac{(-2,\ -2,\ 2)\bullet(2,\ 0,\ 2)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}\ \sqrt{2^2+0+2^2}} = \frac{0}{\sqrt{12}\ \sqrt{8}} = 0$$

el ángulo que forman las diagonales es de 90°.

(2) El paralelogramo anterior será un cuadrado si los lados contiguos son perpendiculares o si las diagonales son iguales, ya que éstas son perpendiculares.

Probemos si son o no iguales.

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{12} \qquad ; \qquad |\vec{BD}| = \sqrt{(2)^2+0+2^2} = \sqrt{8}$$

al no ser iguales, el paralelogramo no es un cuadrado es un rombo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

i) $(1, 2, c) \perp (1, -1, -1) \quad \Rightarrow \quad (1, 2, c) \cdot (1, -1, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2-c = 0 \quad \Rightarrow \quad c=-1.$

ii) $(-7,\ b,\ d)\times(1,\ 0,\ 1) = (-2,\ 3,\ 2) \quad \Rightarrow$

$$(-7,\ b,\ d)\times(1,\ 0,\ 1) = \left(\begin{vmatrix} b & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -7 & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -7 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (b,\ 7+d,\ -b)$$

identificando los dos segundos miembros:

$$(-2,\ 3,\ 2) = (b,\ 7+d,\ -b) \quad \Rightarrow \begin{cases} -2 = b & \Rightarrow & b = -2 \\ 3 = 7+d & \Rightarrow & d = -4 \\ 2 = -b & \Rightarrow & b = -2 \end{cases}$$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ -1 & -a & -4 \end{pmatrix}$ Calculemos el rango por Gauss. Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & a-6 & 12 \\ 0 & 3-a & -11 \end{pmatrix}$ Intercambiemos la 2ª y 3ª columna entre sí.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 12 & a-6 \\ 0 & -11 & 3-a \end{pmatrix}$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 12 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 12 · [3ªf.] + 11 · [2ªf.]

$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 12 & a-6 \\ 0 & 0 & -a-30 \end{pmatrix}$ Los elementos de la diagonal principal son ≠0 salvo a_{33} que puede serlo o no. El rango de A es pues como mínimo dos.
Si $a_{33} = 0 \ \Rightarrow\ -a-30 = 0 \ \Rightarrow\ a = -30 \ \Rightarrow$ el rango de A es 2.
Si $a_{33} \neq 0 \ \Rightarrow\ -a-30 \neq 0 \ \Rightarrow\ a \neq -30 \ \Rightarrow$ el rango de A es 3.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 3 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f : [-4,2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^x$.

(1) [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(2) [1´5 PUNTOS]. Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Sabiendo que

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 3, \quad \int_1^3 f(x)\,dx = 3, \quad \int_3^5 g(x)\,dx = 3,$$

calcula

$$\int_3^5 [f(x) + 3g(x)]\,dx - \int_1^3 [3f(x) + g(x)]\,dx .$$

EJERCICIO 3. Sean S y S´ dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.

(1) [1 PUNTO]. Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S´ incompatible.

(2) [1 PUNTO]. Si los dos sistemas S y S´ son compatibles, ¿puede S tener solución única y S´ tener infinitas soluciones? Razona la respuesta.

(3) [0´5 PUNTOS]. Al resolver un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas mediante el método de eliminación de Gauss, obtenemos la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

¿Qué puedes decir de dicho sistema? Razona la respuesta.

EJERCICIO 4. El ángulo entre dos vectores u y v es de 120° y se sabe que el módulo de u es 5 y el de v es 3.

(1) [1´5 PUNTOS]. Determina el valor del número real α para el que los vectores $(u\text{-}v)$ y $(\alpha u + v)$ son ortogonales.
(2) [1´5 PUNTOS]. ¿Cuánto vale el módulo de u - v?

Opción B

EJERCICIO 1. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ para $x\neq 2$ y $x\neq -2$.
(1) [1 PUNTO]. Determina todos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f
(2) [1´5 PUNTOS]. Teniendo en cuenta cómo es la función en el intervalo [3,4] demuestra, sin calcular la integral, que se cumple

$$\frac{1}{4} \le \int_3^4 f(x)\,dx \le \frac{3}{5}$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Una vía de ferrocarril transcurre por un terreno llano de manera que su trazado coincide con el de la recta $y = 1$ para $x \le 0$. A partir del punto $x = 0$ su trazado coincide con el de la curva $y = (\mathrm{a}x + \mathrm{b})e^{-x}$. Sabiendo que el trazado de la vía admite recta tangente en todos sus puntos, ¿cuánto valen a y b?

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. ¿Es posible determinar una circunferencia conociendo su centro y una de sus rectas tangentes? Justifica la respuesta.
(2) [1 PUNTO]. Calcula el radio de una circunferencia cuyo centro es el punto C = (1, -1) sabiendo que la recta de ecuación $2x+y=4$ es tangente en uno de sus puntos.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Dados los planos de ecuaciones

$$\pi_1 \equiv x + 2z = 3, \qquad \pi_2 \equiv 3x + y + z = -1,$$
$$\pi_3 \equiv 2y - z = -2, \qquad \pi_4 \equiv x - y + \lambda z = -5,$$

determina el valor de λ para el que los cuatro planos tienen un sólo punto común y calcula dicho punto.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La función es continua en el intervalo [-4, 2] ya que es el producto de la función polinómica, x^2, y de la exponencial elemental, e^x, que son continuas en todo $\mathbb{R}$. Por similares razones es derivable en dicho intervalo.

Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Hallemos la función primera derivada de $f(x) = x^2e^x$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

Calculemos los valores que anulen a la función primera derivada

$$2xe^x + x^2e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad xe^x(2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = -2.$$

Los posibles intervalos de monotonía son: [-4, -2), (-2, 0), (0, 2].

Probemos valores intermedios de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f'(-3) = -6e^{-3} + 9e^{-3} = 3e^{-3} > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en [-4, -2).

$f'(-1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en (-2, 0).

$f'(1) = 2e^1 + e^1 = 3e > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en (0, 2].

(2) Determinemos primeramente los extremos relativos de la función f. Estos extremos pueden encontrarse entre los puntos de discontinuidad, los de no derivabilidad o los de derivabilidad cero.

En nuestro caso se encontrarán sólo entre los puntos de derivada cero, -2 y 0.

En estos puntos donde la derivada se anula, recurriremos a la 2ª derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo.

$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$

$f''(0) = 2e^0 + 0 + 0 = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ mínimo relativo en (0, 0).

$f''(-2) = 2e^{-2} - 8e^{-2} + 4e^{-2} = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow$ máximo relativo en $(-2, 4/e^2)$.

las ordenadas de los extremos se han obtenido sustituyendo, 0 y -2, en la función f:

$f(x) = x^2e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0e^0 = 0 \quad ; \quad f(-2) = 4e^{-2}$.

Los extremos absolutos se encuentran entre los relativos o en los extremos del intervalo:

$f(-4) = 16e^{-4} \cong 0.293050 \qquad f(2) = 4e^2 \cong 29.5562$

$f(-2) = 4e^{-2} \cong 0.541341 \qquad f(0) = 0$

El máximo absoluto es el $(2, 4e^2)$; y el mínimo absoluto el (0, 0).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos la diferencia de integrales, teniendo en cuenta el valor de las integrales que nos da el ejercicio, y haciendo uso de las propiedades de la integración respecto de los límites de integración y del integrando.

$$\int_3^5 [f(x) + 3g(x)]\,dx - \int_1^3 [3f(x) + g(x)]\,dx =$$ Por la propiedad de la linealidad del integrando

$$= \int_3^5 f(x)\,dx + 3\int_3^5 g(x)\,dx - 3\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx =$$ Por la propiedad de la linealidad del intervalo

$$= \int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx + 3\int_3^5 g(x)\,dx - 3\int_1^3 f(x)\,dx - \left[\int_1^5 g(x)\,dx - \int_3^5 g(x)\,dx\right] =$$

$$= 3 - 3 + 3\cdot 3 - 3\cdot 3 - (3 - 3) = 0.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Sea el sistema S, cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Sea el sistema S´, cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

fácilmente se observa que ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, y que el sistema S es compatible mientras que el S´ es incompatible, ya que si triangulamos inferiormente mediante el método de eliminación de Gauss, la última ecuación del primer sistema da lugar a una ecuación trivial quedándonos pues un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado, por contra, en el segundo sistema la última ecuación da lugar a una ecuación absurda y el sistema sería incompatible.

(2) Si el sistema S es compatible determinado (solución única), significa que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada son iguales, por ejemplo, n, y que el número de incógnitas también es n.

Si el sistema S´ es compatible indeterminado (infinitas soluciones), significa que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada son iguales, teniendo que ser dicho rango n, porque la matriz de los coeficientes de ambos sistemas es la misma; por pero este sistema S´ debe tener más de n incógnitas lo que es imposible porque el sistema S al ser compatible tenía sólo n.

En definitiva, no es posible que S sea determinado y S´ indeterminado.

(3) Se trata de un sistema incompatible porque en el proceso de eliminación de Gauss se ha obtenido una última ecuación que es absurda, $0 = 1$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Si $(u - v)$ y $(\alpha u + v)$ son vectores ortogonales, su producto escalar es cero:

$(u - v) \cdot (\alpha u + v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \cdot (\alpha u) + u \cdot v - v \cdot (\alpha u) - vv = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha (u \cdot u) + u \cdot v - \alpha (v \cdot u) - vv = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha |u| \cdot |u| \cos (u, u) + |u| \cdot |v| \cos (u, v) - \alpha |v| \cdot |u| \cos (u, v) - |v| \cdot |v| \cos (v, v) = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos(0°) + 5 \cdot 3 \cdot \cos (120°) - \alpha \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos (120°) - 3 \cdot 3 \cdot \cos (0°) = 0 \quad \Rightarrow$

$$25\alpha - \frac{15}{2} + \frac{15}{2}\alpha - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{65}{2}\alpha = \frac{33}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{33}{65}$$

(2) Para calcular el módulo de $u - v$, tendremos en cuenta lo siguiente:

$$|u-v| = \sqrt{(u-v)\cdot(u-v)} = \sqrt{u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v} = \sqrt{|u|^2 - 2u\cdot v + |v|^2} =$$
$$= \sqrt{|u|^2 - 2|u|\cdot|v|\cos(u,v) + |v|^2} = \sqrt{5^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \cos(120°) + 3^2} = 7$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, tendremos en cuenta inicialmente que su dominio es ℝ-{-2, 2}, siendo continua en él.

Para hallar dichos intervalos obtengamos la función primera derivada de *f(x)*

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

Observamos que *f(x)* es derivable en su dominio, ℝ-{-2, 2}.

Calculemos los valores que anulen a la función primera derivada

$$\frac{-6x}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Construyamos los posibles intervalos de solución

(-∞, -2), (-2, 0), (0, 2) y (2, ∞)

Probemos valores intermedios de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$f'(-3) = \frac{18}{((-3)^2-4)^2} = \frac{18}{25} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty, -2)$$

$$f'(-1) = \frac{6}{((-1)^2-4)^2} = \frac{6}{9} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-2, 0)$$

$$f'(1) = \frac{-6}{((1)^2-4)^2} = \frac{-6}{9} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, 2)$$

$$f'(3) = \frac{-18}{((3)^2-4)^2} = \frac{-18}{25} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (2, \infty)$$

(2) La función es decreciente en el intervalo [3, 4], según el apartado (1), luego el valor máximo y mínimo lo alcanza la función en los extremos de dicho intervalo:

$$f(3) = \frac{3}{3^2-4} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \text{ valor máximo;} \qquad f(4) = \frac{3}{4^2-4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \text{ valor máximo}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de acotación de las integrales definidas

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

donde m representa el valor mínimo y M el valor máximo del intervalo [a,b], resulta:

$$\frac{1}{4}(4-3) \le \int_3^4 f(x)\,dx \le \frac{3}{5}(4-3) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \le \int_3^4 f(x)\,dx \le \frac{3}{5}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si el trazado admite recta tangente en todos sus puntos es que la función es derivable en todos ellos. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

Si es derivable tiene que ser continua. Veamos la continuidad.

En los puntos $x < 0$ lo es por tratarse de una función constante, $y = 1$; para los valores de $x > 0$ también es continua por ser el producto de dos funciones continuas, una polinómica, $ax+b$, y otra exponencial elemental, e^{-x}.

Para que la función sea continua en el punto 0 se ha de verificar que los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coincidan:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} (ax+b)e^{-x} = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \frac{ax+b}{e^x} = \frac{0+b}{e^0} = \frac{b}{1} = b$$

$$f(0) = \frac{0+b}{e^0} = \frac{b}{1} = b$$

al igualar los límites laterales con el valor de f(0), obtenemos: b = 1.

La función *f* es continua en su dominio si b=1, y por tanto podrá ser derivable.

Estudiemos ahora la derivabilidad. En los puntos $x < 0$ lo es por tratarse de una función constante, $y = 1$, siendo la derivada 0; para los valores de $x > 0$ también es derivable por ser el producto de dos funciones derivables, una polinómica, $ax+b$, y otra exponencial elemental, e^{-x}, siendo la derivada, $\dfrac{ae^x - (ax+1)e^x}{e^{2x}}$.

Una primera aproximación de la función derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \dfrac{ae^x - (ax+1)e^x}{e^{2x}} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 0$ ha de verificarse que las derivadas laterales coincidan:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} 0 = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \frac{ae^x - (ax+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{a-1}{1} = a-1$$

igualemos ambas derivadas laterales: a-1 = 0 $\Rightarrow$ a = 1.

La función *f* y su función derivada, finalmente, serían:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ (x+1)e^{-x} & si \quad x>0 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ (e^x - (x+1)e^x)e^{-2x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función *f* admite recta tangente en todos sus puntos si a=1 y b=1.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Sí es posible; ya que para determinar una circunferencia necesitamos las coordenadas de su centro, que se conocen, y el radio, el cual se puede obtener mediante el cálculo de la distancia del centro a la recta tangente pues la recta tangente en un punto es perpendicular al radio que va desde el centro a dicho punto de tangencia.

(2) El radio coincidirá con la distancia del centro, C, a la recta tangente. Llamemos H al punto de tangencia. Expresemos la ecuación de la tangente en forma paramétrica:

$$2x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

El punto H tendrá de coordenadas genéricas (t, 4-2t)

El vector de dirección de la recta tangente es: $\vec{u} = (1, -2)$

El vector $\vec{CH}$ es perpendicular al $\vec{u}$, lo que implica que su producto escalar es cero:

$$\vec{CH} = (t, 4-2t) - (1, -1) = (t-1, \ 5-2t)$$

$$\vec{CH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{CH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (t-1, 5-2t) \cdot (1, -2) = 0 \Rightarrow t-1-10+4t = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{5}$$

sustituyamos este valor en el vector $\vec{CH}$:

$$\vec{CH} = (t-1, \ 5-2t) = \left(\frac{11}{5} - 1, \ 5 - \frac{22}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}, \ \frac{3}{5}\right)$$

$$\text{radio} = |\vec{CH}| = \sqrt{(6/5)^2 + (3/5)^2} = \sqrt{\frac{36+9}{5^2}} = \sqrt{\frac{45}{5^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Determinemos λ resolviendo el sistema formado por los cuatro planos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda & -5 \end{array}\right)$$

Hemos expresado el sistema en forma matricial para aplicar el método de reducción de Gauss. Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & -8 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: 2 · [4ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 2\lambda-5 & -18 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -9 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: 9 · [4ªf.] + (2λ-5) · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -36\lambda-72 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, los elementos de la diagonal principal son ≠0, y para que sea compatible determinado y los 4 pla-nos se corten en un punto, la última ecuación debe ser trivial, es decir, debe verificarse: 0 = -36λ - 72 ⇒ λ = -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right)$$

Calculemos el punto de corte, resolviendo el sistema.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -9 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: -9 · [3ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 9 · [1ªf.] + 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, podemos despejar directamente las incógnitas: x = -1 ; y = 0 ; z = 2

El punto donde se cortan los 4 planos es el (-1, 0, 2).

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 4 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Calcula, de manera razonada, todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifican

$$f'(x)=\begin{cases} e^x, & si \;\; x<0;\\ 2x+1, & si \;\; x>0.\end{cases}$$

(2) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de cada una de las funciones *f* halladas.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta y a 500 metros río arriba se ha construido una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta eléctrica y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 1200 ptas. el metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 2000 ptas. el metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Discute el siguiente sistema según los valores del número real a:

$$\begin{aligned} ax+2y+3z&=1,\\ ay+4z&=0,\\ x-y+z&=0.\end{aligned}$$

(2) [1 PUNTO]. Resuélvelo para a=-1.

EJERCICIO 4. **(1)** [1´25 PUNTOS]. Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto (1,1,1) y la recta de ecuaciones

$$r\equiv\begin{cases} y=0,\\ 2x+3z=1.\end{cases}$$

(2) [1´25 PUNTOS]. El mismo problema pero para la recta de ecuaciones

$$s\equiv\begin{cases} x+2y+3z=6,\\ 3x+2y+z=1.\end{cases}$$

Opción B

<u>EJERCICIO 1</u>. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función polinómica dada por

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80$$

(1) [1 PUNTO]. Determina el intervalo [a, b] en el que *f* es creciente.
(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área limitada por la parte de la gráfica de *f* correspondiente al intervalo [a, b], el eje OX y las rectas x=a, x=b.

<u>EJERCICIO 2</u>. De las siguientes afirmaciones, hechas sobre una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ¿cuáles DEBEN ser ciertas, PUEDEN ser ciertas en algunas ocasiones o NUNCA son ciertas? Justifica las respuestas; en el caso de una respuesta "PUEDE" debes dar un ejemplo en el que la correspondiente afirmación sí es cierta y otro en el que no es cierta.

(1) [0´75 PUNTOS]. Si $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ y *f* es continua entonces *f(0)* = 1.

(2) [0´75 PUNTOS]. Si $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$ entonces $f\,'(0) = 3$.

(3) [1 PUNTO]. Si $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

<u>EJERCICIO 3</u>. **(1)** [1´5 PUNTOS]. En el segmento cuyos extremos son los puntos A = (1,2) y B = (2,3) hay un punto P tal que la relación que existe entre los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$ es la siguiente: $\vec{PA} = \frac{3}{2}\vec{PB}$. Halla P.

(2) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la circunferencia con centro en P y que pasa por el origen de coordenadas.

<u>EJERCICIO 4</u>. [2´5 PUNTOS]. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo del pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% del de carbohidratos. Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos kilos diarios de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) El dominio de la función *f* es $\mathbb{R}$ y el de su función derivada, $f\,'(x)$, es $\mathbb{R}$-{0}. Los trozos de funciones que componen $f\,'(x)$ son funciones continuas.

Calculemos *f(x)* mediante la integración de *f´(x)*, teniendo en cuenta que Dom(*f*)=ℝ.

$$f(x)=\begin{cases}\int e^x\,dx=e^x+C_1 & si\ x<0\\ C_2 & si\ x=0\\ \int(2x+1)dx=x^2+x+C_3 & si\ x>0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}e^x+C_1 & si\ x<0\\ C_2 & si\ x=0\\ x^2+x+C_3 & si\ x>0\end{cases}$$

Según el ejercicio, *f(x)* no es derivable en *x*=0, luego puede ser o no continua en 0; por otro lado podemos comprobar que las derivadas laterales en 0 son:

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}e^x=1 \quad ; \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}(2x+1)=1$$

o sea, las derivadas laterales coinciden, luego *f(x)* no puede ser continua en *x*=0, porque si lo fuera sería derivable y no lo es.

Impongamos entonces a *f(x)* la condición de no ser continua en el punto *x*=0, para lo cual calcularemos los límites laterales y el valor de la función en el 0:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}(e^x+C_1)=1+C_1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}(x^2+x+C_3)=C_3$$

$$f(0)=C_2$$

si fuera continua en *x*=0 coincidirían todos estos valores, es decir, $1 + C_1 = C_3 = C_2$, pero al no ser continua en el punto 0, al menos una de estas igualdades no debe satisfacerse. Los diferentes casos, y por tanto funciones, que pueden presentarse son:

a) $1 + C_1 = C_2 \neq C_3 \quad \Rightarrow \quad f_1(x)=\begin{cases}e^x+C_1 & si\ \ x<0\\ 1+C_1 & si\ \ x=0\\ x^2+x+C_3 & si\ \ x>0\end{cases}$

b) $1 + C_1 \neq C_2 = C_3 \quad \Rightarrow \quad f_2(x)=\begin{cases}e^x+C_1 & si\ \ x<0\\ C_2 & si\ \ x=0\\ x^2+x+C_2 & si\ \ x>0\end{cases}$

c) $1 + C_1 = C_3 \neq C_2 \quad \Rightarrow \quad f_3(x)=\begin{cases}e^x+C_1 & si\ \ x<0\\ C_2 & si\ \ x=0\\ x^2+x+1+C_1 & si\ \ x>0\end{cases}$

d) $1 + C_1 \neq C_3 \neq C_2 \quad \Rightarrow \quad f_4(x)=\begin{cases}e^x+C_1 & si\ \ x<0\\ C_2 & si\ \ x=0\\ x^2+x+C_3 & si\ \ x>0\end{cases}$

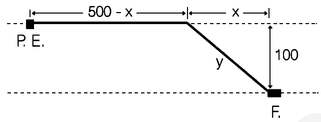
(2) Tal como hemos construido las funciones anteriores, f_1, f_2, f_3 y f_4, ninguna es derivable en el punto *x*=0, porque ninguna es continua en dicho punto.

Para valores de *x*<0, el trozo de función es una exponencial que es derivable en todo ℝ, siendo la derivada e^x.

Para valores de *x*>0, el trozo de función es una polinómica que es derivable en todo ℝ, siendo la derivada 2*x*+1.

En definitiva la función derivada, *f ´(x)*, es la misma para todas, y es la que viene en el enunciado del ejercicio.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



Construyamos la función coste, *C*, teniendo en cuenta el dibujo adjunto y los datos del ejercicio.

$$C = 1200(500-x) + 2000\,y$$

pero por el teorema de Pitágoras, $y = \sqrt{x^2 + 100^2}$

$C(x) = 1200(500-x) + 2000\sqrt{x^2+100^2}$, lógicamente el Dom $d(x) = [0, 500]$.

Calculemos los valores de x que minimizan el coste. La función derivada es

$$C´(x) = -1200 + 2000\frac{2x}{2\sqrt{x^2+100^2}} \quad \Rightarrow \quad C´(x) = -1200 + \frac{2000x}{\sqrt{x^2+100^2}}$$

el valor que anula a la función derivada es

$$-1200 + \frac{2000x}{\sqrt{x^2+100^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2+100^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x}{\sqrt{x^2+100^2}} = 3 \quad \Rightarrow$$

$$5x = 3\sqrt{x^2+100^2} \quad \Rightarrow \quad 25x^2 = 9x^2 + 90000 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 = 90000 \quad \Rightarrow \quad x = 75$$

La función $C(x)$ es una función continua y derivable en su dominio. Estudiemos la monotonía en los intervalos [0, 75[y]75, 500], para lo cual probamos valores intermedios, por ejemplo 10 y 80, de dichos intervalos en la primera derivada:

$C´(10) = -1200 + \frac{20000}{\sqrt{10^2+100^2}} = -1000´99 < 0 \Rightarrow$ *C(x)* es decreciente en [0, 75[

$C´(100) = -1200 + \frac{200000}{\sqrt{100^2+100^2}} = 214´21 > 0 \Rightarrow$ *C(x)* es creciente en]75, 500]

luego para el valor de $x = 75$ hay un mínimo relativo que también es mínimo absoluto.

La longitud del tendido más económico es de 500-75=425 metros a lo largo de la orilla, y de $\sqrt{75^2+100^2} = 125$ metros cruzando el río, tal como se indica en la figura.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ a & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - a · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ 0 & 2+a & 3-a & 1 \end{array}\right)$$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 0 \\ 0 & 3-a & 2+a & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $4 \cdot [3^a f.] - (3-a) \cdot [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2+a+8 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que se presentan.

Si $a_{33} = 0 \Rightarrow a^2+a+8 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-32}}{2} \Rightarrow$ no existe ningún valor de "a" que anule al coeficiente a_{33}, luego siempre será distinto de cero. En consecuencia, para cualquier valor de "a", el sistema triangulado siempre tendrá tres ecuaciones y tres incógnitas, será un sistema compatible determinado.

(2) Sustituyamos en el sistema triangulado anterior el valor de "a" por -1.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $8 \cdot [2^a f.] + [3^a f.]$
Sustituyamos la 1ª fila por: $8 \cdot [1^a f.] + [3^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 32 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Simplifiquemos todo el sistema por 4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 8 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $4 \cdot [1^a f.] - [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x) & (z) & (y) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado, sabíamos que era un sistema compatible determinado, basta despejar las incógnitas para encontrar la solución que es:

$x = 3/8, \quad z = 1/8, \quad y = 1/2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Determinemos el plano que contiene a la recta r y pasa por el punto (1,1,1). Para ello escribamos el haz de planos que contiene a la recta:

$$\alpha y + \beta(2x + 3z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha y + 2\beta x + 3\beta z - \beta = 0$$

impongamos a este haz que pase por el punto (1,1,1) para obtener el plano que nos interesa, para lo cual sustituiremos las coordenadas del punto en el haz:

$$\alpha + 2\beta + 3\beta - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -4\beta$$

la ecuación del plano será:

$$-4\beta y + 2\beta x + 3\beta z - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 2x - 4y + 3z - 1 = 0$$

La ecuación de la recta que nos piden es perpendicular a este plano π, luego el vector normal al plano podemos tomarlo como el de dirección de la recta, es decir:

$$\vec{n}_\pi = (2, -4, 3) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (2, -4, 3)$$

la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a π, es:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-4} = \frac{z-0}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}$$

(2) Determinemos el plano que contiene a la recta s y pasa por el punto (1,1,1). Para ello escribamos el haz de planos que contiene a la recta:

$$\alpha(x + 2y + 3z - 6) + \beta(3x + 2y + z - 1) = 0$$

impongamos a este haz que pase por el punto (1,1,1) para obtener el plano que nos interesa, para lo cual sustituiremos las coordenadas del punto en el haz:

$$\alpha(1 + 2 + 3 - 6) + \beta(3 + 2 + 1 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

la ecuación del plano será:

$$\alpha(x + 2y + 3z - 6) + \beta(3x + 2y + z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi \equiv x + 2y + 3z - 6 = 0$$

observamos que el plano que contiene a s y pasa por el punto (1,1,1,) coincide con uno de los planos que definen a la recta s.

La ecuación de la recta que nos piden es perpendicular a este plano Π, luego el vector normal al plano podemos tomarlo como el de dirección de la recta, es decir:

$$\vec{n}_\Pi = (1, 2, 3) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (1, 2, 3)$$

la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a π, es:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Calculemos la función primera derivada.

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 80 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

obtengamos los valores que anulen a la primera derivada

$$-6x^2 + 30x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 6 \cdot 24}}{-12} \quad \frac{-30 \pm 18}{-12} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

Los posibles intervalos de monotonía son: $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$, $(4, \infty)$. Probemos valores intermedios de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$f'(0) = -24 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(-\infty, 1)$.
$f'(2) = -24+60-24 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $(1, 4)$.
$f'(5) = -150+150-24 = -24 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $(4, \infty)$.

El intervalo en el que la función es creciente es el $[1, 4]$.

(2) La gráfica de la función es creciente en el intervalo $[1, 4]$, y los valores de la función en los puntos extremos, 1 y 4, del intervalo son:

$f(1) = -2+15-24+80 = 69 \quad ; \quad f(4) = -128+240-96+80 = 96$

lo que significa que la función, que es continua en $\mathbb{R}$ (por ser polinómica), no corta al eje de abscisas en ningún punto de dicho intervalo. El área pedida será:

$$\int_1^4 (-2x^3 + 15x^2 - 24x + 80)\, dx = \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{15x^3}{3} - \frac{24x^2}{2} + 80x\right]_1^4 =$$

$$= -\frac{4^4}{2} + 5\cdot 4^3 - 12\cdot 4^2 + 320 - \left(-\frac{1}{2} + 5 - 12 + 80\right) = 247.5$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua veamos si $f(0)=1$; supongamos que $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(0)}{0} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \neq 1$$

luego NUNCA puede ser cierta la afirmación (1) del ejercicio.

(2) Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $f'(0) = 3$. Esta afirmación DEBE ser cierta, porque el límite que nos dan coincide con el concepto de derivada de la función f en el punto cero, es decir, con $f'(0)$; y además, en ambos casos vale 3.

(3) Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ entonces $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Esta afirmación PUEDE ser cierta porque el límite que nos dan coincide con el concepto de derivada de la función f en el punto cero, o también, con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto 0; y la recta que nos dan, $y = 3x + 1$, tiene de pendiente 3, por tanto PUEDE ser cierta la afirmación.

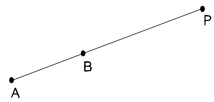
Un ejemplo en el que sí es cierta, sería si consideramos la función $f(x)=x^2+3x+1$, ya que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto 0 es:

$f'(x) = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f(0) = 1 \quad \Rightarrow$
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 3(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 1.$

Un ejemplo en el que no es cierta, sería si consideramos la función $f(x)=x^2+3x+7$, ya que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto 0 es:

$f'(x) = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f(0) = 7 \quad \Rightarrow$
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 7 = 3(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 7.$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



(1) El punto P(a, b) tiene que estar fuera del segmento AB debido a que la relación entre los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$ es 3/2, que es un valor positivo, y tal como indica el dibujo.

Sabemos que $\vec{PA} = \frac{3}{2}\vec{PB} \quad \Rightarrow \quad 2\,\vec{PA} = 3\,\vec{PB} \quad \Rightarrow$

$$2[(1,2)-(a,b)] = 3[(2,3)-(a,b)] \;\Rightarrow\; 2(1-a,\,2-b) = 3(2-a,\,3-b) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-2a = 6-3a & \Rightarrow \quad a = 4 \\ 4-2b = 9-3b & \Rightarrow \quad b = 5 \end{cases}$$

luego el punto P tiene de coordenadas P = (4, 5).

(2) La ecuación de una circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Las coordenadas del centro son C = P = (4, 5). El radio es la distancia de P a O=(0, 0):

$$r = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41}$$

luego la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 + 25 - 41 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 8x - 10y = 0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Llamemos x a los kilos del pienso A que ha de darle a su ganado, e y a los kilos del pienso B. Estableceremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 6x + 35y &= 100 \\ 14x + 15y &= 100 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 35 & 100 \\ 14 & 15 & 100 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 7 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 35 & 100 \\ 0 & -200 & -400 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -200

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 35 & 100 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 35 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 6.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, es un sistema compatible determinado, la solución es:

$x = 5$ kilos del,pienso A ; $y = 2$ kilos del pienso B.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 5 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** De todas las rectas tangentes a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{x-1}$, halla la que pasa por el origen de coordenadas.
(2) Dibuja la región limitada por la gráfica de *f*, la recta tangente hallada en el apartado anterior y el eje de ordenadas.
(3) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. El alcalde de un pueblo quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar fiestas. Para ello aprovecha una tapia existente como uno de los lados y dispone de 300 m. de tela metálica para hacer los otros tres.
(1) ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?
(2) La comisión de fiestas del pueblo ha calculado que para montar las atracciones, pista de baile, etc., necesitan 8.000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en el apartado anterior, ¿será suficientemente grande el recinto que quiere preparar el alcalde?

EJERCICIO 3. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1,0,2), es paralelo a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-3$ y es perpendicular al plano $\Pi : 2x-y+z=0$.

EJERCICIO 4. **(1)** Define el concepto de matriz inversa de una matriz cuadrada.
(2) ¿Qué condición debe cumplir el determinante de una matriz cuadrada para que ésta sea invertible?
(3) Estudia si hay algún valor de a para el que la siguiente matriz tiene inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{pmatrix}$$

Opción B

EJERCICIO 1. De una función f se sabe que es polinómica de tercer grado, que sus primeras derivadas en los puntos $x=3$ y $x=-1$ son nulas, que $f(2)=5$, que $f(1)=2$ y que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Haz un esbozo de la gráfica de f sin realizar ningún cálculo justificando cómo lo haces a partir de los datos.

EJERCICIO 2. **(1)** Halla el punto de inflexión de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\,e^{-x}$.
(2) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y la recta x=b donde b es la abscisa del punto de inflexión hallado en el apartado anterior.
(3) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. **(1)** Define lo que son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.
(2) Prueba que los vectores $u=(2,-1,0)$ y $v=(1,0,1)$ son linealmente independientes.
(3) Halla el valor de t para el cual el vector $w=(8,-5,t)$ depende linealmente de u y v.

EJERCICIO 4. **(1)** Para los diferentes valores del parámetro real a estudia la posición relativa de los planos dados por

$$\Pi_1 : x + y + z = a - 1,$$
$$\Pi_2 : 2x + y + az = a,$$
$$\Pi_3 : x + ay + z = 1.$$

(2) Si a=-1, ¿en qué punto se cortan?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto de abscisa x_0 es: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\Rightarrow$

$f(x) = e^{x-1} \Rightarrow f(x_0) = y_0 = e^{x_0-1} \Rightarrow f'(x) = e^{x-1} \Rightarrow f'(x_0) = e^{x_0-1} \Rightarrow$

$$y - y_0 = e^{x_0-1}(x - x_0) \qquad [1]$$

impongamos ahora la condición a esta recta tangente genérica que pase por el origen de coordenadas (0,0)

$0 - y_0 = e^{x_0-1}(0 - x_0) \Rightarrow -y_0 = e^{x_0-1}(-x_0) \Rightarrow -y_0 = y_0(-x_0) \Rightarrow$
$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = e^{1-1} = e^0 = 1$

luego la única recta tangente a la función que pasa por el origen de coordenadas es la que a su vez pasa por el punto de tangencia (1, 1). Sustituyendo este punto en [1] obtendremos, finalmente, que la ecuación de la recta tangente pedida es

$$y - 1 = e^{1-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = x$$

(2) La gráfica de la función $f(x) = e^{x-1}$ coincide con la de e^x pero desplazándola una unidad a la derecha. No obstante podemos estudiar sus características más importantes.

1.- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.

2.- Crecimiento:

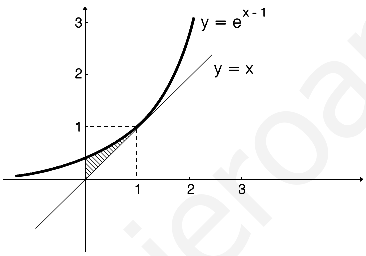
$f'(x) = e^{x-1}$ $\Rightarrow$ no hay ningún valor que anule a la derivada, y para cualquier valor de x la función derivada es siempre positiva, luego la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

3.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $(0, e^{-1})$.

4.- Asíntota horizontal:

$\lim_{x \Rightarrow -\infty} e^{x-1} = e^{-\infty-1} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\Rightarrow$ asíntota horizontal y=0 cuando $x \to -\infty$

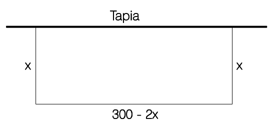
La gráfica de $f(x)$ y la de la región pedida es:



(3) El área de la región vendrá dada por:

$$\int_0^1 (e^{x-1} - x)\,dx = \left[e^{x-1} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e^0 - \frac{1}{2} - (e^{-1} - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0´13212$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



(1) Teniendo en cuenta el dibujo, construimos la función área:

$A(x) = (300-2x)x = 300x - 2x^2$, siendo Dom $A(x)$ =]0, 150[.

La función derivada es: $A´(x) = 300 - 4x$

El valor que anula a la función primera derivada es: $300 - 4x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 75$

Estudiemos la monotonía de $A(x)$, que es una función continua y derivable en su dominio, probando con valores intermedios de los intervalos]0, 75[y]75, 150[en la primera derivada:

$A´(10) = 300 - 40 = 260 > 0$ $\Rightarrow$ $A´(x) > 0$ $\Rightarrow$ $A(x)$ es creciente en]0, 75[

$A´(100) = 300 - 400 = -100 < 0$ $\Rightarrow$ $A´(x) < 0$ $\Rightarrow$ $A(x)$ es decreciente en]75, 150[

luego hay un máximo relativo en x= 75, que es a su vez absoluto.

Luego las dimensiones del recinto cuya área es la mayor posible son:

base = $300 - 2x = 300 - 2 \cdot 75 = 150$; altura = $x = 75$.

(2) El recinto que quiere preparar el alcalde tiene un área máxima de

$$A(75) = 300 \cdot 75 \ - \ 2 \cdot 75^2 \ = \ 11250 \text{ m}^2$$

por lo que sí será suficiente, ya que la comisión de fiestas sólo necesita 8000 m^2.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

El plano que nos piden al ser paralelo a la recta r, significa que el vector de dirección de la recta, $\vec{u} = (2, 3, 1)$, será un vector de dirección del plano.

El plano que nos piden al ser perpendicular al plano Π, significa que el vector normal a éste, $\vec{n}_\Pi = (2, -1, 1)$, será otro vector de dirección del plano pedido.

Los dos vectores de dirección que hemos obtenido tienen distinta dirección, porque sus componentes no son proporcionales, luego son los de dirección del plano.

La ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y tiene como vectores de dirección a $\vec{u}$ y $\vec{n}_\Pi$ será

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y &= 3\lambda - \mu \\ z &= 2 + \lambda + \mu \end{aligned}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Llamamos matriz inversa de una matriz cuadrada A a otra matriz B del mismo orden, tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

siendo I la matriz unidad del mismo orden.

La matriz A debe ser una matriz regular (su determinante es distinto de cero) para que tenga inversa. A la inversa de A se le denota normalmente por A^{-1}.

(2) Para que una matriz cuadrada sea invertible, la condición que ha de cumplir es que su determinante sea distinto de cero.

(3) Para estudiar si la matriz siguiente tiene inversa, lo haremos mediante el cálculo de su rango por el procedimiento de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 0 & 1 & 3a-8 \\ 0 & 1 & 3a-8 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 0 & 1 & 3a-8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos triangulado inferiormente y la tercera fila es una fila de ceros cualquiera que sea el valor de "a", luego el rango es 2, menor que el orden de la matriz cuadrada que es 3, por tanto no hay ningún valor de "a" para el que la matriz tenga inversa. El matriz, independientemente del valor de "a", siempre saldrá cero.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

La función polinómica es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

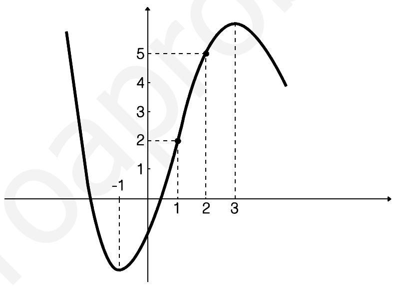
La derivada primera de la función *f(x)* es nula en los puntos $x=3$ y $x=-1$, lo que implica que en dichos puntos la gráfica de la función presenta puntos de tangencia horizontal (máximos o mínimos relativos, o puntos de inflexión).

Construyamos los tres intervalos de monotonía: $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$, donde la función puede ser creciente o decreciente. En el intervalo $(-1, 3)$ la función necesariamente es creciente por cuanto en el punto $x=1$ la función toma el valor 2, $f(1)=2$, y en el punto $x=2$ toma el valor 5, es decir, $f(2)=5 > f(1)=2$.

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es decreciente, ya que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, y en el punto $x=-1$ la función presenta un punto de tangencia horizontal, que será necesariamente un mínimo relativo, porque a partir de $x=-1$ la función es creciente.

En el intervalo $(3, \infty)$ la función es decreciente, porque al ser una función polinómica de grado tres, y teniendo en cuenta que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, se deduce que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, como además es creciente en el intervalo $(-1, 3)$, resulta que en el punto $x=3$ la función presenta un máximo relativo.

Un boceto podría ser la gráfica situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Calculemos el punto de inflexión de la función $f(x) = x\,e^{-x}$.

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x\,e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -2e^{-x} + x\,e^{-x}$$

Obtengamos el valor que anula a la segunda derivada: $-2e^{-x} + x\,e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow$

$$e^{-x}(-2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

sustituyamos este valor en la tercera derivada

$f'''(x) = 2e^{-x} + e^{-x} - x\,e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 3e^{-x} - x\,e^{-x} \quad \Rightarrow$

$f'''(2) = 3e^{-2} - 2e^{-2} = e^{-2} \neq 0 \quad \Rightarrow$ Punto de inflexión en $x= 2$

$f(2) = 2e^{-2} \quad \Rightarrow$ el punto de inflexión tiene de coordenadas $(2, 2e^{-2})$.

(2) Para dibujar la gráfica procederemos de la siguiente manera:

1.- Punto de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = xe^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad xe^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$$

Se ha resuelto el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y=0$.

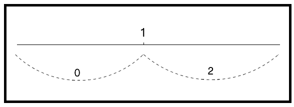
- Punto de corte con el eje de ordenadas. Se resuelve el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x=0 \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 0 \cdot e^{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,\ 0)$$

2.- Crecimiento y decrecimiento.

Obtengamos la primera derivada y calculemos los valores que la anulan.

$f\,'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} \quad \Rightarrow \quad e^{-x} - x\,e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x}\,(1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$



llevemos sobre el eje de abscisas este valor, $x = 1$, y construyamos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento, $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$. Probemos valores intermedios, por ejemplo, 0 y 2, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.

$f\,'(0) = e^{0} - 0 \cdot e^{0} = 1 > 0 \qquad \Rightarrow$ Creciente en $(-\infty, 1)$.

$f\,'(2) = e^{-2} - 2 \cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0 \qquad \Rightarrow$ Decreciente en $(1, \infty)$.

3.- Máximos y mínimos.

Podríamos hallarlos sustituyendo el valor que anula a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero teniendo en cuenta que la función es continua y el estudio sobre el crecimiento y decrecimiento anterior, deducimos que en el punto de abscisa $x=1$ hay un máximo, La ordenada de este máximo es: $f\,(1) = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$. El máximo será el punto $(1, e^{-1})$.

4.- Puntos de inflexión.

Hallamos los valores que anulan a la segunda derivada y los sustituiremos en la tercera derivada, si nos sale distinto de cero será punto de inflexión.

$f\,''(x) = e^{-x}\,(x - 2) \quad \Rightarrow \quad e^{-x}\,(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$f\,'''(x) = e^{-x}\,(3 - x) \quad \Rightarrow \quad f\,'''(2) = e^{-2}\,(3 - 2) = e^{-2} \neq 0$

el punto de inflexión de abscisa $x=2$, tiene de ordenada $f(2) = 2\,e^{-2}$, es decir el punto de inflexión tiene de coordenadas $(2,\ 2e^{-2})$.

5.- Asíntotas verticales.

Para que la función presente asíntotas verticales se ha de verificar que exista algún valor "a" tal que se satisfaga: $\lim\limits_{x \Rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

No existe ninguno, por lo que no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

Habrá asíntota horizontal si se cumple que: $\lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in R$

Calculemos dichos límites.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x\,e^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad A.H.: \quad y = 0$$

hay una asíntota horizontal, $y = 0$, para $x \to \infty$.

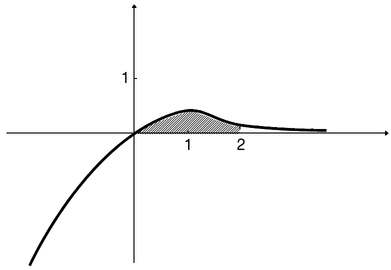
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x\,e^{-x}\right) = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$$

no hay asíntota horizontal para $x \to -\infty$, pero existe la posibilidad de asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\,e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$$

no hay asíntota oblicua para $x \to -\infty$, hay una rama parabólica paralela al eje OY.

6.- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado



(3) El área de la región subrayada es

$$\int_0^2 x\, e^{-x}\, dx =$$

calculemos la integral por el método de integración por partes

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \quad ; \quad v = \int dv = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\int_0^2 x\, e^{-x}\, dx = \left[-x\, e^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 = \left[-2\, e^{-2} - e^{-2}\right] - \left[0 - e^{0}\right] = -3e^{-2} + 1 \approx 0´593994$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Un conjunto de n vectores, $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$, se dice que son linealmente independientes, si una combinación lineal de ellos, nula,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + ... + \alpha_n u_n = 0 \qquad \text{donde } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$$

implica que todos los α_i son iguales a cero.

(2) Los vectores, *u* y *v*, son linealmente independientes si

$$\alpha u + \beta v = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

$$\alpha(2,-1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

luego los vectores son linealmente independientes.

(3) El vector $w = (8, -5, t)$ depende linealmente de *u* y *v*, si existe α y β ∈ ℝ, tal que

$$(8,-5,t) = \alpha(2,-1,0) + \beta(1,0,1) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta = 8 \\ -\alpha = -5 \\ \beta = t \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, discutiendo y resolviéndolo mediante Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, los elementos de la diagonal principal son distintos de cero; la última ecuación puede verificarse o no.

* Si es trivial, es decir, si se verifica que $0 = t+2 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado con solución única, y por tanto existen un valor para α y otro para β; y el vector *w* dependerá linealmente de *u* y *v*.

* Si la última ecuación es absurda, es decir, si $t \neq -2$, entonces no existen valores para α ni para β; y el vector *w* no dependerá linealmente de *u* y *v*.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Estudiemos la posición relativa de los tres planos, expresando el sistema formado por las ecuaciones de dichos planos en forma matricial y lo discutiremos mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (a-1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & -a^2+2a \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que se presentan.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \Rightarrow a=2$ y $a=1 \Rightarrow$

** Si $a=2$, la última ecuación sería, $0=0$, que es trivial y se elimina; nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, los tres planos se cortan en una recta.

** Si $a=1$, la última ecuación sería, $0=1$, que es absurda y en consecuencia es un sistema incompatible, no tiene solución, o sea, los tres planos no tienen ningún punto en común.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ la última ecuación no es trivial ni absurda, el sistema tendrá tres ecuaciones y tres incógnitas, será compatible determinado, con solución única, luego los tres planos se cortan en un punto.

(2) Sustituyamos "a" por el valor -1, en el sistema triangulado anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 6 · [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado. La solución es, $x=0$, $y= -3/2$, $z=-1/2$.
El punto donde se cortan los tres planos es el $(0, -3/2, -1/2)$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 6 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función *f* definida para $x \neq 0$ por la relación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x}$$

(1) Halla sus asíntotas.
(2) Determina sus extremos locales.
(3) Dibuja la gráfica de *f* indicando su posición respecto de las asíntotas.

EJERCICIO 2. **(1)** Dibuja la región limitada por la recta de ecuación $y=3$ y las gráficas de las funciones *f* y *g* definidas en todo $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 1 - x^2.$$

(2) Calcula el área de dicha región.

EJERCICIO 3. Resuelve la ecuación

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIO 4. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A=(1,1,2) y es paralelo a las rectas r y s dadas por:

$$r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ -x + y + 3z = 1. \end{cases}$$

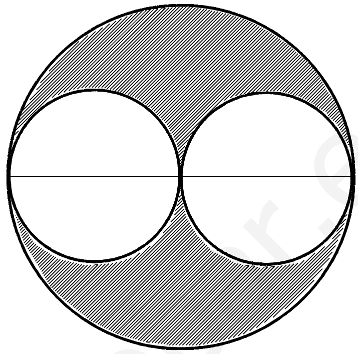
Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** Describe el procedimiento de integración por partes.

(2) Calcula

$$\int_1^e [Ln(x)]^2 \, dx.$$

(Nota: Ln(x) es el logaritmo neperiano de x.)



EJERCICIO 2. Dada una circunferencia de radio r, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a la circunferencia dada. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área de la región comprendida entre las circunferencias interiores y la exterior (la región rallada en la figura)?

EJERCICIO 3. **(1)** Halla el punto C que es la proyección ortogonal del punto B=(2,1,1) sobre el plano $\Pi : 2x + y - 2z = -6$.
(2) Halla un punto A que esté sobre el eje OX y tal que el área del triángulo ABC valga 6. ¿Cuántas soluciones existen?

EJERCICIO 4. Escribe, cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:
(1) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.
(2) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.
(3) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.
(4) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.
Razona, en cada caso, tu respuesta.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) - Asíntotas Verticales.
Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador que en nuestro caso es el 0, y que no pertenece al dominio. Veámoslo.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \frac{4}{0} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \textit{Asíntota Vertical}$$

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \Re$
Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{8x + 3}{1} = \infty$$

la indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, consistente en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro. No existe Asíntota Horizontal, pero se ha dado la condición necesaria de existencia de asíntota oblicua, que es $\lim\limits_{x \Rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- Asíntotas oblicuas.

Calculemos, si existe, la asíntota oblicua $y = \text{m}x + \text{n}$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^2 + 3x + 4}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{x} - 4x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4 - 4x^2}{x} = 3$$

hay una asíntota oblicua $y = 4x + 3$.

(2) Los extremos locales de la función racional *f(x)* hay que buscarlos entre los valores que anulen a la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(8x + 3)x - (4x^2 + 3x + 4)}{x^2} = \frac{4x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nearrow x = 1 \\ \searrow x = -1 \end{cases}$$

sustituyamos estos valores en la segunda derivada para distinguir si son máximos o mínimos locales; según la hagan mayor o menor que cero serán mínimos o máximos.

$$f''(x) = \frac{8x \cdot x^2 - (4x^2 - 4)2x}{x^4} = \frac{8x}{x^4} \Rightarrow \begin{cases} \nearrow f''(1) = \frac{8}{1^4} > 0 \quad \textit{mínimo} \\ \searrow f''(-1) = \frac{-8}{(-1)^4} < 0 \quad \textit{máximo} \end{cases}$$

Obtengamos las ordenadas de estos extremos locales

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} \Rightarrow \begin{cases} \nearrow f(1) = \frac{4 + 3 + 4}{1} = 11 \\ \searrow f(-1) = \frac{4 - 3 + 4}{-1} = -5 \end{cases}$$

Las coordenadas del máximo relativo son (-1, -5) y las del mínimo relativo (1, 11).

(3) Antes de dibujar la gráfica veamos la posición de las asíntotas respecto a ella.

-- Posición respecto de la asíntota vertical, $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x > 0}} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \frac{+4}{+0} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} \frac{4x^2 + 3x + 4}{x} = \frac{+4}{-0} = -\infty \end{cases}$$

es decir, la función *f(x)* tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$, y a $-\infty$ cuando $x \to 0^-$.

-- Posición respecto de la asíntota horizontal, $y = 4x + 3$.

* Para valores de x muy pequeños, por ej.:

$$x=-100 \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nearrow\ f(-100)=\frac{40000-300+4}{-100} = -397´04 \\ \searrow\ y_{asíntota}(-100) = -400+3 = -397 \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(-100) < y_{asíntota}$$

es decir, la gráfica de la función queda por debajo de la asíntota cuando $x \to -\infty$

* Para valores de x muy grandes, por ej.:

$$x=100 \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nearrow\ f(100)=\frac{40000+300+4}{100} = 403´04 \\ \searrow\ y_{asíntota}(100) = 400+3 = 403 \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(100) > y_{asíntota}$$

es decir, la gráfica de la función queda por encima de la asíntota cuando $x \to +\infty$

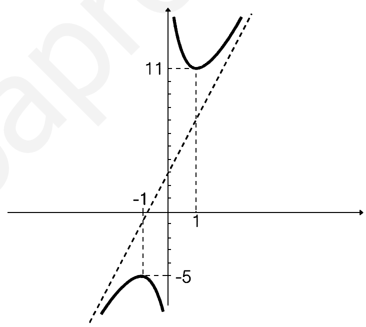
-- Puntos de corte de la gráfica de la función con la asíntota oblicua, $y = 4x + 3$.

Se resuelve el sistema formado por la función y la ecuación de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x+3 \\ y = \dfrac{4x^2+3x+4}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 4x+3 = \frac{4x^2+3x+4}{x} \ \Rightarrow \ 4x^2+3x = 4x^2+3x+4 \ \Rightarrow \ 0 = 4$$

ecuación absurda, luego no hay puntos de corte con la asíntota horizontal.

-- La gráfica aproximada de la función, teniendo en cuenta todos los resultados obtenidos anteriormente, es la situada al lado.



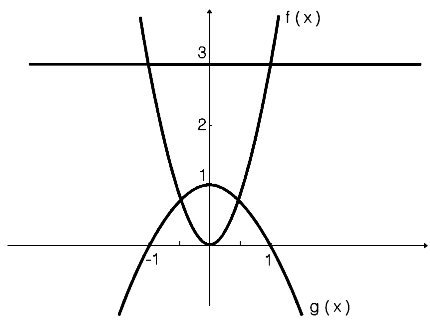
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) La función $y = 3$ es una recta paralela al eje de abscisas.

Para dibujar la gráfica de $f(x) = 3x^2$, que es una parábola, calcularemos los puntos de corte con los ejes de abscisas y de ordenadas, así como el vértice V.

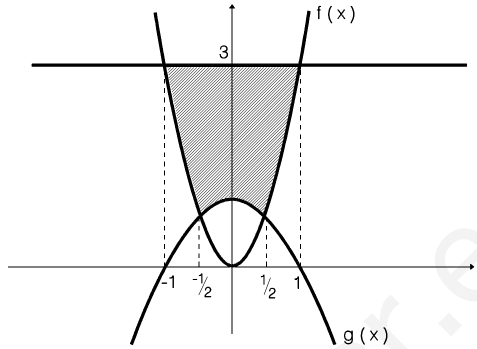
* Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \ \Rightarrow \ f(0) = 4 \ \Rightarrow$ A(0, 0).
* Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \ \Rightarrow \ x=0 \ \Rightarrow$ A(0, 0).
* Coordenadas del vértice V:
 $x = -b/2a = 0/6 = 0 \ \Rightarrow \ f(0)=0 \ \Rightarrow$ V(0, 0).
* Otro punto orientativo podría ser:
 $x = 1 \ \Rightarrow \ f(1) = 3 \ \Rightarrow$ B(1, 3).

-- Representemos la función $g(x) = 1 - x^2$.



* Punto de corte con el eje de ordenadas:
 $x = 0 \ \Rightarrow \ g(0) = 1 \ \Rightarrow$ C(0, 1).
* Puntos de corte con el eje de abscisas:
 $y = 0 \ \Rightarrow \ x=1;\ x=-1 \ \Rightarrow$ D(1, 0); E(-1, 0).
* Coordenadas del vértice V´:
 $x = -b/2a = 0/(-2) = 0 \ \Rightarrow \ g(0)=1 \ \Rightarrow$ V´(0,1)

La región limitada por las tres gráficas anteriores es la situada al lado



(2) Calculemos los puntos de corte de las funciones *f(x)* y *g(x)*

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow$$

$$4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

Calculemos los puntos de corte de las funciones *f(x)* e $y = 3$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Teniendo en cuenta que las funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas, basta calcular la mitad del área de la región limitada por las tres curvas, es decir:

$$\frac{1}{2}\,Área = \int_0^1 3\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 3x^2\,dx = \left[3x\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} - \left[x^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= (3-0) - \left[\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} - 0\right] - \left[1 - (1/2)^3\right] = 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - 1 + \frac{1}{8} = \frac{5}{3}$$

El área pedida es el doble de la anterior, o sea, $\dfrac{10}{3}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Hagamos uso de las propiedades de los determinantes.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos el determinante por los adjuntos de la última fila.

$$2x \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(-4x^2+2x-6x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(-4x^2-4x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-8x^2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nearrow\ -8x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \qquad raíz\ doble \\ \searrow\ x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \end{array}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para determinar la ecuación del plano, necesitamos un punto, el A = (1,1,2), y dos vectores de dirección, uno será el de la recta r, $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, y el otro el de la recta s, que al venir su ecuación expresada como intersección de dos planos, su vector de dirección lo obtendremos mediante el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que definen a s.

$$\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2,-1,1)\times(-1,1,3) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4,-7,1)$$

la ecuación del plano, en forma paramétrica será:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda - 4\mu \\ y = 1 + \lambda - 7\mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Describamos el método de la integración por partes.

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, *u(x)* y *v(x)* es:

$$D\left[u(x)\cdot v(x)\right] = v(x)\cdot u'(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

expresemos la fórmula anterior en notación diferencial.

$$d\left[u(x)\cdot v(x)\right] = v(x)\cdot du(x) + u(x)\cdot dv(x)$$

despejemos el último sumando.

$$u(x)\cdot dv(x) = d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - v(x)\cdot du(x)$$

integremos los dos miembros de la igualdad

$$\int u(x)\cdot dv(x) = \int d\left[u(x)\cdot v(x)\right] - \int v(x)\cdot du(x)$$

teniendo en cuenta que la integral de la diferencial de una función es la propia función, nos quedará:

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$$

que más abreviadamente podemos expresar así:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

(2) Calculemos la integral siguiente por el método de integración por partes.

$$\int_1^e [Ln(x)]^2\, dx = \qquad [1]$$

$$u = Ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = Ln(x)\,dx \quad ; \quad v = \int Ln(x)\,dx = x\,Ln(x) - \int dx = x\,Ln(x) - x$$

esta última integral se ha hecho a su vez por partes, es decir,

$$u = Ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

continuando en [1], tendremos:

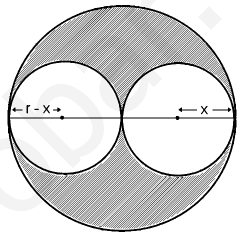
$$= \left[Ln(x)\cdot(x\,Ln(x) - x)\right]_1^e - \int_1^e (x\,Ln(x) - x)\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left[x\,[Ln(x)]^2 - x\,Ln(x)\right]_1^e - \int_1^e Ln(x)\,dx + \int_1^e dx =$$

$$= \left[e\,[Ln(e)]^2 - e\,Ln(e)\right] - [(Ln(1))^2 - Ln(1)] - [x\,Ln(x) - x]_1^e + [x]_1^e =$$

$$= e - e - 0 - [e\,Ln(e) - e - (Ln(1) - 1)] + (e-1) = -[e - e - (-1)] + (e-1) = e - 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



El diámetro de la circunferencia es 2r, el de una de las circunferencias tangentes interiores, 2*x*, y el de la otra 2r-2*x*. Luego, los radios de estas dos circunferencias serán, *x* y r-*x*, respectivamente.

Construyamos la función área rayada.

$A(x) = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi(r-x)^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi r^2 - \pi x^2 + 2\pi r x \quad \Rightarrow$

$A(x) = -2\pi x^2 + 2\pi r x$, función cuyo dominio es: Dom $f(x) =]0, r[$.

Calculemos el valor de *x* que hace máxima esta área.

$A'(x) = -4\pi x + 2\pi r \quad \Rightarrow \quad -4\pi x + 2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + r = 0 \quad \Rightarrow \quad x = r/2$

Estudiemos la monotonía de *A(x)*, que es una función continua y derivable en su dominio, probando con valores intermedios de los intervalos]0, r/2[y]r/2, r[en la primera derivada:

$A'(r/4) = -4\pi(r/4) + 2\pi r = \pi r > 0 \quad \Rightarrow \quad A'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad A(x)$ es creciente en]0, r/2[

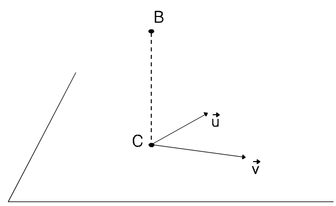
$A'(3r/4) = -4\pi(3r/4) + 2\pi r = -\pi r < 0 \quad \Rightarrow \quad A'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad A(x)$ es decreciente en]r/2, r[

luego hay un máximo relativo en $x = r/2$, que es a su vez absoluto.

El diámetro de una de las circunferencias tangentes interiores es: $2x = 2(r/2) = r$

y el de la otra circunferencia: $2r - 2x = 2r - 2(r/2) = 2r - r = r$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



(1) Expresemos la ecuación del plano en forma paramétrica. Se trata de resolver una ecuación con tres incógnitas, será pues un sistema compatible indeterminado biparamétrico, por tanto, basta despejar una incógnita, por ejemplo, la *y*, en función de las demás, *x* y *z*, que pasan a ser parámetros:

$$\Pi : 2x + y - 2z = -6 \quad \Rightarrow \quad y = -6 - 2x + 2z \quad \Rightarrow \quad \Pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -6 - 2\lambda + 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Los vectores de dirección del plano Π, son: $\vec{u} = (1, -2, 0)$; $\vec{v} = (0, 2, 1)$

Teniendo en cuenta que el punto C es un punto genérico del plano, que tiene de coordenadas $(\lambda, -6-2\lambda+2\mu, \mu)$, el vector que determinan los puntos B y C es

$$\vec{BC} = (\lambda, -6-2\lambda+2\mu, \mu) - (2, 1, 1) = (\lambda-2, -7-2\lambda+2\mu, \mu-1)$$

vector que es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego el producto escalar con cada uno de ellos es cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{BC} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{BC}\cdot\vec{u}=0 \;\Rightarrow\; (\lambda-2,\ -7-2\lambda+2\mu,\ \mu-1)\cdot(1,\ -2,\ 0)=0 \\ \vec{BC} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{BC}\cdot\vec{v}=0 \;\Rightarrow\; (\lambda-2,\ -7-2\lambda+2\mu,\ \mu-1)\cdot(0,\ 2,\ 1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda-2+14+4\lambda-4\mu=0 \\ -14-4\lambda+4\mu+\mu-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\lambda-4\mu=-12 \\ -4\lambda+5\mu=15 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -12 \\ -4 & 5 & 15 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$. Sustituyamos la 2ª fila por: $5\cdot$[2ªf.] + $4\cdot$[1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -12 \\ 0 & 9 & 27 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 2ª fila por 9.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente. Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$. Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + $4\cdot$[2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado. La solución es: $\lambda = 0$; $\mu = 3$.

Las coordenadas del punto C son: $(\lambda,\ -6-2\lambda+2\mu,\ \mu) = (0,\ 0,\ 3)$

(2) Si el punto A está sobre el eje OX tendrá de coordenadas genéricas (a, 0, 0). Calculemos las coordenadas de los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{BC}$

$$\vec{BA} = (a,\ 0,\ 0) - (2,\ 1,\ 1) = (a-2,\ -1,\ -1)$$
$$\vec{BC} = (0,\ 0,\ 3) - (2,\ 1,\ 1) = (-2,\ -1,\ 2)$$

El área del triángulo ABC, que es 6, se obtendrá del modo siguiente:

$$\vec{BA}\times\vec{BC} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-3,\ -2a+6,\ -a)$$

$$Área = \frac{1}{2}\,|\vec{BA}\times\vec{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-2a+6)^2+(-a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+4a^2+36-24a+a^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{5a^2-24a+45}$$

igualando a 6 esta última expresión del área, tendremos

$$\frac{1}{2}\sqrt{5a^2-24a+45} = 6 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2}\sqrt{5a^2-24a+45}\right)^2 = 6^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}(5a^2-24a+45) = 36$$

$$5a^2-24a+45=144 \;\Rightarrow\; 5a^2-24a-99=0 \;\Rightarrow\; a = \frac{24\pm\sqrt{24^2+4\cdot5\cdot99}}{10} = \begin{array}{l} \nearrow\ -2´65568 \\ \searrow\ 7´45568 \end{array}$$

hay por tanto dos puntos el A_1 = (-2´65568, 0, 0) y el A_2 = (7´45568, 0, 0).

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones puede ser, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{array}\right\}$$

Para que un sistema tenga infinitas soluciones debe ser compatible e indeterminado, en este caso, al ser un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas una de éstas debe actuar como parámetro, por lo que al utilizar el método reductivo de Gauss, sólo quedaría una ecuación con una incógnita principal, es decir, las otras dos ecuaciones deben ser triviales, o lo que es lo mismo, proporcionales a aquella.

(2) No puede existir ningún sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado, porque para que lo sea, el número de ecuaciones y el de incógnitas una vez usado el método reductivo de Gauss deben coincidir, en este caso jamás puesto que las incógnitas seguirán siendo tres y las ecuaciones nunca podrán ser tres sino como máximo dos.

(3) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución, debe tratarse de un sistema incompatible, es decir, al usar el método reductivo de Gauss ha de salir una ecuación absurda, lo que implica que al menos los coeficientes de una de las ecuaciones tienen que ser proporcionales a los de otra y no deben serlo los términos independientes. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + 5y + 7z = 4 \\ 3y + 4z = 7 \\ 6y + 8z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$$

(4) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única, tiene que ser un sistema que al utilizar el método reductivo de Gauss, una vez triangulado el sistema, todos los elementos de la diagonal principal sean distintos de cero, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + 5y + 7z = 4 \\ 3y + 4z = 7 \\ 9z = 1 \end{array}\right\}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 7 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Determina el valor de la constante k sabiendo que la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$$

posee una asíntota que pasa por el punto (1,3).

EJERCICIO 2. **(1)** Dibuja la región limitada por las curvas de ecuaciones

$$y^2 = x \qquad \text{e} \qquad y = |x - 2|.$$

(2) Calcula el área de dicha región.

EJERCICIO 3. Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos - digamos A, B y C - que demandan toda su producción. En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿Cuántas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana?

EJERCICIO 4. **(1)** Determina la ecuación del plano que contiene al punto P=(2,0,1) y a la recta r de ecuaciones

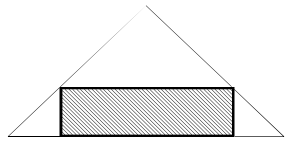
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$$

(2) Calcula el ángulo que forman el plano calculado en el apartado anterior y la recta s de ecuaciones

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Opción B

EJERCICIO 1. Dado un triángulo isósceles de base 8 cm. y altura 5 cm., calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse dentro de dicho triángulo como se indica en la figura.



EJERCICIO 2. **(1)** Define el concepto de derivada de una función en un punto.
(2) Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^x$.
(3) Siendo f la función dada en el apartado anterior, calcula

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

EJERCICIO 3. Del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= 0,\\ a_{21}x + a_{22}y &= 0, \end{aligned}$$

se conocen todas sus soluciones, que son $x=\lambda$, $y=2\lambda$ con λ variando en los números reales. También se sabe que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= 1,\\ a_{21}x + a_{22}y &= 2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4. Calcula, de manera razonada, un plano que sea paralelo al plano de ecuación $x + y + z = 1$ y determine con los ejes coordenados un triángulo cuya área sea $18\sqrt{3}$.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Determinemos las asíntotas de la curva cuya ecuación nos dan.

Al ser una función racional las asíntotas verticales hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ no hay ningún valor que anule, luego no hay asíntotas verticales.

Habrá asíntota horizontal si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, siendo $b\in\mathbb{R}$. Comprobémoslo.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1} = \infty$$

luego tampoco hay asíntota horizontal, sólo puede haber asíntota oblicua. Calculémosla.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+kx^2+1}{(x^2+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+kx^2+1}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+kx^2+1}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+kx^2+1-x^3-x}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{kx^2+1-x}{x^2+1} = k$$

la asíntota oblicua, $y = mx + n$, es: $y = x + k$; como además el ejercicio nos dice que pasa por el punto (1, 3), sustituyamos estas coordenadas en dicha ecuación:

$$3 = 1 + k \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad y = x + 2.$$

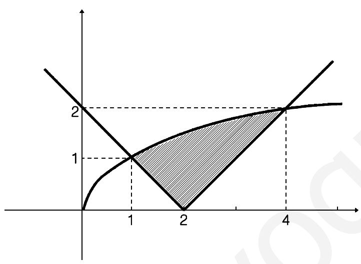
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Dibujemos la función $y^2 = x$, o lo que es lo mismo, $y = \sqrt{x}$, que es una rama de parábola cuyo eje es el eje de abscisas. Basta con una pequeña tabla de valores para dibujar aproximadamente dicha curva.

x	y
1	1
4	2

Para dibujar la curva $y = |x-2|$, desdoblaremos esta función valor absoluto de la siguiente forma

$$y = |x-2| = \begin{cases} -(x-2) & si \quad x-2<0 \\ x-2 & si \quad x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2 & si \quad x<2 \\ x-2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$



que es una función lineal a trozos, y para dibujarla necesitamos sólo dos puntos de cada uno de los trozos.

x	y
1	1
2	0

x	y
2	0
4	2

La región limitada por ambas gráficas es la situada al lado.

(2) Para obtener el área de la región anterior, calculemos previamente los puntos de corte de cada uno de los trozos lineales con la función $y^2 = x$.

$$\left.\begin{matrix} y^2 = x \\ y = -x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-x+2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} y^2 = x \\ y = x-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

El área de la región vendrá dada por las siguientes integrales

$$Área = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx - \int_1^2 (-x+2)dx - \int_2^4 (x-2)dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 - \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{4^{3/2}}{3/2} - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + 4 - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \right) - (8 - 8 - (2-4)) = \frac{13}{6}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos x a las unidades que solicitó el establecimiento A, y a las del B y z a las que pidió el establecimiento C. Estableceremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ x=y+z \\ y=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}z\right)+\frac{20}{100}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}z\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ x-y-z=0 \\ 600y=300x+200z+60x+40z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=42 \\ x-y-z=0 \\ -9x+15y-6z=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el procedimiento reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -9 & 15 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 9 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & -2 & -2 & -42 \\ 0 & 24 & 3 & 378 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 12 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & -2 & -2 & -42 \\ 0 & 0 & -21 & -126 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -2.
Simplifiquemos la 3ª fila por -21.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, es un sistema compatible determinado. Las unidades que cada establecimiento pidió fueron:

$$x = 21 \quad ; \quad y = 15 \quad ; \quad z = 6.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Del plano que nos piden conocemos un punto, el P = (2, 0, 1), y que contiene a la recta r, luego conocemos otro punto, el A = (1, -3, 2), y un vector de dirección del plano que coincidirá con el de la recta, $\vec{u}_r = (2, 1, 3)$. Necesitamos otro vector de dirección del plano que puede ser el vector que determinan los puntos A y P:

$$\vec{AP} = (2, 0, 1) - (1, -3, 2) = (1, 3, -1)$$

luego la ecuación del plano es

$$\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -3 + \lambda + 3\mu \\ z = 2 + 3\lambda - \mu \end{array}$$

(2) Para obtener el ángulo que forman el plano anterior y la recta *s*, calculemos primero el vector normal al plano mediante el producto vectorial de sus dos vectores de dirección:

$$\vec{n}_\pi = (2,\ 1,\ 3)\times(1,\ 3,\ -1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-10,\ 5,\ 5)$$

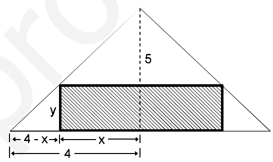
Como el vector de dirección de la recta *s* es $\vec{v}_s = (3,\ 2,\ -1)$, tendremos:

$$sen(\widehat{s,\pi}) = \cos(\widehat{\vec{v}_s, \vec{n}_\pi}) = \left| \frac{(3,2,-1)\cdot(-10,5,5)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\ \sqrt{(-10)^2+5^2+5^2}} \right| = \left| \frac{-25}{\sqrt{14}\sqrt{150}} \right| = \frac{5}{2\sqrt{21}}$$

$$(\widehat{s,\pi}) = \mathrm{arc}\, sen\ \frac{5}{2\sqrt{21}} = 33°\ 03´\ 42.83´´$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Si la base del rectángulo es *2x*, y la altura y, se verificará:

$$\frac{5}{y} = \frac{4}{4-x} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{20-5x}{4} \quad\Rightarrow\quad y = 5 - \frac{5}{4}x$$

Construyamos la función área del rectángulo:

$$Área = 2x\cdot y = 2x\left(5 - \tfrac{5}{4}x\right) \quad\Rightarrow\quad A(x) = 10x - \frac{5}{2}x^2,$$ siendo Dom *A(x)* =]0, 4[

Calculemos el valor o valores que hacen máxima esta función.

$$A´(x) = 10 - 5x \quad\Rightarrow\quad 10 - 5x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 2$$

Estudiemos la monotonía de *A(x)*, que es una función continua y derivable en su dominio, probando con valores intermedios de los intervalos]0, 2[y]2, 4[en la primera derivada:

A´(1) = 10 - 5 = 5 > 0 ⇒ *A´(x)* > 0 ⇒ *A(x)* es creciente en]0, 2[

A´(3) = 10 - 15 = -5 < 0 ⇒ *A´(x)* < 0 ⇒ *A(x)* es decreciente en]2, 4[

luego hay un máximo relativo en *x*= 2, que es a su vez absoluto.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

base = 2*x* = 4; altura $= y = 5 - \frac{5}{4}x = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) La función *f(x)* es derivable en un punto x_0 de su dominio si el

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe y es finito. A dicho límite se le llama derivada de *f(x)* en el punto x_0, y se le representa, entre otras, con la notación $f\,´(x_0)$.

(2) Expresemos, en primer lugar, la función *f(x)* como una función a trozos.

$$f(x) = |x|\,e^x = \begin{cases} -x\,e^x & si\ \ x<0 \\ x\,e^x & si\ \ x\ge 0 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad de la función. Para que una función sea continua en un punto, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto deben coincidir; y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del mismo.

- La función *f(x)*, para valores de $x<0$, es continua por ser el producto de una función polinómica, $-x$, y de la exponencial elemental, e^x, que son continuas en todo ℝ.

- La función *f(x)*, para valores de $x>0$, es continua por la misma razón anterior

- Donde hay que hacer un estudio detenido es en el punto 0, porque hay un cambio en el comportamiento de la función. Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (-x\,e^x) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} (x\,e^x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Como los límites laterales y el valor de la función coinciden, la función será continua en $x=0$. En resumen, la función es continua en todo ℝ.

Analicemos ahora la derivabilidad.

- La función *f(x)*, para valores de $x<0$, es derivable por ser el producto de la función polinómica, $-x$, y de la exponencial, e^x, que son derivables en todo ℝ.

- La función *f(x)*, para valores de $x>0$, es derivable por la misma razón anterior

- Donde hay que hacer un estudio detenido es en el punto 0. Para que la función *f* sea derivable en el punto 0, necesariamente debe ser continua en $x=0$, que lo es, y además las derivadas laterales deben coincidir.

Obtengamos una primera aproximación de la función derivada, para todos aquellos valores de *x* donde ya sabemos que es derivable, es decir en todo ℝ, excepto en el punto 0 que es donde queremos averiguarlo:

$$f(x) = \begin{cases} -x\,e^x & si \;\; x<0 \\ x\,e^x & si \;\; x\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} -e^x - xe^x & si \;\; x<0 \\ e^x + xe^x & si \;\; x>0 \end{cases} \qquad [1]$$

calculemos las derivadas laterales en el punto 0:

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-e^x - xe^x) = -1 - 0 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x + xe^x) = 1 + 0 = 1$$

como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en 0, luego la función derivada coincide con la que aparece en [1].

(3)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,e^x\,dx$$

calculemos la integral por el método de integración por partes

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^x\,dx \quad ; \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[x\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Sustituyamos las soluciones $x=\lambda$ e $y=\mu$, en el sistema

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_{11}\lambda + a_{12}2\lambda = 0 \\ a_{21}\lambda + a_{22}2\lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_{11} + 2a_{12} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \quad [1]$$

hemos obtenido dos ecuaciones con cuatro incógnitas, pero como también sabemos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a_{11} + a_{12} = 1 \\ 2a_{21} + a_{22} = 2 \end{matrix}\right\} \quad [2]$$

obtenemos otras dos nuevas ecuaciones que con las de [1] formamos un sistema:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} + 2a_{12} & & = 0 \\ & a_{21} + 2a_{22} & = 0 \\ 2a_{11} + a_{12} & & = 1 \\ & 2a_{21} + a_{22} & = 2 \end{matrix}\right|$$

Expresemos el sistema en forma matricial, intercambiando previamente las ecuaciones 2ª y 3ª. Resolveremos por el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{44} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + 2 · [4ªf.]
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:
$a_{11} = 2/3$; $a_{12} = -1/3$; $a_{21} = 4/3$; $a_{22} = -2/3$.
Resolvamos finalmente el sistema siguiente después de sustituir los coeficientes por los valores recién hallados.

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{matrix}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y resolvamos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última ecuación es trivial, se elimina, nos queda un sistema de una sola ecuación con dos incógnitas, es por tanto, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita secundaria *"y"* la pasamos al

$\left(2 \;\middle|\; 3+y\right)$ segundo miembro como parámetro.

La solución es:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu \\ y = \mu \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Un plano paralelo al $x + y + z = 1$ será de la forma, $x + y + z + D = 0$, es decir, un plano con un vector normal, (1, 1, 1), igual (o proporcional) al primero.

Para calcular el punto en que este plano corta al eje OX, resolvemos el sistema formado por la ecuación del plano y la ecuación del eje OX

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + D = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -D \quad \Rightarrow \quad C(-D,\ 0,\ 0)$$

El punto de corte con el eje OY, será

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -D \quad \Rightarrow \quad B(0,\ -D,\ 0)$$

El punto de corte con el eje OZ, será

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -D \quad \Rightarrow \quad A(0,\ 0,\ -D)$$

Calculemos los siguientes vectores

$$\vec{AB} = (0,\ -D,\ 0) - (0,\ 0,\ -D) = (0,\ -D,\ D)$$
$$\vec{AC} = (-D,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ -D) = (-D,\ 0,\ D)$$

obtengamos el producto vectorial de ambos vectores

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} -D & D \\ 0 & D \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 0 & D \\ -D & D \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & -D \\ -D & 0 \end{vmatrix} \right) = (-D^2,\ -D^2,\ -D^2)$$

ya que el área del triángulo ABC es

$$Área = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-D^2)^2 + (-D^2)^2 + (-D^2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3D^4} = \frac{\sqrt{3}}{2}D^2$$

igualando a $18\sqrt{3}$, tendremos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}D^2 = 18\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad D^2 = 36 \qquad \Rightarrow \qquad D = \pm 6$$

luego hay dos posibles planos, uno sería

$$x + y + z + 6 = 0$$

y el otro

$$x + y + z - 6 = 0.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 8 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-2)\,e^x$.

(1) Determina los intervalos en los que la función f es creciente.

(2) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones

$$x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = 3.$$

(3) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. Una cierta función p se define como el cociente de dos funciones derivables f y g, es decir, $p(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. En un punto a de su dominio la función p tiene un mínimo relativo y sabemos que $f'(a) = 6$ y $g'(a) = 2$. ¿Puedes obtener el valor de $p(a)$? Razona tu respuesta

EJERCICIO 3. Sabiendo que la matriz A verifica la relación

$$A + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4. Considera el tetraedro formado por el origen de coordenadas y los tres puntos en los que el plano Π: $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados.

(1) Describe un procedimiento para hallar el volumen del tetraedro y calcula efectivamente su valor.

(2) Calcula razonadamente las coordenadas del punto simétrico al origen de coordenadas respecto del plano Π.

Opción B

EJERCICIO 1. Una locomotora sale de una estación y viaja durante una hora a lo largo de una trayectoria rectilínea. La velocidad de la locomotora al cabo de *t* horas viene dada, en km./h, por la fórmula

$$v(t) = 400t^3 - 1200t^2 + 800t \qquad (0 \le t \le 1).$$

(1) Calcula el espacio total que recorre la locomotora.
(2) Determina la velocidad máxima que alcanza la locomotora y el instante en el que lo hace.

EJERCICIO 2. Considera la función valor absoluto; es decir, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.
(1) Estudia la derivabilidad de *f*.
(2) Dibuja la gráfica d *f*.
(3) Halla $\int_{-2}^{2} |x| \, dx$.

EJERCICIO 3. Considera los puntos P=(1,1,1) y Q=(-1,-1,2).
(1) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del punto P que del punto Q.
(2) Halla la ecuación del plano que corta perpendicularmente y en su punto medio al segmento que une los puntos P y Q.

EJERCICIO 4. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Comprueba que se verifica $A^2-2A+I=0$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
(2) Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^4.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Para determinar los intervalos en los que la función es creciente, hallemos la función primera derivada, sabiendo que se trata de una función continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x-2)\,e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x + (x-2)\,e^x = e^x + xe^x - 2e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = xe^x - e^x$$

calculemos los valores que hacen cero a la derivada primera

$$xe^x - e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)\,e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

con este valor construimos los dos posibles intervalos de monotonía, $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$, probemos ahora un valor intermedio de cada uno de estos intervalos en la primera derivada y según sea ésta mayor o menor que cero, la función en el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$f\,'(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$

$f\,'(2) = 2 \cdot e^2 - e^2 = e^2 > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en el intervalo $(1, \infty)$

(2) Para poder dibujar la gráfica, calculemos lo siguiente

- Punto de corte con el eje de ordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-2)e^x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = (0-2)e^0 = -2 \quad \Rightarrow \quad A = (0, -2)$$

- Punto de corte con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-2)e^x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = (x-2)e^x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad B = (2, 0)$$

- Según el apartado (1), en el punto de abscisa 1, al pasar la función de decreciente a creciente, existe un mínimo

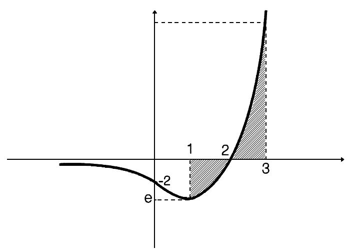
$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = (1-2)\,e^1 = -e \quad \Rightarrow \quad M = (1, -e)$$

- Calculemos, si existe, asíntota horizontal para $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x = \lim_{x\to\infty} (-x-2)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-2}{e^x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

luego hay una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \to -\infty$.

La gráfica aproximada de la función *f(x)* y de la región limitada por dicha función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$, es la situada al lado.



(3) El área de la región subrayada es:

$$Área = \left|\int_1^2 (x-2)e^x\right| + \left|\int_2^3 (x-2)e^x\right| \quad [1]$$

Calculemos antes la integral siguiente:

$$\int (x-2)e^x\,dx = \int xe^x\,dx - \int 2e^x\,dx = \int xe^x\,dx - 2e^x = \qquad [2]$$

la última integral la haremos por el método de integración por partes

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = e^x\,dx \quad ; \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

continuando en [2]

$$= xe^x - \int e^x\,dx - 2e^x = xe^x - e^x - 2e^x = xe^x - 3e^x$$

teniendo en cuenta este resultado, continuamos en [1]

$$= \left|\left[xe^x - 3e^x\right]_1^2\right| + \left|\left[xe^x - 3e^x\right]_2^3\right| = \left|2e^2 - 3e^2 - (e - 3e)\right| + \left|3e^3 - 3e^3 - (2e^2 - 3e^2)\right| =$$

$$= \left|2e - e^2\right| + \left|e^2\right| = e^2 - 2e + e^2 = 2e^2 - 2e.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función *p(x)* es el cociente de dos funciones derivables, *f(x)* y *g(x)*, entonces:

$$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad p'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad [1]$$

luego *p(x)* es derivable excepto para los valores que anulen al denominador, es decir, para los que hagan cero a la función *g(x)*.

Como *f(x)* y *g(x)* son derivables serán continuas, ya que la derivabilidad implica la continuidad, por lo que *p(x)* también es continua salvo para los valores que anulen al denominador *g(x)*.

Como en el punto "a" de su dominio, *p(x)* presenta un mínimo, eso significa que:

p (a) existe, y que p' (a) = 0.

Teniendo en cuenta [1], y que $f'(a) = 6$, $g'(a) = 2$:

$$p'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2} \Rightarrow 0 = \frac{6g(a) - 2f(a)}{[g(a)]^2} \Rightarrow 3g(a) = f(a)$$

$$p(a) = \frac{f(a)}{g(a)} \quad \Rightarrow \quad p(a) = \frac{3g(a)}{g(a)} = 3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Despejemos A de la expresión $A + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sustituyamos este valor de A en el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \end{array}\right\}$$

expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado, la solución es

$x = 3$; $y = -1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sean A, B y C cada uno de los puntos de corte del plano Π con los ejes OX. OY y OZ, respectivamente.

El volumen del tetraedro OABCD, coincide con la sexta parte del producto mixto de los vectores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$.

El punto A se obtiene resolviendo el sistema formado por la ecuación del plano y la del eje OX.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+6z-6=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad A=(3,\,0,\,0)$$

El punto B será:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+6z-6=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3y-6=0 \quad \Rightarrow \quad y=2 \quad \Rightarrow \quad B=(0,\,2,\,0)$$

El punto C se obtiene de forma similar:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+6z-6=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 6z-6=0 \quad \Rightarrow \quad z=1 \quad \Rightarrow \quad C=(0,\,0,\,1)$$

Construyamos y calculemos las coordenadas de los vectores $\vec{OA},\ \vec{OB}$ y $\vec{OC}$.

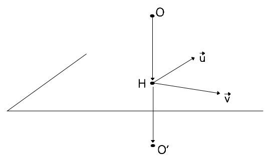
$\vec{OA}=(3,\,0,\,0)-(0,\,0,\,0)=(3,\,0,\,0)$

$\vec{OB}=(0,\,2,\,0)-(0,\,0,\,0)=(0,\,2,\,0)$

$\vec{OC}=(0,\,0,\,1)-(0,\,0,\,0)=(0,\,0,\,1)$

El volumen es:

$$Volumen=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 6\right|=1$$



(2) Llamemos O´al simétrico de O respecto del plano Π. Elijamos un punto H genérico del plano, que satisfaga lo siguiente:

El vector $\vec{OH}$ es perpendicular a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de dirección del plano, y además $\vec{OH}\equiv\vec{HO}\,'$

Para calcular los vectores de dirección del plano, expresemos la ecuación del mismo, $2x + 3y + 6z - 6 = 0$, en forma paramétrica; bastará resolver el sistema de 1 ecuación con 3 incógnitas, expresémoslo en forma matricial

$\begin{pmatrix}2 & 3 & 6 & | & 6\end{pmatrix}$ Al resolverlo por Gauss, observamos que está ya triangulado, es un sistema compatible indeterminado biparamétrico, nos sobran dos incógnitas, la y y la z, que las pasamos al segundo miembro como parámetros:

$\begin{pmatrix}2 & | & 6-3y-6z\end{pmatrix}$ Despejemos la incógnita principal, la x, y expresemos las incógnitas secundarias, y y z, como los parámetros α y β, obtendremos la ecuación del plano en forma paramétrica:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

En esta ecuación del plano leemos que sus vectores de dirección son:

$$\vec{u}=\left(-\frac{3}{2},\,1,\,0\right) \qquad ; \qquad \vec{v}=(-3,\,0,\,1)$$

Un punto genérico H del plano tendrá de coordenadas: $H=\left(3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)$

Construyamos el vector $\vec{OH}$

$$\vec{OH}=\left(3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)-(0,0,0)=\left(3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)$$

e impongamos la condición que dijimos al principio, de que el vector $\vec{OH}$ es perpendicular a los vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano, luego los productos escalares del vector $\vec{OH}$ con cada uno de dichos vectores de dirección será cero:

$$\begin{cases} \vec{OH}\cdot\vec{u} = \left(3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)\cdot\left(-\frac{3}{2},\ 1,\ 0\right) = 0 \\ \vec{OH}\cdot\vec{v} = \left(3-\frac{3}{2}\alpha-3\beta,\ \alpha,\ \beta\right)\cdot(-3,\ 0,\ 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\alpha+\frac{9}{2}\beta+\alpha = 0 \\ -9+\frac{9}{2}\alpha+9\beta+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{13}{4}\alpha+\frac{9}{2}\beta = \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2}\alpha+10\beta = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13\alpha+18\beta = 18 \\ 9\alpha+20\beta = 18 \end{cases}$$

Pongamos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13 & 18 & 18 \\ 9 & 20 & 18 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos la matriz.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 13 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 13 · [2ªf.] - 9 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13 & 18 & 18 \\ 0 & 98 & 72 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13 & 18 & 18 \\ 0 & 49 & 36 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 49 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 49 · [1ªf.] - 18 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 637 & 0 & 234 \\ 0 & 49 & 36 \end{array}\right)$$

Nos quedan dos ecuaciones y dos incógnitas. Es un sistema compatible determinado. Despejemos las incógnitas α y β.
La solución será:

$$\begin{cases} 637\alpha = 234 \\ 49\beta = 36 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{234}{637} = \frac{18}{49} \quad ; \quad \beta = \frac{36}{49}$$

Sustituyamos α y β en las coordenadas del punto H y en las del vector $\vec{OH}$.

El punto H tendrá de coordenadas: $H\left(3-\frac{3}{2}\cdot\frac{18}{49}-3\cdot\frac{36}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right) = \left(\frac{12}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right)$
y el vector $\vec{OH}$ será:

$$\vec{OH} = \left(\frac{12}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right)$$

Sea O´(a, b, c) el punto simétrico del O respecto del plano Π, las coordenadas del vector $\vec{HO'}$ serán: $\vec{HO'} = (a,\ b,\ c)-\left(\frac{12}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right) = \left(a-\frac{12}{49},\ b-\frac{18}{49},\ c-\frac{36}{49}\right)$

se verificará que $\vec{OH} \equiv \vec{HO'} \Rightarrow \left(\frac{12}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{36}{49}\right) = \left(a-\frac{12}{49},\ b-\frac{18}{49},\ c-\frac{36}{49}\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{12}{49} = a-\frac{12}{49} \\ \frac{18}{49} = b-\frac{18}{49} \\ \frac{36}{49} = c-\frac{36}{49} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{24}{49} \\ b = \frac{36}{49} \\ c = \frac{72}{49} \end{cases}$$

Luego el punto O´ simétrico del O respecto del plano Π será:

$$O'\left(\frac{24}{49},\ \frac{36}{49},\ \frac{72}{49}\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Sabemos que la velocidad viene dada por la expresión: $v(t)=\dfrac{ds}{dt}$, y que el espacio total recorrido por la locomotora al cabo de una hora coincide con el área encerrada por la curva *v(t)*, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos de abscisas *x*=0 y *x*=1, es decir,

$$s=\int_0^1 v(t)\,dt$$

Nos ayudaremos de la gráfica de *v(t)*, que es una función polinómica de grado tres.

- Puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} v=400t^3-1200t^2+800t \\ v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 400t^3-1200t^2+800t=0 \quad \Rightarrow$$

$$t(400t^2-1200t+800)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ 400t^2-1200t+800=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \end{cases}$$

los puntos son el (0, 0), (1, 0) y el (2, 0).

- Punto de corte con el eje de ordenadas: (0, 0).

- Crecimiento y decrecimiento.

La función primera derivada es: $v'(t) = 1200t^2 - 2400t + 800$.

Calculemos los valores que anulan a esta derivada.

$$1200t^2-2400t+800=0 \Rightarrow 3t^2-6t+2=0 \Rightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6} \Rightarrow \begin{cases} t=1+\frac{\sqrt3}{3} \\ t=1-\frac{\sqrt3}{3} \end{cases}$$

los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento son:

$$\left(-\infty,\ 1-\frac{\sqrt3}{3}\right),\ \left(1-\frac{\sqrt3}{3},\ 1+\frac{\sqrt3}{3}\right)\ \ y\ \left(1+\frac{\sqrt3}{3},\ \infty\right)$$

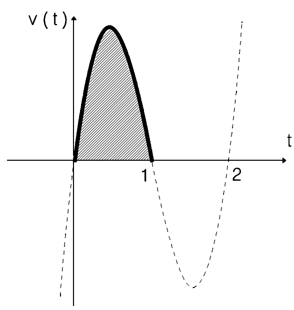
probemos ahora un valor intermedio de cada uno de estos intervalos en la primera derivada y según sea ésta mayor o menor que cero, la función en el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$v'(0) = 1200\cdot0 - 2400\cdot0 + 800 = 800 > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en $\left(-\infty,\ 1-\frac{\sqrt3}{3}\right)$

$v'(1) = 1200\cdot1 - 2400\cdot1 + 800 = -400 < 0 \quad \Rightarrow$ Decreciente en $\left(1-\frac{\sqrt3}{3},\ 1+\frac{\sqrt3}{3}\right)$

$v'(2) = 1200\cdot2^2 - 2400\cdot2 + 800 = 800 > 0 \quad \Rightarrow$ Creciente en $\left(1+\frac{\sqrt3}{3},\ \infty\right)$

la gráfica aproximada es la situada al lado, en la que hemos destacado el trozo donde únicamente está definida la función *v(t)*, y subrayado el espacio total que recorre la locomotora, dicho espacio total es:



$$s=\int_0^1 (400t^3-1200t^2+800t)\,dt=$$

$$=\left[400\frac{t^4}{4}-1200\frac{t^3}{3}+800\frac{t^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=100-400+400-0=100\ km.$$

(2) Los valores que anulan a la primera derivada eran, según el apartado (1):

$$t = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y \quad t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

y según el estudio realizado en dicho apartado deducimos que en el segundo de los puntos, que es el único que nos interesa por ser el que pertenece al dominio de la función, hay un máximo relativo, ya que la función es continua y derivable y pasa de creciente a decreciente.

Los máximos absolutos se encontrarían en dicho punto o en los extremos del intervalo, pero en este caso por el análisis realizado en el apartado (1), en los extremos del intervalo la velocidad toma el valor cero, mientras que en el máximo relativo, es decir, en el instante $t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0´422649\ h$ se alcanza la velocidad máxima absoluta que es:

$$v_{max.} = 400\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 1200\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 800\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 153´960\ km/h.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Expresemos la función *f(x)* como una función lineal a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

sabemos que las funciones valor absoluto de funciones continuas son continuas, y en este caso la función valor absoluto de *x* es continua por serlo la función polinómica *x*.

Estudiemos la derivabilidad.

- Para valores de $x < 0$, la función *f(x)* se comporta como la función **-***x*, que al ser polinómica es derivable en todo $\mathbb{R}$, y por supuesto para los valores de $x < 0$. Siendo la función derivada, **-**1.

- Para valores de $x > 0$, la función *f(x)* se comporta como la función *x*, que al ser polinómica es derivable en todo $\mathbb{R}$, y por supuesto para los valores de $x > 0$. Siendo la función derivada, 1.

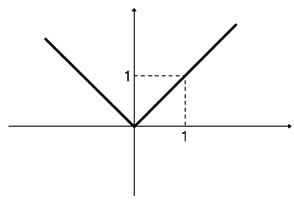
Una primera aproximación de la función derivada es:

$$f´(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \qquad [1]$$

El problema está en el punto cero, por haber un cambio en el comportamiento de la función. Al ser continua en dicho punto puede ser derivable, lo será si las derivadas laterales existen y coinciden. Veámoslo

$$f´(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f´(x) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x > 0}} 1 = 1$$

$$f´(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f´(x) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} -1 = -1$$



como las derivadas laterales no coinciden la función no es derivable en el punto cero, La función derivada finalmente es la indicada en [1].

(2) La gráfica de la función *f(x)*, teniendo en cuenta que son dos trozos de rectas elementales, es la situada un poco más arriba.

(3) Calculemos la siguiente integral.

$$\int_{-2}^{2} |x|\ dx = \int_{-2}^{0} -x\ dx + \int_{0}^{2} x\ dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 0 - \left(-\frac{4}{2}\right) + \frac{4}{2} - 0 = 4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) El lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia de P que de Q están situados en el plano mediador. Llamemos M = (a, b, c) al punto medio del segmento que determinan P y Q, se verificará $\vec{PM} = \vec{MQ}$. Calculemos el punto M.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PM} = (a,\ b,\ c) - (1,\ 1,\ 1) = (a-1,\ b-1,\ c-1) \\ \vec{MQ} = (-1,\ -1,\ 2) - (a,\ b,\ c) = (-1-a,\ -1-b,\ 2-c) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a-1,\ b-1,\ c-1) = (-1-a,\ -1-b,\ 2-c) \quad \Rightarrow \begin{cases} a-1 = -1-a & \Rightarrow \ a = 0 \\ b-1 = -1-b & \Rightarrow \ b = 0 \\ c-1 = 2-c & \Rightarrow \ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

luego el punto M es $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$.

El vector que determinan P y Q coincidirá con el vector normal al plano mediador.

$$\vec{PQ} = (-1,\ -1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ -2,\ 1)$$

La ecuación del lugar geométrico, en este caso, plano mediador, será:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x - 2y + z + D = 0$$

sustituyamos la *x*, *y* y *z*, de la última expresión por las coordenadas del punto M

$$0 - 0 + \frac{3}{2} + D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -2x - 2y + z - \frac{3}{2} = 0$$

(2) La solución es la misma que en el apartado (1).

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sustituyamos la matriz A en la expresión A^2-2A+I=0.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9-10+1 & -8+8+0 & 4-4+0 \\ 4-4+0 & -3+2+1 & 2-2+0 \\ -8+8+0 & 8-8+0 & -3+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

efectivamente se verifica la relación inicial.

(2) Partiendo de la relación anterior A^2-$2A+I=0$, calculemos A^{-1} y A^4.

$A^2 - 2A + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 2A - A^2$

sacando A factor común bien por la derecha, bien por la izquierda, tendremos:

$I = (2I - A)A$ o bien $I = A(2I - A)$

como la matriz inversa verifica que: $I = A \cdot A^{-1}$ y $I = A^{-1} \cdot A$

podemos identificar la matriz inversa, A^{-1}, como la matriz $2I - A$.

es decir, $A^{-1} = 2I - A$, aplicaremos esta relación para obtener la matriz A^{-1}.

$$A^{-1} = 2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 & 0+4 & 0-2 \\ 0-2 & 2+1 & 0-1 \\ 0+4 & 0-4 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora A^4.

Como ya teníamos calculada A^2, para obtener A^4 procederemos así:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9\cdot9+(-8)\cdot4+4(-8) & 9(-8)+(-8)(-3)+4\cdot8 & 9\cdot4+(-8)\cdot2+4(-3) \\ 4\cdot9+(-3)\cdot4+2(-8) & 4(-8)+(-3)(-3)+2\cdot8 & 4\cdot4+(-3)\cdot2+2(-3) \\ -8\cdot9+8\cdot4+(-3)(-8) & (-8)(-8)+8(-3)+(-3)\cdot8 & -8\cdot4+8\cdot2+(-3)(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 9 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \operatorname{sen}(2x)$.

(1) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

¿Qué dice el teorema fundamental del cálculo integral sobre la función F?.

(2) Halla $F(\pi)$.

EJERCICIO 2. Desde la Tierra, que suponemos situada en el origen de coordenadas del plano, se observa un objeto que sigue una trayectoria de ecuación $xy = 16$ (donde las distancias se miden en años-luz). ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la trayectoria cuya distancia a la Tierra es mínima y cuánto vale dicha distancia?

EJERCICIO 3. Sin desarrollar el determinante, demuestra que

$$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = 9b^2(a+b).$$

Enuncia las propiedades de los determinantes que utilices.

EJERCICIO 4. Una circunferencia tiene por centro el punto C=(1,0) y su diámetro es 2. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto de abscisa $x = \dfrac{3}{2}$ y ordenada positiva.

Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** Determina razonadamente la expresión algebraica de una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones siguientes

$$f(3) = \frac{9}{2}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x<3, \\ x & si \;\; x>3. \end{cases}$$

(2) Razona si la función *f* es derivable en el punto *x*=3.

(3) Esboza la gráfica de esta función *f*.

EJERCICIO 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\,e^{x-x^2}$.

(1) Halla los máximos y mínimos relativos de esta función.

(2) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

EJERCICIO 3. **(1)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

¿para qué valores del parámetro b no tiene inversa la matriz A? Justifica la repuesta.

(2) Si existe, calcula la inversa de A para b=-1.

EJERCICIO 4. Calcula razonadamente y dibuja el lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican la siguiente propiedad: "El triángulo APB de vértices A=(-7,0), P y B=(7,0) es rectángulo en P."

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) El Teorema Fundamental del Cálculo Integral dice: Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b], y F(x) es la función integral asociada a f, definida por:

$$F(x) = \int_a^x f \quad , \qquad x \in [a, b]$$

se verifica que F(x) es derivable y además que: F´(x) = f(x).

(2) Llamemos I a la integral

$$I = \int f(t)\,dt = \int e^t\,sen(2t)\,dt = \qquad [1]$$

Calculemos la integral por el método de integración por partes.

$u = e^t \quad ; \quad du = e^t\,dt$

$dv = sen(2t)\,dt \quad ; \quad v = \int sen(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(2t)$

continuando en [1], tendremos:

$$= -\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{2}\int e^t \cos(2t)\,dt = \qquad [2]$$

esta última integral la hacemos a su vez por partes, es decir,

$$u = e^t \quad ; \quad du = e^t\,dt$$

$$dv = \cos(2t)\,dt \quad ; \quad v = \int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}sen(2t)$$

continuando en [2], tendremos:

$$= -\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^t sen(2t) - \frac{1}{2}\int e^t\, sen(2t)\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{4}e^t sen(2t) - \frac{1}{4}\int e^t\, sen(2t)\,dt$$

la última integral es precisamente la integral inicial, I, por tanto:

$$I = -\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{4}e^t sen(2t) - \frac{1}{4}I$$

$$\frac{5}{4}I = -\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{4}e^t sen(2t)$$

$$I = \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{2}e^t\cos(2t) + \frac{1}{4}e^t sen(2t)\right] = -\frac{2}{5}e^t\cos(2t) + \frac{1}{5}e^t sen(2t)$$

Ahora calcularemos *F(x)*.

$$F(x) = \int_0^x e^t\, sen(2t)\,dt = \left[-\frac{2}{5}e^t\cos(2t) + \frac{1}{5}e^t sen(2t)\right]_0^x =$$

$$= -\frac{2}{5}e^x\cos(2x) + \frac{1}{5}e^x sen(2x) - \left(-\frac{2}{5}e^0\cos(0) + \frac{1}{5}e^0 sen(0)\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}e^x\cos(2x) + \frac{1}{5}e^x sen(2x) + \frac{2}{5}$$

finalmente, podemos hallar $F(\pi)$

$$F(\pi) = -\frac{2}{5}e^\pi\cos(2\pi) + \frac{1}{5}e^\pi sen(2\pi) + \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}e^\pi + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}(1 - e^\pi)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Suponemos a la tierra en el origen de coordenadas, O, y al objeto en un punto P de la trayectoria de ecuación *xy* = 16, luego el punto P tiene de coordenadas genéricas $\left(x, \frac{16}{x}\right)$. Construimos la función distancia de O a P.

$$dist(O,P) = |\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad d(x) = x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Calcular el punto P cuya distancia a la tierra sea mínima, es obtener el valor de *x* que hace mínima a la función *dist (O,P)*, o mínima a la función *d(x)*. Derivemos la función *d(x)*.

$$d'(x) = 2x - \frac{512}{x^3}$$

calculemos el valor que hace cero a la derivada.

$$2x - \frac{512}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^4 - 512 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 256 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$$

La función *d(x)* es par, y continua y derivable en su dominio que es: Dom *d(x)* = $\Re$- {0}.

Estudiemos la monotonía de *d(x)*, en los intervalos]-∞, -4[,]-4, 0[,]0, 4[y]4, +∞[:

$d'(-5) = -10 - 512/(-5)^3 = -5'904 < 0 \Rightarrow d'(x) < 0 \Rightarrow$ *d(x)* es decreciente en]-∞, -4[.

$d'(-1) = -2 - 512/(-1)^3 = 510 > 0 \Rightarrow d'(x) > 0 \Rightarrow$ *d(x)* es creciente en]-4, 0[.

$d'(1) = 2 - 512/1^3 = -510 < 0 \Rightarrow d'(x) < 0 \Rightarrow$ *d(x)* es decreciente en]0, 4[.

$d'(5) = 10 - 512/5^3 = 5'904 > 0 \Rightarrow d'(x) > 0 \Rightarrow$ *d(x)* es creciente en]4, +∞[.

luego hay mínimos relativos en $x = -4$ y en $x = 4$, que a su vez son absolutos.

Las coordenadas de los puntos de la trayectoria cuya distancia a la tierra es mínima son el $\left(4, \frac{16}{4}\right) = (4, 4)$ y el $\left(-4, \frac{16}{-4}\right) = (-4, -4)$

La distancia, que es la misma, de cualquiera de ellos a la tierra es:

$$dist(O,P) = \sqrt{4^2 + \left(\frac{16}{4}\right)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 5'65685424949238 \text{ años luz}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

$$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix}$$

Calculemos sin desarrollar el valor del determinante.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]

$$\begin{vmatrix} b & -2b & b \\ b & b & -2b \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix}$$

Saquemos "b" factor común de la 1ª fila y de la 2ª

$$b^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix}$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - a · [1ªf.]

$$b^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3a+b & 2b \end{vmatrix}$$

Saquemos 3 factor común de la 2ª fila

$$3b^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3a+b & 2b \end{vmatrix}$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (3a+b) · [2ªf.]

$$3b^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3a+3b \end{vmatrix}$$

Saquemos "3a+3b" factor común de la 3ª fila

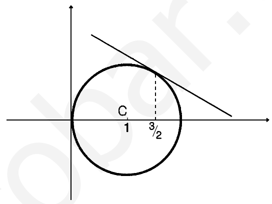
$$3b^2(3a+3b)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)\cdot 1 = 9b^2(a+b)$$

el último determinante vale uno, ya que está triangulado inferiormente y su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal. El resultado, finalmente es el que queríamos demostrar.

Las propiedades que básicamente se han usado son:

* Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante.
* Si a una fila o columna de un determinante le sumamos otra fila o columna multiplicada por un número el valor del determinante no varía.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



La ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (1, 0) y por radio 1, es: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto de abscisa x_0 es en general: $y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0)$

nos hace falta calcular la ordenada del punto de abscisa 3/2:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y_0^2 - 2\cdot\frac{3}{2} = 0 \;\Rightarrow\; y_0^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; y_0 = \sqrt{3-\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y la derivada de la función en dicho punto, para ello despejemos ahora y:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = 2x - 2x^2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{2x - x^2} \;\Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \;\Rightarrow\; y'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2 - 2\cdot\frac{3}{2}}{2\sqrt{2\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{3-\frac{9}{4}}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

La ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto de abscisa x_0=3/2 es:

$$y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) \;\Rightarrow\; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Si la función derivada, $f'(x)$, es

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 3 \\ x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

la función $f(x)$ será

$$f(x) = \begin{cases} \int 0\,dx = C_1 & si \quad x < 3 \\ C_2 = \frac{9}{2} & si \quad x = 3 \\ \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_3 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

ya que en el punto $x = 3$ la función existe y toma el valor 9/2. Como además la función es continua en $\mathbb{R}$ se ha de verificar que los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Comprobémoslo.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} C_1 = C_1 \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} \left(\frac{x^2}{2} + C_3 \right) = \frac{9}{2} + C_3$$

igualemos estos límites laterales con el valor de la función en el punto $x = 3$:

$$C_1 = \frac{9}{2} + C_3 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{9}{2} \quad ; \quad C_3 = 0$$

la función $f(x)$ siguiente es continua en $\mathbb{R}$ y cumple todas las condiciones del ejercicio

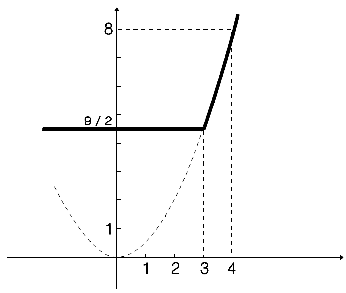
$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2} & si \quad x \le 3 \\ \frac{x^2}{2} & si \quad x > 3 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 3 \\ x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

(2) La función $f(x)$ anterior al ser continua podría ser derivable, lo sería si las derivadas laterales coinciden, es decir,

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} 0 = 0 \quad ; \quad f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} x = 3$$

como no coinciden las derivadas laterales, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

(3) Para dibujar la gráfica de $f(x)$ hay que tener en cuenta que es una función a trozos, el primero de ellos, para valores de x menores de 3, se corresponde con el de una función constante, 9/2, cuya gráfica es una recta paralela al eje de abscisas; y el segundo, para valores de x mayores de 3, con el de una función polinómica de segundo grado, $x^2/2$, cuya gráfica es una parábola, que en el punto 3 toma el valor 9/2 y en el 4, el valor 8.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Hallemos los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x\, e^{x-x^2}$

$$f'(x) = e^{x-x^2} + x\, e^{x-x^2}(1-2x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x-x^2}\left(1 + x - 2x^2\right)$$

calculemos los valores que anulen a la primera derivada.

$$e^{x-x^2}\left(1+x-2x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{matrix} \nearrow \frac{-1}{2} \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Obtengamos la segunda derivada.

$$f''(x) = e^{x-x^2}(1-2x)\left(1 + x - 2x^2\right) + e^{x-x^2}(1-4x) \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) = e^{x-x^2}\left(4x^3 - 4x^2 - 5x + 2\right)$$

Sustituyamos en esta segunda derivada el valor -1/2 que anulaba a la 1ª derivada.

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right] = 3e^{-\frac{3}{4}} > 0 \quad \Rightarrow$ luego hay un mínimo relativo en $x = -1/2$; siendo la ordenada $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.

El mínimo relativo es el punto $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{2}\right)$

Sustituyamos en la segunda derivada el valor 1 que anulaba a la primera derivada.

$f''(1) = e^{1-1}(4-4-5+2) = -3 < 0 \quad \Rightarrow$ Luego hay un máximo relativo en $x = 1$; siendo la ordenada $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$.

El máximo relativo es el punto (1, 1).

(2) Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x\,e^{x-x^2}\right) = \infty \cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2-x}(2x-1)} = \frac{1}{\infty\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para conocer los valores del parámetro b que hacen que la matriz A tenga inversa, lo haremos calculando el rango de la matriz por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1-2b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1-2b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1-2b \\ 0 & 0 & 2b-1 \end{pmatrix}$$

Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Veamos lo que ocurre en cada caso.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 2b-1=0 \Rightarrow b = 1/2 \Rightarrow$ la 3ª fila es una fila de ceros, el rango de A es dos, menor que el orden de la matriz, luego la matriz A no tendrá inversa.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 2b-1\neq 0 \Rightarrow b \neq 1/2 \Rightarrow$ el rango de A es tres, igual que el orden de la matriz cuadrada, luego la matriz A tendrá inversa.

(2) Como existe matriz inversa para $b \neq 1/2$, calculémosla para $b=-1$. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª y 3ª fila por 3.

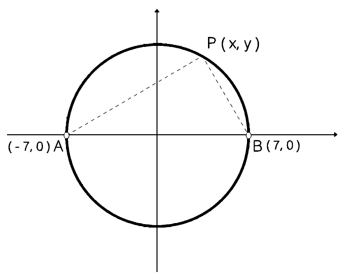
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Los puntos P del plano tendrán de coordenadas genéricas (*x*, *y*). Si los triángulos APB son rectángulos en P, se ha de verificar que los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{BP}$ son perpendiculares y por tanto su producto escalar es cero. Calculemos dichos vectores y efectuemos su producto escalar.



$$\vec{AP} = (x, y) - (-7, 0) = (x+7, y)$$
$$\vec{BP} = (x, y) - (7, 0) = (x-7, y)$$
$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$
$$(x+7, y) \cdot (x-7, y) = 0 \Rightarrow (x+7)(x-7) + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 49 + y^2 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 - 49 = 0$$

que es la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que satisfacen la condición del problema, y se corresponde con la ecuación de una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 7, lógicamente hay que quitar de dicha circunferencia los puntos A y B porque cuando el punto P coincide con alguno de ellos no se forma ningún triángulo.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 10 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones

$$y = x - x^2 \qquad \text{e} \qquad y = x^4 - x^2$$

(2) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$, halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en su punto de inflexión.

EJERCICIO 3. Sea A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= -1, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 2. \end{aligned}$$

Resuelve el sistema sabiendo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Considera el punto P=(2,1,3) y la recta r de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x - y - 5 = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

(1) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
(2) Determina dos puntos A y B de la recta r de forma que el triángulo PAB sea equilátero.

Opción B

EJERCICIO 1. Determina una función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que es tres veces derivable, que $f'''(x) = 24x$ para cada punto x de $\mathbb{R}$ y que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

EJERCICIO 2. **(1)** Si el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demuestra que siempre se pierde valor al partirlo en dos trozos.
(2) Como puedes suponer, puede partirse en dos trozos con diferentes pesos de múltiples formas. Determina la partición que origina la máxima pérdida de valor. Razona tu respuesta.

EJERCICIO 3. Considera los puntos A=(0,0,0) y B=(2,2,2).
(1) Halla la ecuación del plano que contiene a todos los puntos C que forman con A y B un triángulo equilátero.
(2) Indica qué lugar geométrico forman los puntos C descritos en el apartado (1), expresando los elementos que lo determinan.

EJERCICIO 4. Resuelve la ecuación matricial AX + 2B = C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Representemos primeramente la función $y = x^4 - x^2$.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Simetría.

$$\forall x \in Dom(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in Dom(f)$$
$$f(x) = x^4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$$

luego $f(x) = f(-x)$ para $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo que la función es una función par, es decir, es simétrica respecto del eje de ordenadas.

3.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^4 - x^2 \Rightarrow 0 = x^2(x^2 - 1) \begin{array}{l} \nearrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0,0) \\ \searrow x^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 1 \Rightarrow B(1,0) \\ \searrow x = -1 \Rightarrow C(-1,0) \end{array} \end{array}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: A(0, 0); B(1, 0) y C(-1, 0).
- Con el eje de ordenadas. En este caso nos volverá a salir el punto A anterior.

4.- La función es continua en todo su dominio ya que es polinómica.

5.- Crecimiento y decrecimiento.
Hallemos la primera derivada: $y'(x) = 4x^3 - 2x$
Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada, que son:

$$4x^3 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x(2x^2-1) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x = 0 \\ \searrow \; 2x^2 - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \searrow \; x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \end{array}$$

los llevamos ordenadamente sobre el eje de abscisas y construimos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Probamos valores intermedios, por ejemplo -1, -0.1, 0.1 y 1, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1) = -4+2 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad decreciente\ en\ \left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'(-0.1) = 4(-0.1)^3 - 2(-0.1) = 0.196 > 0 \quad \Rightarrow \quad creciente\ en\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$$

$$f'(0.1) = 4\cdot 0.1^3 - 2\cdot 0.1 = -0.196 < 0 \quad \Rightarrow \quad decreciente\ en\ \left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'(1) = 2\cdot 1^4 - 2\cdot 1^2 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad creciente\ en\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$$

6.- Los máximos y mínimos se hallarían sustituyendo los valores que anulan a la 1ª derivada en la 2ª, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero al ser continua, según el estudio sobre la monotonía anterior, tendremos:

$$mínimos\ en\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -0.25\right)\ y\ en\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -0.25\right)\ ;\ máximo\ en\ (0,\ 0)$$

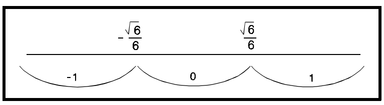
7.- Al ser una función polinómica no presenta ningún tipo de asíntotas.

8.- Para estudiar la concavidad y convexidad, obtendremos la segunda derivada:

$$y''(x) = 12\,x^2 - 2$$

Calculemos los valores que anulan a la segunda derivada, que son:

$$12x^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 6x^2 - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \searrow \; x = -\sqrt{\frac{1}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$



los llevamos ordenadamente sobre el eje de abscisas y construimos los posibles intervalos de concavidad y convexidad (Ver fig.). Probamos valores intermedios, por ejemplo -1, 0 y 1, de esos intervalos en la segunda derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será convexa o cóncava.

$$f''(-1) = 12 - 2 = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad convexa\ en\ \left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

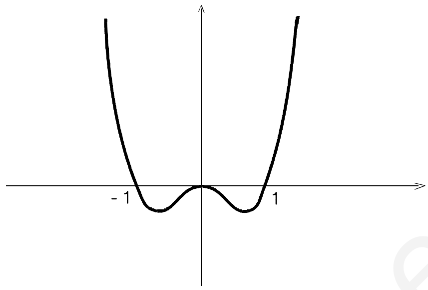
$$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad cóncava\ en\ \left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$f''(1) = 12 - 2 = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad convexa\ en\ \left(\frac{\sqrt{6}}{6},\ \infty\right)$$

9.- Los puntos de inflexión se hallarían sustituyendo los valores que anulan a la segunda derivada en la tercera, y si sale distinto de cero será punto de inflexión. Pero al ser continua y según el estudio sobre la concavidad anterior, tendremos:

$$Puntos\ de\ inflexión\ en\ \left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{5}{36}\right)\quad y\ en\ \left(\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{5}{36}\right)$$

10.- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado.



Representemos la función $y = x - x^2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

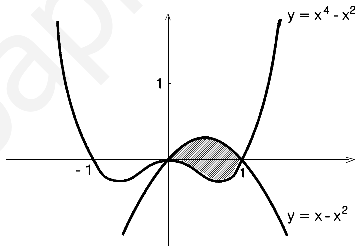
2.- Punto de corte con el eje de abscisas:
$y = 0 \Rightarrow x=0;\ x=1 \Rightarrow (0, 0) ; (1, 0)$

3.- Coordenadas del vértice V:
$x = -b/2a = -1/(-2) = 1/2 \Rightarrow y = (1/2) - (1/2)^2 = 1/4 \Rightarrow V(1/2, 1/4)$

Para calcular los puntos de corte de las dos funciones, resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones, con el fin de determinar el recinto que forman.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - x^2 \\ y = x - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x - x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow 0 = x^4 - x \Rightarrow 0 = x(x^3 - 1) \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x^3 - 1 = 0\ ;\ x = 1 \end{array}$$

La situación de las dos gráficas superpuestas se corresponde con la gráfica adjunta, y donde el área rayada es el recinto limitado por ambas.



(2) El área del recinto anterior se obtiene integrando la función diferencia de ambas funciones, entre 0 y 1.

$$Área = \int_0^1 \left(x - x^2 - x^4 + x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Obtengamos el punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 6$

calculemos el valor que anula a la segunda derivada: $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

sustituyamos este valor en la tercera derivada: $f'''(2) = 6 \neq 0$, luego hay un punto de inflexión en $x= 2$.

La ordenada del punto de inflexión es: $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -12$

luego el punto de inflexión es el (2, -12).

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función el punto (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0)$$

El valor de la derivada primera en $x = 2$, es: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 2 = -10$

la ecuación de la recta tangente, finalmente, es:

$$y - (-12) = -10\ (x - 2) \Rightarrow y = -10x + 8$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

El sistema de ecuaciones podemos expresarlo en la forma matricial siguiente:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

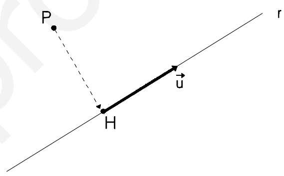
multipliquemos a la izquierda por la matriz A^{-1}, inversa de A.

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego la solución del sistema es: $x = -1$; $y = 5$; $z = 2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(1) Sea H el punto donde la recta que pasa por P corta perpendicularmente a r. Se ha de verificar que:

$$\vec{PH} \perp \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{PH} \cdot \vec{u} = 0 \qquad [1]$$

siendo $\vec{u}$ el vector de dirección de la recta r.

Expresemos la ecuación de la recta r en paramétricas, para obtener las coordenadas de dicho vector así como las del punto H.

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema mediante el método reductivo de Gauss, para ello lo expresaremos en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} (x)(z)(y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado, nos quedan dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como parámetro.

$$\begin{array}{c} (x)(z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5+y \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

La solución del sistema es:

$$x = 5 + y \quad ; \quad z = 1.$$

Sustituyamos la incógnita secundaria *y* por el parámetro λ:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Que son las ecuaciones de la recta r en paramétricas, en donde leemos que el vector de dirección de dicha recta es el (1, 1, 0).

Tomemos de la recta r un punto genérico, H, de coordenadas $H\,(5+\lambda,\ \lambda,\ 1)$

Construyamos el vector $\vec{PH} = (5+\lambda,\ \lambda,\ 1) - (2,\ 1,\ 3) = (3+\lambda,\ \lambda-1,\ -2)$

Impongamos la condición [1] para calcular las coordenadas de $\vec{PH}$

$$\vec{PH} \cdot \vec{u} = 0 \ \Rightarrow \ (3+\lambda,\ \lambda-1,\ -2)\cdot(1,\ 1,\ 0) = 0 \ \Rightarrow \ 3+\lambda+\lambda-1 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = -1$$

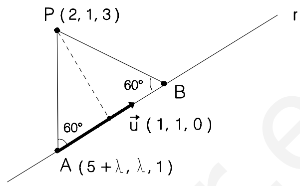
sustituyendo este valor de λ en el vector $\vec{PH}$ tendremos:

$$\vec{PH} = (3+(-1),\ (-1)-1,\ -2) = (2,\ -2,\ -2)$$

vector que es el de dirección de la recta perpendicular a la r, cuya ecuación es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$$

(2) Los puntos A y B de la recta r tendrán de coordenadas genéricas $(5+\lambda,\ \lambda,\ 1)$.



Teniendo en cuenta el apartado 1) y el dibujo adjunto, consideraremos los vectores siguientes:

$\vec{AP} = (2,\ 1,\ 3) - (5+\lambda,\ \lambda,\ 1) = (-3-\lambda,\ 1-\lambda,\ 2)$

$\vec{u} = (1,\ 1,\ 0)$

Como el ángulo que forman los lados del triángulo equilátero es de 60°, se verificará:

$$\cos(\widehat{\vec{AP},\vec{u}}) = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{u}}{|\vec{AP}|\cdot|\vec{u}|} \Rightarrow \cos(60°) = \frac{(-3-\lambda,\ 1-\lambda,\ 2)\cdot(1,\ 1,\ 0)}{\sqrt{(-3-\lambda)^2+(1-\lambda)^2+4}\ \sqrt{1^1+1^2+0}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-3-\lambda+1-\lambda}{\sqrt{9+\lambda^2+6\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+4}\ \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2-2\lambda}{\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+14}\ \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{4+4\lambda^2+8\lambda}{4\lambda^2+8\lambda+28} \Rightarrow 4\lambda^2+8\lambda+28 = 16+16\lambda^2+32\lambda \Rightarrow 12\lambda^2+24\lambda-12 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2+2\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \begin{cases} \nearrow\ \lambda = \sqrt{2}-1 \\ \searrow\ \lambda = -\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Para cada valor de λ, obtenemos respectivamente los puntos A y B.

$$A = (5+\lambda,\ \lambda,\ 1) = \left(5+\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1,\ 1\right) = \left(4+\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1,\ 1\right)$$

$$B = (5+\lambda,\ \lambda,\ 1) = \left(5-\sqrt{2}-1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1\right) = \left(4-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}-1,\ 1\right)$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Al ser la función *f* derivable, es continua, y podemos mediante integraciones sucesivas obtener la función *f*.

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f''(x) = \int 24x\ dx = 24\frac{x^2}{2} + C_1 = 12x^2 + C_1$$

como sabemos que $f''(0) = 2$, sustituyendo en la expresión anterior, tendremos:

$$f''(0) = 12\cdot 0^2 + C_1 \Rightarrow 2 = C_1 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2$$

Calculemos la primera derivada.

$$f'(x) = \int (12x^2+2)\ dx = 12\frac{x^3}{3} + 2x + C_2 = 4x^3 + 2x + C_2$$

como sabemos que $f'(0) = 1$, sustituyendo en la expresión anterior, tendremos:

$$f'(0) = 4\cdot 0^3 + 2\cdot 0 + C_2 \Rightarrow 1 = C_2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$$

Calculemos, finalmente, *f(x)*.

$$f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1)\,dx = 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + x + C_3 = x^4 + x^2 + x + C_3$$

como sabemos que $f(0) = 0$, sustituyendo en la expresión anterior, tendremos:

$$f(0) = 0^4 + 0^2 + 0 + C_3 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^4 + x^2 + x$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Si llamamos P_r al precio del diamante y p_e a su peso, la relación entre ambas variables es: $P_r = Kp_e^2$ donde K es una constante de proporcionalidad, $K > 0$.

Dividamos el diamante en dos trozos de pesos, x e y, es evidente que

$$x + y = p_e$$

el precio, P, del "nuevo" diamante dividido en dos trozos será la suma de los precios de cada uno de los trozos, es decir:

$$P = Kx^2 + Ky^2 \quad \Rightarrow \quad P = Kx^2 + K(p_e - x)^2 \quad \Rightarrow \quad P = Kp_e^2 - 2Kp_e x + 2Kx^2$$

Demostremos que efectivamente el precio P_r es mayor que el precio, P, después de partido el diamante, es decir, que la diferencia entre ambos precios es positiva: $P_r - p_e > 0$. Veámoslo

$$P_r - P = Kp_e^2 - (Kp_e^2 - 2Kp_e x + 2Kx^2) = 2Kp_e x - 2Kx^2 = 2Kx(p_e - x) = 2Kxy > 0$$

efectivamente el precio, P_r, antes de partir el diamante es mayor que el precio P después de partirlo en dos trozos, ya que K, x e y son siempre cantidades positivas.

(2) Para determinar la partición que origina la mayor pérdida de valor, usaremos la función diferencia de valor entre el precio inicial y el de después de partirlo, es decir,

$$P_r - P = 2Kp_e x - 2Kx^2$$

y calcularemos el valor de x que haga a esta función máxima. Llamemos $P(x)$ a esta función, continua y derivable en su dominio, que es Dom $P(x) =]0, p_e[$. Derivemos la función.

$$P(x) = 2Kp_e x - 2Kx^2 \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 2Kp_e - 4Kx$$

igualemos a cero la primera derivada

$$2Kp_e - 4Kx = 0 \quad \Rightarrow \quad p_e - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p_e}{2}$$

La función $P(x)$ es continua y derivable en su dominio.

Estudiemos la monotonía de $P(x)$, en los intervalos $]0, p_e/2[$, $]p_e/2, p_e[$:

$P'(p_e/4) = 2Kp_e - 4Kp_e/4 = Kp_e > 0 \quad \Rightarrow \quad P'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(x)$ es creciente en $]0, p_e/2[$.

$P'(3p_e/4) = 2Kp_e - 4K\,3p_e/4 = -Kp_e < 0 \quad \Rightarrow \quad P'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad P(x)$ es decreciente en $]p_e/2, p_e[$.

luego hay un máximo relativo en $x = \dfrac{p_e}{2}$, que es a su vez es absoluto.

En definitiva, cuando partimos el diamante en dos partes que pesen lo mismo, es cuando se produce la pérdida mayor de su valor original.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Los puntos C que forman con A y B triángulos equiláteros, se encontrarían en aquellos puntos de las mediatrices del segmento AB tales que su distancia a A y B coincida con la del segmento AB, es decir estarían formando una circunferencia de centro el punto medio del segmento AB. Dichos puntos estarán en el plano mediador del segmento AB. Calculemos la ecuación del plano mediador del segmento AB.

El punto medio, M = (a, b, c), del segmento AB verifica que $\vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AM} = (a,\ b,\ c) - (0,\ 0,\ 0) = (a,\ b,\ c) \\ \vec{MB} = (2,\ 2,\ 2) - (a,\ b,\ c) = (2-a,\ 2-b,\ 2-c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a = 2 - a & \Rightarrow & a = 1 \\ b = 2 - b & \Rightarrow & b = 1 \\ c = 2 - c & \Rightarrow & c = 1 \end{array}\right.$$

luego el punto M tiene de coordenadas M = (1, 1, 1).

La ecuación general de un plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, donde (A, B, C) representan las coordenadas de un vector normal al mismo, en nuestro caso el vector normal es el vector que determinan los puntos A y B:

$$\vec{n} = \vec{AB} = (2,\ 2,\ 2) - (0,\ 0,\ 0) = (2,\ 2,\ 2)$$

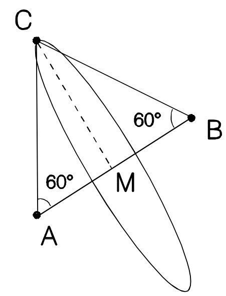
el plano será

$$2x + 2y + 2z + D = 0$$

impongamos a este plano que pase por el punto M

$$2 + 2 + 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D=-6 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

(2) El lugar geométrico es el descrito en el apartado anterior, es decir, una circunferencia de centro el punto M y de radio CM. Las coordenadas del centro las conocemos ya, y son M = (1, 1, 1).



Obtengamos la longitud del radio, teniendo en cuenta el dibujo y que los ángulos del triángulo equilátero son de 60°:

$$\vec{MB} = (2,\ 2,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 1,\ 1)$$

$$|\vec{MB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Consideremos el triángulo CMB:

$$tg(60°) = \frac{|\vec{CM}|}{|\vec{MB}|} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{r}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para resolver la ecuación matricial AX + 2B = C, tendremos en cuenta las propiedades de las operaciones con matrices:

$AX + 2B = C \quad \Rightarrow \quad AX = C - 2B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}(C - 2B) \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}(C - 2B).$

La multiplicación a la izquierda por la inversa de A, se podrá hacer siempre que demostremos que tiene inversa la matriz A.

Calculemos la matriz inversa de la matriz A por el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2.
Simplifiquemos la 3ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminemos de resolver la ecuación matricial.

$$X = A^{-1}(C - 2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -5/2 & -17/2 & 9 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 11 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & si\ \ x\leq 1, \\ \dfrac{2}{kx} & si\ \ x>1; \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio.

(1) ¿Cuánto vale k? ¿Cuánto vale $f'(1)$? Justifica las respuestas.

(2) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, dibuja la región limitada por la gráfica de la función f, el eje OX, el eje OY y la recta x=2.

(3) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. Se considera la función $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=|x-2|+\sqrt{x-1}.$$

Calcula, de manera razonada, su función derivada.

EJERCICIO 3. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

calcula de forma razonada el valor de los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad y \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4. Considera el punto P=(1,0,-1) y la recta r de ecuaciones

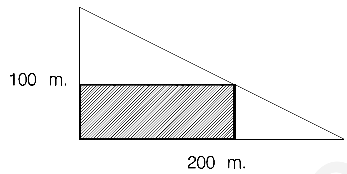
$$r:\begin{cases} x+y=0, \\ z-1=0. \end{cases}$$

(1) Halla la distancia del punto P a la recta r.

(2) Determina el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

Opción B

EJERCICIO 1. Sobre un terreno con forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden, respectivamente, 100 y 200 metros, se quiere construir un edificio de planta rectangular como se muestra en la figura. Halla las dimensiones que debe tener dicha planta para que su superficie sea máxima.



EJERCICIO 2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

(1) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en su punto de inflexión.

(2) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función *f*, la recta tangente en su punto de inflexión y el eje OY.

(3) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

se sabe que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) ¿Tiene A inversa? Justifica la respuesta y si la respuesta es afirmativa indica cuál es la inversa de A.

(2) ¿Es cierto que A·B=B·A en este caso?

EJERCICIO 4. **(1)** Sean P y Q dos puntos del plano situados, respectivamente, en los ejes OX y OY que son distintos del origen de coordenadas O. ¿Cuántas circunferencias pasan simultáneamente por O, P y Q? Justifica la respuesta.

(2) Describe un procedimiento geométrico para calcular una circunferencia de las mencionadas anteriormente.

(3) Aplica el procedimiento descrito para calcular el centro y el radio de una circunferencia que pase por los puntos P=(2,0), Q=(0,2) y O=(0,0).

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor o valores de k para que la función sea continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 1, *x*<1, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo ℝ, luego la función *f* es continua para *x*<1.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 1, *x*>1, es una función racional, que son continuas en todo ℝ salvo para los valores que anulen al denominador, que en este caso es el cero, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función *f* es continua para *x*>1.

- El problema de la continuidad está en el punto 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} \dfrac{2}{kx} = \dfrac{2}{k} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}} \left(3-kx^2\right) = 3-k \\ f(1) = 3-k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \\ \dfrac{2}{k} = 3-k \;\Rightarrow\; k^2-3k+2=0 \;\Rightarrow\; k = \begin{array}{l}\nearrow 2 \\ \searrow 1\end{array} \quad [1] \end{array}\right.$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 1, si se verifica que: k = 1 o k = 2.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en ℝ, siempre y cuando se satisfaga que k = 1 o k = 2. [1]

Estudiemos ahora la derivabilidad para los diversos valores de k.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de *x*<1, *f* es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, -2k*x*.

- Para valores de *x*>1, *f* es derivable, por ser una función racional, que son derivables en todo ℝ salvo para los valores que anulen al denominador, que en este caso es el cero, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función *f* es derivable para *x*>1, siendo la función derivada, $\frac{-2}{kx^2}$.

Por tanto, una primera aproximación de la función derivada en los puntos donde ya sabemos que es derivable y cuál es su derivada, será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 1.

En el punto 1 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1].

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{kx^2} = \dfrac{-2}{k} \\ f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} -2kx = -2k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^+) = f'(1^-) \quad \Rightarrow \\ \dfrac{-2}{k} = -2k \;\Rightarrow\; k^2 = 1 \;\Rightarrow\; k = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{array} \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x = 1$ siempre y cuando K=1 o k=-1, pero como ha de ser continua y para ello k=1 o k=2, por tanto, para que sea derivable y continua a la vez en x=1 el valor de k debe ser 1.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituido k por 1, así:

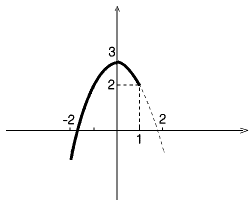
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Sustituyendo x por 1 en la función derivada tendremos que: $f'(1) = -2$.

(2) La función *f(x)* para el valor de k=1 es:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

** Representemos el trozo de función $y=3-x^2$, para $x \le 1$, cuya gráfica es una parábola.



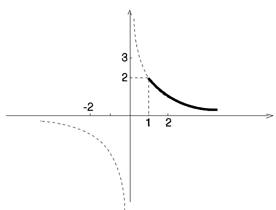
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:
$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 3 \;\Rightarrow\; (0, 3)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:
$y = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{3}\;;\; x = -\sqrt{3} \;\Rightarrow\; (-\sqrt{3}, 0)\;;\; (\sqrt{3}, 0)$

3.- Coordenadas del vértice V:
$x = -b/2a = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\;$ V(0, 3)

4.- La gráfica es la situada al lado.

** Representemos el trozo de función $y = 2/x$, para $x>1$.



1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$ ya que se trata de una función de proporcionalidad inversa.

2.- Simetría.

$$\forall x \in Dom(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in Dom(f)$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x)$$

luego $f(-x) = -f(x)$ para $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ por lo que la función es una función impar, es decir, es simétrica respecto del origen.

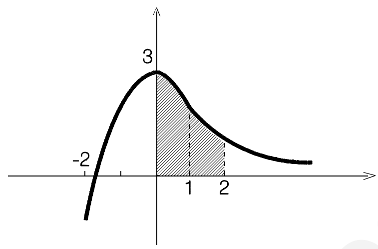
3.- No hay puntos de corte con los ejes coordenados.

4.- La asíntota horizontal es: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{\infty} = 0 \;\Rightarrow\; A.\,H. \quad y = 0$

5.- La asíntota vertical es: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{0} = \infty \;\Rightarrow\; A.\,V. \quad x = 0$

Teniendo en cuenta el estudio realizado y que un punto de la gráfica es, por ejemplo el (1,2), la gráfica de este trozo de función es la representada al lado.

Finalmente, la gráfica de *f(x)* es la situada al lado, y donde la región descrita en el ejercicio, ha sido rayada en la gráfica.



(3) El área de la región rayada situada al lado es:

$$Área = \int_0^1 (3-x^2)\,dx + \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2Ln(x)\right]_1^2 = 3 - \frac{1}{3} + 2Ln(2) - 2Ln(1) = \frac{8}{3} + 2Ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Expresemos *f(x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x) = |x-2| + \sqrt{x-1} = \begin{cases} -x+2+\sqrt{x-1} & Si \;\; x-2<0 \;\; y \;\; x\geq 1 \Rightarrow x<2 \;\; y \;\; x\geq 1 \\ x-2+\sqrt{x-1} & Si \;\; x-2\geq 0 \;\; y \;\; x\geq 1 \Rightarrow x\geq 2 \;\; y \;\; x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+2+\sqrt{x-1} & Si \quad 1\leq x<2 \\ x-2+\sqrt{x-1} & Si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Antes de estudiar la derivabilidad, analizaremos la continuidad, ya que para que una función sea derivable es preciso que sea continua.

La función *f* es la suma de la función raíz cuadrada de una función polinómica que es continua en su dominio, y de la función valor absoluto de otra función polinómica, que al ser ésta continua su valor absoluto sigue siendo continua. Y la suma de dos funciones continuas es otra función continua, luego la función *f* es continua para $x\geq 1$.

Analicemos la derivabilidad.

El trozo de función definido para los valores de $1<x<2$, es una función derivable por razones similares a la continuidad, salvo para los valores que anulen a la raíz cuadrada, que al ser el 1 y no pertenecer al dominio que estamos considerando no incide en la derivabilidad, luego *f* es derivable para valores de $1<x<2$.

El trozo de función definido para los valores de $x>2$, es una función derivable por razones similares a las anteriores, luego *f* es derivable para valores de $x>2$.

El problema estaría en los puntos 1 y 2, el 1 por estar en el extremo inferior del intervalo de definición, y el 2 por haber un cambio en el comportamiento de la función.

Obtengamos una primera aproximación de la función derivada, para todos aquellos valores de *x* donde ya sabemos que es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & Si \quad 1<x<2 \\ 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & Si \quad x>2 \end{cases} \qquad [1]$$

Veamos si es derivable en el punto $x = 1$ por la derecha.

$$f'(2^+) = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = -1 + \infty = \infty$$

luego no es derivable en el punto $x = 1$.

Estudiemos la derivabilidad en el punto 2, sabiendo que es continua en dicho punto y pudiendo por tanto ser derivable.

Para que la función *f* sea derivable en el punto 2, las derivadas laterales deben coincidir. Calculémoslas:

$$f'(2^+) = \lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f'(2^-) = \lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Como las derivadas laterales no coinciden, *f(x)* no es derivable en 2.

La función derivada coincide con la primera aproximación que hicimos en [1].

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Calculemos el determinante siguiente sin desarrollarlo.

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

el primer paso ha sido sacar factor común el cinco de la 1ª fila, para después multiplicar por 5 la 2ª fila. Nos hemos basado en las siguientes propiedades de los determinantes:

* Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante.

* Para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una línea por dicho número.

Calculemos este otro determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =$$

hemos descompuesto el determinante en dos, basándonos en la propiedad que dice:

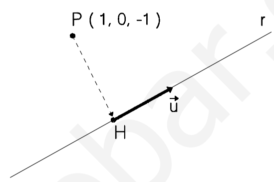
* Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual, es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos para el segundo determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando.

El primero de los dos determinantes vale cero por tener la 1ª y 2ª fila proporcionales, que es otra de las propiedades de los determinantes.

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

El determinante que habíamos obtenido lo hemos vuelto a descomponer en dos nuevos determinantes según la misma propiedad que citamos en primer lugar. El 1º de ellos es cero por tener dos filas iguales. El 2º nos dice el ejercicio que vale 1.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(1) Para calcular la distancia del punto P=(1,0,-1) a la recta r, habrá que calcular las coordenadas de un punto H de la recta r, tal que se satisfaga que el vector $\vec{PH}$ sea perpendicular al vector $\vec{u}$ de dirección de la recta: $\vec{PH} \perp \vec{u}$; de manera que la dist(P,r) = dis(P,H).

Expresemos la ecuación de la recta r en forma paramétrica para calcular el vector de dirección de la misma, así como las coordenadas del punto H. Para ello,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{array}{c} (x)(z)(y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado, nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\begin{array}{c} (x)(z) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

La solución es:

$x = -y$; $z = 1$.

Sustituyamos la incógnita secundaria, *y*, por el parámetro λ:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Leyendo directamente en la ecuación de la recta, tendremos que el vector de dirección tiene de coordenadas (-1, 1, 0) y el punto genérico H, (-λ, λ, 1).

Construyamos el vector $\vec{PH}$

$$\vec{PH} = (-\lambda, \lambda, 1) - (1, 0, -1) = (-\lambda-1, \lambda, 2)$$

este vector $\vec{PH}$ al ser perpendicular al vector $\vec{u}$, el producto escalar de ambos será cero, con lo que tendremos:

$$\vec{PH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{PH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-\lambda-1, \lambda, 2) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \lambda+1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

luego, $\vec{PH} = (-\lambda-1, \lambda, 2) = \left(\frac{1}{2}-1, -\frac{1}{2}, 2\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$

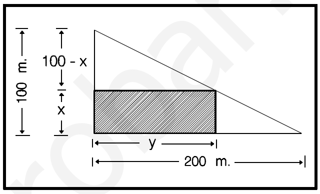
$$dist(P,r) = dist(P,H) = |\vec{PH}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(2) La ecuación del plano que pasa por el punto P=(1,0,-1), y tiene como vectores de dirección el de la recta r, $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, y el vector $\vec{PH} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda - \frac{1}{2}\mu \\ y = \lambda - \frac{1}{2}\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



La función área del rectángulo es: $Área = x \cdot y$ [1]

Según el dibujo se verifica la proporción:

$$\frac{100-x}{y} = \frac{100}{200} \Rightarrow \frac{100-x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 200 - 2x$$

sustituyendo esta última expresión en [1], tendremos

$Área = x\,(200 - 2x) \Rightarrow A(x) = 200x - 2x^2 \Rightarrow$ Dom $A(x)$ =]0, 100[.

Calculemos el máximo de la función área, que es continua y derivable en su dominio.

$$A'(x) = 200 - 4x \Rightarrow 200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow y = 200 - 2 \cdot 50 = 100$$

Estudiemos la monotonía de $A(x)$ en los intervalos]0, 50[y]50, 100[:

$A'(10) = 200 - 40 = 160 > 0 \Rightarrow A'(x) > 0 \Rightarrow A(x)$ es creciente en]0, 50[

$A'(60) = 200 - 240 = -40 < 0 \Rightarrow A'(x) < 0 \Rightarrow A(x)$ es decreciente en]50, 100[

luego hay un máximo relativo en $x = 50$, que es a su vez absoluto.

Las dimensiones de la planta de área máxima son $x = 50$ m. e $y = 100$ m.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Calculemos el punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \textit{Punto de inflexión en } x = 1$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto de abscisa x_0 es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Como $f'(1) = 3 - 6 = -3$, la ecuación de la tangente en el punto de inflexión (1, 0), es:

$$y - 0 = -3\,(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3$$

(2) Representemos primeramente la función $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 2$$

resolvamos esta ecuación mediante Ruffini, probando con los divisores del término independiente. Comencemos con el 1. (Ver dibujo). Efectivamente el 1 es una raíz, terminemos de resolver la ecuación de 2º grado que ha aparecido:

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	0

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow x = 2'73 \\ \searrow x = -0'73 \end{matrix}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: A(-0´73, 0), B(1,0) y C(2´73, 0)

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad y = 0 - 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 2).

3.- La función es continua en todo su dominio ya que es polinómica.

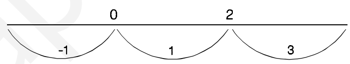
4.- Crecimiento y decrecimiento.

Hallemos la primera derivada: $y'(x) = 3x^2 - 6x$

Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada, que son:

$$3x^2 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; 3x(x-2) = 0 \;\begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2 \end{matrix}$$

los llevamos ordenadamente sobre el eje de abscisas y construimos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento (Ver fig.). Probamos valores intermedios, por ejemplo -1, 1 y 3, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.



$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3+6 = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{creciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{decreciente en } (0, 2)$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{creciente en } (2, \infty)$$

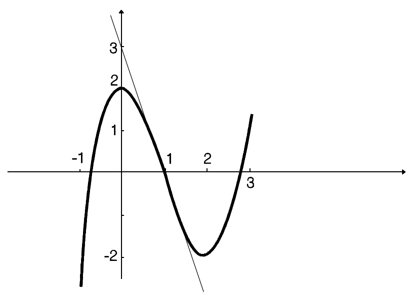
5.- Los máximos y mínimos se hallarían sustituyendo los valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero al ser continua y según el estudio sobre el crecimiento y decrecimiento anterior, tendremos:

máximo en (0, 2) y mínimo en (2, -2).

6.- Al ser una función polinómica no presenta ningún tipo de asíntotas.

7.- El punto de inflexión es el que ya habíamos hallado, el (1, 0).

8.- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado.



Representemos la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x=1, es decir, $y = -3x + 3$

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

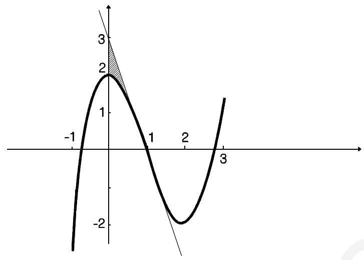
$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 3 \quad \Rightarrow \quad (0, 3)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \quad \Rightarrow \quad (1, 0)$

3.- La gráfica de esta recta también está situada en el dibujo anterior.

El recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente en el punto de inflexión y el eje OY, es la zona rayada en el dibujo adjunto.



(3) El área del recinto anterior se obtiene integrando la función diferencia de ambas funciones, entre 0 y 1.

$$Área = \int_0^1 \left(-3x + 3 - x^3 + 3x^2 - 2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Justifiquemos si la matriz A tiene inversa, sabemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

comprobemos si tiene inversa la matriz del segundo miembro, para poder así multiplicar a la derecha por dicha inversa. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz, la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos todas las filas por 3.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, luego la matriz tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Multipliquemos en la igualdad [1], a la derecha, por esta matriz inversa.

$$A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = I \qquad [2]$$

si A tiene inversa se verifica que $A \cdot A^{-1} = I$, luego identificando con [2], tendremos:

$$A^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{3} & \frac{b_{12}}{3} \\ \frac{b_{21}}{3} & \frac{b_{22}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} B$$

luego la matriz A tiene inversa, y es 1/3 de la matriz B.

(2) Demostremos si es cierto, en este caso, que A·B = B·A.

Sabemos que $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

multipliquemos a la izquierda por la inversa de A, A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow I \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^{-1} \cdot 3 \cdot I \Rightarrow B = 3 \cdot I \cdot A^{-1}$$

el último paso es debido a la propiedad conmutativa del producto de matrices por un número real y por la matriz unidad.

Multipliquemos la última expresión, a la derecha, por la matriz A.

$$B \cdot A = 3 \cdot I \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow B \cdot A = 3 \cdot I \cdot I \Rightarrow B \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

luego efectivamente A·B = B·A.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Los tres puntos O, P y Q, determinan un triángulo, y sólo hay una circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

(2) Se trata de hallar las ecuaciones de dos mediatrices del triángulo OPQ. La intersección de ellas nos da el centro de la circunferencia, es decir, basta resolver el sistema formado por ellas. El radio será la distancia del centro a cualquiera de los puntos O, P o Q.

(3) La ecuación de la mediatriz m_1 es $x = 1$, por ser paralela al eje de ordenadas en el punto medio del segmento OP, como fácilmente se observa en el dibujo. De forma similar obtenemos la ecuación de la mediatriz m_2 que es $y = 1$.

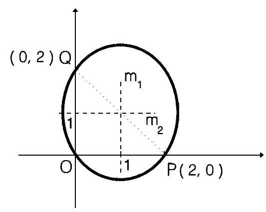
La resolución del sistema formado por las ecuaciones de ambas mediatrices, evidentemente es

$$x = 1 \text{ e } y = 1$$

es decir, el centro de la circunferencia es el C = (1, 1).

El radio de la circunferencia será la distancia, por ejemplo, de C a O:

$$radio = r = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 12 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una primitiva suya, entonces también lo es la función G dada por $G(x) = 3 - F(x)$. ¿Puedes determinar $f(33)$? y $f(5)$? ¿y el valor de $\int_5^{33} f(x)\,dx$? Justifica las respuestas y en los casos de respuesta afirmativa calcula los correspondientes valores.

EJERCICIO 2. La recta de ecuación $3x - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ en el punto P=(1,5).

(1) [1 PUNTO]. Calcula las constantes a y c de la ecuación de la parábola describiendo el procedimiento que sigas.

(2) [0´5 PUNTOS]. Dibuja la región plana limitada por la parábola dada y la recta cuya ecuación es $2y = 6x + 5$.

(3) [1 PUNTO]. Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$.

(2) [1 PUNTO]. Calcula, si existe, la inversa de X.

EJERCICIO 4. **(1)** [1 PUNTO]. Explica cómo se puede hallar el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus vértices en el espacio tridimensional.

(2) [1´5 PUNTOS]. Aplica dicho procedimiento para hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos

A = (-1,0,0), B = (1,0,1), y C = (0,2,3).

Opción B

EJERCICIO 1. Supongamos que el rendimiento r de una alumna en un examen que dura una hora viene dado por la relación $r(t) = 300t\,(1-t)$ donde t, con $0 \le t \le 1$, es el tiempo medido en horas.

(1) [1 PUNTO]. ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en qué intervalos disminuye?

(2) [1 PUNTO]. ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento y cuánto vale?

(3) [0´5 PUNTOS]. ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

EJERCICIO 2. De la gráfica de la función polinómica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

se conocen los siguientes datos: que pasa por el origen de coordenadas y que en los puntos de abscisas 1 y -3 tiene tangentes paralelas a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

(1) [1 PUNTO]. Calcula a, b y c.

(2) [1´5 PUNTOS]. Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y el eje de abscisas y calcula su área.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro k e interpreta geométricamente los resultados

$$\begin{aligned} 2x + 2y + (k+2)z &= -5, \\ x + y - 2z &= 5, \\ 3x + ky - 6z &= 5k. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4. Considera el plano $\Pi : x - y + 1 = 0$ y el punto A=(2,0,1).

(1) [1´5 PUNTOS]. Determina las ecuaciones de la recta que es perpendicular al plano Π y pasa por el punto A.

(2) [1 PUNTO]. Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano Π.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces se verifica que $F'(x) = f(x)$.
Si $G(x)$ también es una primitiva de $f(x)$ se verificará igualmente que $G'(x) = f(x)$.

Como además el problema nos dice que $G(x) = 3 - F(x)$, derivando esta expresión tendremos: $G'(x) = 0 - F'(x) \quad \Rightarrow \quad G'(x) = - F'(x)$ [1]

Sabemos que $F'(x) = f(x)$ y que $G'(x) = f(x)$, luego sustituyendo en [1]:

$f(x) = - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) + f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$

Por tanto, sí podemos determinar $f(33)$ y $f(5)$: $f(33) = 0$; $f(5) = 0$.

Veamos si podemos calcular el valor de $\int_5^{33} f(x)\,dx$?

como $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$, se verificará:

$$\int_5^{33} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_5^{33} = F(33) - F(5) \quad ; \quad \int_5^{33} f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_5^{33} = G(33) - G(5) \qquad [2]$$

es decir, que $F(33) - F(5) = G(33) - G(5)$. [3]

por otro lado sabemos que $G(x) = 3 - F(x)$, lo que significa que:

$$G(33) = 3 - F(33) \quad ; \quad G(5) = 3 - F(5)$$

sustituyendo estas expresiones en [3]:

$F(33) - F(5) = 3 - F(33) - 3 + F(5) \quad \Rightarrow \quad 2\,F(33) = 2\,F(5) \quad \Rightarrow \quad F(33) = F(5)$

y lógicamente también se satisface que $G(33) = G(5)$, por lo que sustituyendo en [2]:

$$\int_5^{33} f(x)\,dx = F(33) - F(5) = 0 \quad ; \quad \int_5^{33} f(x)\,dx = G(33) - G(5) = 0$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Si la recta $3x - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ en el punto P=(1,5), significa que este punto satisface la ecuación de la parábola por ser un punto de ella:

$y = ax^2 + c \quad \Rightarrow \quad 5 = a\cdot 1^2 + c \quad \Rightarrow \quad 5 = a + c$ [1]

Como la recta es tangente, significa que su pendiente coincide con la derivada de la parábola en el punto de abscisa 1:

$3x - y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad$ pendiente = m = 3

$y = ax^2 + c \quad \Rightarrow \quad y´(x) = 2ax \quad \Rightarrow \quad y´(1) = 2a\cdot 1 = 2a$

igualemos pendiente y derivada en el punto 1: $3 = 2a \quad \Rightarrow \quad$ **a = 3/2**.

Sustituyendo este valor en [1]: $5 = a + c \quad \Rightarrow \quad 5 = 3/2 + c \quad \Rightarrow \quad$ **c = 7/2**.

(2) Para dibujar la gráfica de la parábola $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$, calcularemos los puntos de corte con los ejes de abscisas y de ordenadas, así como el vértice V.

* Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 7/2 \Rightarrow$ A(0, 7/2).
* Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{7}{3}}$
* Coordenadas del vértice V:

$x = -b/2a = 0/3 = 0 \Rightarrow y = 7/2 \Rightarrow$ V(0, 7/2).

* Otro punto orientativo podría ser: $x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow$ B(1, 5).

Representemos la recta $2y = 6x + 5$.

* Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 5/2 \Rightarrow$ C(0, 5/2).
* Punto de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x=-5/6; \Rightarrow$ D(-5/6, 0).

Las gráficas de la parábola y la de la recta, están situadas a continuación.

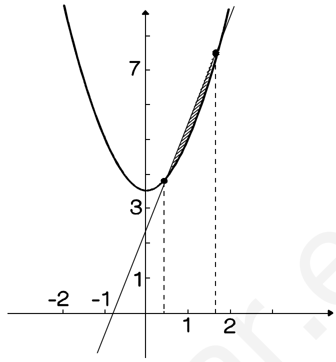
Calculemos los puntos de corte de la parábola y de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{7}{2} \\ 2y=6x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{7}{2}\right)=6x+5$$

$$3x^2+7=6x+5 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-6x+2=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\begin{cases} 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

La región plana limitada por ambas gráficas se corresponde con la zona rayada.



(3) El área de la región rayada es:

$$\text{Área }=\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[3x+\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}\right)\right]dx=\int_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(-\frac{3}{2}x^2+3x-1\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-x\right]_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

(Nota: se recomienda el uso de calculadora u ordenador para la obtención final del resultado).

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Calculemos una matriz X que verifique $A^2 + AX = I$.

Sumemos a ambos miembros la matriz $-A^2$: $A^2 + AX - A^2 = I - A^2$

por la propiedad conmutativa de la suma de matrices: $A^2 - A^2 + AX = I - A^2 \Rightarrow AX = I - A^2$. Si la matriz A tiene inversa, A^{-1}, podríamos multiplicar por ella.

Para comprobar si A tiene inversa lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $2 \cdot$ [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 2
Multipliquemos la 2ª fila por -1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando en la expresión AX = I - A^2, por la inversa de A, A^{-1}, tendremos:

$$AX = I - A^2 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}(I - A^2) \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}(I - A^2)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

(2) Para calcular, si existe, la inversa de X lo haremos mediante Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz está diagonalizada.
Multipliquemos la 1ª y 2ª fila por -1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz X tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sabiendo que el módulo del producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, representa el área del paralelogramo que determinan, podemos aplicar este concepto al cálculo del área de un triángulo. Al conocer las coordenadas de los tres vértices, A, B y C, del triángulo podremos obtener las coordenadas de los vectores, por ejemplo, $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, el módulo del producto vectorial de dichos vectores nos daría el área del paralelogramo que formarían los dos vectores, y la mitad de dicha área representaría el área del triángulo ABC.

$$\text{Área del triángulo ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

(2) Calculemos primeramente las coordenadas de los vectores, $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} = (1, 0, 1) - (-1, 0, 0) = (2, 0, 1)$$
$$\vec{AC} = (0, 2, 3) - (-1, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

el producto vectorial de ambos vectores es:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, 0, 1) \times (1, 2, 3) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, -5, 4)$$

$$\text{Área del triángulo ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

SOLUCIONES Opción B

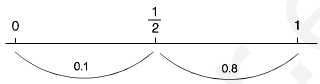
SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Para ver los intervalos en los que aumenta o disminuye el rendimiento, calcularemos los valores que anulan a la primera derivada de la función *r(t)*.

$r(t) = 300t\,(1\text{-}t)$ con $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow$ $r'(t) = 300\,(1\text{-}t) - 300t$ $\Rightarrow$ $r'(t) = 300 - 600t$

$$300 - 600t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1/2$$

este valor de t lo llevamos sobre la recta real pero considerando sólo el intervalo [0, 1] que es el dominio de la función *r(t)*, y construimos los dos posibles intervalos de crecimiento o decrecimiento.



Probemos valores intermedios de dichos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, la función será creciente o decreciente:

$r'(0.1) = 300 - 600 \cdot 0.1 = 240 > 0$ $\Rightarrow$ El rendimiento aumenta en [0, 1/2)

$r'(0.8) = 300 - 600 \cdot 0.8 = -180 < 0$ $\Rightarrow$ El rendimiento disminuye en (1/2, 1]

(2) Al ser la función *r(t)* continua y derivable en su dominio, por ser polinómica, y según el estudio anterior, vimos que en el punto $t = 1/2$, al pasar la función de aumentar a disminuir, se produce un máximo relativo en dicho punto $t = 1/2$ hora, que también será máximo absoluto.

El valor del rendimiento en dicho instante es:

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = 300 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 75$$

(3) Se trata de igualar a cero la función *r(t)*, es decir, de resolver la ecuación:

$300t\,(1\text{-}t) = 0$ $\Rightarrow$ $t = 0$; $1\text{-}t = 0$ $\Rightarrow$ $t = 0$ horas ; $t = 1$ hora

en estos dos instantes el rendimiento es nulo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas, (0,0), significa que se satisface lo siguiente: $f(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow 0 = c$

Si las tangentes en los puntos de abscisa x=1 y x=-3 son paralelas a la bisectriz del 2º y 4º cuadrante, esto implica que la derivada de la función en dichos puntos coincide con la pendiente, m=-1, de la recta bisectriz, y=-x, es decir:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} \nearrow f'(1) = 3 + 2a + b & \Rightarrow -1 = 3 + 2a + b \\ \searrow f'(-3) = 3(-3)^2 + 2a(-3) + b & \Rightarrow -1 = 27 - 6a + b \end{cases}$$

Simplifiquemos estas dos últimas ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = -4 \\ -6a + b = -28 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su resolución mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ -6 & 1 & -28 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -40 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 4 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $4 \cdot$ [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 0 & 24 \\ 0 & 4 & -40 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 1ª fila por 8
Simplifiquemos la 2ª fila por 4

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, es un sistema compatible determinado, la solución es: a = 3 ; b = -10.

Es decir, la función es: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$

(2) Representemos la función $y = x^3 + 3x^2 - 10x$.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3+3x^2-10x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=x^3+3x^2-10x \Rightarrow 0=x(x^2+3x-10) \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x=0 \\ \searrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\begin{array}{l} \nearrow x=2 \\ \searrow x=-5 \end{array} \end{array}$$

luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: A(-5, 0); B(0, 0) y C(2, 0)

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^3 + 3x^2 - 10x \quad \Rightarrow \quad y = 0 + 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

3.- La función es continua en todo su dominio ya que es polinómica.

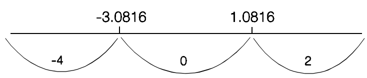
4.- Crecimiento y decrecimiento.

Hallemos la primera derivada: $y'(x) = 3x^2 + 6x$

Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada, que son:

$$3x^2 + 6x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+120}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{39}}{3} = \begin{array}{l} \nearrow\; x \approx 1.0816 \\ \searrow\; x \approx -3.0816 \end{array}$$

los llevamos ordenadamente sobre el eje de abscisas y construimos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento (Ver fig.). Probamos valores intermedios, por ejemplo -4, 0 y 2, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.



$$f'(-4) = 3(-4)^2 + 6(-4) - 10 = 14 > 0 \quad \Rightarrow \textit{creciente en } (-\infty, -3.0816)$$

$$f'(0) = 3\cdot 0^2 + 6\cdot 0 - 10 = -10 < 0 \quad \Rightarrow \textit{decreciente en } (-3.0816, 1.0816)$$

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 + 6\cdot 3 - 10 = 14 > 0 \quad \Rightarrow \textit{creciente en } (1.0816, \infty)$$

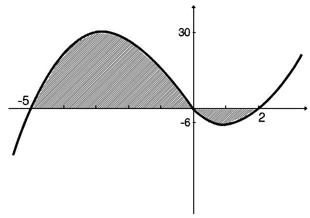
5.- Los máximos y mínimos se hallarían sustituyendo los valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero al ser continua y según el estudio sobre el crecimiento y decrecimiento anterior, tendremos:

máximo en (-3.8016, 30.0411) y mínimo en (1.0816, -6.0411).

Las ordenadas de estos extremos relativos se obtienen sustituyendo las abscisas correspondientes en la función *f(x)*.

6.- Al ser una función polinómica no presenta ningún tipo de asíntotas.

7.- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado. El recinto subrayado es el limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas.



Calculemos el área de dicho recinto. Hemos de tener en cuenta que hay que calcular el área, por separado, de la zona que está por encima del eje de abscisas de la que queda por debajo que es negativa.

$$Área = \int_{-5}^{0}\left(x^3+3x^2-10x\right)dx + \left|\int_{0}^{2}\left(x^3+3x^2-10x\right)dx\right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-10\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left|\left[\frac{x^4}{4}+x^3-5x^2\right]_{0}^{2}\right| =$$

$$= 0 - \left(\frac{(-5)^4}{4}+(-5)^3-5(-5)^2\right) + \left|\frac{2^4}{4}+2^3-5\cdot 2^2 - 0\right| = \frac{375}{4} + |-8| = \frac{407}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & k+2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & k & -6 & 5k \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & k+2 & -5 \\ 3 & k & -6 & 5k \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & k+6 & -15 \\ 0 & k-3 & 0 & 5k-15 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 2ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & k-3 & 0 & 5k-15 \\ 0 & 0 & k+6 & -15 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Algunos elementos de la diagonal principal pueden ser cero. Estudiemos los diferentes casos que se presentan.

* Si $a_{33} = 0$ ⇒ k+6 = 0 ⇒ **k=-6** ⇒ la última ecuación sería, 0=-15, que es absurda y en consecuencia es un sistema incompatible, no tiene solución, o sea, los tres planos no tienen ningún punto en común.

* Si $a_{33} \neq 0$ ⇒ k+6 ≠ 0 ⇒ **k≠-6** ⇒ la última ecuación no sería ni absurda ni trivial, pero el elemento a_{22} puede ser o no cero, es decir:

*** Si $a_{22} = 0$ ⇒ k-3 = 0 ⇒ **k=3** ⇒ la segunda ecuación (k-3)*y* = 5k-15, sería 0=0, que es trivial y se eliminaría, nos quedaría pues un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, o sea, los tres planos se cortan en una recta.

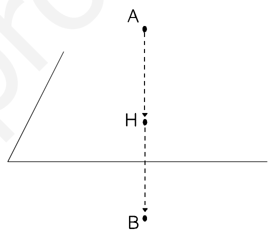
*** Si $a_{22} \neq 0 \Rightarrow$ k-3 ≠ 3 $\Rightarrow$ **k≠3** $\Rightarrow$ la segunda ecuación no es trivial ni absurda, el sistema tendrá tres ecuaciones y tres incógnitas, será compatible determinado, con solución única, luego los tres planos se cortan en un punto.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal al plano coincidirá con el de dirección de la recta: $\vec{n}_\Pi = (1, -1, 0) = \vec{v}_r$
luego la ecuación de la recta que tiene como vector de dirección al vector $\vec{v}_r$, y pasa por el punto A = (2, 0, 1) es:

$$r = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$$

(2) Al ser la recta r perpendicular al plano Π, la proyección del punto A de r sobre dicho plano nos da un punto H que verifica que $\vec{AH} \equiv \vec{HB}$, siendo B el simétrico del A respecto del plano Π.



El punto H lo obtenemos hallando la intersección de la recta r con el plano Π, es decir, resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 \\ 0 = x - y + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 0 = 2 + t - (-t) + 1 \ \Rightarrow \ t = -\frac{3}{2}$$

sustituyendo este valor de t en la ecuación de la recta obtenemos el punto H:

$$H = (2 + t, \ -t, \ 1) = \left(2 + \left(-\frac{3}{2}\right), \ -\left(-\frac{3}{2}\right), \ 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 1\right)$$

Apliquemos la condición anterior de $\vec{AH} \equiv \vec{HB}$, siendo B = (a, b, c)

$$\vec{AH} = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 1\right) - (2, 0, 1) = \left(-\frac{3}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 0\right)$$

$$\vec{HB} = (a, b, c) - \left(\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 1\right) = \left(a - \frac{1}{2}, \ b - \frac{3}{2}, \ c - 1\right)$$

identificando ambos vectores:

$$\left(-\frac{3}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 0\right) = \left(a - \frac{1}{2}, \ b - \frac{3}{2}, \ c - 1\right) \ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} = a - \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad a = -1 \\ \frac{3}{2} = b - \frac{3}{2} & \Rightarrow \quad b = 3 \\ 0 = c - 1 & \Rightarrow \quad c = 1 \end{cases}$$

luego el punto B, simétrico del A, tiene de coordenadas (-1, 3, 1).

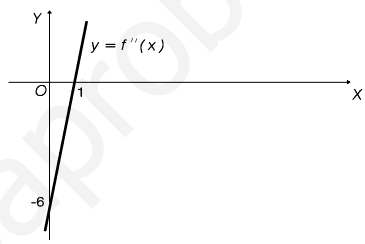
UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 13 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. La línea que pasa por los puntos (0,-6) y (1,0) (mira el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva $y=f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f.



EJERCICIO 2. **(1)** [1 PUNTO]. Explica en qué consiste el método de integración por partes.
(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula $\int x^2 \, Ln(x) \, dx,$

donde Ln(x) denota el logaritmo neperiano de un número positivo x.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano que es paralelo al vector u=(1,2,3) y contiene a la recta que pasa por el punto P=(1,1,1) y es paralela al vector v=(1,1,1).
(2) [1´25 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P=(1,1,1) y es perpendicular al vector u=(1,2,3).

EJERCICIO 4. De una matriz cuadrada de orden 3 se sabe que su determinante vale 4.
(1) [0´5 PUNTOS]. Explica cuánto vale el determinante de la matriz 3A.
(2) [1 PUNTO]. Si B es la matriz inversa de A, explica cuánto vale el determinante de B.
(3) [1 PUNTO]. Al aplicar el método de eliminación de Gauss a la matriz A, al final del proceso obtenemos, sin que haya habido intercambio de filas ni de columnas, la matriz

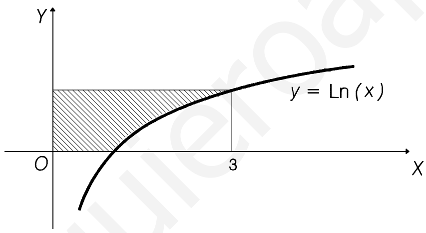
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

¿Cuánto vale α? Justifica la respuesta.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. En las páginas de un libro ha de imprimirse un texto que ocupa 200 cm^2. Los márgenes laterales han de ser de 4 cm. y los márgenes superior e inferior de 6 cm. cada uno. Calcula las dimensiones de cada página para que la cantidad de papel necesario sea mínima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula el área de la región rayada en la figura y justifica el procedimiento empleado (Ln(x) es el logaritmo neperiano de x.)



EJERCICIO 3. **(1)** [1 PUNTO]. Explica brevemente el concepto de independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$ y enuncia alguna condición equivalente a que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes.

(2) [1´5 PUNTOS]. Escribe el vector b como combinación lineal de los vectores u, v y w, siendo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4. Considera los planos de ecuaciones

$$\Pi_1 : x + \beta y + z = 0 \qquad \Pi_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \qquad y \qquad \Pi_3 : x + y - 2z - 15 = 0$$

(1) [1´25 PUNTOS]. Determina β de forma que los tres planos tengan una recta en común.

(2) [1´25 PUNTOS]. Determina si para algún valor de β el plano Π_1 es perpendicular a los otros dos planos.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Obtengamos la expresión de la función segunda derivada, que al ser una recta será de la forma $y = mx + n$.

Sabemos que pasa el punto (0, -6) luego: $-6 = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = -6$.

Sabemos que pasa el punto (1, 0) luego: $0 = m \cdot 1 - 6 \Rightarrow m = 6$.

Por tanto, la función segunda derivada es: $f''(x) = 6x - 6$

La función primera derivada la calcularemos integrando la segunda derivada.

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (6x-6)\,dx = 6\frac{x^2}{2} - 6x + k = 3x^2 - 6x + k$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + k$$

Como la pendiente de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto 0 es 3, significa que la derivada de la función *f* en el punto 0 vale también 3, es decir:

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + k \quad \Rightarrow \quad 3 = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

La función *f(x)* la calcularemos integrando la función primera derivada.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2 - 6x + 3)\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^3 - 3x^2 + 3x + C$$

Como el origen pertenece a la función *f(x)*, significa que sus coordenadas (0, 0) satisfacen la función *f*:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + C \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = C$$

es decir, una expresión de la función *f* es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Describamos el método de la integración por partes.

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, *u(x)* y *v(x)* es:

$$D\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

expresemos la fórmula anterior en notación diferencial.

$$d\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

despejemos el último sumando.

$$u(x) \cdot dv(x) = d\left[u(x) \cdot v(x)\right] - v(x) \cdot du(x)$$

integremos los dos miembros de la igualdad

$$\int u(x) \cdot dv(x) = \int d\left[u(x) \cdot v(x)\right] - \int v(x) \cdot du(x)$$

teniendo en cuenta que la integral de la diferencial de una función es la propia función, nos quedará:

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

que más abreviadamente podemos expresar así:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

fórmula que usaremos cuando podamos interpretar que la 1ª integral es de la forma, $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx$, y que la segunda, $\int v(x) \cdot u'(x)\,dx$, es más sencilla que la 1ª.

(2) Calculemos la integral siguiente por el método de integración por partes.

$$\int x^2\ Ln(x)\ dx = \qquad [1]$$

$$u = Ln(x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2 dx \quad ; \quad v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

continuando en [1], tendremos:

$$= \frac{x^3}{3}Ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}Ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}Ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Si el plano es paralelo al vector u=(1,2,3), este vector será un vector de dirección del plano. Si contiene a la recta que pasa por P=(1,1,1) y es paralela al vector v=(1,1,1), significa que un punto del plano es el P, y otro vector de dirección del mismo es el v, es decir, la ecuación del plano en forma paramétrica es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

(2) Si un plano es perpendicular al vector u=(1,2,3), significa que este vector es un vector normal al plano, es decir:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 3z + D = 0$$

Como el plano pasa por el punto P=(1,1,1), las coordenadas del punto satisfacen la ecuación del plano: $x + 2y + 3z + D = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -6$

La ecuación del plano, finalmente, será: $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sea A la matriz cuadrada de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

de la que sabemos que su determinante vale 4, es decir, $|A|=4$.

Calculemos el determinante de la matriz 3A.

$$3A = 3\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3^3\cdot 4 = 108$$

hemos tenido en cuenta la propiedad de que para multiplicar un número por una matriz se multiplican todos sus elementos por dicho número; y la propiedad de que si los elementos de una fila o columna de un determinante tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante.

(2) Si B es la matriz inversa de A, es decir, $B = A^{-1}$, calculemos $|B|$.

Es evidente que $A \cdot A^{-1} = I$, o lo que es lo mismo, $A \cdot B = I$.

Teniendo en cuenta que el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de cada una de las matrices, tendremos:

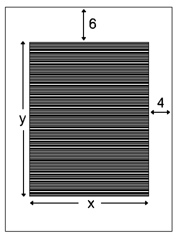
$$|A \cdot B| = |I| \quad \Rightarrow \quad |A| \cdot |B| = |I| \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot |B| = 1 \quad \Rightarrow \quad |B| = 1/4.$$

(3) Al no haber intercambio de filas ni de columnas en el cálculo del determinante de una matriz por Gauss no se produce ningún cambio en el signo del determinante. No obstante, si en el proceso de reducción hemos multiplicado una fila previamente por un número, el determinante quedaría multiplicado por esa constante, no sabemos si se ha producido esto o no, porque en el ejercicio se ha aplicado Gauss a una matriz y se ha obtenido otra equivalente que tendrá el mismo rango, es decir, 3, pero no se especifica que se ha aplicado Gauss en el sentido estricto del cálculo del determinante de una matriz; lo que está claro es que α será distinto de cero, y que si no hemos sustituido ninguna fila previamente multiplicada por ninguna constante, el determinante de A sería el producto de los elementos de la diagonal principal, o sea:

$$2 \cdot (-2) \cdot \alpha = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



La función, cantidad de papel, que queremos sea mínima, es:

$$C = (x+8)(y+12)$$

como el ejercicio nos dice que el texto ocupa 200 cm^2:

$$x \cdot y = 200 \quad \Rightarrow \quad y = 200/x$$

sustituyendo este valor de y en la función, tendremos

$$C(x) = (x+8)\left(\frac{200}{x} + 12\right) \Rightarrow C(x) = 12x + \frac{1600}{x} + 296$$

Calculemos los valores de x que hacen mínima esta función, de dominio: Dom $C(x) = (0,+\infty)$

$$C'(x) = 12 - \frac{1600}{x^2} \Rightarrow 12 - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1600}{12} = \frac{400}{3} \Rightarrow x = \frac{20}{3}\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Estudiemos la monotonía de $C(x)$, que es continua y derivable en su dominio:

$C'(1) = 12 - 1600/1^2 = -1588 < 0 \quad \Rightarrow \quad C'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad C(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$

$C'(40) = 12 - 1600/40^2 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad C'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad C(x)$ es creciente en $\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

luego hay un mínimo relativo en $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, que es a su vez mínimo absoluto de la función.

Las dimensiones de cada página deben ser de

$$ancho = x + 8 = \frac{20}{3}\sqrt{3} + 8 \;\; cm$$

$$largo = y + 12 = \frac{200}{\frac{20}{3}\sqrt{3}} + 12 = 10\sqrt{3} + 12 \;\; cm$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

El punto de corte de la función *y = Ln(x)* con el eje de abscisas es el (1, 0).

El área de la región rayada es:

$$Área = 3 \cdot Ln(3) - \int_1^3 Ln(x)\,dx = \qquad [1]$$

resolvamos la integral definida mediante el método de integración por partes.

$$u = Ln(x) \;\; ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dx = x$$

continuando en [1], tendremos:

$$= 3\,Ln(3) - \left[x\,Ln(x) - x\right]_1^3 = 3\,Ln(3) - [3\,Ln(3) - 3 - (Ln(1) - 1)] = 2$$

La justificación del método utilizado consiste en lo siguiente:

La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, *u(x)* y *v(x)* es:

$$D\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

expresemos la fórmula anterior en notación diferencial.

$$d\left[u(x) \cdot v(x)\right] = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

despejemos el último sumando.

$$u(x) \cdot dv(x) = d\left[u(x) \cdot v(x)\right] - v(x) \cdot du(x)$$

integremos los dos miembros de la igualdad

$$\int u(x) \cdot dv(x) = \int d\left[u(x) \cdot v(x)\right] - \int v(x) \cdot du(x)$$

teniendo en cuenta que la integral de la diferencial de una función es la propia función, nos quedará:

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

que más abreviadamente podemos expresar así:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Decimos que un conjunto de vectores de R^3, v_1, v_2, ..., v_n, son linealmente independientes si toda combinación lineal de ellos, nula,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

implica que todos los coeficientes reales, a_1, a_2, ..., a_n, son cero.

Una condición equivalente a la anterior por la que tres vectores de R^3 son linealmente independientes es que el determinante formado por las componentes de dichos vectores es distinto de cero. Otra podría ser que el rango de la matriz formada por dichas componentes sea tres.

(2) La combinación lineal, en principio, sería:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \alpha - \gamma \\ -7 = -\alpha + 2\beta - \gamma \\ 7 = 2\alpha + 6\beta + 3\gamma \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su resolución mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2
Simplifiquemos la 3ª fila por 11

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, es un sistema compatible determinado, con solución única, siendo la solución:

$$\alpha = 2 \quad ; \quad \beta = -1 \quad ; \quad \gamma = 3$$

La combinación lineal, finalmente, es

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para determinar β de forma que los tres planos se corten en una recta, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de los planos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z-15=0 \\ 2x-3y+z-5=0 \\ x+\beta y+z=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su discusión mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 15 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & \beta & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & -25 \\ 0 & \beta-1 & 3 & -15 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & \beta-1 & 3 & -15 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (β-1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \beta+2 & -5(\beta+2) \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0$ ⇒ β + 2 = 0 ⇒ β = -2 ⇒ la última ecuación será de la forma, 0 = 0, que es una ecuación trivial y la podemos eliminar, nos quedaría un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es por tanto un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la solución en este caso es precisamente una recta, la recta común a los tres planos.

* Si $a_{33} \neq 0$ ⇒ β + 2 ≠ 0 ⇒ β ≠ -2 ⇒ la última ecuación es una ecuación que no es ni trivial ni absurda, nos quedaría un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, sería un sistema compatible determinado, con solución única y en este caso los tres planos se cortarían en un punto.

(2) Para que el plano Π_1 sea perpendicular a los otros dos, se ha de verificar que su vector normal ha de ser perpendicular a los vectores normales de cada uno de los otros dos planos, es decir, el producto escalar del vector normal al plano Π_1 con cada uno de los otros ha de ser cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\Pi_1} \perp \vec{n}_{\Pi_2} \Rightarrow \vec{n}_{\Pi_1} \cdot \vec{n}_{\Pi_2} = 0 \Rightarrow (1,\beta,1)\cdot(2,-3,1) = 0 \Rightarrow 2-3\beta+1=0 \\ \vec{n}_{\Pi_1} \perp \vec{n}_{\Pi_3} \Rightarrow \vec{n}_{\Pi_1} \cdot \vec{n}_{\Pi_3} = 0 \Rightarrow (1,\beta,1)\cdot(1,1,-2) = 0 \Rightarrow 1+\beta-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{array}\right\}$$

hemos obtenido un mismo valor de β en ambas ecuaciones, lo que significa que para β=1 el plano Π_1 es perpendicular a los planos Π_2 y Π_3.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 14 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2+2x+4$ Determina los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas y halla las ecuaciones de dichas tangentes.

EJERCICIO 2. Considera la función f definida para $x \neq -2$ por la relación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2}$$

(1) [1´25 PUNTOS]. Halla los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los extremos locales de f.

(2) [1´25 PUNTOS]. Calcula $\int_2^6 f(x)\, dx$.

EJERCICIO 3. Considera las rectas

$$r : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 2y - 3z = 8; \end{cases} \qquad y \qquad s : \begin{cases} \beta x - y - z = 1, \\ x - y + z = -2. \end{cases}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. ¿Para qué valor del parámetro β se cortan las rectas r y s?

(2) [0´75 PUNTOS]. Para el valor de β hallado en el apartado anterior, calcula el punto de corte de ambas rectas.

EJERCICIO 4. Sean los puntos P=(1,0,1), Q=(0,1,-3) y R=(0,3,0).

(1) [1´25 PUNTOS]. Calcula el punto P´ que es la proyección del punto P sobre la recta que determinan Q y R.

(2) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de P y de R.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Se desea construir un depósito cilíndrico sin tapa que tenga

2 m³. de volumen. Determina la altura del depósito y el radio de su base para que la cantidad de material empleado en su construcción sea mínima.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina los valores de m para los que el área de la región limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = mx$ es 1.

EJERCICIO 3. **(1)** [1 PUNTO]. Determina el valor de β para el cual los planos cuyas ecuaciones se dan a continuación contienen una misma recta;

$$x + y = 1,$$
$$\beta y + z = 0,$$
$$x + (\beta + 1)y + \beta z = \beta + 1.$$

(2) [1 PUNTO]. Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a la que se refiere el apartado anterior.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Dados los puntos A=(1,0,0), B=(0,2,0) y C=(0,03), sean A´ el simétrico de A respecto de B, B´ el simétrico de B respecto de C y C´ el simétrico de C respecto de A. Halla la ecuación del plano que pasa por A´, B´ y C´.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Vamos a obtener todas las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 + 2x + 4$ que pasan por el punto (0, 0).

Sean $P_i\,(x_i, y_i)$ los puntos de la curva donde las rectas tangentes a la misma pasan además por el punto (0, 0). Las ecuaciones de esas rectas tangentes vienen dadas por la expresión:

$$y - y_i = f\,'(x_i)\ (x - x_i) \qquad [1]$$

Calculemos las pendientes $f'(x_i)$ de esas rectas tangentes:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f\,'(x_i) = 2x_i + 2$$

sustituyamos las pendientes calculadas en las ecuaciones [1]:

$$y - y_i = (2x_i + 2)\ (x - x_i) \qquad [2]$$

Teniendo en cuenta que los puntos P_i pertenecen a la curva $f(x) = x^2 + 2x + 4$, podemos deducir la relación existente entre la abscisa y la ordenada de cada punto, sin más que sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación de la curva:

$$y_i = x_i^2 + 2x_i + 4 \qquad [3]$$

si ahora sustituimos a su vez estos valores en [2], tendremos:

$$y - (x_i^2 + 2x_i + 4) = (2x_i + 2)\ (x - x_i) \qquad [4]$$

Impongamos ahora la condición de que todas estas rectas tangentes pasen por el punto (0, 0), bastará pues sustituir la x e y por 0 y 0 respectivamente en [4]:

$$0 - (x_i^2 + 2x_i + 4) = (2x_i + 2)(0 - x_i)$$

resolvamos esta última ecuación:

$$-x_i^2 - 2x_i - 4 = -2x_i^2 - 2x_i \quad \Rightarrow \quad x_i^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_i = 2 \quad ; \quad x_i = -2$$

hemos obtenido las abscisas de dos puntos de la curva, para obtener las ordenadas sustituiremos estas abscisas en la función o bien en [3]:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad P_1(2, 12) \\ x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = (-2)^2 + (-2) \cdot 2 + 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad P_2(-2, 4) \end{cases}$$

finalmente, las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 + 2x + 4$, en los puntos anteriormente calculados, y que pasan por el punto (0, 0) son, según [2]:

$$y - 12 = (4 + 2)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 6x$$
$$y - 4 = (-4 + 2)(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = -2x.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Para calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, necesitamos la función primera derivada:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x + 2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(8x + 3)(x + 2) - (4x^2 + 3x - 9)}{(x + 2)^2} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 19x + 6 - 4x^2 - 3x + 9}{(x + 2)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x^2 + 16x + 15}{(x + 2)^2}$$

Obtengamos el valor que anula a esta derivada:

$$4x^2 + 16x + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 240}}{8} = \frac{-16 \pm 4}{8} = \begin{matrix} \nearrow x = -\frac{5}{2} \\ \searrow x = -\frac{3}{2} \end{matrix}$$

Los puntos que tomaremos como referencia para la construcción de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento serán los que anulan a la derivada, x=-1.5 y x=-2.5, y el punto en el que no está definida la función, x=-2. Los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento son:]-∞, -2.5[,]-2.5, -2[,]-2, -1.5[y]-1.5, ∞[.

Elijamos valores intermedios de cada uno de esos intervalos y sustituyámoslos en la primera derivada, según nos salga mayor o menor que cero, la función en el intervalo correspondiente será creciente o decreciente. Veámoslo:

$$f'(-3) = \frac{4(-3)^2 + 16(-3) + 15}{(-3 + 2)^2} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \text{Creciente en }]-\infty, -2.5[$$

$$f'(-2.1) = \frac{4(-2.1)^2 + 16(-2.1) + 15}{(-2.1 + 2)^2} = -96 < 0 \quad \Rightarrow \text{Decreciente en }]-2.5, -2[$$

$$f'(-1.6) = \frac{4(-1.6)^2 + 16(-1.6) + 15}{(x + 2)^2} = -2.25 < 0 \quad \Rightarrow \text{Decreciente en }]-2, -1.5[$$

$$f'(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 + 15}{(0 + 2)^2} = 3.75 > 0 \quad \Rightarrow \text{Creciente en }]-1.5, \infty[$$

Los extremos locales hay que localizarlos entre los puntos de derivada cero, los de no derivabilidad o en los de no continuidad. En nuestro caso, sólo en los de derivabilidad cero, porque en el -2 no existe la función.

Los valores que anulaban a la primera derivada eran, $x = -5/2$ y $x = -3/2$, ya en el primero de ellos la función pasa de ser creciente a decreciente, y en el segundo de decreciente a creciente, no es preciso, por tanto, comprobar el signo de la segunda derivada en dichos puntos para deducir que

$$x=-2.5\ ;\ f(-2.5)=\frac{4(-2.5)^2+3(-2.5)-9}{-2.5+2}=-17 \Rightarrow \textit{Máximo relativo}\ (-2.5,\ -17)$$

$$x=-1.5\ ;\ f(-1.5)=\frac{4(-1.5)^2+3(-1.5)-9}{-1.5+2}=-9 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo}\ (-1.5,\ -9)$$

(2) La integral racional es impropia, efectuemos la división.

$$\int_2^6 \frac{4x^2+3x-9}{x+2}\,dx = \int_2^6 \left(4x-5+\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$\begin{array}{rr|l} 4x^2+3x-9 & & x+2 \\ \hline -4x^2-8x & & 4x-5 \\ \hline -5x & & \\ 5x+10 & & \\ \hline 1 & & \end{array}$$

$$=\left[4\frac{x^2}{2}-5x+Ln|x+2|\right]_2^6 =$$

$$=72-30+Ln(2^3)-(8-10+Ln(2^2))=42+3Ln(2)+2-2Ln(2)=44+Ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para determinar el valor de β de forma que las rectas r y s se corten en un punto, lo haremos discutiendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ \beta x-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su discusión mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ \beta & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - β · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -1-\beta & -1-\beta & 1-2\beta \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (1+β) · [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -5-5\beta & 7+4\beta \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 3ª y 4ª, simplificando previamente por 8.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5-5\beta & 7+4\beta \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ª f.] + (-5-5β) ·[3ª f.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, hay cuatro ecuaciones y tres incógnitas, para que las dos rectas se corten en un punto el sistema debe ser compatible determinado, con solución única, lo que significa que la última ecuación tiene que ser trivial, es decir, 0 = 0, luego $2 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2$.

(2) Calculemos el punto de corte de ambas rectas para $\beta = 2$, el sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

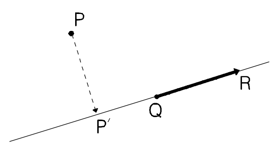
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 1 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = -1$$

luego el punto de corte de ambas rectas es e l P = (1, 2, -1)

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-



(1) Obtengamos la ecuación de la recta r que determinan los puntos Q=(0, 1, -3) y R=(0, 3, 0).

El vector de dirección de la recta r será $\vec{u} = \vec{QR}$

$$\vec{QR} = (0,\ 3,\ 0) - (0,\ 1,\ -3) = (0,\ 2,\ 3)$$

la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

El punto P´ proyección del P, sobre la recta r, cumple la condición de que el vector $\vec{PP}´$ es perpendicular al vector $\vec{QR} = (0,\ 2,\ 3)$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto P´ por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(0,\ 3+2t,\ 3t)$.

El vector $\vec{PP}´$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{PP}´ = (0,\ 3+2t,\ 3t) - (1,\ 0,\ 1) = (-1,\ 3+2t,\ 3t-1)$$

El producto escalar de los vectores $\vec{PP}´$ y $\vec{u}$ es cero:

$$\vec{PP}´ \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-1,\ 3+2t,\ 3t-1)\cdot(0,\ 2,\ 3) = 0 \Rightarrow 6+4t+9t-3 = 0 \Rightarrow t = -3/13$$

sustituyamos t en el punto P´, sus coordenadas serán

$$(0,\ 3+2t,\ 3t) = \left(0,\ 3-\frac{6}{13},\ -\frac{9}{13}\right) = \left(0,\ \frac{33}{13},\ -\frac{9}{13}\right)$$

(2) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de P y de R es el plano mediador del segmento que determinan ambos puntos.

Calculemos el punto medio, M, del segmento PR; se verificará que

$$\vec{PM} = \vec{MR} \;\Rightarrow\; (a, b, c) - (1, 0, 1) = (0, 3, 0) - (a, b, c) \;\Rightarrow$$

$$(a-1,\, b,\, c-1) = (-a,\, 3-b,\, -c) \;\Rightarrow \begin{cases} a-1 = -a & \Rightarrow\; a = \frac{1}{2} \\ b = 3-b & \Rightarrow\; b = \frac{3}{2} \\ c-1 = -c & \Rightarrow\; c = \frac{1}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; M = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Obtengamos ahora el vector $\vec{PR}$ que determinan los puntos P y R

$$\vec{PR} = (0, 3, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 3, -1)$$

este vector coincidirá con el vector normal al plano mediador, cuya ecuación será

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -x + 3y - z + D = 0$$

impongámosle a este plano que pase por el punto M

$$-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{7}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -x + 3y - z - \frac{7}{2} = 0$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construyamos la función que queramos sea mínima, es decir, la función superficie

$$S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \qquad [1]$$

teniendo en cuenta la condición de problema, que el volumen es 2 m^3, tendremos

$$V = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad 2 = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{\pi r^2}$$

sustituyamos esta expresión en [1]

$$S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad S(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$$

Calculemos el valor que haga mínima esta función, cuyo dominio es]0, +∞[

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{4}{r^2} \;\Rightarrow\; 2\pi r - \frac{4}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\pi r^3 - 4}{r^2} \;\Rightarrow\; 2\pi r^3 - 4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$2\pi r^3 = 4 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0'860254...$$

Estudiemos la monotonía de la función *S(r)* que es continua y derivable en su dominio.

$S'(0'1) = 2\pi\cdot 0'1 - 4/0'1^2 = -399.37 < 0 \;\Rightarrow\; S'(r) < 0 \;\Rightarrow\;$ *S(r)* es decreciente en]0, 0´86[

$S'(1) = 2\pi\cdot 1 - 4/1^2 = 2'28 > 0 \;\Rightarrow\; S'(r) > 0 \;\Rightarrow\;$ *S(r)* es creciente en]0´86, +∞[

luego hay un mínimo relativo en $r = 0'8602...$, que a su vez es mínimo absoluto de la función.

Calculemos finalmente la altura del depósito cilíndrico

$$h = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi \cdot 0'860254^2} \approx 0'860254...$$

es decir, en este caso, la altura y el radio deben tener las mismas dimensiones

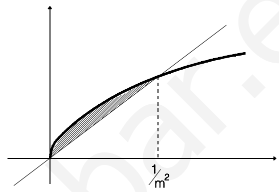
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos el punto de corte de la parábola $y^2 = x$, o de la función $y = \sqrt{x}$, con la recta $y = mx$. Resolvamos el sistema formado por ambas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y = mx \\ y = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow mx = \sqrt{x} \Rightarrow m^2x^2 = x \Rightarrow m^2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(m^2x - 1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = \dfrac{1}{m^2} \end{array}$$

La gráfica de la función $y = \sqrt{x}$, y la de la recta $y = mx$, es la situada al lado.

Determinemos m sabiendo que el área rayada vale 1.



$$\int_0^{\frac{1}{m^2}} \left(\sqrt{x} - mx\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{mx^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{m^2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m^2}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{m^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{m^3} = \frac{1}{6m^3}$$

igualemos esta última expresión a 1 que es el valor del área

$$\frac{1}{6m^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad m^3 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} \approx 0´550321...$$

Si hubiésemos considerado el trozo de parábola $y = -\sqrt{x}$, m valdría -0.550321...

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Expresemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta+1 & \beta & \beta+1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & \beta \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{array}{c} (x)\,(z)\,(y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta & \beta \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - β · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} (x)\,(z)\,\,(y) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\beta^2 & \beta \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse

* Si $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta - \beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(1 - \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$ y $\beta = 1$.

** Si $\beta = 0$, la última ecuación es trivial, 0=0, se elimina, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, los tres planos se cortan en una recta.

** Si $\beta = 1$, la última ecuación es absurda, 0=1, se trata de un sistema incompatible, es decir, los tres planos no tienen ningún punto en común.

* Si $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta - \beta^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(1-\beta) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \neq 0$ y $\beta \neq 1$. Para todos los valores de β distintos de 0 y 1 la última ecuación no es ni trivial ni absurda, el sistema sería un sistema compatible determinado, con solución única, es decir, los tres planos se cortan en un punto.

(2) Calculemos la recta común a los tres planos, para β=0. Sustituyamos este valor en el sistema triangulado inferiormente y terminemos de resolverlo.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\beta^2 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

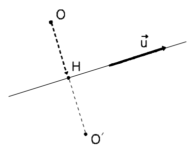
el sistema está diagonalizado, nos sobra una incógnita, la *y*, que la pasamos al segundo miembro como parámetro.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-y \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $x = 1-y \quad ; \quad z = 0$

Sustituyendo la incógnita secundaria y por el parámetro t, obtendremos la ecuación de la recta común a los tres planos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$



El vector de dirección de la recta r será $\vec{u} = (-1,\ 1,\ 0)$

Sea H la proyección del punto O = (0,0,0) sobre la recta r, se cumple la condición de que el vector $\vec{OH}$ es perpendicular al vector $\vec{u}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(1-t,\ t,\ 0)$.

El vector $\vec{OH}$ tendrá de coordenadas:

$$\vec{OH} = (1-t,\ t,\ 0) - (0,\ 0,\ 0) = (1-t,\ t,\ 0)$$

El producto escalar de los vectores $\vec{OH}$ y $\vec{u}$ es cero:

$$\vec{OH} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-t,\ t,\ 0) \cdot (-1,\ 1,\ 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + t + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

sustituyamos t en el vector $\vec{OH}$, sus coordenadas serán

$$\vec{OH} = (1-t,\ t,\ 0) = \left(1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

sustituyámoslo también en el punto H:

$$(1-t,\ t,\ 0) = \left(1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

El punto O´ = (a, b, c) simétrico del O = (0,0,0), respecto de la recta r, cumple la condición de que los vectores $\vec{OH}$ y $\vec{HO´}$ son equivalentes, es decir,

$$\vec{OH} = \vec{HO} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (a, b, c) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2} & \Rightarrow a = 1 \\ \frac{1}{2} = b - \frac{1}{2} & \Rightarrow b = 1 \\ 0 = c - 0 & \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

luego el punto O´ es el (1, 1, 0).

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Si A´ es el simétrico del A respecto de B, tendremos que: $\vec{AB} = \vec{BA´}$, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \vec{BA´} = (a, b, c) - (0, 2, 0) = (a, b-2, c) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(-1, 2, 0) = (a, b-2, c) \Rightarrow \begin{cases} -1 = a & \Rightarrow a = -1 \\ 2 = b-2 & \Rightarrow b = 4 \\ 0 = c & \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

luego el punto A´ tiene de coordenadas A´= (-1, 4, 0).

Si B´ es el simétrico del B respecto de C, tendremos que: $\vec{BC} = \vec{CB´}$, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{BC} = (0, 0, 3) - (0, 2, 0) = (0, -2, 3) \\ \vec{CB´} = (d, e, f) - (0, 0, 3) = (d, e, f-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(0, -2, 3) = (d, e, f-3) \Rightarrow \begin{cases} 0 = d & \Rightarrow d = 0 \\ -2 = e & \Rightarrow e = -2 \Rightarrow \quad B´ = (0, -2, 6) \\ 3 = f-3 & \Rightarrow f = 6 \end{cases}$$

Si C´ es el simétrico del C respecto de A, tendremos que: $\vec{CA} = \vec{AC´}$, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{CA} = (1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (1, 0, -3) \\ \vec{AC´} = (g, h, i) - (1, 0, 0) = (g-1, h, i) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(1, 0, -3) = (g-1, h, i) \Rightarrow \begin{cases} 1 = g-1 & \Rightarrow g = 2 \\ 0 = h & \Rightarrow h = 0 \Rightarrow \quad C´ = (2, 0, -3) \\ -3 = i & \Rightarrow i = -3 \end{cases}$$

Para determinar el plano que pasa por A´, B´ y C´ necesitamos, por ejemplo, el punto A´y los vectores:

$$\vec{A´B´} = (0, -2, 6) - (-1, 4, 0) = (1, -6, 6)$$

$$\vec{A´C´} = (2, 0, -3) - (-1, 4, 0) = (3, -4, -3)$$

siendo, por tanto la ecuación del plano:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda + 3\mu \\ y = 4 - 6\lambda - 4\mu \\ z = 6\lambda - 3\mu \end{cases}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 15 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones

$$y = sen(x), \qquad y = \cos(x), \qquad x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\pi}{3}.$$

(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. Sea $f\,'$ la función derivada de una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que $f\,'$ es continua y que

(i) $f\,'(0)=0$, $f\,'(2)=1$, $f\,'(3)=0$, $f\,'(4)=-1$, $f\,'(5)=0$;
(ii) $f\,'$ es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty,2)$ y $(4,+\infty)$;
(iii) $f\,'$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(2,4)$;
(iv) la recta de ecuación $y = 2x+3$ es una asíntota oblicua de $f\,'$ cuando $x \to +\infty$.

(1) [1´25 PUNTOS]. Esboza la gráfica de $f\,'$.
(2) [1´25 PUNTOS]. ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Calcula, describiendo el procedimiento empleado, las ecuaciones de una recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta en que se cortan los planos

$$\pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0 \qquad y \qquad \pi_2 : x + 3y - z + 2 = 0.$$

EJERCICIO 4. Considera el sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ 3x - 4y - 2z &= -3. \end{aligned}$$

(1) [1 PUNTO]. Añade una ecuación lineal al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea incompatible.
(2) [1´5 PUNTOS]. Si añadimos al sistema dado la ecuación $mx + y - z = -1$ determina para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resuélvelo.

Opción B

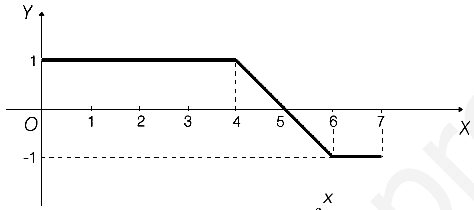
EJERCICIO 1. Determina el dominio y la expresión de la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

(1) [0´5 PUNTOS]. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos P=(0,5) y Q=(5,0).

(2) [1 PUNTO]. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x+1|x$.

(3) [1 PUNTO]. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x\,|x|$.

EJERCICIO 2. La figura siguiente representa la gráfica de una función $f : [0,7] \to \mathbb{R}$



Sea $F : [0,7] \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(1) [1 PUNTO]. Calcula $F(4)$ y $F(7)$.

(2) [1´5 PUNTOS]. Dibuja la gráfica de F explicando cómo lo haces.

EJERCICIO 3. Sean las rectas

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1} \qquad y \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}.$$

(1) [1 PUNTO]. ¿Para qué valores de m están r y s contenidas en un mismo plano?

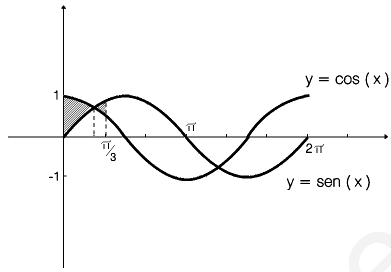
(2) [1´5 PUNTOS]. En el caso en que m=1, halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A=(1,1,2) y corta a r y s.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Una tienda vende una clase de calcetines a 1200 ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 597.600 ptas. y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Las gráficas de las funciones elementales *y = sen (x)*, e *y = cos (x)*, son las situadas al lado. El recinto que nos pide el problema se encuentra rayado.



(2) Calculemos el punto donde las gráficas se cortan, para obtener el área del recinto:

$$\left.\begin{array}{l} y = sen(x) \\ y = \cos(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \; sen(x) = \cos(x) \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} \;\; ; \;\; x = 5\frac{\pi}{4} \;\; ; \;\; \ldots.$$

El área será:

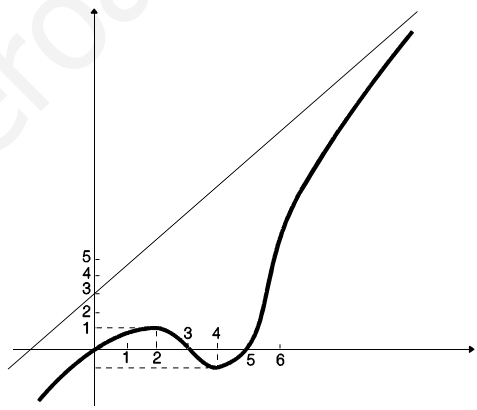
$$\int_0^{\pi/4} (\cos(x) - sen(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} (sen(x) - \cos(x))\, dx =$$

$$= \Big[sen(x) + \cos(x) \Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos(x) - sen(x) \Big]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (sen(0) + \cos(0)) + \left| -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1) + \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



(1) Sabemos que la función *f´(x)* es continua, y que posee unas determina-das características enunciadas en el problema, todas ellas han sido reflejadas en la gráfica adjunta, gráfica que se corresponde con la de la función *f´(x)*.

(2) Sabemos que la función *f(x)* al ser derivable es continua, y que *f ´(x)* es continua. Observemos la gráfica adjunta, correspondiente a la de *f ´(x)*, y deduciremos lo siguiente:

* *f ´(x)* = 0 en los puntos $x = 0$, $x = 3$ y $x = 5$, lo que implica que en estos puntos pueden presentarse máximos o mínimos relativos o locales de la función *f(x)*.

* *f ´(x)* < 0 en (-∞, 0) ⇒ *f(x)* es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

* *f ´(x)* > 0 en (0, 3) ⇒ *f(x)* es estrictamente creciente en dicho intervalo.

* *f ´(x)* < 0 en (3, 5) ⇒ *f(x)* es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

* *f ´(x)* > 0 en (5, ∞) ⇒ *f(x)* es estrictamente creciente en dicho intervalo.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto diremos que:

-- En el punto $x = 0$, la $f´(0) = 0$, y además la función *f(x)* pasa de decreciente a creciente, por tanto existe un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$.

-- En el punto $x = 3$, la $f'(3) = 0$, y además la función $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, por tanto existe un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 3$.
-- En el punto $x = 5$, la $f'(5) = 0$, y además la función $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, por tanto existe un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 5$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Si la recta, r, que me piden es paralela a la recta intersección de dos planos, significa que el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos, nos dará el vector de dirección de dicha recta intersección, por lo que dicho vector podremos tomarlo como vector de dirección de la recta paralela.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = (1,-1,2) \times (1,3,-1) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= (-5, 3, 4)$$

La ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas (0,0,0) es:

$$\frac{x-0}{-5} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{4} \qquad \Rightarrow \qquad r \equiv \frac{x}{-5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Una ecuación lineal que podemos añadir al sistema para que resulte incompatible, puede ser, por ejemplo, $3x - 4y - 2z = 5$. Si ponemos este nuevo sistema en forma matricial y lo discutimos por Gauss, tendremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

La última ecuación, $0 = 8$, es una ecuación absurda por lo que el sistema es un sistema incompatible, es decir, no tiene solución.

(2) Discutamos por Gauss el sistema inicial al añadirle la ecuación $mx + y - z = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 1+m & -1-m & -1-m \end{array} \right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (1+m) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -6m-6 & -7m-7 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede o no ser cero. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0$ $\Rightarrow$ $-6m-6 = 0$ $\Rightarrow$ $m = -1$ $\Rightarrow$ la última ecuación sería, $0 = -7(-1)-7$, es decir, $0 = 0$, o sea, una ecuación trivial que la eliminamos, quedándonos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata por tanto de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0$ $\Rightarrow$ $-6m-6 \neq 0$ $\Rightarrow$ $m \neq -1$ $\Rightarrow$ la última ecuación no sería una ecuación ni trivial ni absurda, luego el sistema sería compatible determinado.

Resolvamos el sistema para el caso de m=-1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-z \\ 0 & -1 & -6+5z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7-6z \\ 0 & -1 & -6+5z \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $x = 7 - 6z$; $y = 6 - 5z$

Sustituyamos la incógnita secundaria, *z*, por el parámetro t, la solución, finalmente, será:

$$x = 7 - 6t \quad ; \quad y = 6 - 5t \quad ; \quad z = t$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos P=(0,5) y Q=(5,0) es:

$$\frac{x-5}{5-0} = \frac{y-0}{0-5} \Rightarrow \frac{x-5}{5} = \frac{y}{-5} \Rightarrow y = -x+5$$

La función $f(x) = -x + 5$, es una función polinómica, cuya función derivada es $f'(x) = -1$, siendo el dominio de derivabilidad todo $\mathbb{R}$, es decir, Dom $f'(x) = \mathbb{R}$.

(2) Expresemos la función $g(x)$ como una función a trozos.

$$g(x) = |x+1|\,x = \begin{cases} -(x+1)x & si \;\; x+1<0 \\ (x+1)x & si \;\; x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -x^2-x & si \;\; x<-1 \\ x^2+x & si \;\; x \geq -1 \end{cases}$$

- Para valores de $x<-1$, la función $-x^2-x$ es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $-2x-1$.

- Para valores de $x>-1$, la función x^2+x es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $2x+1$.

- Para $x=-1$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1}} \left(x^2+x\right) = (-1)^2+(-1) = 0\\ \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1}} \left(-x^2-x\right) = -(-1)^2-(-1) = 0\\ g(-1) = (-1)^2+(-1) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = g(-1) = 0$$

en el punto x=-1 es continua, luego puede ser derivable, será derivable si las derivadas laterales existen y coinciden.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya es derivable, sería:

$$g'(x) = \begin{cases} -2x-1 & si \quad x<-1 \\ 2x+1 & si \quad x>-1 \end{cases} \qquad [1]$$

comprobemos si en el punto -1 es derivable:

$$\left.\begin{array}{l} g'(-1^+) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1}} g'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x+1) = -1 \\ g'(-1^-) = \lim\limits_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1}} g'(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x-1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -1 \neq 1 \\ g'(-1^+) \neq g'(-1^-) \end{array}\right. \Rightarrow$$

en el punto -1 no es derivable, luego la función derivada, definitivamente, es la expresión [1], siendo el dominio de derivabilidad $\mathbb{R}$-{-1}, es decir, Dom $g'(x)$ = $\mathbb{R}$-{-1}.

(3) Expresemos la función $h(x)$ como una función a trozos.

$$h(x) = x\,|x| = \begin{cases} x\cdot(-x) & si \quad x<0 \\ x\cdot x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

- Para valores de x<0, la función $-x^2$ es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $-2x$.

- Para valores de x>0, la función x^2 es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $2x$.

- Para x=0 la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} x^2 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} (-x^2) = 0\\ h(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0) = 0$$

en el punto x=0 es continua, luego puede ser derivable, será derivable si las derivadas laterales existen y coinciden.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya es derivable, sería:

$$h'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad x>0 \end{cases}$$

comprobemos si en el punto 0 es derivable:

$$\left.\begin{array}{l} h'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} h'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \\ h'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} h'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 = 0 \\ h'(0^+) = h'(0^-) \end{array}\right. \Rightarrow$$

en el punto 0 es derivable, luego la función derivada, definitivamente, será

$$h'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x < 0 \\ 2x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

siendo el dominio de derivabilidad $\mathbb{R}$, es decir, Dom $h'(x) = \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Calculemos la función a trozos *f(x)*, a partir de su gráfica.

Para los valores $0 \leq x < 4$, la función es constante e igual a 1.

Para los valores $4 \leq x < 6$, la gráfica de la función es una recta que pasa por los puntos (4, 1) y (5, 0), por lo que su expresión será:

$$\frac{x-5}{4-5} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow \frac{x-5}{-1} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = -x+5 \qquad [1]$$

Para los valores $6 \leq x \leq 7$, la función es constante e igual a -1.

La función *f(x)* es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq x < 4 \\ -x+5 & si \;\; 4 \leq x < 6 \\ -1 & si \;\; 6 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

función que es continua en su dominio [0, 7].

La función *F(x)* es la función integral asociada a la función continua *f(t)*, que según el teorema fundamental del cálculo integral es derivable y su derivada coincide con *f(x)*, es decir:

F´(x) = *f(x)*.

Calculemos *F*(4) y *F*(7).

$$F(4) = \int_0^4 1\,dt = [t]_0^4 = 4 - 0 = 4$$

$$F(7) = \int_0^7 f(t)\,dt = \int_0^4 1\,dt + \int_4^6 (-t+5)\,dt + \int_6^7 -1\,dt = [t]_0^4 + \left[-\frac{t^2}{2}+5t\right]_4^6 + [-t]_6^7 =$$

$$= 4 + \left(-\frac{36}{2}+30\right) - \left(-\frac{16}{2}+20\right) + (-7) - (-6) = 4 - 18 + 30 + 8 - 20 - 7 + 6 = 3$$

(2) Sabemos que la función *F(x)* es la función integral asociada a la función continua *f(t)*, y que ésta función según [1] es:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq t < 4 \\ -t+5 & si \;\; 4 \leq t < 6 \\ -1 & si \;\; 6 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

Calculemos en primer lugar *F(x)* para los valores $0 \leq x < 4$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = x$$

Calculemos *F(x)* para los valores $4 \leq x < 6$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^4 1\,dt + \int_4^x (-t+5)\,dt = [t]_0^4 + \left[-\frac{t^2}{2}+5x\right]_4^x =$$

$$= 4 + \left(-\frac{x^2}{2}+5x - \left(-\frac{4^2}{2}+20\right)\right) = 4 - \frac{x^2}{2} + 5x + 8 - 20 = -\frac{x^2}{2} + 5x - 8$$

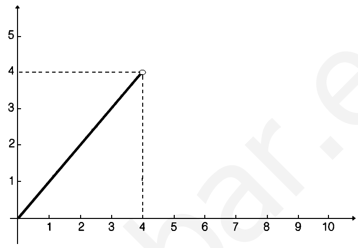
Calculemos *F(x)* para los valores $6 \le x \le 7$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^4 1\,dt + \int_4^6 (-t+5)\,dt + \int_6^x -1\,dt = [t]_0^4 + \left[-\frac{t^2}{2}+5x\right]_4^6 + [-t]_6^x =$$

$$= 4 + \left(-\frac{26}{2}+20-\left(-\frac{16}{2}+20\right)\right) + (-x-(-6)) = 4-18+30+8-20-x+6 = -x+10$$

La función *F(x)* es:

$$F(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x < 4 \\ -\frac{x^2}{2}+5x-8 & si\ \ 4 \le x < 6 \\ -x+10 & si\ \ 6 \le x \le 7 \end{cases}$$



La gráfica del trozo de función correspondiente a los valores, $0 \le x < 4$, es la recta, x, bisectriz del primer cuadrante, gráfica situada al lado.

La gráfica del trozo de función correspondiente a los valores, $4 \le x < 6$, es la parábola $-\frac{x^2}{2}+5x-8$.

Calculemos los puntos de corte con los ejes, así como el vértice V.

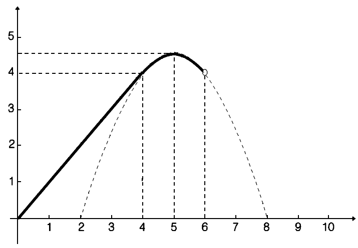
* Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y(0) = -8 \Rightarrow$ A(0, -8).

* Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2}+5x-8=0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-1} = \begin{cases} \nearrow x = 2 \\ \searrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{B}(2, 0) \text{ y } \text{C}(8, 0).$$

* Coordenadas del vértice V:

$x = -b/2a = -5/(-1) = 5 \Rightarrow y(5)=4´5 \Rightarrow$ V(5, 4´5).



* Otros puntos orientativos serían los correspondientes a los extremos del intervalo:

$x = 4 \Rightarrow y(4) = 4 \Rightarrow$ D(4, 4)

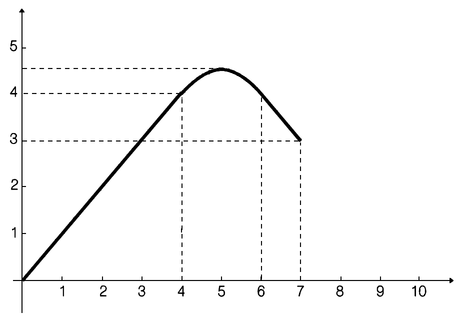
$x = 6 \Rightarrow y(6) = 4 \Rightarrow$ E(6, 4)

Representemos el tercer trozo, $-x + 10$, para los valores, $6 \le x \le 7$. Se trata de una recta que pasa por los puntos:

$x = 6 \Rightarrow y(6) = 4 \Rightarrow$ D(6, 4)

$x = 7 \Rightarrow y(7) = 3 \Rightarrow$ E(7, 3)

La gráfica, finalmente, de la función *F(x)* sería la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Las rectas *r* y *s* estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto. Expresemos sus respectivas ecuaciones en forma paramétrica.

$$r = \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m - \lambda \end{cases} \quad ; \quad s = \begin{cases} x = 2\mu \\ y = m\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

Identifiquemos las *x*, *y* y *z*, para calcular los posibles puntos que tengan en común dichas rectas.

$$\left.\begin{matrix} 1 + 3\lambda = 2\mu \\ 2\lambda = m\mu \\ m - \lambda = -1 + 2\mu \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3\lambda - 2\mu = -1 \\ 2\lambda - m\mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = -1 - m \end{matrix}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo por el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -m & 0 \\ -1 & -2 & -1-m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3m+4 & 2 \\ 0 & -8 & -4-3m \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 2ª y la 3 ª fila entre sí.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & -4-3m \\ 0 & -3m+4 & 2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -8 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 8 · [3ªf.] + (-3m+4) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & -4-3m \\ 0 & 0 & 9m^2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero; la última ecuación puede ser trivial o absurda, veamos qué ocurre en cada caso.

* Si la última ecuación, $0 = 9m^2$, es cierta, entonces $m = 0$, y se trataría de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es un sistema compatible determinado, con solución única, luego las dos rectas se cortan en un punto y estarían contenidas en un mismo plano.

* Si la última ecuación, $0 = 9m^2$, no es cierta, entonces $m \neq 0$, y se trataría de una ecuación absurda, nos queda un sistema incompatible, no tiene solución; como es sólo una ecuación absurda la que hemos obtenido las dos rectas se cruzan en el espacio.

(2) Si $m = 1$, las dos rectas, *r* y *s*, según el apartado anterior, se cruzan en el espacio, por lo que para hallar la recta que corte a ambas, obtendremos, en primer lugar, el plano que pasa por el punto $A = (1, 1, 2)$ y contiene a la recta *r*.

Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto, el A o uno de la recta, y dos vectores de dirección, uno sería el de la recta *r*, y el otro el que determinan el punto A y un punto de la recta, por ejemplo, el $Q = (1, 0, 1)$, es decir,

$$\vec{AQ} = (1, 0, 1) - (1, 1, 2) = (0, -1, -1)$$

la ecuación del plano es: $\pi = \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$

hallemos la intersección de π con la recta *s*: $\pi = \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases} \; ; \; s = \begin{cases} x = 2\mu \\ y = \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$

Identifiquemos las *x*, *y* y *z*, para calcular el punto de incidencia.

$$\left.\begin{array}{r} 1+3\alpha=2\mu \\ 2\alpha-\beta=\mu \\ 1-\alpha-\beta=-1+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3\alpha-2\mu=-1 \\ 2\alpha-\beta-\mu=0 \\ -\alpha-\beta-2\mu=-2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por -9.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$\alpha = 1/3$; $\beta = -1/3$; $\mu = 1$.
Sustituyamos el valor de $\mu=1$ en la recta *s* para obtener el punto P de intersección: P = $(2\mu, \mu, -1+2\mu)$ = (2, 1, 1).

La recta que nos piden es la que pasa por el punto A = (1, 0, 1) y por el punto recién obtenido P = (2, 1, 1), siendo el vector de dirección, el vector $\vec{AP}$, es decir,

$$\vec{AP} = (2, 1, 1) - (1, 1, 2) = (1, 0, -1)$$

luego la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

recta que efectivamente corta a *s* al pasar por P, y corta a *r* por estar contenida en el plano que hallamos, cumpliéndose además que el vector de dirección de r = (3, 2, -1) y el vector $\vec{AP} = (1, 0, -1)$ tienen distinta dirección.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Llamemos *x* al número de pares a los que se les aplica el descuento del 30%. Sea *y* el número de pares a los que se les aplica el descuento del 40%. Si en total vende 600 pares y en las rebajas vende la mitad, significa que a los pares a los que se les aplica el descuento son 300 es decir, $x + y = 300$. Por tanto:

$$\frac{70\cdot 1200}{100}x + \frac{60\cdot 1200}{100}y + 300\cdot 1200 = 597600 \quad ; \quad como \quad x = 300 - y \Rightarrow$$

$$840(300-y) + 720y + 360000 = 597600 \Rightarrow$$

$$252000 - 840y + 720y + 360000 = 597600 \Rightarrow$$

$-120y = -14400 \Rightarrow y = 120$ pares a los que se les aplica el descuento del 40%.

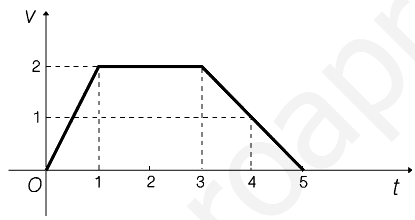
UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 16 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. La velocidad de un móvil que parte del origen viene dada en m/s por la gráfica



(1) [1´5 PUNTOS]. Calcula la función espacio recorrido.
(2) [0´5 PUNTOS]. Dibuja la gráfica de la función espacio recorrido.
(3) [0´5 PUNTOS]. Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

EJERCICIO 2. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Halla el punto P de la gráfica de la función f definida para $x \geq -3$ por $f(x) = \sqrt{2x+6}$ que está más próximo al origen de coordenadas.
(2) [1 PUNTO]. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en P.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´75 PUNTOS]. Determina según los valores del parámetro α cuándo tiene solución el sistema

$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= \alpha^2, \\ \alpha x + (1-\alpha)y + (\alpha-1)z &= \alpha^2, \\ \alpha x + y + \alpha z &= 2\alpha^2. \end{aligned}$$

(2) [0´75 PUNTOS]. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Una circunferencia con centro en el punto C=(5,3) es tangente a la recta que pasa por el punto P=(0,2) y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
(1) [1´25 PUNTOS]. Calcula el punto de tangencia.

(2) [1´25 PUNTOS]. Halla la ecuación de la circunferencia.

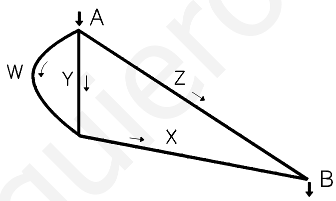
Opción B

<u>EJERCICIO 1</u>. **(1)** [1 PUNTO]. Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa x=-1.
(2) [1´5 PUNTOS]. Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula su área.

<u>EJERCICIO 2</u>. **(1)** [1 PUNTO]. Describe el método de integración por cambio de variable.
(2) [1´5 PUNTOS]. Usa el cambio de variable $t = \text{tg}(x)$ para hallar

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) + \cos(x)\, sen(x)}.$$

<u>EJERCICIO 3</u>. Por la abertura A del mecanismo de tubos de la figura se introducen 50 bolas que se deslizan hasta salir por B. Sabemos que por el tubo W han pasado 10 bolas.



(1) [1 PUNTO]. Justifica si es posible hallar el número de bolas que pasan exactamente por cada uno de los tubos X, Y y Z.
(2) [0´5 PUNTOS]. Supongamos que podemos controlar el número de bolas que pasan por el tubo Y. Escribe las expresiones que determinan el número de bolas que pasan por los tubos X y Z en función de las que pasan por Y.
(3) [1 PUNTO]. Se sabe un dato nuevo: por Y circulan 3 veces más bolas que por Z, ¿cuántas circulan por X, Y y Z?

<u>EJERCICIO 4</u>. **(1)** [1 PUNTO]. Define el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ y enuncia tres de sus propiedades.
(2) [1´5 PUNTOS]. Encuentra un vector w cuya primera componente sea 2 y que sea perpendicular a los vectores u=(1,-1,3) y v=(0,1,-2).

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Obtengamos inicialmente la expresión de la función *v(t)* a partir de la gráfica. Como se observa, se trata de una función rectilínea trozos, y por supuesto, continua.

El primer trozo de función es una recta que pasa por el origen y tiene de pendiente 2, es decir, la expresión será $2t$, para los valores $0 \le t \le 1$.

El segundo trozo es una función constante, 2, definida en el intervalo $1 < t < 3$.

El último trozo es otra recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5, 0), su ecuación es:

$\frac{t-5}{5-3} = \frac{v-0}{0-2} \Rightarrow \frac{t-5}{2} = \frac{v}{-2} \Rightarrow v = -t+5,$ definida en el intervalo $3 \le x \le 5$.

En resumen la función *v(t)* será:

$$v(t) = \begin{cases} 2t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 2 & si \quad 1 < t < 3 \\ -t+5 & si \quad 3 \le t \le 5 \end{cases} \qquad [1]$$

Tengamos en cuenta que

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v(t)\,dt \Rightarrow s(t) = \int_0^t v(x)\,dx$$

El teorema fundamental del cálculo integral dice: si *v(x)* es continua en el intervalo [0, 5], la función integral asociada a *v(x)*, *s(t)*, es derivable y además *s´(t) = v(t)*.

La función *v(x)* según [1] es: $v(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & si \quad 1 < x < 3 \\ -x+5 & si \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$

Calculemos, en primer lugar, *s(t)* para los valores $0 \le t \le 1$

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \int_0^t 2x\,dx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_0^t = t^2$$

Calculemos *s(t)* para los valores $1 < t < 3$

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^t 2\,dx = \left[x^2\right]_0^1 + \left[2x\right]_1^t = 1 + 2t - 2 = 2t - 1$$

Calculemos *s(t)* para los valores $3 \le t \le 5$

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 2\,dx + \int_3^t (-x+5)\,dx =$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 + \left[2x\right]_1^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_3^t = 1 + 6 - 2 - \frac{t^2}{2} + 5t - \left(-\frac{9}{2} + 15\right) = -\frac{t^2}{2} + 5t - \frac{11}{2}$$

La función *s(t)*, finalmente es:

$$s(t) = \begin{cases} t^2 & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 2t - 1 & si \quad 1 < t < 3 \\ -\frac{t^2}{2} + 5t - \frac{11}{2} & si \quad 3 \le t \le 5 \end{cases} \qquad [2]$$

(2) Para dibujar la gráfica de la función *s(t)*, comenzaremos pintando el primer trozo, t^2, en el intervalo $0 \le t \le 1$. Se trata de una parábola elemental.

El trozo, $2t-1$, definido en $1 < t < 3$, es una recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 5).

El tercer y último trozo, $-\frac{t^2}{2}+5t-\frac{11}{2}$, definido en el intervalo $3 \le t \le 5$, es una parábola. Calculemos los puntos de corte con los ejes, así como el vértice V.

* Punto de corte con el eje de ordenadas: $t = 0 \Rightarrow s(0) = -5'5 \Rightarrow$ A(0, -5´5).

* Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$s=0 \Rightarrow -\frac{t^2}{2}+5t-\frac{11}{2}=0 \Rightarrow t=\frac{-5\pm\sqrt{25-11}}{-1}= \begin{cases}\nearrow x = 1'26\\ \searrow x = 8'74\end{cases} \Rightarrow \text{B}(1'26,\ 0) \text{ y } \text{C}(8'74,\ 0).$$

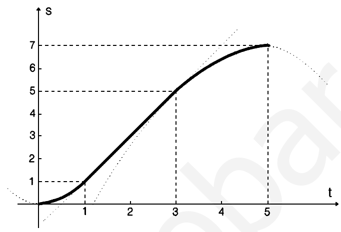
* Coordenadas del vértice V:

$t = -b/2a = -5/(-1) = 5 \Rightarrow s(5)=7 \Rightarrow$ V(5, 7)

* Otros puntos orientativos son los correspondientes a los extremos del intervalo:

$t = 3 \Rightarrow s(3) = 5 \Rightarrow$ D(3, 5)

$t = 5 \Rightarrow s(5) = 5 \Rightarrow$ E(5, 7)



(3) El espacio total recorrido es: $s(5) = -\frac{5^2}{2} + 5\cdot 5 - \frac{11}{2} = 7$

Calculemos el área encerrada por la curva que da la velocidad.

$$Área = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt + \int_1^3 2\,dt + \int_3^5 (-t+5)\,dt =$$

$$=\left[t^2\right]_0^1 + \left[2t\right]_1^3 + \left[-\frac{t^2}{2}+5t\right]_3^5 = 1+6-2+\left(-\frac{25}{2}+25\right)-\left(-\frac{9}{2}+15\right) = 7$$

Efectivamente coinciden el espacio total y el área que da la velocidad.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Sea P el punto de la gráfica de coordenadas (x, y), es decir, $(x,\ \sqrt{2x+6})$. Construyamos la función distancia de P al origen (0, 0):

$$dist(P,O) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad d(x) = \sqrt{x^2+2x+6}$$

Calcular el mínimo de esta función, es lo mismo que calcularlo del radicando:

$$D(x) = x^2+2x+6 \quad\Rightarrow\quad D'(x) = 2x+2 \quad\Rightarrow\quad 2x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$

Estudiemos la monotonía de la función $D(x)$, continua y derivable en su dominio: $x \ge -3$.

$D''(-2) = -4 + 2 = -2 < 0 \Rightarrow D''(x) < 0 \Rightarrow D(x)$ es decreciente en [-3, -1[

$D''(2) = 4 + 2 = 6 > 0 \Rightarrow D''(x) > 0 \Rightarrow D(x)$ es creciente en [-1, +∞[

luego hay un mínimo relativo en $x = -1$, que también será mínimo absoluto de la función.

El punto P tendrá de coordenadas: $(-1,\ \sqrt{2(-1)+6}) = (-1,\ 2)$.

(2) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (-1, 2) es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \quad\Rightarrow\quad y - 2 = f'(-1)\,(x + 1)$$

$$f(x)=\sqrt{2x+6} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+6}} \quad\Rightarrow\quad f'(-1)=\frac{2}{2\sqrt{-2+6}}=\frac{1}{2}$$

$y-2=\frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en P.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha & 2\alpha^2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos la 1ª y 2ª columna entre sí.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha^2 \\ 1-\alpha & \alpha & \alpha-1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha & 2\alpha^2 \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - (1-α) · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha-2 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \alpha^2 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, como no todos los elementos de la diagonal principal son, en principio, distintos de cero, discutamos los diferentes casos que pueden presentarse

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 1$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema será incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \alpha - 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 1 \Rightarrow$ la última ecuación no es absurda ni trivial, pero pueden ocurrir dos cosas:

** Si $a_{22} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow$ la segunda ecuación no es trivial ni absurda, por lo que, en este caso, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, el sistema será compatible determinado cuando $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 0$.

** Si $a_{22} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ el sistema quedaría así:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Intercambiemos la 2ª y 3ª columna entre sí.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Terminemos de triangular inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

La última ecuación es trivial, $0 = 0$, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, por tanto, para $\alpha = 0$, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

(2) Resolvamos el sistema para $\alpha=0$, que es cuando es compatible indeterminado.

$$\begin{array}{ccc} (y) & (z) & (x) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] + [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Nos sobra una incógnita, la x, que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\begin{array}{cc} (y) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, llamando a la incógnita secundaria, x, mediante el parámetro, λ, la solución es:

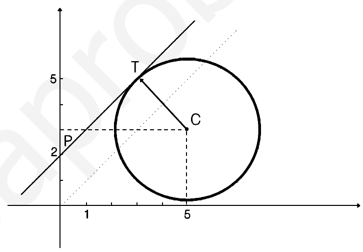
$$x = \lambda \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0.$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Hallemos la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en un punto T = (x, y). La recta al pasar por el punto P = (0, 2), será de la forma:

$$y = mx + n \quad \Rightarrow \quad y = mx + 2$$

como es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, $y = x$, tendrá la misma pendiente que ella, es decir, m=1. Luego la ecuación será: $y = x + 2$



Expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

siendo el vector de dirección de la tangente, el vector (1, 1). El punto de tangencia T tiene de coordenadas, T = (t, 2+t). Como el centro de la circunferencia es el C = (5, 3), se verificará que:

$$\vec{CT} = (t,\ 2+t) - (5,\ 3) = (t-5,\ 2+t-3) = (t-5,\ t-1)$$

este vector es perpendicular al de dirección de la recta tangente, luego el producto escalar de ambos vectores será cero:

$$\vec{CT} \cdot (1,\ 1) = 0 \;\Rightarrow\; (t-5,\ t-1)\cdot(1,\ 1) = 0 \;\Rightarrow\; t-5+t-1 = 0 \;\Rightarrow\; t = 3$$

luego el punto de tangencia es, T = (t, 2+t) $\Rightarrow$ T = (3, 5).

(2) La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Sabemos que el centro es, C = (a, b) = (5, 3). Calculemos el radio:

$$r = |\vec{CT}| = \sqrt{(3-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 + 9 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 10x - 6y + 26 = 0$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación, $y = x^3 - 3x$, en el punto de abscisa $x_0=-1$, y ordenada $y_0 = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$, es:

$$y - y_0 = y'(x_0)\ (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = y'(-1)\ (x + 1)$$

$$y = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad y'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$$

$y - 2 = 0(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2$ que es la ecuación de la tangente en $x =-1$.

(2) Dibujemos la gráfica de $y = x^3 - 3x$.

1.- El dominio de la función es ℝ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3-3x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0=x^3-3x \quad \Rightarrow \quad 0 = x(x^2-3) \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x^2 = 3 \begin{array}{l} \nearrow x = \sqrt{3} \\ \searrow x = -\sqrt{3} \end{array} \end{array}$$

los puntos de corte con este eje son: $A = (-\sqrt{3}, 0)$, $B = (0, 0)$ y $C = (\sqrt{3}, 0)$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad y = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

3.- La función es continua en todo su dominio ya que es polinómica.

4.- Crecimiento y decrecimiento.

Hallemos la primera derivada: $y'(x) = 3x^2 - 3$

Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada, que son:

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{array}$$

los llevamos ordenadamente sobre el eje de abscisas y construimos los posibles intervalos de crecimiento y de decrecimiento, $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Probamos valores intermedios, por ejemplo -2, 0 y 2, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.

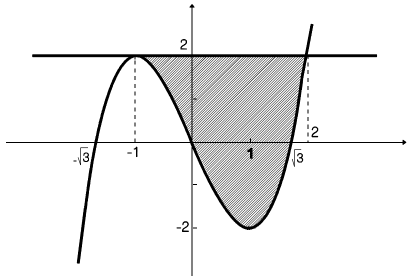
$$y'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0 \quad \Rightarrow \textit{creciente en } (-\infty, -1)$$

$$y'(0) = 3\cdot 0^2 - 3 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \textit{decreciente en } (-1, 1)$$

$$y'(2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9 > 0 \quad \Rightarrow \textit{creciente en } (1, \infty)$$

5.- Los máximos y mínimos se hallarían sustituyendo los valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo. Pero al ser continua y según el estudio sobre el crecimiento y decrecimiento anterior, tendremos:

máximo en (-1, 2) y mínimo en (1, -2).



Las ordenadas de estos extremos relativos se obtienen sustituyendo las abscisas correspondientes en la función *y(x)*.

6.- Al ser una función polinómica no presenta ningún tipo de asíntotas.

7.- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado. El recinto subrayado es el limitado por la curva dada y la recta tangente $y = 2$.

Calculemos el área de dicho recinto. Construyamos la función diferencia entre la recta tangente, $y = 2$, y la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$, es decir:

$$y = 2 - (x^3 - 3x) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - x^3 + 3x$$

Veamos cuáles son los puntos de corte de esta nueva función con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 - x^3 + 3x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = -x^3 + 3x + 2$$

Resolvamos esta ecuación mediante la Regla de Ruffini, probando con los divisores del divisores del término independiente, por ejemplo, el 2:

	-1	0	3	2
2		-2	-4	-2
	-1	-2	-1	0

Una solución es 2. Resolvamos la ecuación de segundo grado que hemos obtenido

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = -1$$

El área será:

$$Área = \int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\, dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 4 - \frac{16}{4} + \frac{12}{2} - \left(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) El método de integración por cambio de variable, consiste fundamentalmente en transformar la integral que nos dan en otra más sencilla, e incluso inmediata, cambiando la variable que aparece en la integral por una nueva. Esta transformación, dependiendo de la integral, la podemos hacer de dos formas:

a) Si queremos calcular una integral del tipo

$$\int h(x)\, dx$$

donde podemos observar que

$$h(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

entonces la integral que nos han dado sería

$$\int h(x)\, dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx$$

el "cambio de variable" que haremos es

$$t = g(x) \quad ; \quad dt = g'(x)\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int h(x)\, dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt = F(t)$$

siendo la última integral una fácil de calcular, e incluso puede ser una inmediata.

Finalmente, siempre, hay que deshacer el cambio efectuado.

$$\int h(x)\, dx = F(t) = F[g(x)]$$

b) Si la que queremos calcular es una del tipo

$$\int h(x)\,dx$$

donde podemos observar que haciendo el "cambio de variable"

$$x = u(t) \quad ; \quad dx = u'(t)\,dt$$

nos queda una función que sea fácilmente integrable

$$\int h(x)\,dx = \int h[u(t)]\cdot u'(t)\,dt = H(t)$$

entonces, siempre que la función *u* tenga recíproca, podremos deshacer el cambio y expresar la integral inicial en función de *x*

$$\int h(x)\,dx = H(t) = H[u^{-1}(x)]$$

(2) Calculemos

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) + \cos(x)\,sen(x)}\,.$$

haciendo el cambio de variable

$$t = tg(x) \quad ; \quad x = arc\,tg(t) \quad ; \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

teniendo en cuenta además que:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)} \quad \Rightarrow \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$sen^2(x) = 1 - \cos^2(x) \quad \Rightarrow \quad sen^2(x) = 1 - \frac{1}{1+t^2} \quad ; \quad sen^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) + \cos(x)\,sen(x)} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{t}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1+t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = Ln|1+t| = Ln|1+tg(x)| + C$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Llamemos *x* al nº de bolas que pasan por el tubo X, *y* a las que pasan por el tubo Y, y *z* a las que lo hacen por el Z. Estableceremos las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 10 + y = x \\ y + z = 40 \\ x + z = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 10 \\ y + z = 40 \\ x + z = 50 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, y la última ecuación es trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones, luego no podemos determinar el número de bolas que pasan exactamente por los tubos X, Y y Z.

(2) En este caso, basta sustituir *y* por un parámetro t en el sistema anterior, (t representaría al nº de bolas que pasan por el tubo Y). El parámetro t lo pasamos al segundo miembro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -t & 0 & 10 \\ 0 & t & 1 & 40 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10+t \\ 0 & 1 & 40-t \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$x = 10 + t$; $z = 40 - t$

(3) Con el dato nuevo estableceremos la relación: $y = 3z \Rightarrow y - 3z = 0$. El sistema que resolveremos, teniendo en cuenta el apartado (1), es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 10 \\ y + z = 40 \\ y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$ Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & -4 & -40 \end{array}\right)$$ El sistema es compatible determinado.
Simplifiquemos la 3ª fila por -4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$x = 40$; $y = 30$; $z = 10$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define por la expresión

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

es decir, como el producto de sus módulos y por el coseno del ángulo que forman al hacer coincidir sus orígenes.

La expresión analítica del producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de $\mathbb{R}^3$, es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1,\, u_2,\, u_3)\cdot(v_1,\, v_2,\, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Propiedad conmutativa: El resultado del producto escalar de dos vectores no se altera si cambiamos el orden de los vectores.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

Propiedad asociativa:

$$\forall\, k \in \mathbb{R}, \qquad k\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\,\vec{u})\cdot\vec{v}$$

(2) El vector, $\vec{w}$, será de la forma $\vec{w} = (2,\, a,\, b)$.

Si tiene que ser perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, significa que el producto escalar con cada uno de ellos es cero, es decir,

$$\vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; (2,\, a,\, b)\cdot(1,\, -1,\, 3) = 0 \;\Rightarrow\; 2 - a + 3b = 0$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; (2,\, a,\, b)\cdot(0,\, 1,\, -2) = 0 \;\Rightarrow\; a - 2b = 0$$

Resolvamos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r} 2 - a + 3b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} -a + 3b & = & -2 \\ a - 2b & = & 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

La solución es:
$a = -4$; $b = -2$

El vector $\vec{w}$, es $(2,\, -4,\, -2)$.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 17 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le 0 \\ x\,sen(x) & si \quad x > 0. \end{cases}$$

(1) [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de *f*.

(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{\pi/2} 2\,f(x)\,dx.$

EJERCICIO 2. Sea k un número real y sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \cos(x) + kx.$

(1) [1´25 PUNTOS]. Determina todos los valores de k para los que la función anterior es creciente en todo su dominio.

(2) [1´25 PUNTOS]. Para k = 1 halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3. Sea Π el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,1) y (1,1,1). Sea A el punto (1,2,3) y sea B el simétrico de A respecto del plano Π.

(1) [1´5 PUNTOS]. Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.

(2) [1 PUNTO]. Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2,2,2).

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

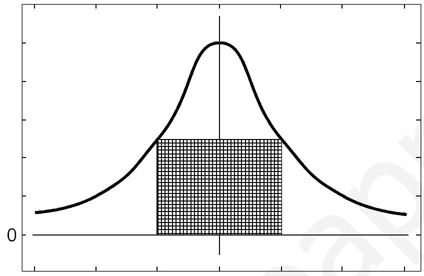
Halla a, b, c y d sabiendo que:

(i) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1,-1,1).

(ii) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por el vector (1,0,1) es el vector (-2,3,2).
(iii) El rango de la matriz A es 2.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. De entre todos los rectángulos inscritos , como indica la figura, entre la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, halla el de mayor área.



EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta $y + x = 0$ y la curva de ecuación $y = x^2 + 4x + 4$.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{aligned} x + y + bz &= b^2 \\ -x + y + z &= -3 \\ bx + y + z &= 3b. \end{aligned}$$

(2) [1 PUNTO]. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

EJERCICIO 4. Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector v=(1,2,-1). En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto A=(2,1,2).

(1) [1 PUNTO]. Calcula los puntos de corte de la trayectoria de objeto con los planos coordenados.

(2) [0´75 PUNTOS]. Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.

(3) [0´75 PUNTOS]. ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano XOY?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Para estudiar la derivabilidad de la función *f* analicemos antes la continuidad, ya que si una función no es continua en un punto no será derivable en él.

- El trozo de función, *x*, definido para valores de *x* menores que 0, *x*<0, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para *x*<0.

- El trozo de función, *x sen(x)*, definido para valores de *x* mayores que 0, *x*>0, es continua por ser el producto de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, una polinómica, *x*, y otra trigonométrica, *sen(x)*, luego la función *f* es continua para *x*>0.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} x\,sen(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 0.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si siendo continua en dicho punto las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de *x*<0, *f* es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, 1.

- Para valores de *x*>0, *f* es derivable, por ser el producto de dos funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, una polinómica, *x*, y otra trigonométrica, *sen(x)*, luego la función *f* es derivable para *x*>0, siendo la función derivada, *sen(x) + x cos(x)*.

Por tanto, una primera aproximación de la función derivada en los puntos donde ya sabemos que es derivable y cuál es su derivada, será:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x<0 \\ sen(x) + x\cos(x) & si \quad x>0 \end{cases} \qquad [1]$$

- El problema está en el punto 0. Será derivable en dicho punto si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en él.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (sen(x) + x\cos(x)) = 0 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^+) = 0 \neq f'(0^-) = 1$$

luego la función *f(x)* no es derivable en *x* = 0.

La función derivada coincidirá con la que nos aproximamos inicialmente en [1].

(2) Calculemos la integral definida siguiente

$$\int_{-1}^{\pi/2} 2\,f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{\pi/2} 2x\,sen(x)\,dx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_{0}^{\pi/2} 2x\,sen(x)\,dx =$$

$$= 0 - (-1)^2 + \int_{0}^{\pi/2} 2x\,sen(x)\,dx = -1 + \int_{0}^{\pi/2} 2x\,sen(x)\,dx = \qquad [1]$$

Calculemos esta última integral mediante el método de integración por partes.

$u = 2x \qquad ; \quad du = 2dx$

$dv = sen(x)\,dx \qquad ; \quad v = \int dv = \int sen(x)\,dx = -\cos(x)$

continuando desde [1]

$$= -1 + \left[-2x\cos(x)\right]_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} 2\cos(x)\,dx =$$

$$-1 - 2\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 + \left[2\,sen(x)\right]_{0}^{\pi/2} = -1 - \pi\cdot 0 + 2\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,sen(0) = -1 + 2 - 0 =$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Estudiemos el crecimiento de la función $f(x) = \cos(x) + kx$.

La función primera derivada es $f'(x) = -sen(x) + k$

La función *f* es creciente en todo su dominio, ℝ, cuando para cualquier valor de él la primera derivada es mayor o igual a cero, es decir,

$$-sen(x) + k \ge 0 \quad \Rightarrow \quad k \ge sen(x)$$

teniendo en cuenta que los valores del *sen(x)* siempre están comprendidos entre -1 y 1, y como k tiene que ser mayor o igual que *sen(x)*, resulta que k deberá ser mayor o igual que el máximo valor del *sen(x)*, o sea, k deberá ser mayor o igual que 1.

(2) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (0, f(0)), sería:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$$

Calculemos $f(0)$: $\quad f(0) = \cos(0) + k\cdot 0 = 1 + 0 = 1$

Calculemos ahora $f'(0)$, pero antes $f'(x)$, para k=1:

$$f'(x) = -sen(x) + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -sen(0) + 1 = 1$$

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y - 1 = 1\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Al ser el punto B simétrico del A respecto del plano Π, la recta que pasa por A y B es la misma que la que pasa por A y por el punto medio del segmento que determinan A y B, se trata de una recta que pasa por A y es perpendicular al plano Π, luego el vector normal al plano podemos tomarlo como el de dirección de la recta.

Calculemos dos vectores de dirección del plano, su producto vectorial me dará un vector normal al plano.

$$\vec{u} = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1)$$
$$\vec{v} = (1, 1, 1) - (0, 1, 1) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{n}_{\Pi} = (0, 1, 1) \times (1, 0, 0) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, -1)$$

La ecuación de la recta que pasa por A y tiene como vector de dirección (0, 1, -1) es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

(2) La recta paralela a la anterior y que pasa por (2, 2, 2), tendrá como vector de dirección el mismo o uno proporcional, tomaremos el mismo, la ecuación será:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

i) El vector de la primera columna de la matriz A es (1, 2, c), al ser ortogonal al vector (1, -1, 1) el producto escalar de ambos es cero:

(1, 2, c) · (1, -1, 1) = 0 ⇒ 1 - 2 + c = 0 ⇒ c = 1

ii) Efectuemos el producto vectorial del vector (-7, b, d) correspondiente a la 3ª columna de A por el vector (1, 0, 1), sabiendo que el resultado es el vector (-2, 3, 2).

$$(-7, b, d) \times (1, 0, 1) = \left(\begin{vmatrix} b & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -7 & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (b, 7+d, -b) = (-2, 3, 2)$$

identificando los dos últimos vectores, componente a componente, tendremos:

b = -2 ; 7+d = 3 ⇒ d = -4

iii) Sustituyamos en la matriz A los valores de c, b y d por los calculados, 1, -2, -4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & -2 \\ 1 & -a & -4 \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de A por el procedimiento de Gauss.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & a-6 & 12 \\ 0 & -a-3 & 3 \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 12 & a-6 \\ 0 & 3 & -a-3 \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 12 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 4 · [3ªf.] - [2ªf.]

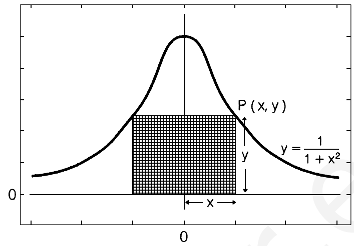
$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 12 & a-6 \\ 0 & 0 & -5a-6 \end{pmatrix}$$

Para que el rango de A sea 2, r(A) = 2, ha de verificarse que la última fila tiene que ser una fila de ceros, es decir,

-5a - 6 = 0 ⇒ a = -6/5

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-



Construyamos la función área de la mitad del rectángulo, teniendo en cuenta la gráfica adjunta.

$$A(x) = xy = x\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

Obtengamos la derivada para calcular el máximo de esta función área, cuyo dominio es: Dom $A(x)$ =]0, +∞[

$$A'(x) = \frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada

$$-x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad x = +1$$

Estudiemos la monotonía en los intervalos ,]0, 1[y]1, +∞[, de la función $A(x)$, que es continua y derivable en su dominio, probando valores intermedios de los mismos.

$$A'(0'5) = \frac{-0'5^2+1}{(1+0'5^2)^2} = 0'48>0 \quad\Rightarrow\quad A'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad A(x) \text{ es creciente en }]0, 1[$$

$$A'(2) = \frac{-2^2+1}{(1+2^2)^2} = -0'12<0 \quad\Rightarrow\quad A'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad A(x) \text{ es decreciente en }]1, +\infty[$$

luego hay un máximo relativo en $x = 1$, que es a su vez un máximo absoluto de la función área.

El área máxima sería A(1) = 1/2, pero el área máxima del rectángulo será el doble, es decir, 1, ya que inicialmente habíamos considerado la mitad del rectángulo por lo que tendremos que multiplicar por dos el valor de A(1).

Si hubiéramos considerado la otra mitad del rectángulo, el de la izquierda, el valor de x sería -1, pero también obtendríamos un rectángulo de área máxima .

Los puntos sobre la función $f(x)$ serían el P = (1, 1/2) y el (-1, 1/2).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

* Representemos la función $y = x^2 + 4x + 4$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2} = -2 \quad\Rightarrow\quad (-2, 0)$$

3.- Coordenadas del vértice V: x = -b/2a = -4/2 = -2 ⇒ $y = 0$ ⇒ V(-2, 0)

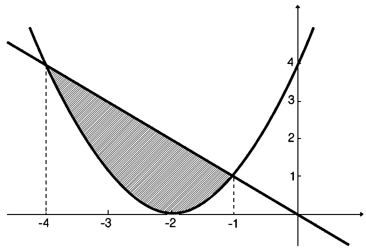
* Para representar la recta $y + x = 0 \Rightarrow y = -x$, tendremos en cuenta que coincide con la recta bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

* Para calcular los puntos de corte de las dos funciones, resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones, con el fin de determinar el recinto que forman.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x \\ y=x^2+4x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x = x^2+4x+4 \Rightarrow 0 = x^2+5x+4 \Rightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x=-4 \\ \searrow x=-1 \end{array}$$

La situación de las dos gráficas superpuestas se corresponde con la gráfica adjunta, y donde el área rayada es el recinto limitado por ambas.

El área del recinto anterior se obtiene integrando la función diferencia de ambas funciones, entre -4 y -1.



$$\text{Área} = \int_{-4}^{-1} \left(-x - (x^2 + 4x + 4)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1} \left(-x^2 - 5x - 4\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - 4x\right]_{-4}^{-1} =$$

$$= -\frac{(-1)^3}{3} - 5\frac{(-1)^2}{2} - 4(-1) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - 5\frac{(-4)^2}{2} - 4(-4)\right) = \frac{9}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para discutir el sistema que nos dan, expresémoslo en forma matricial y usemos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ b & 1 & 1 & 3b \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - b · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2-3 \\ 0 & 1-b & 1-b^2 & 3b-b^3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - (1-b) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2-3 \\ 0 & 0 & 1-b^2 & -b^3-b^2+3b+3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 1 - b^2 = 0 \Rightarrow b = 1 \ ; \ b = -1$

** Si b = 1 ⇒ la última ecuación será 0 = -1-1+3+3, es decir, 0 = 4, se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema no tiene solución, es incompatible.

** Si b = -1 ⇒ la última ecuación será 0 = 1-1-3+3, es decir, 0 = 0, que es una ecuación trivial, la eliminamos, nos quedaría un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow b \neq 1$ y $b \neq -1 \Rightarrow$ la última ecuación no es ni absurda ni trivial, el sistema es compatible determinado.

(2) Si b = -1, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico, lo resolveremos sustituyendo este valor de b en el sistema triangulado inferior anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

La incógnita que sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+z \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+z \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2+z \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$x = 2 + z$; $y = -1$

Sustituyendo z por el parámetro t, tendremos finalmente como solución del sistema:

$$x = 2 + t \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = t$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) La ecuación de la trayectoria, que es una recta que pasa por A = (2, 1, 2) y tiene como vector de dirección al vector (1, 2, -1), es:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

El punto de corte de dicha trayectoria con el plano XOY, de ecuación $z = 0$, será:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2 = 4 \\ y = 1 + 4 = 5 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P = (4, 5, 0)$$

El punto de corte de dicha trayectoria con el plano XOZ, de ecuación $y = 0$, será:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2} \\ z = 2 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = \left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{5}{2}\right)$$

El punto de corte de dicha trayectoria con el plano YOZ, de ecuación $x = 0$, será:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + t = 0 \Rightarrow t = -2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - 4 = -3 \\ z = 2 + 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow R = (0, -3, 4)$$

(2) El vector normal al plano coincidirá con el vector de dirección de la trayectoria, es decir, $\vec{n} = \vec{v} = (1, 2, -1)$, y como el vector normal es $\vec{n} = (A, B, C) \Rightarrow$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z + D = 0$$

al pasar el plano por el origen (0, 0, 0), se verificará:

$$0 + 0 + 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z = 0$$

(3) Calcularemos el coseno del ángulo que forma el vector normal al plano XOY con el de dirección de la trayectoria

$$\cos(\widehat{\vec{n},\vec{v}}) = \left|\frac{(0,0,1)\cdot(1,2,-1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{6}}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

este valor coincide con el seno del ángulo que forma el plano XOY con la trayectoria, y por tanto el ángulo que nos piden será

$$\text{ángulo} = \text{arc sen}\,\frac{1}{\sqrt{6}} = 24°\ 5'\ 41.43''$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 18 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad\qquad g(x) = -x^2 - 3x + 10.$$

(1) [1 PUNTO]. Representa gráficamente ambas funciones.

(2) [1´5 PUNTOS]. Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos (x,y) que cumplen que $f(x) \le y \le g(x)$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula las asíntotas de la gráfica de la función *f* definida para $x \neq -1$ por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas.

EJERCICIO 3. Considera el plano Π y la recta r dados por

$$\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0 \qquad\qquad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}.$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Halla los valores de a y b para los que r está contenida en Π.

(2) [1 PUNTO]. ¿Existen algún valor de a y algún valor de b para los que la recta dada r es perpendicular al plano Π?

EJERCICIO 4. Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado:

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 ptas.

Pista 2: Si compro m unidades de A, m+3 de B y 3 de C me gasto 2950 ptas.

(1) [1 PUNTO]. ¿Hay algún valor de m para el que estas dos pistas no son compatibles?

(2) [1 PUNTO]. Si en la Pista 2 se toma m=4, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?

(3) [0´5 PUNTOS]. Pista 3: El amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene m=4. ¿Cuánto valen A, B y C?

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta $y = -x + 3$ y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

EJERCICIO 2. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación $y=f(x)$ siendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ xe^{-x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

(1) [1 PUNTO]. ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?

(2) [1 PUNTO]. Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

(3) [0´5 PUNTOS]. ¿A qué recta se aproxima la trayectoria cuando $x \to \infty$? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 3. Considera el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2 z &= m. \end{aligned}$$

(1) [1 PUNTO]. Discute el sistema según los valores del parámetro m.

(2) [1 PUNTO]. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

(3) [0´5 PUNTOS]. Razona para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P=(1,0,2) y corta a las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) * Representemos la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = -2 \end{matrix} \Rightarrow (-2, 0) \text{ y } (-1, 0)$$

3.- Coordenadas del vértice V: $x = -b/2a = -3/2 \quad \Rightarrow$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad V = \left(-\frac{3}{2}, \ -\frac{1}{4}\right)$$

* Representemos la función $g(x) = -x^2 - 3x + 10$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \ \Rightarrow \ g(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad (0, 10)$

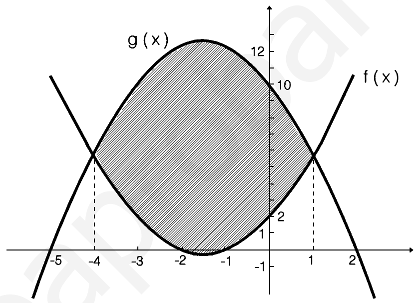
2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - 3x + 10 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{-2} = \begin{cases} \nearrow \ x = -5 \\ \searrow \ x = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (-5, 0) \ \text{ y } \ (2, 0)$$

3.- Coordenadas del vértice V: $x = -b/2a = 3/(-2) = -3/2 \quad \Rightarrow$

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{49}{4} \quad \Rightarrow \quad V = \left(-\frac{3}{2}, \ \frac{49}{4}\right)$$

La gráfica de cada una de las funciones *f(x)* y *g(x)*, está representada al lado.



(2) La región del plano formada por aquellos puntos (x,y) que cumplen que $f(x) \le y \le g(x)$, es la que se encuentra rayada.

Calculemos los puntos de corte de ambas funciones, para hallar el área de dicha región:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 3x + 2 \\ y = -x^2 - 3x + 10 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = -x^2 - 3x + 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \begin{cases} \nearrow \ x = -4 \\ \searrow \ x = 1 \end{cases}$$

El área del recinto anterior se obtiene integrando la función diferencia de ambas funciones, *g(x)* - *f(x)*, entre -4 y 1.

$$Área = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 10 - (x^2 + 3x + 2)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} \left(-2x^2 - 6x + 8\right) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x\right]_{-4}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{3} - 3 + 8 - \left(-\frac{2(-4)^3}{3} - 3(-4)^2 - 32\right) = \frac{125}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

- Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$. Veámoslo.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 1}{0} = -\infty \quad \text{Asíntota Vertical: } x = -1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de esta asíntota vertical.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = \frac{(-1^-)^2 + 3(-1^-) + 1}{-1^- + 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \frac{(-1^+)^2+3(-1^+)+1}{-1^++1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

La función *f(x)* tiende a -∞ cuando *x* se acerca a -1 por la derecha, y a +∞ cuando lo hace por la izquierda.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0 \in \Re$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{1} = \infty$$

la indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la regla de Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, sino que se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = mx + n$, comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Calculemos ahora n:

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$$

La asíntota oblicua, es: $y = x + 2$.

Estudiemos la posición de la gráfica de *f* respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de *x* muy grandes, por ejemplo, $x = 1000$ ⇒

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000^2+3000+1}{1000+1} = 1001´99 \\ y_{asíntota}(1000) = 1000+2 = 1002 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1000) < y_{asíntota}(1000)$$

luego la gráfica de *f*, para $x \to \infty$, va por debajo de la asíntota.

* Para valores de *x* muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000$ ⇒

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2-3000+1}{-1000+1} = -997´998 \\ y_{asíntota}(-1000) = -1000+2 = -998 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1000) > y_{asíntota}(-1000)$$

luego la gráfica de *f*, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Las dos condiciones para que la recta r esté contenida en el plano Π son: i) que el vector de dirección de la recta y el normal al plano sean perpendiculares, y ii) que un punto de la recta pertenezca al plano:

i) Si el vector de dirección de la recta r, $\vec{v} = (4, -4, 1)$, y el normal al plano Π,

$\vec{n}_\Pi = (a, 2, -4)$, son perpendiculares, su producto escalar es cero:
$\vec{v} \cdot \vec{n}_\Pi = 0 \Rightarrow (4, -4, 1)\cdot(a, 2, -4) = 0 \Rightarrow 4a - 8 - 4 = 0 \Rightarrow a = 3$
ii) Un punto de la recta, por ejemplo, P = (3, 1, -3), para que pertenezca al plano ha de verificar que: 3a + 2 + 12 + b = 0 ⇒ 9 + 14 + b = 0 ⇒ b = -23.

(2) Para que la recta r sea perpendicular al plano Π, el vector de dirección de la recta, $\vec{v} = (4, -4, 1)$, y el normal al plano, $\vec{n}_\Pi = (a, 2, -4)$, tienen que tener la misma dirección, por lo que sus componentes han de ser proporcionales:
$\frac{a}{4} = \frac{2}{-4} = \frac{-4}{1}$ ⇒ la última proporción es imposible, luego no hay ningún valor de "a" ni de "b" para los que la recta y el plano sean perpendiculares.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Llamando *x* al valor del producto A, *y* al valor del producto B y *z* al del C, tendremos, considerando las pistas, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 900 \\ mx + (m+3)y + 3z = 2950 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ m & m+3 & 3 & 2950 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - m · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 0 & 3-m & 3-m & 2950-900m \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, los elementos de la diagonal principal son distintos de 0, salvo el a_{22} que puede serlo o no. Veamos los casos que se presentan.

* Si $a_{22} = 0$ ⇒ 3-m = 0 ⇒ m = 3 ⇒ la última ecuación sería, 0 = 250, que es una ecuación absurda y el sistema no tendría solución, sería un sistema incompatible y en consecuencia las dos pistas no son compatibles.

* Si $a_{22} \neq 0$ ⇒ 3-m ≠ 0 ⇒ m ≠ 3 ⇒ la última ecuación no es ni absurda ni trivial, el sistema tendría solución, sería un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

(2) Sustituyendo m por m = 4, el sistema triangulado anterior quedaría así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 0 & -1 & -1 & -650 \end{array}\right)$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir, con infinitas soluciones, por tanto, no es posible saber el coste preciso de cada uno de los productos.

(3) Con la tercera pista el nuevo sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 900 \\ 4x + 7y + 3z = 2950 \\ 5x - z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 4 & 7 & 3 & 2950 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 5 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 0 & -1 & -1 & -650 \\ 0 & -10 & -6 & -4500 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 10 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 0 & -1 & -1 & -650 \\ 0 & 0 & 4 & 2000 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por -1
Simplifiquemos la 3ª fila por 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 1 & 650 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

La solución es:
- * el valor del producto A es de $x = 100$ pesetas
- * el valor del producto B es de $y = 150$ pesetas
- * el valor del producto C es de $z = 500$ pesetas

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

* Representemos la función $y = x^2 - 4x + 3$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

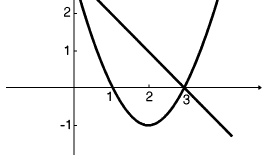
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix} \Rightarrow (1, 0) \text{ y } (3, 0).$$

3.- Coordenadas del vértice V: $x = -b/2a = 4/2 = 2 \Rightarrow y = 4-8+3 = -1 \Rightarrow V(2, -1)$

* Representemos la recta $y = -x + 3$.

- Punto de corte con el eje de ordenadas:
$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(0, 3)$.

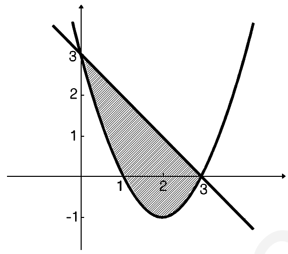
- Punto de corte con el eje de abscisas:
$y = 0 \Rightarrow x=3; \Rightarrow D(3, 0)$.



Las gráficas de la parábola y la recta, están situadas al lado.

Teniendo en cuenta el estudio anterior, los puntos de corte de la parábola con la recta son el (3, 0) y el (0, 3).

La región plana limitada por ambas gráficas se corresponde con la zona rayada.



El área de la región rayada es la integral definida entre 0 y 3 de la función diferencia:

$$Área = \int_0^3 [-x+3-(x^2-4x+3)]\,dx = \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{27}{3}+\frac{27}{2}-0 = \frac{-54+81}{6} = \frac{9}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) No admitirá recta tangente en aquellos puntos en los que no sea derivable.

Para estudiar la derivabilidad de la función f analicemos antes la continuidad, ya que si una función no es continua en un punto no será derivable en él.

- El trozo de función, 0, definido para valores de x menores que 0, $x<0$, es una función constante, y las funciones constantes son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función f es continua para $x<0$.

- El trozo de función, $x\,e^{-x}$, definido para valores de x mayores que 0, $x>0$, es continua por ser el producto de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, una polinómica, x, y otra exponencial elemental, e^{-x}, luego la función f es continua para $x>0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} \left(x\,e^{-x}\right) = 0\cdot e^{-0} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} 0 = 0 \\ f(0) = 0\cdot e^{-0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

Luego $f(x)$ será continua en el punto 0.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si siendo continua en dicho punto las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $x<0$, f es derivable, por ser una función contante, siendo la función derivada, 0.

- Para valores de $x>0$, f es derivable, por ser el producto de dos funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, una polinómica, x, y otra exponencial elemental, e^{-x}, luego la función f es derivable para $x>0$, siendo la función derivada, $e^{-x} - x\,e^{-x}$.

Por tanto, una primera aproximación de la función derivada en los puntos donde ya sabemos que es derivable y cuál es su derivada, será:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ e^{-x} - x\,e^{-x} & si \quad x > 0 \end{cases} \qquad [1]$$

- El problema está en el punto 0. Será derivable en dicho punto si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en él.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (e^{-x} - x\,e^{-x}) = 1 - 0 = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^+) = 1 \neq f'(0^-) = 0$$

luego la función *f(x)* no es derivable en $x = 0$, lo que significa que en este punto de la trayectoria no existe recta tangente.

La función derivada coincidirá con la que nos aproximamos inicialmente en [1].

(2) Los máximos relativos de una función, definida en $\mathbb{R}$, hay que localizarlos entre los puntos de derivada cero, los de no continuidad o los de no derivabilidad. En este caso, al ser una función continua analizando el crecimiento y decrecimiento podremos obtener el máximo absoluto.

Los puntos de derivada cero los buscamos entre los valores de $x > 0$, porque para los menores de cero la función es constante y siempre vale cero.

$$e^{-x} - x\,e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x}(1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

construyamos los dos intervalos de monotonía para $x > 0$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, probemos valores intermedios, por ejemplo, 0.1 y 2, de estos intervalos en la primera derivada:

$$f'(0.1) = e^{-0.1} - 0.1\,e^{-0.1} = 0.9\,e^{-0.1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente en } (0, 1)$$

$$f'(2) = e^{2} - 2\,e^{2} = -e^{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (1, \infty)$$

luego hay un máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = e^{-1} \Rightarrow$ luego también es máximo absoluto.

En consecuencia, las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura son $\left(1, e^{-1}\right)$.

(3) Calculemos el límite de la función para $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(x\,e^{-x}\right) = \infty \cdot e^{-\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

la indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido mediante la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar numerador y denominador independientemente.

Hemos obtenido una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, a la que se aproxima la trayectoria cuando $x \to \infty$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Expresemos el sistema directamente en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m^2-3 & m+1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no. Veamos los casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$; $m = -1$

** Si m = 1 $\Rightarrow$ la última ecuación sería, 0 = 2, que es una ecuación absurda y el sistema no tendría solución, sería un sistema incompatible.

** Si m = -1 $\Rightarrow$ la última ecuación sería, 0 = 0, que es una ecuación trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ la última ecuación no sería ni absurda ni trivial, se trata de un sistema compatible determinado.

(2) Resolvámoslo para m=-1 que es cuando es compatible indeterminado. La última ecuación es trivial y la eliminábamos, nos queda el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1-3z \\ 0 & 1 & 2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1-7z \\ 0 & 1 & 2z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = -1-7z$; $y = 2z$.
Sustituyamos la incógnita z por un parámetro λ:

$$x = -1-7\lambda \quad ; \quad y = 2\lambda \quad ; \quad z = \lambda$$

(3) La matriz de los coeficientes tendrá inversa cuando su rango sea 3. Al triangular inferiormente, en el apartado (1), hemos obtenido una matriz en la que todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero cuando m sea distinto de 1 y de -1, en cuyo caso el rango será tres. Si m es 1 o -1 el rango sería dos.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos, en primer lugar, el plano que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y contiene a la recta *r*.

Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto, el P o uno de la recta, y dos vectores de dirección, uno sería el de la recta *r*, y el otro el que determinan el punto P y un punto de la recta, por ejemplo, el A = (0, -2, 0), es decir,

$$\vec{PA} = (0, -2, 0) - (1, 0, 2) = (-1, -2, -2)$$

la ecuación del plano es: $\pi = \begin{cases} x = 3\alpha - \beta \\ y = -2 + \alpha - 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

hallemos la intersección de π con la recta *s*: $s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

Sustituyamos las *x*, *y* y *z*, del plano en *s* para calcular el punto de incidencia.

$$\left.\begin{array}{r} 6\alpha - 2\beta - 12 + 6\alpha - 12\beta + 2 = 0 \\ -2 + \alpha - 2\beta + 2\alpha - 4\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12\alpha - 14\beta = 10 \\ 3\alpha - 6\beta = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6\alpha - 7\beta = 5 \\ 3\alpha - 6\beta = 2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] - 7 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 0 & 32 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

La solución es:

$\alpha = 32/30 = 16/15$; $\beta = 1/5$

Sustituyamos el valor de $\alpha=16/15$ y el de $\beta=1/5$ en el plano Π para obtener el punto H de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\cdot\dfrac{16}{15} - \dfrac{1}{5} = 3 \\ y = -2 + \dfrac{16}{15} - 2\cdot\dfrac{1}{5} = -\dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{16}{15} - 2\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow H = \left(3, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que nos piden es la que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y por el punto recién obtenido H, siendo el vector de dirección, el vector $\vec{HP}$, es decir,

$$\vec{HP} = (1, 0, 2) - \left(3, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-2, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

luego la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \dfrac{4}{3}t \\ z = 2 + \dfrac{4}{3}t \end{cases}$$

recta que efectivamente corta a *s* al pasar por H, y corta a *r* por estar contenida en el plano que hallamos, cumpliéndose además que el vector de dirección de *r*, el (3, 1, 1), y el vector $\vec{HP} = \left(-2, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ tienen distinta dirección.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 19 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{Ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x=0$. ¿Cuánto valen b y c? (Nota: Ln(t) es el logaritmo neperiano de t.)

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De las funciones continuas f y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))\,dx = 3, \qquad \int_2^3 3(f(x)-g(x))\,dx = 3,$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 3, \qquad \int_1^2 2f(x)\,dx = 3.$$

Calcula si es posible, $\int_1^3 g(x)\,dx$ y, si no es posible, di por qué.

EJERCICIO 3. Los puntos A=(1,2) y B=(5,6) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.

(1) [1´5 PUNTOS]. Calcula la ecuación de la circunferencia.

(2) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

EJERCICIO 4. Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que AP =PB.

(1) [1´5 PUNTOS]. Prueba que las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ son semejantes.

(2) [1 PUNTO]. Resuelve los sistemas

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

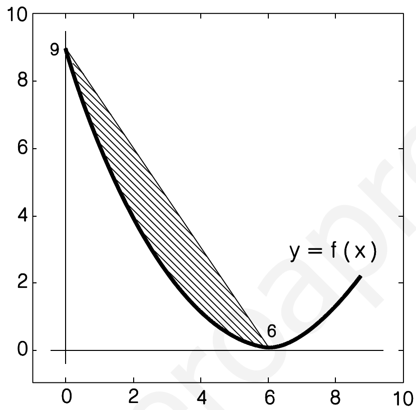
Opción B

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$.

(1) [1´5 PUNTOS]. Demuestra que la recta de ecuación $y = -2x + 1$ es tangente a la gráfica de la función y halla el punto de tangencia correspondiente.

(2) [1 PUNTO]. ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?

EJERCICIO 2. La gráfica de la función *f* de la figura corresponde a una función polinómica de grado 2.



(1) [1´5 PUNTOS]. Determina una expresión algebraica de la función *f*.

(2) [1 PUNTO]. Calcula el área de la región sombreada.

EJERCICIO 3. Un paralelogramo cuyo centro es $M = \left(\frac{3}{2}, 3, 4\right)$ tiene por vértices los puntos A=(1,2,3) y B=(3,2,5).

(1) [1 PUNTO]. Halla las coordenadas de los otros dos vértices.

(2) [1 PUNTO]. Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(3) [0´5 PUNTOS]. Calcula el área del paralelogramo.

EJERCICIO 4. Se dice que una matriz A cuadrada de orden 3 es ortogonal si su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t coinciden. Dado un número real x, sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos(x) & sen(x) & 0 \\ -sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. ¿Es ortogonal la matriz B?

(2) [1 PUNTO]. ¿Es B^2 ortogonal?

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función *f* es derivable en $x = 0$, es continua en dicho punto, luego los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden, veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} \dfrac{Ln(x+1)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} (x^2 + bx + c) = c \\ f(0) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \\ \\ 1 = c \end{cases}$$

Luego para que *f(x)* sea continua en el punto 0, se ha de cumplir que c = 1.

También sabemos que es derivable en dicho punto, por lo que las derivadas laterales existen y coinciden, comprobémoslo. La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1} - Ln(x+1)}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

las derivadas laterales son

$$f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x}{x+1} - Ln(x+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - (x+1)Ln(x+1)}{x^3 + x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 - Ln(x+1) - (x+1)\frac{1}{x+1}}{3x^2 + 2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-Ln(x+1)}{3x^2 + 2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{-1}{x+1}}{6x + 2} = -\dfrac{1}{2}$$

$$f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x + b) = b$$

igualando las derivadas laterales: $b = -\dfrac{1}{2}$

Luego si *f(x)* es derivable en el punto 0, se ha de cumplir que $b = -\dfrac{1}{2} \quad y \quad c = 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Sabemos que

$$\int_1^2 (f(x) + g(x))\, dx = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 f(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\int_1^2 g(x)\, dx = 3 - \int_1^2 f(x)\, dx$$

$$\int_2^3 3(f(x) - g(x))\, dx = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_2^3 (f(x) - g(x))\, dx = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx - \int_2^3 g(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_2^3 g(x))\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx - 1$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 3 \quad ; \quad \int_1^2 2\,f(x)\,dx = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

Calculemos la siguiente integral definida, teniendo en cuenta las anteriores y las propiedades de la linealidad de la integración.

$$\int_1^3 g(x)\,dx = \int_1^2 g(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx = 3 - \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx - 1 =$$

$$= 3 - \frac{3}{2} + \int_2^3 f(x)\,dx - 1 = \frac{1}{2} + \int_2^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 3 - \frac{3}{2} = 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Si A y B son los extremos de un diámetro y C = (a, b) el centro de la circunferencia, se verificará:

$$\vec{AC} = \vec{CB} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AC} = (a, b) - (1, 2) = (a-1, b-2) \\ \vec{CB} = (5, 6) - (a, b) = (5-a, 6-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 5-a \Rightarrow a = 3 \\ b-2 = 6-b \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia, es

$$r = |\vec{CB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$$

(2) Calculemos la pendiente de la recta AB:

$$\vec{AB} = (5, 6) - (1, 2) = (4, 4) \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = \frac{4}{4} = 1$$

ya que la recta tangente en A al ser perpendicular al diámetro AB, la pendiente de la tangente y la del diámetro guardan la siguiente relación:

$$m_{tg} = -\frac{1}{m_{AB}}, \quad \text{es decir,} \quad m_{tg} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{1} = -1$$

La ecuación de dicha tangente en A, en forma de punto-pendiente, es:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 3$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Veamos si existe una matriz P invertible, es decir, que su determinante sea distinto de cero, de forma que las matrices A y B sean semejantes.

$$A \cdot P = P \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a+2c &= 2a \\ b+2d &= -b \\ a &= 2c \\ b &= -d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a-2c &= 0 \\ 2b+2d &= 0 \\ a-2c &= 0 \\ b+d &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a - 2c &= 0 \\ b + d &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 2c \\ b &= -d \end{aligned}\right\}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado, hay infinitas soluciones que satisfacen las condiciones anteriores, por lo que sí es posible encontrar una matriz P invertible:

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & -d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |P| = \begin{vmatrix} 2c & -d \\ c & d \end{vmatrix} = 2cd + cd = 3cd \neq 0$$

La condición que hay que añadir es que su determinante sea distinto de cero, lo que implica que "c" y "d" sean distintos de cero, al igual que "a" y "b".

(2) Resolvamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2x \\ \quad\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$$

obtenemos una ecuación con dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la solución es, $x = 2y$. Sustituyendo y por un parámetro, λ, tendremos finalmente:

$$x = 2\lambda \quad ; \quad y = \lambda$$

Resolvamos esta otra ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ \quad\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ \ \ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$$

obtenemos una ecuación con dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la solución es, $x = -y$. Sustituyendo y por un parámetro, λ, tendremos finalmente:

$$x = -\lambda \quad ; \quad y = \lambda$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Si la recta $y = -2x + 1$, es una recta tangente a la función f en un punto "a", significa que la pendiente, -2, de dicha recta coincide con la derivada de la función en el punto de abscisa "a":

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 10x + 2 \Rightarrow f'(a) = 6a^2 - 10a + 2$$

igualando esta última expresión a -2, tendremos:

$$6a^2 - 10a + 2 = -2 \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \begin{matrix} \nearrow a = 1 \\ \searrow a = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

Calculemos el valor de la función en cada uno de los puntos que obtenidos:

$$f(1) = 2 - 5 + 2 = -1 \Rightarrow (1, -1)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right)$$

Obtengamos la ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos anteriores.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 1 \\ y + \dfrac{8}{27} = -2\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow y = -2x + \dfrac{28}{27} \end{cases}$$

Efectivamente, la recta $y = -2x + 1$, es tangente a la gráfica de f en el punto (1, -1).

(2) Para saber si la recta tangente $y = -2x + 1$ corta a la gráfica de *f* en algún otro punto distinto del de tangencia, resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y de la función.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^3 - 5x^2 + 2x \\ y = -2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2x^3 - 5x^2 + 2x = -2x + 1 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

	2	-5	4	-1
1		2	-3	1
	2	-3	1	0

Aplicando Ruffini, hemos obtenido una solución que ya sabíamos, $x = 1$. Terminemos de resolver la ecuación de segundo grado que ha salido.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow x = 1 \\ \searrow x = \frac{1}{2} \end{array}$$

La recta tangente corta a la gráfica, además de en el punto de tangencia, en el punto $\left(\frac{1}{2},\, 0\right)$. La ordenada se ha obtenido sustituyendo la abscisa en la función.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) La función *f* al ser una función polinómica de grado 2, será de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

pero como el vértice de la parábola, (6, 0), coincide con el único punto de corte que hay con el eje de abscisas, la ecuación la podemos escribir mejor así:

$$y = a(x - 6)^2$$

La gráfica corta al eje de ordenadas en el punto (0, 9), por tanto:

$$9 = a(0 - 6)^2 \quad\Rightarrow\quad 9 = 36\,a \quad\Rightarrow\quad a = 1/4$$

La expresión algebraica de la función *f* es:

$$y = \frac{1}{4}(x-6)^2 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$$

(2) Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, 0) y (0, 9):

$$\frac{x-6}{0-6} = \frac{y-0}{9-0} \;\Rightarrow\; \frac{x-6}{-6} = \frac{y}{9} \;\Rightarrow\; y = -\frac{9}{6}x + 9 \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{2}x + 9$$

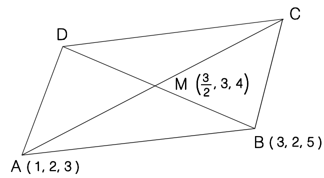
El área de la región sombreada será:

$$Área = \int_0^6 \left(-\frac{3}{2}x + 9 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9\right)\right) dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right) dx = \left[-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^6 =$$

$$= -\frac{1}{12}6^3 + \frac{3}{4}6^2 - 0 = 9$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Tengamos en cuenta que $\vec{AC} = 2\,\vec{AM} \;\Rightarrow$



$$\vec{AC} = (a, b, c) - (1, 2, 3) = (a-1, b-2, c-3)$$

$$\vec{AM} = \left(\frac{3}{2}, 3, 4\right) - (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$2\,\vec{AM} = 2\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = (1, 2, 2)$$

igualemos los vectores $\vec{AC}$ y $2\vec{AM}$

$$(a-1,\ b-2,\ c-3) = (1,\ 2,\ 2) \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 & \Rightarrow & a=1 \\ b-2=2 & \Rightarrow & b=4 \\ c-3=2 & \Rightarrow & c=5 \end{cases} \Rightarrow C=(1,\ 4,\ 5)$$

Tengamos ahora en cuenta que $\vec{BD} = 2\vec{BM} \Rightarrow$

$$\vec{BD} = (d,\ e,\ f) - (3,\ 2,\ 5) = (d-3,\ e-2,\ f-5)$$

$$\vec{BM} = \left(\frac{3}{2},\ 3,\ 4\right) - (3,\ 2,\ 5) = \left(-\frac{3}{2},\ 1,\ -1\right) \Rightarrow 2\vec{BM} = (-3,\ 2,\ -2)$$

igualemos los vectores $\vec{BD}$ y $2\vec{BM}$

$$(d-3,\ e-2,\ f-5) = (-3,\ 2,\ -2) \Rightarrow \begin{cases} d-3=-3 & \Rightarrow & d=0 \\ e-2=2 & \Rightarrow & e=4 \\ f-5=-2 & \Rightarrow & f=3 \end{cases} \Rightarrow D=(0,\ 4,\ 3)$$

(2) Calculemos los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$

$$\vec{AB} = (3,\ 2,\ 5) - (1,\ 2,\ 3) = (2,\ 0,\ 2)$$
$$\vec{AD} = (0,\ 4,\ 3) - (1,\ 2,\ 3) = (-1,\ 2,\ 0)$$

el producto vectorial de estos dos vectores nos dará un vector perpendicular al plano que contiene al paralelogramo, es decir, el de dirección de la recta.

$$\vec{AB}\times\vec{AD} = (2,\ 0,\ 2)\times(-1,\ 2,\ 0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4,\ -2,\ 4)$$

La ecuación de la recta que nos piden es:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{4}$$

(3) El área del paralelogramo coincidirá con el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$

$$Área = |\vec{AB}\times\vec{AD}| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Probemos que la matriz B es ortogonal, es decir, que $B^t = B^{-1}$.

$$B^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & -sen(x) & 0 \\ sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

Calculemos ahora la matriz inversa de B. Usaremos el método de Gauss, que consiste en poner a la derecha de B la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de B, la parte que quede finalmente a la derecha es la matriz inversa de A. (Nota: da igual esta disposición o la contraria).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(x) & sen(x) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(x) & \cos(x) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = \cos(x) \neq 0$.
Daría igual suponer que $sen(x) \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: cos(x) ·[2ªf.] + sen(x) ·[1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(x) & sen(x) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sen^2(x)+\cos^2(x) & 0 & sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos teniendo en cuenta la fórmula:
$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$
Multipliquemos la 3ªf. por -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(x) & sen(x) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}=1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por:
[1ªf.] - sen(x) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(x) & 0 & 0 & 1-sen^2(x) & -sen(x)\cos(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Sustituyamos $1-sen^2(x)$ por $\cos^2(x)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(x) & 0 & 0 & \cos^2(x) & -sen(x)\cos(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ªf. por cos(x).
Ya que supusimos que $\cos(x)\neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos(x) & -sen(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La matriz que hemos obtenido a la derecha es la matriz inversa de B, es decir,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -sen(x) & 0 \\ sen(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

Observando [1] y [2] comprobamos que ambas matrices son iguales, es decir:

$$B^t = B^{-1}$$

por lo que la matriz B es ortogonal.

(2) Comprobemos si B^2 es ortogonal, lo será si:

$$\left(B^2\right)^t = \left(B^2\right)^{-1}$$

comprobemos si se verifica. Como $B^2 = B \cdot B \quad \Rightarrow$

$$\left(B \cdot B\right)^t = \left(B \cdot B\right)^{-1}$$

sabiendo que la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas en orden invertido, y que la traspuesta del producto de dos matrices es el producto de las traspuestas también en orden invertido, tendremos:

$$B^t \cdot B^t = B^{-1} \cdot B^{-1}$$

observando, según el apartado (1), que $B^t = B^{-1}$:

$$B^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B^{-1}$$

que evidentemente es una identidad, luego B^2 es una matriz ortogonal.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 20 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función logaritmo neperiano, $f(x)=\mathrm{Ln}(x)$.
(1) [1 PUNTO]. Prueba que la función derivada f' es decreciente en todo su dominio.
(2) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x)=x^2 \qquad\qquad g(x)=x^3-2x.$$

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos P=(x,y) del plano que verifican la siguiente propiedad: El triángulo PAB cuyos vértices son P, A=(2,0) y B=(-2,0) es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P.

EJERCICIO 4. La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación

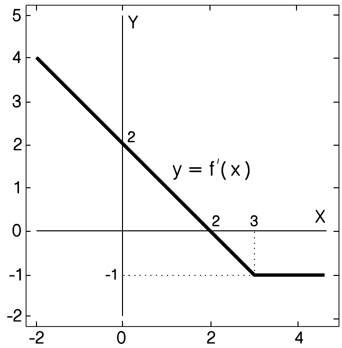
$$X^3+X=\begin{pmatrix}2&4&7\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(1) [1 PUNTO]. Determina, si es posible, el rango de X.
(2) [1´5 PUNTOS]. ¿Verifica alguna de las matrices A y B siguientes la relación del enunciado?

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Opción B

EJERCICIO 1. La función derivada de una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ viene dada por la gráfica de la figura. Además, se sabe que $f(-1) = 9/2$.



(1) [2 PUNTOS]. Determina una expresión algebraica de f.
(2) [0´5 PUNTOS]. Calcula $\lim_{x\to 3} f(x)$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Calcula una primitiva de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 sen(x)$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 3. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1+m. \end{aligned}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Estudia su comportamiento según los valores del parámetro m.
(2) [1 PUNTO]. Resuélvelo para m = 2.

EJERCICIO 4. **(1)** [2 PUNTOS]. ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

que está más cerca del punto A=(2,3,-1)?
(2) [0´5 PUNTOS]. Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B=(1,0,0).

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La función derivada f' de la función f, es $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Estudiemos el crecimiento y decrecimiento de $f\,'$. Calculemos la 1ª derivada de $f\,'$ o la 2ª de f, y obtengamos los valores que la anulen

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x^2} = 0$$

no hay ningún valor que haga cero a la función $f\,''$. Por tanto, sólo hay un posible intervalo de crecimiento o decrecimiento, el intervalo $(0, +\infty)$, que es donde está definida tanto la función f como la función $f\,'$. Probemos un valor cualquiera de dicho intervalo, por ejemplo, el 1, en la primera derivada de $f\,'$ (2ª de f):

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad f' \text{ es decreciente en todo su dominio.}$$

(2) Estudiemos el crecimiento y decrecimiento de la función g. Calculemos la 1ª derivada de g, $g'(x)$, y obtengamos los valores que la anulen

$$g(x) = \frac{Ln(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - Ln(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1 - Ln(x)}{x^2}$$

$$\frac{1 - Ln(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - Ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ln(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

sólo hay un valor que haga cero a la función g'. Por tanto, hay dos posibles intervalos de crecimiento o decrecimiento, el intervalo $(0, e)$ y el $(e, +\infty)$, ya que la función $g(x)$ está definida en el intervalo $(0, +\infty)$. Probemos con un valor cualquiera de cada uno de dichos intervalos, por ejemplo, el 1 y el e^2, respectivamente, en la primera derivada:

$$g'(1) = \frac{1 - Ln(1)}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) \text{ es creciente en } (0, e).$$

$$g'(e^2) = \frac{1 - Ln(e^2)}{(e^2)^2} = \frac{1-2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) \text{ es decreciente en } (e, +\infty).$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Dibujemos la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 2x$.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 2x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad 0 = x(x^2-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x^2 = 2 \begin{array}{l} \nearrow x = \sqrt{2} \\ \searrow x = -\sqrt{2} \end{array} \end{array}$$

los puntos de corte con este eje son: $A = (-\sqrt{2}, 0)$, $B = (0, 0)$ y $C = (\sqrt{2}, 0)$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

$y = x^3 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow$ el punto es el (0, 0).

3.- La función es continua en todo su dominio ya que es polinómica.

4.- Máximos y mínimos.

Hallemos la primera derivada: $g'(x) = 3x^2 - 2$

Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada, que son:

$$3x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nearrow x \approx 0'816497... \\ \searrow x \approx -0'816497... \end{array}$$

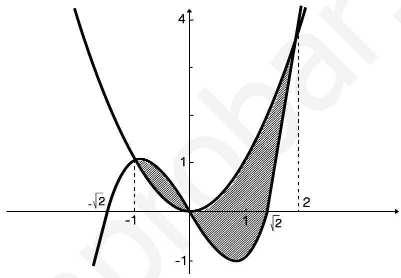
sustituyamos estos valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada, y según nos salga mayor o menor que cero será mínimo o máximo.

$$g''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} \nearrow g''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{2}{3}} > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \searrow g''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

aproximadamente el máximo es (-0´816497, 1´0886) y el mínimo (0´816497, -1´0886). Las ordenadas de estos extremos relativos se obtienen sustituyendo las abscisas correspondientes en la función *g(x)*.

5.- Al ser una función polinómica no presenta ningún tipo de asíntotas.

6- La gráfica aproximada de la función es la situada al lado.



La gráfica de la función $f(x) = x^2$, es una parábola elemental cuyo vértice es el origen de coordenadas. También está dibujada al lado.

El recinto subrayado es el limitado por las gráficas de ambas funciones.

Calculemos el área de dicho recinto. Construyamos la función diferencia entre las funciones *f(x)* y *g(x)*, es decir,

$$g(x) - f(x) = x^3 - 2x - x^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) - f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

Veamos cuáles son los puntos de corte de esta nueva función con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - x^2 - 2x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^3 - x^2 - 2x \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nearrow x = 0 \\ \searrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \nearrow x = 2 \\ \searrow x = -1 \end{cases}$$

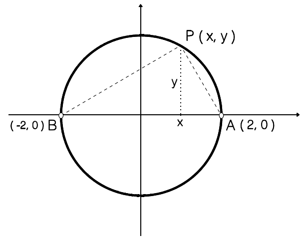
El área la obtendremos a partir del cálculo de las siguientes integrales:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^{0} \right| = \left| 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{5}{12}$$

$$A_2 = \left| \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{0}^{2} \right| = \left| 4 - \frac{8}{3} - 4 - 0 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



Los puntos P del plano tendrán de coordenadas genéricas (x, y). Si los triángulos APB son rectángulos en P, se ha de verificar que los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{BP}$ son perpendiculares y por tanto su producto escalar es cero.

Calculemos dichos vectores y efectuemos su producto escalar.

$$\vec{AP} = (x, y) - (2, 0) = (x-2, y) \quad ; \quad \vec{AP}\cdot\vec{BP} = 0 \Rightarrow$$
$$\vec{BP} = (x, y) - (-2, 0) = (x+2, y)$$

$$(x-2, y)\cdot(x+2, y) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 2, que es la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que satisfacen la condición del problema, lógicamente hay que quitar de dicha circunferencia los puntos A y B porque cuando el punto P coincide con alguno de ellos no se forma ningún triángulo.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Saquemos X factor común en la relación que nos dan.

$$X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X\cdot(X^2 + I) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La última matriz es el resultado del producto de dos matrices cuadradas de orden 3, una es la matriz X, y la otra, la matriz X^2 - I.

Teniendo en cuenta una de las propiedades de los determinantes, que dice: "El determinante del producto de dos matrices cuadradas, A y B, de orden n es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices", es decir:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

si la aplicamos a las matrices X y X^2-I, tendremos:

$$|X\cdot(X^2 + I)| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |X|\cdot|X^2 + I| = 8$$

si el producto de dos determinantes es 8, ninguno de ellos es cero, luego el determinante de la matriz X no es cero, lo que implica que la matriz X es regular, o sea, su rango es tres.

(2) Comprobemos si la matriz A verifica la relación del enunciado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sustituyamos las matrices correspondientes en la relación:

$$A^3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego la matriz A no verifica la relación.

Comprobemos ahora si la matriz B verifica la relación del enunciado.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sustituyamos las matrices correspondientes en la relación:

$$B^3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego la matriz B sí verifica la relación.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Obtengamos la expresión analítica de la función $f\,'$, sabiendo que su dominio es $\mathbb{R}$, ya que la función *f(x)* es derivable en $\mathbb{R}$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 0) es:

$$\frac{x-2}{2-0} = \frac{y-0}{0-2} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} \Rightarrow y = -x + 2$$

por tanto la función *f ´(x)* es:

$$f\,'(x) = \begin{cases} -x+2 & si \;\; x < 3 \\ -1 & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$$

La función *f(x)* la obtendremos mediante integración de la función *f ´(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} \int (-x+2)\,dx & si \;\; x<3 \\ \int -1\,dx & si \;\; x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 2x + C_1 & si \;\; x<3 \\ -x + C_2 & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$$

Al ser la función *f(x)* derivable, es continua, ya que la derivabilidad implica continuidad; los trozos polinómicos son continuos, por lo que donde debemos comprobar la continuidad es en el punto 3, por existir un cambio en el comportamiento de la función. Para que lo sea, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto deben existir y coincidir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} \left(-x + C_2\right) = C_2 - 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} \left(-\dfrac{x^2}{2} + 2x + C_1\right) = \dfrac{3}{2} + C_1 \\ f(3) = C_2 - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \\ \\ C_2 - 3 = \dfrac{3}{2} + C_1 \Rightarrow C_2 = \dfrac{9}{2} + C_1 \end{array}\right.$$

Como nos dan el valor de la función *f* en el punto -1, tendremos:

$$f(-1)=\frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)+C_1=\frac{9}{2} \Rightarrow C_1=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+2 \Rightarrow C_1=7$$

$$C_2=\frac{9}{2}+C_1 \Rightarrow C_2=\frac{9}{2}+7 \Rightarrow C_2=\frac{23}{2}$$

luego la función *f(x)* es:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x+7 & si\ x<3 \\ -x+\dfrac{23}{2} & si\ x\geq 3 \end{cases}$$

(2) Calculemos el límite de la función *f(x)* cuando x tiende a tres

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3^+\\ x>3}}\left(-x+\frac{23}{2}\right)=-3+\dfrac{23}{2}=\dfrac{17}{2} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3^-\\ x<3}}\left(-\frac{x^2}{2}+2x+7\right)=-\dfrac{9}{2}+6+7=\dfrac{17}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{17}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Para obtener una primitiva *F(x)* de *f(x)* calcularemos la siguiente integral

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int 2x^2\,sen(x)\,dx= \qquad [1]$$

integral que la vamos a hacer por partes:

$$u=2x^2 \quad ; \quad du=4x\,dx$$

$$dv=sen(x)\,dx \quad ; \quad v=\int dv=\int sen(x)\,dx=-\cos(x)$$

continuando desde [1]

$$=-2x^2\cos(x)+\int 4x\cos(x)\,dx= \qquad [2]$$

integremos nuevamente por partes la última integral

$$u=4x \quad ; \quad du=4\,dx$$

$$dv=\cos(x)\,dx \quad ; \quad v=\int dv=\int \cos(x)\,dx=sen(x)$$

continuando desde [2]

$$=-2x^2\cos(x)+4x\,sen(x)-4\int sen(x)\,dx=-2x^2\cos(x)+4x\,sen(x)+4\cos(x)+C$$

De todas las primitivas obtenidas calculemos la que pasa por el punto (0,0)

$$F(x)=-2x^2\cos(x)+4x\,sen(x)+4\cos(x)+C \Rightarrow F(0)=0+0+4\cos(0)+C$$

$$0=4+C \Rightarrow C=-4 \Rightarrow F(x)=-2x^2\cos(x)+4x\,sen(x)+4\cos(x)-4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para discutir el sistema lo expresaremos en forma matricial y procederemos mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & 1+m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - m · [2ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & m-m^2 & m \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede o no ser cero. Discutamos los diferentes casos que puedan presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow m - m^2 = 0 \Rightarrow m(1 - m) = 0 \Rightarrow m=0 \; ; \; m=1$.

** Si $m = 0 \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 0$, es decir, una ecuación trivial, la eliminamos, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $m = 1 \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 1$, es decir, una ecuación absurda, se trata de un sistema incompatible.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow m - m^2 \neq 0 \Rightarrow m(1 - m) \neq 0 \Rightarrow m\neq 0$ y $m\neq 1$, la última ecuación no es ni absurda ni trivial, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible determinado.

(2) Sustituyamos m por 2 en el sistema triangulado anterior:

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 2

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [3ªf.]

$$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$x = 2$; $y = -1$; $z = 2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) El punto P de la recta r que está más cerca del punto A es aquel que verifique que los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{v}_r$ sean perpendiculares

Expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica, para ello resolveremos el sistema poniéndolo en forma matricial y procediendo mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, la incógnita que nos sobra, la z, la pasamos al segundo miembro, como incógnita secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-2z \\ 0 & -1 & 2z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = 1$; $y = -2z$

Sustituyendo z por el parámetro λ, las ecuaciones paramétricas de la recta r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto P de la recta r tendrá de coordenadas genéricas:

P = (1, -2λ, λ).

El vector de dirección de la recta es el (0, -2, 1).

Impongamos la condición de perpendicularidad entres los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{v}_r$

$$\vec{PA} = (2, 3, -1) - (1, -2\lambda, \lambda) = (1, 3+2\lambda, -1-\lambda) \quad ; \quad \vec{v}_r = (0, -2, 1)$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{v}_r = (1, 3+2\lambda, -1-\lambda) \cdot (0, -2, 1) = 0 \Rightarrow -6-4\lambda-1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$$

luego el punto P es $P = (1, -2\lambda, \lambda) = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

(2) Construyamos los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AP}$

$$\vec{AB} = (1, 0, 0) - (2, 3, -1) = (-1, -3, 1)$$

$$\vec{AP} = \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right) - (2, 3, -1) = \left(-1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Calculemos el producto vectorial de ambos vectores

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = (-1, -3, 1) \times \left(-1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{5}, -\frac{2}{5} - 1, \frac{1}{5} - 3 \right) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{14}{5} \right)$$

El área del triángulo APB será

$$Área = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AP} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{39}{25} + \frac{196}{25}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{294}{25}} = \frac{7\sqrt{6}}{10}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 21 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcula

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx.$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Se sabe que la función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si \quad 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo (0, 5) y verifica $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Halla el punto Q simétrico del punto P=(2,0,1) respecto de la recta r que pasa por el punto A=(0,3,2) y es paralela a la recta s de ecuaciones

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 4. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa.
(2) [1 PUNTO]. Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Dos partículas A y B se mueven en el plano XOY. En cada instante de tiempo *t* las posiciones de las partículas son, respectivamente,

$$A\left(\frac{1}{2}(t-1),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right) \quad \text{y} \quad B(2-t,\ 0).$$

Determina el instante t_0 en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia se hallan una de otra en ese instante.

EJERCICIO 2. **(1)** [1 PUNTO]. Calcula la integral

$$\int \frac{sen(x)}{(\cos(x))^3}\, dx$$

realizando el cambio de variable $\cos(x) = t$.

(2) [1 PUNTO]. Calcula la misma integral que en el apartado anterior pero haciendo el cambio de variable $tg(x) = u$.

(3) [0´5 PUNTOS]. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 3. Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$.

(1) [0´5 PUNTOS]. Represéntala indicando su centro y su radio.

(2) [2 PUNTOS]. Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes:

(a) la recta tangente a la circunferencia en el punto A=(3,2),

(b) la recta normal a la circunferencia en el punto A,

(c) el eje de abscisas.

EJERCICIO 4. **(1)** [1´5 PUNTOS]. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a=3.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

(2) [1 PUNTO]. Determina todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos en primer lugar

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx$$

haciendo el cambio de variable: $t = e^x$; $dt = e^x\, dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+2} = \qquad [1]$$

hemos obtenido una integral racional propia, calculemos las raíces del denominador:

$$t^2+3t+2=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Descompongamos el integrando en fracciones elementales

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)} =$$

$$1 = A(t+2)+B(t+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t=-1 \ \Rightarrow \ 1=A \\ t=-2 \ \Rightarrow \ 1=-B \ \Rightarrow \ -1=B \end{cases}$$

continuando en [1], tendremos

$$= \int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}\right)dt = \int\frac{1}{t+1}\,dt - \int\frac{1}{t+2}\,dt = Ln|t+1| - Ln|t+2| =$$

$$= Ln|e^x+1| + Ln|e^x+2|$$

Ahora calcularemos la integral definida que nos pide el ejercicio.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \Big[Ln|e^x+1| - Ln|e^x+2|\Big]_0^1 =$$

$$= Ln|e+1| - Ln|e+2| - (Ln(2)-Ln(3)) = Ln\left|\frac{e+1}{e+2}\right| - Ln\left|\frac{2}{3}\right| = Ln\left|\frac{3(e+1)}{2(e+2)}\right|$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Como $f(0) = f(5)$, y $f(0) = 0$, y $f(5) = c + 2 \Rightarrow 0 = c + 2 \Rightarrow c = -2$. Sustituyamos este valor de c en la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -2+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

Al ser derivable en (0, 5) es continua en (0, 5). Estudiemos la continuidad.

- Para valores de x, $0 < x < 2$, el trozo de función, $ax+bx^2$, es polinómica, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego f lo es en el intervalo $0 < x < 2$.

- Para valores de x, $2 < x < 5$, el trozo de función correspondiente, es la raíz cuadrada de una función polinómica de primer grado que es continua para los valores de $x\ge1$, mas una función constante, luego seguirá siendo continua para valores de $x\ge1$, por tanto f lo es en el intervalo $2 < x < 5$.

- El problema está en el punto $x = 2$ que es donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Como es continua, los límites laterales y el valor de la función en dicho punto existen y coinciden, veámoslo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2^+\\x>2}} (-2+\sqrt{x-1}) = -2+1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2^-\\x<2}} (ax+bx^2) = 2a+4b \\ f(2) = 2a+4b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = f(2) \ \Rightarrow \\ \qquad 2a+4b=-1 \end{cases}$$

luego es continua en el punto 2 si se verifica que: $2a + 4b = -1$. [1]

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si siendo continua en dicho punto las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $0 < x < 2$, f es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $a+2bx$.

- Para valores de $2 < x < 5$, f es derivable, por ser la suma de dos funciones derivables una en todo $\mathbb{R}$ y la otra (la raíz cuadrada) en $\mathbb{R}$-{1}, luego la función f es derivable para $2 < x < 5$, siendo la función derivada, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Por tanto, la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & si \;\; 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si \;\; 2 \le x < 5 \end{cases}$$

- La función es derivable en 2, lo dice el problema, pero para que lo sea, las derivadas laterales deben coincidir ya que es continua en él.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^+) = \lim\limits_{\substack{x \to 2^+ \\ x > 2}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2} \\ f'(2^-) = \lim\limits_{\substack{x \to 2^- \\ x < 2}} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (a + 2bx) = a + 4b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^+) = f'(0^-) \quad \Rightarrow \\ \dfrac{1}{2} = a + 4b \quad \Rightarrow \quad 2a + 8b = 1 \end{array}\right.$$

luego la función $f(x)$ es derivable en $x = 2$, si se verifica que: $2a + 8b = 1$. [2]

Para calcular el valor de a y de b, resolveremos el sistema formado por [1] y [2]:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + 4b = -1 \\ 2a + 8b = 1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2

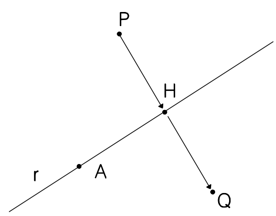
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$a = -3/2$; $b = 1/2$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



El vector de dirección de la recta s lo obtendremos mediante el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que definen a la recta:

$$\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, 0) \times (0, 0, 1) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, 0)$$

La ecuación de la recta *r* que pasa por A y su vector de dirección es (2, -1, 0), será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto H de la recta *r* tendrá de coordenadas genéricas: H = (2t, 3-t, 2).

Impongamos la condición de perpendicularidad entres los vectores $\vec{PH}$ y $\vec{v}_r$

$$\vec{PH} = (2t, 3-t, 2) - (2, 0, 1) = (2t-2, 3-t, 1) \quad ; \quad \vec{v}_r = (2, -1, 0)$$

$$\vec{PH} \cdot \vec{v}_r = (2t-2, 3-t, 1) \cdot (2, -1, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t-4-3+t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7}{5}$$

Sustituyamos este valor de t en el punto H y en el vector $\vec{PH}$.

$$H = (2t, 3-t, 2) = \left(\frac{14}{5}, 3-\frac{7}{5}, 2\right) = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right)$$

$$\vec{PH} = (2t-2, 3-t, 1) = \left(\frac{14}{5}-2, 3-\frac{7}{5}, 1\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1\right)$$

El punto Q=(a, b, c) simétrico del P respecto de *r*, verifica que $\vec{PH} = \vec{HQ}$, es decir,

$$\vec{PH} = \vec{HQ} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 1\right) = (a, b, c) - \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} = a - \frac{14}{5} & \Rightarrow a = \frac{18}{5} \\ \frac{8}{5} = b - \frac{8}{5} & \Rightarrow b = \frac{16}{5} \\ 1 = c - 2 & \Rightarrow c = 3 \end{cases}$$

luego el punto Q es: $Q = \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Determinemos si la matriz A es invertible por el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª y 3ª fila por 3.
Simplifiquemos la 2ª fila por -3.
La matriz A es invertible, siendo la matriz inversa, la matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz B no es invertible porque tiene toda una fila (la 3ª) de ceros.

(2) Resolvamos la ecuación matricial, $BA - A^2 = AB - X \Rightarrow X = AB - BA + A^2$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Construiremos la función distancia entre dos puntos, ya que pretendemos que sea mínima dicha distancia.

$$dist(A,B) = d(t) = \sqrt{\left(2-t-\tfrac{1}{2}(t-1)\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2-t-\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}(1+t^2-2t)\right)} = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}t+\tfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}(1+t^2-2t)\right)} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{9}{4}t^2 + \tfrac{25}{4} - \tfrac{30}{4}t + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}t^2 - \tfrac{6}{4}t} = \sqrt{3t^2 - 9t + 7}$$

Hacer mínima esta función *d(t)* es hacer mínima la función del radicando, es decir, la función, $D(t) = 3t^2 - 9t + 7,$ cuyo dominio es $\Re$.

Calculemos el valor que anula a la función primera derivada, *D´(t)*:

$$D(t) = 3t^2 - 9t + 7 \Rightarrow D'(t) = 6t - 9 \Rightarrow 6t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1{'}5$$

Estudiemos la monotonía de la función *D(t)*, continua y derivable en su dominio.

D´(1) = 6 - 9 = -3 < 0 ⇒ *D´(t)* < 0 ⇒ *D (t)* es decreciente en]-∞, 1´5[

D´(2) = 12 - 9 = 3 > 0 ⇒ *D´(t)* > 0 ⇒ *D (t)* es creciente en]1´5, +∞[

luego hay un mínimo relativo en *t* = 1´5, que también es mínimo absoluto, es decir, que el instante en el que las partículas están más próximas es en el $t_0 = 1{'}5$.

La distancia a la que se encuentran las dos partículas en ese instante es:

$$dist(A,B) = d(1{'}5) = \sqrt{3(1{'}5)^2 - \tfrac{27}{2} + 7} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

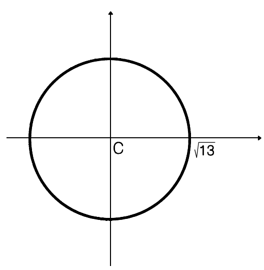
SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Calculemos la integral
$$\int \frac{sen(x)}{(\cos(x))^3}\,dx$$
haciendo el cambio de variable $\cos(x) = t$; $-\,sen(x)\,dx = dt$
$$\int \frac{sen(x)}{(\cos(x))^3}\,dx = \int \frac{-\,dt}{t^3} = -\int t^{-3}\,dt = -\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2\cos^2(x)}$$

(2) Calculemos la misma integral
$$\int \frac{sen(x)}{(\cos(x))^3}\,dx$$
haciendo ahora el cambio de variable $tg(x) = u \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2(x)}\,dx = du$
$$\int \frac{sen(x)}{(\cos(x))^3}\,dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\,\frac{dx}{\cos^2(x)} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{tg^2(x)}{2}$$

(3) Aparentemente no se obtiene el mismo resultado y efectivamente son distintos, sin embargo las dos primitivas que se han obtenido se deben diferenciar solamente en una constante, comprobémoslo:
$$\frac{1}{2\cos^2(x)} - \frac{tg^2(x)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2\cos^2(x)} - \frac{sen^2(x)}{2\cos^2(x)} = \frac{1-sen^2(x)}{2\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \frac{1}{2}$$
luego como era de esperar las dos primitivas se diferencian en una constante.

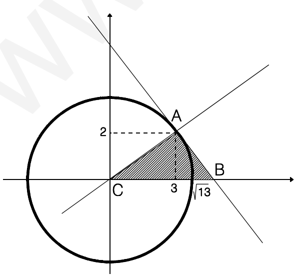
SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-



(1) La circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$, tiene su centro en el punto (0, 0) y su radio es $\sqrt{13}$

La circunferencia está representada al lado.

(2) Hallemos el área de la figura limitada por las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto A=(3,2) y el eje de abscisas. Se trata del área rayada en la figura. La pendiente de la normal que pasa por A = (3, 2) y por el origen de coordenadas es, evidentemente, 2/3.



La pendiente de la recta tangente, al ser perpendicular a la recta normal, es -3/2, y su ecuación:
$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$
Calculemos el punto de corte de la recta tangente con el eje de

abscisas. Se trata de resolver el sistema formado por las ecuaciones de la tangente y la del eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; 0 = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2} \;\Rightarrow\; 0 = -3x + 13 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{13}{3}$$

El área de la figura rayada es la de un triángulo, cuya base es 13/3 y la altura 2:

$$\acute{A}rea = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{\frac{13}{3}\cdot 2}{2} = \frac{13}{3}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sustituyamos "a" por 3 en el determinante que nos da el problema.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2+3 \\ 4 & 9 & 4+9 \\ 8 & 27 & 8+27 \end{vmatrix} = 0$$

La propiedad que hemos aplicado es: "Si una columna de un determinante es combinación de otras columnas, el determinante es cero". En nuestro caso la 3ª columna es la suma de las dos primeras columnas.

(2) Desarrollemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix} = 70a^2 + 20a^3 + 104a - 40a^2 - 26a^3 - 140a = -6a^3 + 30a^2 - 36a$$

las tres columnas del determinante representarán tres vectores linealmente dependientes si el determinante vale cero. Igualemos a cero el resultado anterior y calculemos los valores de "a" que lo hacen cero.

$$-6a^3 + 30a^2 - 36a = 0 \;\Rightarrow\; -6a(a^2 - 5a + 6) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow\; a = 0 \\ \searrow\; a^2 - 5a + 6 = 0 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \nearrow a = 3 \\ \searrow a = 2 \end{array} \end{array}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 22 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Dibuja la región limitada por la gráfica de la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{Ln}(1+x)$, la recta tangente a la gráfica de f en el origen y la recta $x = 1$. (Nota: Ln(t) es el logaritmo neperiano de t.)
(2) [1´5 PUNTOS]. Halla el área de dicha región.

EJERCICIO 2. La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función $P : [2, 12] \to \mathbb{R}$ dada por

$$P(t) = \begin{cases} 10 + (t-6)^2 & si \quad 2 \le t \le 10 \\ 28 - 2^{t-9} & si \quad 10 < t \le 12. \end{cases}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Representa gráficamente la función P e indica en qué períodos de tiempo crece o decrece la población.
(2) [0´5 PUNTOS]. Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo.
(3) [0´5 PUNTOS]. Si la población evolucionara a partir de $t = 12$ con la misma función que para $10 < t \le 12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

EJERCICIO 3. Sea C la matriz que depende de un parámetro m dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [1 PUNTO]. ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?
(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula la matriz inversa de C para m = 2.

EJERCICIO 4. Sea Π el plano de ecuación $\Pi \equiv 3x - 2y - 6z = 1$ y se r la recta dada en forma paramétrica por

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(1) [0´5 PUNTOS]. ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?
(2) [0´75 PUNTOS]. En el caso concreto de la recta r y el plano Π, ¿cómo averiguarías si son paralelos? Comprueba si lo son.
(3) [0´5 PUNTOS]. ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?
(4) [0´75 PUNTOS]. En el caso concreto de la recta r y el plano Π, ¿cómo averiguarías si son perpendiculares? Comprueba si lo son.

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$ Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en Q=(-1,3) y que la tangente a dicha gráfica en el punto M=(0,1) es horizontal.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$ y las rectas de ecuaciones $x = 1$ e $y = 3x + 2$.

EJERCICIO 3. Considera el punto P=(-1,2,1).
(1) [1 PUNTO]. Determina un punto Q del plano $\Pi \equiv -3x + y + z + 5 = 0$ de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano Π.
(2) [1 PUNTO]. Determina un punto M de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$ de forma que el vector MP sea paralelo al plano Π.
(3) [0´5 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo MPQ.

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 565 ptas.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 740 ptas.

Con estos datos, ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Hallemos primeramente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el origen, es decir, en el punto de abscisa $x_0 = 0$, y ordenada $y_0 = 0$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (0, 0) es:

$$y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = f'(0)\ (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = f'(0) \cdot x$$

$$f(x) = Ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x$$

La gráfica de la función *f(x) = Ln(1+x)* coincide con la de *Ln(x)* pero desplazando ésta una unidad a la izquierda. No obstante podemos estudiar sus características más importantes.

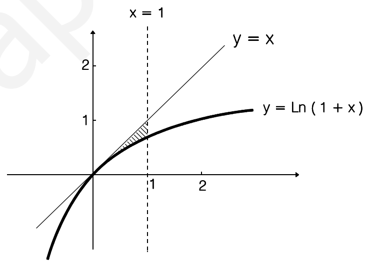
1.- Dominio general de la función: (-1, +∞). Aunque en este ejercicio es [0, 1].

2.- Crecimiento:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$ ⇒ no hay ningún valor que anule a la derivada, y para cualquier valor de $x > -1$ la función derivada es siempre positiva, luego la función *f(x)* es creciente en todo su dominio, y lógicamente en el intervalo de definición [0, 1].

3.- Punto de corte con los ejes: (0, 0).

4.- La gráfica de *f(x)*, y la de la región pedida es la situada al lado.



(2) El área de la región vendrá dada por:

$$\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 Ln(1+x)\,dx = \qquad [1]$$

Calculemos la última integral mediante el método de integración por partes.

$$u = Ln(1+x) \quad ; \quad du = \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$dv = dx \quad ; \quad v = \int dv = \int dx = x$$

$$\int Ln(1+x)\,dx = x \cdot Ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\,dx =$$

la nueva integral que se ha obtenido es una integral racional impropia, dividamos el numerador entre el denominador:

x	1 + x
- x - 1	1
- 1	

$$= x \cdot Ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= x \cdot Ln(1+x) - \int dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx = x \cdot Ln(1+x) - x + Ln(1+x)$$

sustituyendo esta expresión en [1], como resultado de dicha integral, tendremos:

$$= \frac{1}{2} - \left[x \cdot Ln(1+x) - x + Ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \left[Ln(2) - 1 + Ln(2) - Ln(2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - Ln(2) + 1 - Ln(2) + Ln(2) = \frac{3}{2} - 2\,Ln(2) = \text{ Área de la región.}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Representemos la función $P(t) = 10 + (t - 6)^2$, cuya gráfica es una parábola, en el intervalo [2, 10].

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $t = 0 \Rightarrow P = 46 \Rightarrow (0, 46)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:
$P = 0 \Rightarrow 10 + (t - 6)^2 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 46 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 184}}{2}$
luego no hay puntos de corte con el eje de abscisas.

3.- Coordenadas del vértice V, que es un mínimo:
$t = -b/2a = 12/2 = 6 \Rightarrow P = 10 + (6 - 6)^2 = 10 \Rightarrow V = (6, 10)$

4.- Otros dos puntos que nos ayudarán a dibujar la gráfica son:
$t = 2 \Rightarrow P = 26 \Rightarrow (2, 26)$; $t = 10 \Rightarrow P = 26 \Rightarrow (10, 26)$

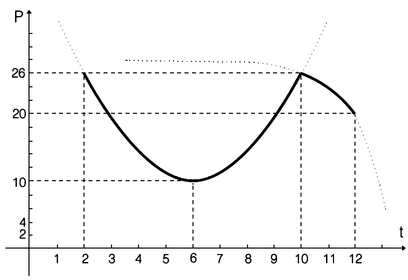
* Representemos ahora la función $P(t) = 28 - 2^{t-9}$, en el intervalo (10, 12].

1.- Punto de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $P = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} P = 28 - 2^{t-9} \\ P = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 28 - 2^{t-9} \Rightarrow 2^{t-9} = 28 \Rightarrow t - 9 = \frac{Ln(28)}{Ln(2)} \Rightarrow t = 13´8073$$

luego el punto de corte con el eje de abscisas es: (13´8073, 0).

2.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $t = 0 \Rightarrow P = 28 - 2^{-9} = 27´998 \Rightarrow$
luego el punto es el (0, 27´998)



3.- La función es continua en todo su dominio.

4.- Crecimiento y decrecimiento.
La primera derivada es: $P´(t) = -2^{t-9} \cdot \text{Ln}(2)$
Obtengamos los valores que anulan a la primera derivada:
$-2^{t-9} \cdot \text{Ln}(2) = 0 \Rightarrow$ no hay ninguno.
Sólo hay un intervalo de monotonía. Probemos un valor cualquiera, por ejemplo el 9, en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo será creciente o decreciente.
$P´(9) = -2^{9-9} \cdot \text{Ln}(2) = -\text{Ln}(2) < 0 \Rightarrow$ decreciente en todo su dominio.

5.- Asíntota horizontal.
$\lim\limits_{t \to -\infty} \left(28 - 2^{t-9}\right) = 28 - 2^{-\infty-9} = 28 - 0 = 28 \Rightarrow$ asíntota horizontal P=28 cuando $t \to -\infty$

6.- Dos puntos importantes son:
$t = 10 \Rightarrow P = 26 \Rightarrow (10, 26)$; $t = 12 \Rightarrow P = 20 \Rightarrow (12, 20)$

***** La gráfica aproximada de la función a trozos *P(t)* es la situada más arriba.

La población decrece en los intervalos [2, 6) y (10, 12]; y crece en el (6, 10).

(2) Calculemos en primer lugar los extremos relativos, que pueden ser alcanzados en los puntos de derivada cero, en los de no continuidad o en los de no derivabilidad.

Estudiemos la continuidad.

- En el intervalo $2 \le t < 10$, la función correspondiente de *P(t)* es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo ℝ, luego este trozo es continuo en el intervalo $2 \le t < 10$.

- En el intervalo $10 < t \le 12$, la función correspondiente de *P(t)* es la suma de una función exponencial mas una constante, ambas continuas en todo ℝ, luego este trozo es continuo en el intervalo $10 < t \le 12$.

- EL problema estaría en el punto 10, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden (aunque gráficamente ya vimos que sí era continua),

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 10^+} P(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 10^+\\ t>10}} \left(28 - 2^{t-9}\right) = 26 \\ \lim\limits_{t\to 10^-} P(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 10^-\\ x<10}} \left(10 + (t-6)^2\right) = 26 \\ P(10) = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to 10^+} P(t) = \lim_{t\to 10^-} P(t) = P(10) = 26$$

Luego *P(t)* es continua en el punto 10. En definitiva, *P(t)* es continua en [2, 12].

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si siendo continua en dicho punto las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- Para valores de $2 \le t < 10$, *P* es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $2(t - 6)$.

- Para valores de $10 < t \le 12$, la función correspondiente de *P(t)* es la suma de una función exponencial mas una constante, ambas derivables en todo ℝ, luego la función *P* es derivable para $10 < t \le 12$, siendo la función derivada, $-2^{t-9}\,\mathrm{Ln}(2)$.

Por tanto, una primera aproximación de la función derivada en los puntos donde ya sabemos que es derivable y cuál es su derivada, será:

$$P'(t) = \begin{cases} 2(t-6) & si \quad 2 \le t < 10 \\ -2^{t-9}\,Ln(2) & si \quad 10 < t \le 12 \end{cases} \qquad [1]$$

- El problema está en el punto 10. Será derivable en dicho punto si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en él.

$$\left.\begin{array}{l} P'(10^+) = \lim\limits_{\substack{t\to 10^+\\ t>10}} P'(t) = \lim\limits_{t\to 10^+} -2^{t-9}\,Ln(2) = -2\,Ln(2) \\ P'(10^-) = \lim\limits_{\substack{t\to 10^-\\ t<0}} P'(t) = \lim\limits_{t\to 10^-} 2(t-6) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} P'(10^+) \ne P'(10^-) \\ -2\,Ln(2) \ne 8 \end{cases}$$

luego la función *P(t)* no es derivable en $t = 10$.

La función derivada coincidirá con la que nos aproximamos inicialmente en [1].

Volviendo al cálculo de los extremos relativos, veamos dónde la derivada es cero:

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2(t-6) = 0 \Rightarrow t = 6 \in [2, 10) \\ -2^{t-9}\,Ln(2) = 0 \Rightarrow \textit{no hay ningún valor} \end{cases}$$

sustituyamos este valor en la segunda derivada: $P''(t) = 2 \Rightarrow P''(6) = 2 > 0$, luego hay un mínimo local en el punto (6, 10), que concuerda con la gráfica que realizamos.

Donde hay otro extremo local es en el punto de no derivabilidad, el 10. Para demostrar que es un máximo podríamos recurrir a la definición de extremo relativo, pero en este caso no es preciso por cuanto que en el apartado (1) justificamos que la función en el punto 10 pasa de creciente a decreciente y en este apartado que era continua en dicho punto, luego en $t = 10$ hay un máximo local.

Los instantes donde la función alcanza los valores máximos y mínimo absolutos, debemos localizarlos entre los extremos relativos y los extremos del intervalo:

$P(2) = 26$; $P(6) = 10$; $P(10) = 26$; $P(12) = 20$

luego en el instante t=6 se alcanza el mínimo absoluto, y en los instantes t=2 y t=10 se alcanza el máximo absoluto.

(3) Llegaría a extinguirse en el caso de que $P(t)$ sea cero, es decir, se trata de calcular el punto de corte del trozo de función correspondiente con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{matrix} P = 28 - 2^{t-9} \\ P = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = 28 - 2^{t-9} \Rightarrow 2^{t-9} = 28 \Rightarrow t - 9 = \frac{Ln(28)}{Ln(2)} \Rightarrow t = 13'8073$$

El instante sería a los 13´8073 años, es decir, 13 años 9 meses 20 días 15 horas 4´ 19´´.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) La matriz C no tendrá inversa para aquellos valores de m que hagan que el rango de C sea menor de tres. Discutamos el rango mediante Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & -2-m \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede ser o no cero. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 1+m = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow$ el rango es dos y no tendría inversa la matriz C.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 1+m \neq 0 \Rightarrow m \neq -1 \Rightarrow$ el rango es tres y sí tendría inversa.

(2) Calculemos la matriz inversa de C, para m=2, por el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz C la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de C, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de C.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 2 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] + 4 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [3ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 6, la 2ª y 3ª por 3.
Obtendremos la matriz unidad a la izquierda, la matriz de la derecha será la matriz inversa de la C, C^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 4/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Una recta y un plano son paralelos, si el vector normal al plano y el de dirección de la recta son perpendiculares, es decir, cuando el producto escalar de ambos vectores es cero, y además ningún punto de la recta pertenece al plano.

(2) Comprobemos si la recta y el plano son paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\Pi = (3, -2, -6) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\Pi \times \vec{v}_r = (3, -2, -6) \times (2, -1, 1) = 6 + 2 - 6 = 2 \neq 0$$

como el producto escalar es distinto de cero, la recta y el plano no son paralelos.

(3) Una recta y un plano son perpendiculares, si el vector normal al plano y el de dirección de la recta tienen la misma dirección, es decir, sus componentes son proporcionales.

(4) Comprobemos si la recta y el plano son perpendiculares.

$$\vec{n}_\Pi \parallel \vec{v}_r \Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{-6}{-1}$$

las componentes no son proporcionales, la recta y el plano no son perpendiculares.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene un punto de inflexión en Q = (-1, 3), eso implica lo siguiente:

* $f(-1) = 3 \Rightarrow 3 = -a + b - c + d$ [1]
* $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f'''(x) = 6a$
* $f''(-1) = 0 \Rightarrow f''(-1) = 6a(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -3a + b = 0$ [2]
* $f'''(-1) \neq 0 \Rightarrow f'''(-1) = 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

- Si la tangente en M = (0, 1) es horizontal, eso implica que:

* $f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$ [3]
* $f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = c \Rightarrow c = 0$ [4]

Sustituyendo los resultados [3] y [4] en [1] y [2], obtenemos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + b + 1 \\ 0 = -3a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a + b = 2 \\ -3a + b = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: a = 1 ; b = 3
La función es: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

* Representemos la función $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$

- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$
- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow$ no hay ninguno.
- Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $1 + x^2 = 0$, en este caso no hay ningún valor que anule al denominador

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0 \in \Re$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+x^2} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Asíntota horizontal: } y = 0.$$

- Posición de la gráfica de la función respecto de la asíntota horizontal, $y = 0$.

--- Para valores de x muy pequeños, por ej.:

$$x=-100 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow & f(-100)=\frac{2}{1+(-100)^2} = 0´000199 \\ \searrow & y_{asíntota}(-100) = 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \quad f(-100) > y_{asíntota}$$

es decir, la gráfica de la función queda por encima de la asíntota cuando $x \to -\infty$

--- Para valores de x muy grandes, por ej.:

$$x=100 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow & f(100)=\frac{2}{1+100^2} = 0´000199 \\ \searrow & y_{asíntota}(100) = 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \quad f(100) > y_{asíntota}$$

es decir, la gráfica de la función queda por encima de la asíntota cuando $x \to +\infty$

- Los extremos locales de la función racional $f(x)$ hay que buscarlos entre los valores que anulen a la primera derivada.

$$f´(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

sustituyamos este valor en la segunda derivada para distinguir si es máximo o mínimo.

$$f´´(x) = \frac{-4(1+x^2)^2 + 8x(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \quad \Rightarrow \quad f´´(0) = -\frac{4}{1} < 0$$

luego hay un máximo en el punto (0, 2)

- Crecimiento y decrecimiento.

Con el valor, $x = 0$, que anulaba a la primera derivada, construimos los dos posibles intervalos de monotonía, $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Probamos valores intermedios, por ejemplo, -1 y 1, de esos intervalos en la primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente.

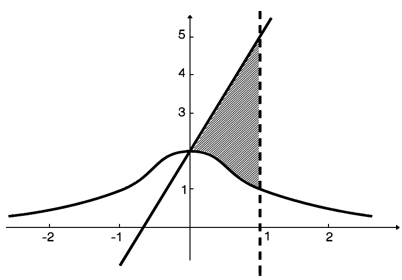
$$f´(-1) = \frac{-4(-1)}{(1+(-1)^2)^2} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente en } (-\infty, 0)$$

$$f´(1) = \frac{-4}{(1+1^2)^2} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decreciente en } (-\infty, 0)$$

* La gráfica de la recta $x = 1$, es una recta vertical.

* La gráfica de $y = 3x + 2$, es una recta que pasa por los puntos (0, 2) y $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

* Las gráficas de las tres funciones, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente, se encuentran situadas al lado.



* El recinto limitado por las tres gráficas es la

zona rayada, su área es:

$$Área = \int_0^1 \left(3x + 2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 2x - 2\,\mathrm{arc}\,tg(x)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} + 2 - 2\,\mathrm{arc}\,tg(1) + 2\,\mathrm{arc}\,tg(0) = \frac{7}{2} - 2\frac{\pi}{4} + 0 = \frac{7-\pi}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Expresemos la ecuación del plano en forma paramétrica, para lo cual basta despejar una de las incógnitas, por ejemplo, la *y*, en función de las demás:

$$-3x + y + z + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -5 + 3x - z \quad \Rightarrow \quad \Pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 3\lambda - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto Q genérico del plano tendrá de coordenadas Q = (λ, -5+3λ-μ, μ).

El vector que determinan los punto P y Q es:

$$\vec{PQ} = (\lambda,\ -5+3\lambda-\mu,\ \mu) - (-1,\ 2,\ 1) = (\lambda+1,\ -7+3\lambda-\mu,\ \mu-1)$$

El vector normal al plano Π es: $\vec{n}_\Pi = (-3,\ 1,\ 1)$

Para que el vector $\vec{PQ}$ sea perpendicular al plano, se ha de verificar que dicho vector y el normal al plano sean paralelos, es decir, que sus componentes sean proporcionales

$$\frac{\lambda+1}{-3} = \frac{-7+3\lambda-\mu}{1} = \frac{\mu-1}{1} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda+1}{-3} = \dfrac{-7+3\lambda-\mu}{1} \\ \dfrac{-7+3\lambda-\mu}{1} = \dfrac{\mu-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 1 = 21 - 9\lambda + 3\mu \\ -7 + 3\lambda - \mu = \mu - 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 10\lambda - 3\mu &= 20 \\ 3\lambda - 2\mu &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 10 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 10 · [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -3 & 20 \\ 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -11 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 11 · [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 110 & 0 & 220 \\ 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es: λ = 2 ; μ = 0.
Sustituyamos estos valores en las coordenadas del punto Q:

Q = (λ, -5+3λ-μ, μ) = (2, -5+6-0, 0) = (2, 1, 0)

(2) Expresemos la recta *r* en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 10 - t \end{cases}$$

Un punto M genérico de la recta será de la forma, M = (2-t, -1+t, 10-t).

Construyamos el vector que determinan los puntos M y P.

$$\vec{MP} = (-1, 2, 1) - (2-t, -1+t, 10-t) = (t-3, 3-t, t-9)$$

Para que el vector $\vec{MP}$ sea paralelo al plano Π, dicho vector y el normal al plano deben ser perpendiculares, luego el producto escalar de ambos tiene que ser cero:

$$(t-3, 3-t, t-9) \cdot (-3, 1, 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3t+9+3-t+t-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

sustituyamos este valor de t en las coordenadas del punto M:

M = (2-t, -1+t, 10-t) = (2-1, -1+1, 10-1) = (1, 0, 9).

(3) Calculemos los vectores $\vec{MP}$ y $\vec{PQ}$

$$\vec{MP} = (-1, 2, 1) - (1, 0, 9) = (-2, 2, -8)$$

$$\vec{PQ} = (2, 1, 0) - (-1, 2, 1) = (3, -1, -1)$$

Obtengamos el producto vectorial de los dos vectores:

$$\vec{MP} \times \vec{PQ} = (-2, 2, -8) \times (3, -1, -1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-10, -26, -4)$$

El área del triángulo MPQ será:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\vec{MP} \times \vec{PQ}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + (-26)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{792} = 3\sqrt{22}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Llamemos "*x*" al precio de una botella de cerveza, "*y*" al de una bolsa de cacahuetes y "z" al de un vaso. Plantearemos el siguiente sistema de ecuaciones donde "m" va a representar el precio del lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 7z = 565 \\ x + 4y + 10z = 740 \\ x + y + z = m \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 565 \\ 1 & 4 & 10 & 740 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 565 \\ 0 & 1 & 3 & 175 \\ 0 & -2 & -6 & m-565 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 565 \\ 0 & 1 & 3 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & m-215 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado.
La última ecuación debe ser trivial para que el sistema sea compatible, para lo cual debe verificarse que: 0 = m - 215, es decir, m = 215 pesetas que es el precio del lote. No obstante no podremos saber el precio unitario de cada producto porque el sistema, aunque es compatible, es indeterminado uniparamétrico.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

EXAMEN JUNIO 1999

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida en la forma $f(x) = 1 + x|x|$.
(1) [1 PUNTO]. Halla la derivada de f.
(2) [0´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(3) [1 PUNTO]. Calcula $\int_{-1}^{2} x\, f(x)\, dx$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Halla el punto del plano de ecuación $x-z = 3$ que está más cerca del punto P=(3,1,4) así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

EJERCICIO 4. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son no nulos.
(1) [1 PUNTO]. Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Dibuja la región limitada por la curva de ecuación

$y = x(3-x)$ y la recta de ecuación $y = 2x - 2$.
(2) [1´5 PUNTOS]. Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Dada la función $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + Ln(x)$ (donde Ln(x) es el logaritmo neperiano de x), determina cuál de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene la máxima pendiente.

EJERCICIO 3. Sean los vectores

$u = (-1,2,3)$, $v = (2,5,-2)$, $x = (4,1,3)$ y $z = (4,1,-8)$.

(1) [1 PUNTO]. ¿Se puede expresar x como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
(2) [1 PUNTO]. ¿Se puede expresar z como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
(3) [0´5 PUNTOS]. ¿Son u, v y z linealmente independientes? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 4. **(1)** [2 PUNTOS]. Calcula un punto $\mathbb{R}$ de la recta s dada por

$$s \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0, \\ x - 3y - z - 7 = 0; \end{cases}$$

que equidiste de los puntos P=(1,0,-1) y Q=(2,1,1).
(2) [0´5 PUNTOS]. Calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos.

$$f(x) = 1 + x|x| = \begin{cases} 1 + x(-x) & si \;\; x < 0 \\ 1 + x \cdot x & si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si \;\; x < 0 \\ 1 + x^2 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

- Para valores de $x<0$, la función $1-x^2$ es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $-2x$.

- Para valores de $x>0$, la función $1+x^2$ es continua y derivable por ser polinómica, siendo la función derivada, $2x$.

- Para $x=0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(1+x^2\right) = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(1-x^2\right) = 1 \quad ; \quad f(0) = 1+0^2 = 1$$

luego podemos observar que:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

es decir, en el punto $x=0$ es continua, luego puede ser derivable, será derivable si las derivadas laterales existen y coinciden.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya es derivable, sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x < 0 \\ 2x & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

comprobemos si en el punto 0 es derivable:

$$\left.\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0 \\ f'(0^-) &= \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 0 = 0 \quad \Rightarrow \\ f'(0^+) = f'(0^-) \end{aligned}\right.$$

en el punto 0 es derivable, luego la función derivada, definitivamente, es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x < 0 \\ 2x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

(2) Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de *f(x)*.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x < 0 \\ 2x & si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \; (no\ puede\ ser) & si \;\; x < 0 \\ 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

sólo hay un valor que anule a la primera derivada $x = 0$.

Los posibles intervalos de monotonía son: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo -1 y 1 respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-1) = -2(-1) = 2 > 0 & \Rightarrow \quad Creciente\ en \;\; (-\infty, 0) \\ f'(1) = 2 > 0 & \Rightarrow \quad Creciente\ en \;\; (0, +\infty) \end{cases}$$

Estudiemos el crecimiento más detenidamente en el punto 0. Apliquemos el concepto de cuándo una función es creciente en un punto, concretamente en el 0:

$$Si \quad \forall\, h > 0 \;\Rightarrow\; f(0-h) < f(0) < f(0+h) \quad \Rightarrow \quad f(-h) < f(0) < f(h) \quad \Rightarrow$$

$$1 - h^2 < 1 < 1 + h^2 \quad \Rightarrow \quad -h^2 < 0 < h^2$$

relación que evidentemente es cierta, luego la función también es creciente en el punto cero. En definitiva, la función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$.

(3) Calculemos la siguiente integral teniendo en cuenta que la función está definida a trozos.

$$\int_{-1}^{2} x\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x\left(1 - x^2\right) dx + \int_{0}^{2} x\left(1 + x^2\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(x - x^3\right) dx + \int_{0}^{2} \left(x + x^3\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (2 + 4 - 0) = \frac{23}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en $x = 1$, significa que la derivada de la función en el punto 1 es cero:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \qquad [1]$$

Si la función presenta un punto de inflexión en (0, 0), significa que la segunda derivada en dicho punto es cero:

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \qquad [2]$$

y además ese punto (0, 0) pertenece a la función, es decir:

$$f(0) = 0 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \qquad [3]$$

Sustituyendo [2] y [3] en [1] nos quedará la condición: $3a + c = 0$ [4]

Calculemos la integral siguiente, pero sustituyendo b y d por cero:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \left(ax^3 + cx\right) dx = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}c - 0 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad a + 2c = 5 \qquad [5]$$

Resolvamos el sistema formado por las condiciones [4] y [5]:

$$\left.\begin{array}{l} a + 2c = 5 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por -5

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La solución es:
$a = -1$; $c = 3$

Finalmente, la función es: $f(x) = -x^3 + 3x$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos la ecuación del plano, x-z = 3, en forma paramétrica, para lo cual basta despejar una de las incógnitas, por ejemplo, la x, en función de las demás, $x = 3 + z$;
y, por último, las incógnitas del segundo miembro se sustituyen por parámetros:

$$\pi = \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico, H, del plano tendrá de coordenadas $H = (3+\lambda, \mu, \lambda)$. El punto H que esté más cercano al $P = (3, 1, 4)$ será aquel que verifique la condición de que el vector que determinan los puntos P y H, sea perpendicular a los dos vectores, u y v, de dirección del plano, es decir:

$$\vec{PH} = (3+\lambda,\ \mu,\ \lambda) - (3,\ 1,\ 4) = (\lambda,\ \mu-1,\ \lambda-4)$$

$$\vec{u} = (1,\ 0,\ 1) \quad ; \quad \vec{v} = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{PH} \perp \vec{u} \ \Rightarrow\ \vec{PH}\cdot\vec{u} = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda,\ \mu-1,\ \lambda-4)\cdot(1,\ 0,\ 1) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda+\lambda-4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 2$$

$$\vec{PH} \perp \vec{v} \ \Rightarrow\ \vec{PH}\cdot\vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda,\ \mu-1,\ \lambda-4)\cdot(0,\ 1,\ 0) = 0 \ \Rightarrow\ \mu-1 = 0 \ \Rightarrow\ \mu = 1$$

luego el punto H es: H = (3+λ, μ, λ) = (3+2, 1, 2) = (5, 1, 2).

La distancia del punto P al plano coincide con el módulo del vector $\vec{PH}$.

$$\vec{PH} = (5,\ 1,\ 2) - (3,\ 1,\ 4) = (2,\ 0,\ -2)$$

$$dist(P,\pi) = |\vec{PH}| = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para determinar el número de columnas linealmente independientes, calculo el rango de la matriz A, ya que el rango me indica precisamente el máximo número de filas o columnas linealmente independientes. Procedamos mediante Gauss.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = a \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -3b & c \\ 0 & -3b & c \end{pmatrix}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3b \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -3b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz está triangulada inferiormente, el número de filas distintas de cero son dos, es decir el rango es dos, lo que significa que el máximo número de columnas linealmente independientes son dos.

(2) El rango de la matriz es 2, según el apartado anterior, por tanto la matriz A no tiene inversa, ya que para que tuviera inversa el rango tendría que ser tres, es decir, el determinante de A vale cero, y en consecuencia A no tiene inversa.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Representemos en primer lugar la función, $y = x(3 - x)$ $\Rightarrow$ $y = 3x - x^2$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ (0, 0)

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x=0;\ x=3 \Rightarrow$ (0, 0) y (3, 0)

3.- Coordenadas del vértice V:

x = -b/2a = -3/(-2) = 3/2 $\Rightarrow$ $y = 3(3/2) - (3/2)^2 = 1/4$ $\Rightarrow$ V(3/2, 9/4)

Representemos ahora la recta de ecuación, $y = 2x - 2$.

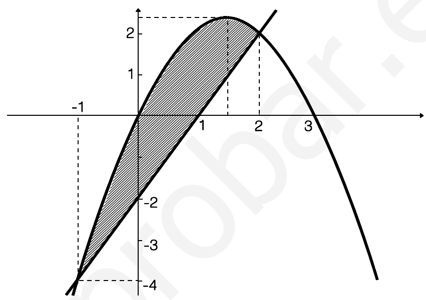
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = -2$ $\Rightarrow$ (0, -2)

2.- Punto de corte con el eje de abscisas: $y = 0$ $\Rightarrow$ $x=1$ $\Rightarrow$ (1, 0)

Para calcular los puntos de corte de las dos funciones, resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones, con el fin de determinar el recinto que forman.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = 2x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - x^2 = 2x - 2 \Rightarrow 0 = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{array}{l} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = 2 \end{array}$$

La situación de las dos gráficas se corresponde con la gráfica adjunta, y donde el área rayada es el recinto limitado por ambas.



(2) El área del recinto anterior se obtiene integrando la función diferencia de ambas funciones, entre -1 y 2.

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{2} \left(3x - x^2 - 2x + 2\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Teniendo en cuenta que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, calcular la recta tangente de pendiente máxima es determinar los máximos absolutos de la función primera derivada.

$$f(x) = \frac{1}{x} + Ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

calculemos los máximos locales de la función *f´(x)* que es continua y derivable en su dominio:

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{2x}{x^4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2 \end{array}$$

sólo $x = 2$ pertenece al dominio [1, e], comprobemos que es un máximo local:

$$f'''(x) = \frac{2x^4 - 8x^4}{x^8} - \frac{-2x}{x^4} = \frac{-6x^4}{x^8} + \frac{2x}{x^4} \Rightarrow f'''(2) = \frac{-6}{16} + \frac{2}{8} = -\frac{2}{16} < 0$$

El máximo absoluto debe encontrarse entre el relativo y los extremos del intervalo:

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = 0'25 \quad ; \quad f'(1) = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 0 \quad ; \quad f'(e) = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} = 0'232$$

luego la recta tangente de pendiente máxima se da en el punto de abscisa, $x = 2$, la ecuación es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad y - f(2) = f'(2)(x-2) \qquad \Rightarrow$$

$$y - \left(\frac{1}{2} + Ln(2)\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{4}x + Ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) El vector *x* se podrá escribir como combinación lineal de los vectores *u* y *v* si existen dos números reales λ y μ, tales que:

$$x = \lambda u + \mu v \quad \Rightarrow \quad (4, 1, 3) = \lambda(-1,2,3) + \mu(2,5,-2).$$
$$(4, 1, 3) = (-\lambda+2\mu,\ 2\lambda+5\mu,\ 3\lambda-2\mu).$$

Igualando las componentes, tendremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda + 2\mu &= 4 \\ 2\lambda + 5\mu &= 1 \\ 3\lambda - 2\mu &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 9 · [3ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 99 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
La última ecuación es, $0 = 99$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema es incompatible, no tiene solución, luego no existe ningún valor para λ ni para μ, en consecuencia, el vector *x* no podemos expresarlo como combinación lineal de los vectores *u* y *v*.

(2) El vector *z* se podrá escribir como combinación lineal de los vectores *u* y *v* si existen dos números reales λ y μ, tales que:

$$z = \lambda u + \mu v \quad \Rightarrow \quad (4, 1, -8) = \lambda(-1,2,3) + \mu(2,5,-2).$$
$$(4, 1, -8) = (-\lambda+2\mu,\ 2\lambda+5\mu,\ 3\lambda-2\mu).$$

Igualando las componentes, tendremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda + 2\mu &= 4 \\ 2\lambda + 5\mu &= 1 \\ 3\lambda - 2\mu &= -8 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 9 · [3ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
La última ecuación es, $0 = 0$, que es una ecuación trivial, por lo que podemos eliminarla, nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que es un sistema compatible determinado, tiene solución

única, luego existe un valor para λ y otro μ, que hacen que el vector *x* podamos expresarlo como combinación lineal de los vectores *u* y *v*.

Calculemos dichos valores, terminando para ello de resolver el sistema.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$ Simplifiquemos la 2ª fila por 9

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ El sistema está diagonalizado, la solución es: $\lambda = -2$; $\mu = 1$
luego el vector *z* se escribirá como combinación lieal de *u* y *v* de la siguiente manera: $z = -2u + v$.

(3) Los vectores *u*, *v* y *z*, no son linealmente independientes porque en el apartado anterior hemos justificado que el vector *z* podemos expresarlo como combinación lineal de los otros dos, luego los tres serán linealmente dependientes.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Expresemos, en primer lugar, la ecuación de la recta *s* en forma paramétrica, para ello resolveremos el sistema de ecuaciones que nos dan, poniéndolo en forma matricial y procediendo mediante el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$ Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$ El sistema está triangulado inferiormente, nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 2+z \end{array}\right)$$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 8-z \\ 0 & -2 & 2+z \end{array}\right)$$ La solución es: $x = 4 - z/2$; $y = -1 - z/2$
Sustituyamos la incógnita *z* por un parámetro, por ejemplo, t, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2}t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto genérico R de la recta *s* será: $R = \left(4 - \frac{1}{2}t,\ -1 - \frac{1}{2}t,\ t\right)$

Construyamos los vectores

$$\vec{PR} = \left(4-\frac{1}{2}t,\ -1-\frac{1}{2}t,\ t\right) - (1,\ 0,\ -1) = \left(3-\frac{1}{2}t,\ -1-\frac{1}{2}t,\ t+1\right)$$

$$\vec{QR} = \left(4-\frac{1}{2}t,\ -1-\frac{1}{2}t,\ t\right) - (2,\ 1,\ 1) = \left(2-\frac{1}{2}t,\ -2-\frac{1}{2}t,\ t-1\right)$$

hagamos coincidir sus módulos para calcular el punto R de la recta *s* que equidiste de los puntos P y Q.

$$\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}t\right)^2+(t+1)^2} = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-2-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2}$$

$$\left(3-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}t\right)^2+(t+1)^2 = \left(2-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-2-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2$$

$$9+\frac{1}{4}t^2-3t+1+\frac{1}{4}t^2+t+t^2+1+2t = 4+\frac{1}{4}t^2-2t+4+\frac{1}{4}t^2+2t+t^2+1-2t$$

$$2t+2=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=-1$$

sustituyamos este valor de t en las coordenadas de R:

$$R = \left(4-\frac{1}{2}(-1),\ -1-\frac{1}{2}(-1),\ -1\right) = \left(\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1\right)$$

(2) Sustituyamos el valor de t = -1, obtenido en el apartado anterior en los vectores $\vec{PR}\ y\ \vec{QR}$

$$\vec{PR} = \left(3-\frac{1}{2}t,\ -1-\frac{1}{2}t,\ t+1\right) = \left(3-\frac{1}{2}(-1),\ -1-\frac{1}{2}(-1),\ -1+1\right) = \left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$\vec{QR} = \left(2-\frac{1}{2}t,\ -2-\frac{1}{2}t,\ t-1\right) = \left(2-\frac{1}{2}(-1),\ -2-\frac{1}{2}(-1),\ -1-1\right) = \left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -2\right)$$

Calculemos el producto vectorial de los vectores $\vec{PR}\ y\ \vec{QR}$,

$$\vec{PR}\times\vec{QR} = \left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)\times\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -2\right) = \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \frac{7}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(1,\ \ 7,\ \ -\frac{21}{4}+\frac{5}{4}\right) = (1,\ 7,\ -4)$$

El área del triángulo PQR será

$$Área = \frac{1}{2}\left|\vec{PR}\times\vec{QR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+7^2+(-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+49+16} = \frac{1}{2}\sqrt{66}$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

EXAMEN SEPTIEMBRE 1999

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\, dx.$$

EJERCICIO 2. Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

(1) [1´5 PUNTOS]. Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

(2) [1 PUNTO]. ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta tangente; en caso negativo, explica por qué.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Prueba que todos los planos de la familia

$$(3 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z = \lambda$$

(con $\lambda \in \mathbb{R}$) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

EJERCICIO 4. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [1 PUNTO]. Calcula A^tA y AA^t donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(2) [1´5 PUNTOS]. Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve la ecuación matricial

$$A\,A^t\,X = \lambda X$$

según los valores del parámetro real λ

Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}.$$

(2) [1 PUNTO]. Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales si los hay.
(3) [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de f.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Encuentra la función derivable $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad -1 \le x < 0, \\ e^x - 1 & si \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x + y + z &= 1, \\ x + (1+\lambda)y + z &= \lambda, \\ x + y + (1+\lambda)z &= \lambda^2. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4. **(1)** [1´75 PUNTOS]. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C = (3, 2) y una de cuyas rectas tangentes tiene de ecuación $4x - 3y - 5 = 0$.
(2) [0´75 PUNTOS]. Determina si el punto X = (3, 3) es interior, es exterior o está en la circunferencia.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos la integral indefinida $\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\, dx$, que es una integral racional impropia porque el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, efectuemos la división.

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 - x^2 - 12x - 3 & x^2 - x - 6 \\ \cline{3-3} & -2x^3 + 2x^2 + 12x & 2x + 1 \\ \cline{2-2} & x^2 \qquad\quad - 3 & \\ & -x^2 + x + 6 & \\ \cline{2-2} & x + 3 & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6}\, dx =$$

$$= \int (2x + 1)\, dx + \int \frac{x + 3}{x^2 - x - 6}\, dx = x^2 + x + \int \frac{x + 3}{x^2 - x - 6}\, dx = \qquad [1]$$

hemos obtenido una integral racional propia, calculemos las raíces del denominador:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow & 3 \\ \searrow & -2 \end{matrix}$$

Descompongamos el integrando en fracciones elementales

$$\frac{x+3}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x^2-x-6} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} =$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x+2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \quad \Rightarrow \quad 6 = 5B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{6}{5} \\ x = -2 \quad \Rightarrow \quad 1 = -5A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

continuando en [1], tendremos

$$= x^2 + x + \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \right) dx = x^2 + x - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dt =$$

$$= x^2 + x - \frac{1}{5} Ln|x+2| + \frac{6}{5} Ln|x-3|$$

Ahora calcularemos la integral definida que nos pide el ejercicio.

$$\int_{-1}^{2} \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2-x-6}\,dx = \left[x^2 + x - \frac{1}{5} Ln|x+2| + \frac{6}{5} Ln|x-3| \right]_{-1}^{2} =$$

$$= 4 + 2 - \frac{1}{5} Ln|2+2| + \frac{6}{5} Ln|2-3| - \left[1 - 1 - \frac{1}{5} Ln|-1+2| + \frac{6}{5} Ln|-1-3| \right] =$$

$$= 6 - \frac{1}{5} Ln|4| + \frac{6}{5} Ln|-1| + \frac{1}{5} Ln|1| - \frac{6}{5} Ln|-4| = 6 - \frac{7}{5} Ln(2^2) = 6 - \frac{14}{5} Ln(2)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Una recta tangente a la curva de ecuación, $y = x^2 - 2x + 3$, que forme un ángulo de 45°con el eje de abscisas, es una recta de pendiente 1, ya que tg(45°) = 1.

Si la pendiente de la recta tangente en un punto x_0 es 1, significa que la derivada de la función en dicho punto es 1:

$y(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0) = 2x_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2x_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3/2.$

El valor de la función en este punto es:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{9}{4}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto 3/2 es:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - f\left(\frac{3}{2}\right) = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) \;\Rightarrow\; y - \frac{9}{4} = x - \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y = x + \frac{3}{4}$$

(2) Si la recta tangente es horizontal a la gráfica de la función, eso implica que la pendiente de dicha tangente en un punto x_0 es cero, o lo que es lo mismo, que la derivada de la función en dicho punto es 0:

$y(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0) = 2x_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x_0 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1.$

El valor de la función en este punto de tangencia horizontal es: $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto 1 es:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - f(1) = 0 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

La expresión de la familia de planos, que nos da el problema:

$$(3 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z = \lambda \qquad (\text{con } \lambda \in \mathbb{R})$$

la desarrollamos:

$$3x + \lambda x + 3y - \lambda y + 5z - 2\lambda z - \lambda = 0$$

sacamos factor común λ:

$$(3x + 3y + 5z) + \lambda(x - y - 2z - 1) = 0$$

comprobemos que hemos obtenido un haz de planos formado por los dos planos:

$$\pi_1 \equiv 3x + 3y + 5z = 0 \qquad ; \qquad \pi_2 \equiv x - y - 2z - 1 = 0$$

el vector normal de cada uno de ellos es, respectivamente:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (3, 3, 5) \qquad ; \qquad \vec{n}_{\pi_2} = (1, -1, -2)$$

fácilmente se observa que no son paralelos, ya que sus coordenadas no son proporcionales:

$$\frac{3}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{5}{-2}$$

luego, los dos planos anteriores se cortan en una recta, es decir, la familia de planos contienen una misma recta.

Las ecuaciones paramétricas de dicha recta se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 1 \\ 3x + 3y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Expresémoslo en forma matricial y procedamos mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1+2z \\ 0 & 6 & -3-11z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 6 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 6 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 3+z \\ 0 & 6 & -3-11z \end{array}\right)$$

La solución es:

$$6x = 3 + z \qquad ; \qquad 6y = -3 - 11z$$

terminemos de despejar las incógnitas y sustituyamos la z por el parámetro t:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{11}{6}t \\ z = t \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Calculemos A^tA y AA^t:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Discutamos y resolvamos la ecuación matricial, $AA^t X = \lambda X$, siendo X una matriz columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \lambda x = 0 \\ 2y - \lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

expresemos el sistema que hemos obtenido en forma matricial y procedamos mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

El sistema está diagonalizado.
Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$ la última ecuación es, 0 = 0, que es una ecuación trivial, la eliminamos. La primera ecuación quedaría así: $-x = 0$, es decir, el sistema homogéneo se queda con una ecuación y dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La solución es:

$$x = 0 \quad ; \quad y = t \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 2 - \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 2 \Rightarrow$ la última ecuación no es ni trivial ni absurda. Pero puede ocurrir dos cosas:

** Si $a_{11} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$ la primera ecuación sería, 0=0, que es una ecuación trivial, la eliminamos. Nos quedaría sólo la segunda ecuación, $y = 0$, es decir, el sistema homogéneo se queda con una ecuación y dos incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. La solución es:

$$x = t \quad ; \quad y = 0 \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

** Si $a_{11} \neq 0 \Rightarrow 1 - \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow$ la primera ecuación no es ni trivial ni absurda. El sistema homogéneo tendría dos ecuaciones y dos incógnitas, la solución es la solución trivial, la que tienen todos los sistemas homogéneos:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 0.$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) - Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x = 0$. Veámoslo.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1+x^2}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ Asíntota Vertical: $x = 0$, pero sólo cuando $x \to 0^+$.

- Asíntota horizontal.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \Re$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$$

la indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la regla de Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, sino que se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntota Oblicua.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y = \text{m}x + \text{n}$, comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1+x^2}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

Calculemos ahora n:

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+x^2}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La asíntota oblicua, es: $y = x$, pero sólo cuando $x \to +\infty$.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1+1000^2}{1000} = 1000´001 \\ y_{asíntota}(1000) = 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1000) > y_{asíntota}(1000)$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota.

(2) La función $f(x)$ es continua para todos los valores de $x > 0$, que es donde está definida; ya que es una función racional que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en los valores que anulen al denominador, pero en este caso es el cero que no pertenece al dominio.

La función derivada, $f´$, de la función f, es $f´(x) = \dfrac{2x^2 - (1+x^2)}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

luego la función $f(x)$ es derivable en todo su dominio, puesto que es en el cero donde únicamente no sería derivable.

Obtengamos los valores que la anulan.

$$\frac{x^2-1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \nearrow x=1 \\ \searrow x=-1 \end{matrix}$$

Con estos dos valores que hacen cero a la función $f\,'$ y teniendo en cuenta que la función sólo está definida para valores mayores de cero, construimos los dos posibles intervalos de monotonía, (0, 1) y (1, +∞). Probemos un valor cualquiera de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el 0'5 y el 2, respectivamente, en la primera derivada de *f(x)*:

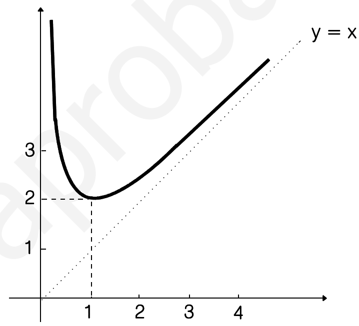
$$f\,'(0.5)=\frac{0.5^2-1}{0.5^2}=-3<0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es decreciente en } (0,1).$$

$$f\,'(2)=\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3}{4}>0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es creciente en } (1,+\infty).$$

Como la función *f* es continua y derivable en todo su dominio, y en el punto *x*=1, pasa de decreciente a creciente, la función presenta un mínimo relativo en (1, 2).
La ordenada del mínimo se ha obtenido sustituyendo la abscisa $x = 1$ en la función.

Teniendo en cuenta el estudio que se ha hecho, este mínimo relativo también es un mínimo global de la función.

(2) La gráfica aproximada de la función *f(x)* es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función derivada, *f ´(x)*, es

$$f\,'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad -1\le x<0 \\ e^x-1 & si \quad 0\le x\le 1 \end{cases}$$

la función *f(x)* será

$$f(x)=\begin{cases} \int (x^2-2x)\,dx & si \quad -1\le x<0 \\ \int (e^x-1)\,dx & si \quad 0\le x\le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+a & si \quad -1\le x<0 \\ e^x-x+b & si \quad 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Al ser la función *f(x)* derivable en [-1, 1] es continua en dicho intervalo, ya que la derivabilidad implica la continuidad. Por tanto la función es continua en $x = 0$, luego ha de verificarse que los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Comprobémoslo.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(e^x-x+b\right)=e^0-0+b=1+b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + a \right) = 0 + a = a$$

$$f(0) = e^0 - 0 + b = 1 + b$$

igualemos los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$: $a = 1 + b$

Como además, el ejercicio nos dice que $f(1) = -1$, tendremos:

$$f(1) = e^1 - 1 + b \;\Rightarrow\; -1 = e - 1 + b \;\Rightarrow\; b = -e \quad ; \quad a = 1 + b \;\Rightarrow\; a = 1 - e$$

la función $f(x)$, finalmente será: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & si \quad -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array} \right)$$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(1+\lambda)$ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1-(1+\lambda)^2 & 1-(1+\lambda)\lambda^2 \end{array} \right)$$ Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & -\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1 \end{array} \right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = -3 \Rightarrow$

** Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 1$, que es una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible, no tiene solución.

** Si $\lambda = -3 \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 7$, que es una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -\lambda^2 - 3\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Rightarrow$ lo que implica que el coeficiente $a_{22} = \lambda$, también es distinto de cero, luego todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) El radio de la circunferencia coincide con la distancia del centro de la misma a la recta tangente, para calcularlo, expresemos la ecuación de la tangente en forma normal, dividiendo la ecuación en forma general por el módulo del vector de dirección:

$$\frac{4x-3y-5}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{4x-3y-5}{5}=0$$

el radio será: $r=\left|\dfrac{4\cdot 3-3\cdot 2-5}{5}\right|=\left|\dfrac{1}{5}\right|=\dfrac{1}{5}$

y la ecuación de la circunferencia es: $(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$

(2) Calculemos la distancia del punto X = (3, 3) al centro de la circunferencia:

$$dist(X,C)=\sqrt{(3-3)^2+(2-3)^2}=1 \quad\Rightarrow\quad 1>r=\frac{1}{5}$$

luego el punto es exterior, ya que su distancia al centro es mayor que el radio.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 23 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \;\; x\le 1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \;\; x>1 \end{cases}$$

es derivable, halla a y b.

EJERCICIO 2. Considera la función $f(x):\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=sen(\sqrt{x})$.

(1) [0´5 PUNTOS]. Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=0$ y $x=\frac{\pi^2}{4}$.

(2) [2 PUNTOS]. Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior. (Usa en la integral el cambio de variable $\sqrt{x}=t$.)

EJERCICIO 3. Considera el plano $\Pi\equiv 2x+2y+z+7=0$, la recta $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ y el punto A = (1, 5, -4).

(1) [1´5 PUNTOS]. Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto B de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela al plano Π.

(2) [1 PUNTO]. Determina razonadamente si existe y, en ese caso, halla un punto C de la recta r tal que la recta que pasa por los puntos A y C es perpendicular al plano Π.

EJERCICIO 4. **(1)** [1 PUNTO]. Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

(2) [1 PUNTO]. ¿Y si se multiplican por (-2)?

(3) [0´5 PUNTOS]. Indica una de las propiedades de los determinantes que hallas utilizado en la resolución de los apartados anteriores.

Opción B

EJERCICIO 1. La gráfica de la derivada de una cierta función $f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ es la siguiente

(1) [1 PUNTO]. Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.
(2) [0´5 PUNTOS]. ¿Hay algún intervalo de su dominio en el que f sea constante?
(3) [1 PUNTO]. ¿Cuáles son los puntos críticos de f? Clasifícalos.

EJERCICIO 2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Una función continua
(1) [0´5 PUNTOS]. Define el concepto de primitiva de f.
(2) [2 PUNTOS]. Halla una primitiva de la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\, e^{-x}$.

EJERCICIO 3. Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$

(1) [0´75 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano Π_1 que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P = (1, 2, 3)
(2) [0´75 PUNTOS]. Determina la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos P = (1, 2, 3) y Q = (-1, 0, 2).
(3) [1 PUNTO]. Sea s la recta en la que se cortan los planos Π_1 y Π_2. Determina de forma razonada la posición relativa de las rectas r y s.

EJERCICIO 4. Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$

(1) [2 PUNTOS]. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$.

(2) [0´5 PUNTOS]. Enuncia una de las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor de a y de b para que la función sea continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 1, $x<1$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $x<1$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 1, $x>1$, es la suma de la función raíz cuadrada de *x* que es continua para todos los valores mayores o iguales a cero y de una función racional que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para el cero que es el valor que anula al denominador, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función *f* es continua para $x>1$, ya que la suma de funciones continuas es continua.

- El problema de la continuidad está en el punto 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} \right) = a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} (ax+5) = a+5 \\ f(1) = a+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \\ a+b = a+5 \quad \Rightarrow \quad b=5 \end{array}\right. \qquad [1]$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 1, si se verifica que: b = 5.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$, siempre y cuando se satisfaga que b = 5. [1]

Estudiemos ahora la derivabilidad para los diversos valores de a, ya que b vale 5.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $x<1$, *f* es derivable, por ser una polinómica, siendo la derivada, a.

- Para valores de $x>1$, *f* es derivable, ya que la función derivada es $\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2}$, y esta función no está definida para los valores menores o iguales a cero, pero que no pertenecen al dominio que estamos considerando.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} a & si \quad x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 1.

En el punto 1 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1].

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}\right) = \dfrac{a}{2} - 5 \\ f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^+) = f'(1^-) \quad \Rightarrow \\ \dfrac{a}{2} - 5 = a \quad\Rightarrow\quad a = -10 \end{cases}$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x = 1$ siempre y cuando a = -10 y b = 5, valores que hacen que la función sea derivable en todo su dominio.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituido a por -10, así:

$$f'(x) = \begin{cases} -10 & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{-10}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Representemos inicialmente la función f en su dominio de definición.

Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, teniendo en cuenta que es continua en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi^2}{4}\right]$. Hallemos la función primera derivada:

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Calculemos los valores que anulen a la función primera derivada

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\left(\sqrt{x}\right) \quad\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sqrt{x} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$ Siendo k un nº natural

Para k = 0:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{\pi^2}{4} \\ \sqrt{x} = \dfrac{3\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{9\pi^2}{4} \notin \left[0, \dfrac{\pi^2}{4}\right] \end{cases}$$

sólo obtenemos un valor, ya que el segundo no pertenece al dominio, por lo que no es preciso darle más valores a k, pues los valores que saldrían estarían fuera del dominio.

El único intervalo de monotonía es: $\left[0, \dfrac{\pi^2}{4}\right]$.

Probemos un valor intermedio de ese intervalo en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, la función será creciente o decreciente en dicho intervalo:

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\cos(\pi/4)}{2\,\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} > 0 \quad\Rightarrow$$ Creciente en todo su dominio

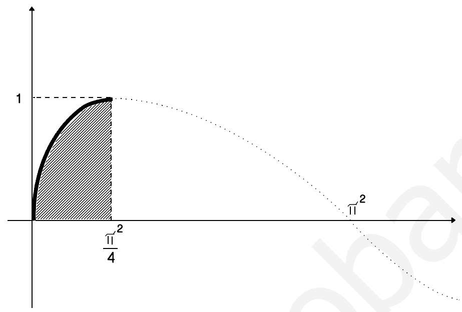
Calculemos el valor de la función en los extremos del intervalo de definición:

$$f(0) = sen(0) = 0 \quad ; \quad f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = sen\left(\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Podemos observar que en el punto 0 la función derivada no está definida y que cuando nos acercamos por la derecha se aproxima a infinito, por lo que existe un punto de tangencia vertical en el origen.

La gráfica aproximada es la situada al lado.

El recinto rayado es el que nos pide el ejercicio.



(2) El área del recinto rayado de la gráfica anterior es:

$$Área = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} sen\left(\sqrt{x}\right)\, dx \qquad [1]$$

Resolvamos la integral indefinida mediante el método de sustitución, haciendo el cambio:

$$\sqrt{x} = t \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\, dt$$

$$\int sen\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int 2t\, sen(t)\, dt = \qquad [2]$$

resolvamos la nueva integral indefinida mediante el método de integración por partes.

$$u = 2t \quad ; \quad du = 2\,dt$$

$$dv = sen(t)\, dt \quad ; \quad v = \int sen(t)\, dt = -\cos(t)$$

continuando en [2], tendremos:

$$= -2t\cos(t) + 2\int \cos(t)\, dt = -2t\cos(t) + 2\,sen(t) =$$

y deshaciendo el cambio tendremos

$$= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\,sen(\sqrt{x})$$, es decir:

$$\int sen(\sqrt{x})\, dx = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\,sen(\sqrt{x})$$

Calculemos ahora el área, o sea, la integral definida [1]

$$Área = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} sen\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \left[-2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\,sen(\sqrt{x})\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} =$$

$$= \left[-2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right) + 2\,sen\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right)\right] - \left[-2\sqrt{0}\cos(\sqrt{0}) + 2\,sen(\sqrt{0})\right] =$$

$$= -\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (-0 + 0) = 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Un punto genérico de la recta r será de la forma: B = (1+t, 2+2t, 1+3t).

La recta que pasa por los puntos A y B, tendrá como vector de dirección al vector:

$$\vec{AB} = (1+t,\ 2+2t,\ 1+3t) - (1,\ 5,\ -4) = (t,\ 2t-3,\ 3t+5)$$

La condición para que la recta que pasa por los puntos A y B sea paralela al plano Π, es que el vector $\vec{AB}$ y el vector normal al plano sean perpendiculares, o sea, que el producto escalar de ambos vectores sea cero:

$$\vec{AB} \perp \vec{n}_\Pi \quad \Rightarrow \quad \vec{AB} \cdot \vec{n}_\Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad (t,\ 2t-3,\ 3t+5)\cdot(2,\ 2,\ 1) \quad \Rightarrow$$

$$2t + 4t - 6 + 3t + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{9}$$

luego las coordenadas del punto B son:

$$B = (1+t,\ 2+2t,\ 1+3t) = \left(1+\frac{1}{9},\ 2+\frac{2}{9},\ 1+\frac{3}{9}\right) = \left(\frac{10}{9},\ \frac{20}{9},\ \frac{12}{9}\right)$$

(2) Un punto genérico de la recta r será de la forma: C = (1+t, 2+2t, 1+3t).

La recta que pasa por los puntos A y C, tendrá como vector de dirección al vector:

$$\vec{AC} = (1+t,\ 2+2t,\ 1+3t) - (1,\ 5,\ -4) = (t,\ 2t-3,\ 3t+5)$$

La condición para que la recta que pasa por los puntos A y C sea perpendicular al plano Π, es que el vector $\vec{AC}$ y el vector normal al plano sean paralelos, o sea, que el producto vectorial de ambos es el vector cero:

$$\vec{AC} \times \vec{n}_\Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad (t,\ 2t-3,\ 3t+5)\times(2,\ 2,\ 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{vmatrix} 2t-3 & 3t+5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} t & 3t+5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} t & 2t-3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$(2t-3-6t-10,\ -t+6t+10,\ 2t-4t+6) = (0,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow$$

$$(-4t-13,\ 5t+10,\ -2t+6) = (0,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4t-13 = 0 \ \Rightarrow\ t = -\dfrac{13}{4} \\ 5t+10 = 0 \ \Rightarrow\ t = -2 \\ -2t+6 = 0 \ \Rightarrow\ t = 3 \end{array} \right.$$

no obtenemos un único valor de t, por tanto, no existe el punto C.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Sea A una matriz de orden 3×3, y, |A|, el determinante asociado. Si multiplicamos todos los elementos de la matriz A por (-1), obtenemos la matriz -A, de forma que el determinante asociado, |-A|, tendrá también todos sus elementos multiplicados por (-1), y para calcular su valor sacamos factor común, (-1), para cada una de las tres filas del determinante, es decir, sacamos tres veces factor común (-1), por tanto:

$$|-A| = (-1)(-1)(-1)\ |A| = -|A|$$

lo que significa que el determinante de la matriz original A, y el determinante de la nueva matriz -A, toman valores de signos contrarios.

(2) Si multiplicamos todos los elementos de la matriz A por (-2), obtenemos la matriz -2A, de forma que el determinante asociado, $|-2A|$, tendrá también todos sus elementos multiplicados por (-2), y para calcular su valor sacamos factor común, (-2), para cada una de las tres filas del determinante, es decir, sacamos tres veces factor común (-2), por tanto:

$$|-2A| = (-2)(-2)(-2)\ |A| = -8\ |A|$$

lo que significa que el determinante de la nueva matriz -2A, se obtiene multiplicando por (-8) el valor del determinante de la matriz original.

(3) La propiedad de los determinantes que hemos utilizado es:

" Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor común puede sacarse fuera del símbolo del determinante".

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Observando la gráfica, y teniendo en cuenta que una función es creciente en un intervalo si su primera derivada es positiva en dicho intervalo, y decreciente si es negativa, deducimos que:

$f'(x) > 0$ en los intervalos [-3, -1[y]0´5, 4], luego es creciente en ellos.

$f'(x) < 0$ en el intervalo]-1, 0´5[, luego es decreciente en él.

(2) Una función es constante en un intervalo si su primera derivada es cero en dicho intervalo. No observamos ningún trozo donde la función derivada sea cero, sólo dos puntos aislados. Luego la función no es constante en ningún intervalo.

(3) Los puntos críticos de una función son aquellos en los que la primera derivada es cero, en la gráfica de la función derivada sólo observamos dos valores, el -1 y el 0´5.

Teniendo en cuenta el crecimiento y decrecimiento de la función, según el apartado (1), podemos concluir diciendo que en el punto de abscisa $x = -1$, hay un máximo relativo pues la función pasa de creciente a decreciente; y en el de abscisa $x = 0´5$ un mínimo pues la función pasa de decreciente a creciente.

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Decimos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si se verifica que $F'(x) = f(x)$, esto lo expresamos de la forma siguiente:

$$\int f(x)\ dx = F(x)$$

Pero como cada función continua *f(x)* tiene infinitas primitivas, que se diferencian una de otra en una constante, también se suele escribir lo anterior de la forma:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + k$$

siendo k una constante cualquiera.

(2) Hallar una primitiva de la función *f(x)* es resolver la integral:

$$\int x\, e^{-x}\, dx = \qquad [1]$$

lo haremos mediante el método de integración por partes.

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^{-x}\, dx \quad ; \quad v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

continuando en [1], tendremos:

$$= -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}$$

luego una primitiva de *f(x)* es la función $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = -x e^{-x} - e^{-x}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para determinar la ecuación del plano Π_1 que es perpendicular a la recta r, tendremos en cuenta la condición de perpendicularidad, y es que el vector de dirección de la recta y el vector normal al plano son paralelos, es decir, sus coordenadas son proporcionales, luego podemos tomar como vector normal del plano el de dirección de la recta.

$$\vec{v}_r = (3,\ 2,\ -1) \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{\Pi_1} = (3,\ 2,\ -1)$$

La ecuación general de un plano es: $Ax + By + Cz + D = 0$, siendo (A, B, C) las coordenadas del vector normal del plano:

$$3x + 2y - z + D = 0$$

impongamos la condición de que pase por el punto P = (1, 2, 3):

$$3\cdot 1 + 2\cdot 2 - 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + 4 - 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -4$$

la ecuación del plano, finalmente, será: $\Pi_1 \equiv 3x + 2y - z - 4 = 0$

(2) Para determinar el plano Π_2 que es paralelo a la recta r, tendremos en cuenta que el vector de dirección de la recta lo podemos tomar como uno de los vectores de dirección del plano:

$$\vec{v}_r = (3,\ 2,\ -1) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_{\Pi_2} = (3,\ 2,\ -1)$$

siendo el otro vector de dirección del plano, el que determinan los puntos P y Q:

$$\vec{W}_{\Pi_2} = \vec{PQ} = (-1,\ 0,\ 2) - (1,\ 2,\ 3) = (-2,\ -2,\ -1)$$

fácilmente puede observarse que las coordenadas de ambos vectores no son proporcionales, es decir, tienen distinta dirección.

La ecuación del plano es:

$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 2 - 2\lambda + 2\mu \\ z = 3 - \lambda - \mu \end{cases}$$

(3) Para obtener la ecuación de la recta s como intersección de los planos Π_1 y Π_2, expresemos primeramente la ecuación del plano Π_2 en forma general.

$$\Pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 2 - 2\lambda + 2\mu \\ z = 3 - \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda + 3\mu = x-1 \\ -2\lambda + 2\mu = y-2 \\ -\lambda - \mu = z-3 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su discusión mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x-1 \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z-3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: -2 · [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & y-x-1 \\ 0 & 5 & -2z+x+5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 5 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & y-x-1 \\ 0 & 0 & -4x+5y-2z \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, como el sistema es compatible debe verificar que la última ecuación sea trivial lo que implica la condición de que $-4x+5y-2z = 0$, que no es sino la ecuación del plano Π_1 en forma general.

La ecuación de la recta s, como intersección de Π_1 y Π_2 es: $\begin{cases} 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ -4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$

Expresemos ahora la ecuación de la recta r también como intersección de dos planos:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} & \Rightarrow \quad 2x - 3y - 2 = 0 \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1} & \Rightarrow \quad -y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de r y s, analizando el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y - 2 = 0 \\ -y - 2z - 2 = 0 \\ 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ -4x + 5y - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 2 \\ -y - 2z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -4x + 5y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y procedamos a su discusión mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] + 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 13 · [2ªf.]
Sustituyamos la 4ª fila por: [4ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -28 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Hemos obtenido una ecuación absurda, por lo que el sistema es incompatible, pero al ser sólo una la ecuación absurda obtenida , las rectas se cruzan en el espacio .

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$$

haremos uso de una de las propiedades de los determinantes que dice:

"Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual número de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual, es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos sumandos para el segundo determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando".

$$\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a+2b \\ -d & 6c+2d \end{vmatrix} =$$

Propiedad que volvemos a hacer uso de ella para terminar de descomponer los determinantes.

$$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a \\ -d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 2b \\ -d & 2d \end{vmatrix} =$$

El primero de los determinantes y el último, valen cero, ya que otra de las propiedades de los determinantes dice:

"Si dos filas o dos columnas de un determinante son proporcionales, el determinante vale cero".

Para el segundo y tercer determinante haremos uso de la propiedad que dice:

"Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, ese factor puede sacarse fuera del símbolo del determinante".

$$= 0 + 3\cdot 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 0 =$$

En el segundo de los determinantes usaremos la propiedad que dice:

"Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo".

$$= 6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

Teniendo en cuenta, según el ejercicio, que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

el valor del determinante, finalmente, valdrá:

$$= 6\cdot 5 + 6\cdot 5 = 30 + 30 = 60$$

(2) Las propiedades de los determinantes que se han usado han sido enunciadas en el apartado anterior.

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 24 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. Considera la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{Ln(x)}{x}$, donde Ln(x) es el logaritmo neperiano de *x*.

(1) [1´5 PUNTOS]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento así como los extremos relativos de *f* .

(2) [1 PUNTO]. Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de corte de dicha gráfica con el eje OX.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina una primitiva *F* de la función *f* dada (en los puntos donde no se anula el denominador) por $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}$ tal que la gráfica de *F* pase por el punto (2, Ln(8)).

EJERCICIO 3. De todos los planos que contienen la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x - 4y + 9 = 0, \\ 3y - z - 9 = 0; \end{cases}$$

(1) [1 PUNTO]. Determina el que pasa por el punto P = (1, 4, 0).

(2) [1´5 PUNTOS]. Determina uno que esté a 3 unidades de distancia del origen, ¿cuántas soluciones hay?

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro real m,

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 0, \\ 2x + 3y + z &= 0, \\ 4x - y + m^2 z &= m-1. \end{aligned}$$

Opción B

EJER CICIO 1. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en la forma $f(x) = x\,e^{2x}$.

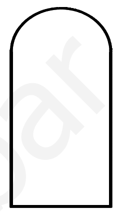
(1) [1 PUNTO]. Determina los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuál es su valor).

(2) [1´5 PUNTOS]. Determina el valor de la integral

$$\int_0^{1/2} (1 + f(x))\, dx.$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS].

Se desea construir una ventana como la de la figura (en la que la parte superior es una semicircunferencia) que tenga un perímetro de 6 m. ¿ Qué dimensiones debe tener para que su superficie sea máxima?



EJERCICIO 3. **(1)** [1 PUNTO]. Define el concepto de inversa de una matriz cuadrada.

(2) [0´75 PUNTOS]. Da algún criterio que permita decidir si una matriz cuadrada es invertible.

(3) [0´75 PUNTOS]. ¿Es invertible la matriz A siguiente? Justifica la respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4. Considera la recta r y el plano Π dados en función de un parámetro real a, por

$$r \equiv \begin{cases} x + (1+a)y + z = 0, \\ (2+a)x - y - 2z = 0; \end{cases} \qquad y \qquad \Pi \equiv 3x - z = a$$

(1) [1´75 PUNTOS]. Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro a.

(2) [0´75 PUNTOS]. Para a = 1 determina el punto de intersección de la recta con el plano.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) Obtengamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*. Calculemos la 1ª derivada de *f*, *f ´(x)*, y calculemos los valores que la anulen

$$f(x) = \frac{Ln(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - Ln(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 - Ln(x)}{x^2}$$

$$\frac{1 - Ln(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - Ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ln(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

sólo hay un valor que haga cero a la función $f\,'$. Por tanto, hay dos posibles intervalos de crecimiento o decrecimiento, el intervalo (0, e) y el (e, +∞), ya que la función *f(x)* está definida en el intervalo (0, +∞), siendo continua y derivable en él. Probemos con un valor cualquiera de cada uno de dichos intervalos, por ejemplo, el 1 y el e^2, respectivamente, en la primera derivada:

$$f\,'(1) = \frac{1 - Ln(1)}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es creciente en } (0, e).$$

$$f\,'(e^2) = \frac{1 - Ln(e^2)}{(e^2)^2} = \frac{1-2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es decreciente en } (e, +\infty).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa x = e, siendo la ordenada del máximo relativo:

$$f(e) = \frac{Ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \text{máximo relativo } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

(2) El punto de corte de la gráfica de *f(x)* con el eje de abscisas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{Ln(x)}{x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{Ln(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad (1, 0)$$

La ecuación de la recta tangente a una función en un punto es:

$$y - y_0 = f\,'(x_0)\,(x - x_0) \qquad [1]$$

El valor de la derivada en el punto de tangencia de abscisa $x_0 = 1$, es:

$$f\,'(x) = \frac{1 - Ln(x)}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f\,'(x_0) = f\,'(1) = \frac{1 - Ln(1)}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1$$

El valor de la función en el punto de tangencia de abscisa $x_0 = 1$ es $y_0 = 0$.

Sustituyendo estos valores en [1], obtendremos la ecuación de la recta tangente:

$$y - 0 = 1\,(x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = x - 1$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Para determinar una primitiva F de la función f, calcularemos la siguiente integral

$$\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\,dx$$

Se trata de una integral racional impropia porque el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, efectuemos la división (se encuentra desarrollada al lado).

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & \quad - 2x + 3 & \; x - x^2 \\ \cline{3-3} -x^3 + x^2 & & -x - 1 \\ \hline & x^2 - 2x + 3 & \\ & -x^2 + x & \\ \hline & -x + 3 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2}\,dx = \int (-x - 1)\,dx + \int \frac{-x + 3}{x - x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x - 3}{x^2 - x}\,dx =$$

La última integral es una integral racional propia, por lo que descompondremos su integrando en fracciones elementales, sabiendo que las raíces del denominador son el 0 y el 1:

$$\frac{x - 3}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 3}{x^2 - x} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \quad \Rightarrow \quad x - 3 = A(x-1) + Bx$$

Sustituyamos, en la última expresión, la x por los valores que anulaban al denominador:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 3 \qquad ; \qquad x = 1 \quad \Rightarrow \quad -2 = B \quad \Rightarrow \quad B = -2$

Volvamos a la integral y sustituyamos el integrando por la descomposición en fracciones elementales efectuada, asignándole a los coeficientes, A y B, los valores recién, calculados:

$$= -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx = -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-2}{x-1}\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - x + 3Ln|x| - 2Ln|x-1| + k = F(x)$$

Hemos obtenido una primitiva $F(x)$, hagamos que su gráfica pase por el punto (2, Ln(8)):

$$F(2) = -\frac{2^2}{2} - 2 + 3Ln|2| - 2Ln|2-1| + k = Ln(8) \quad \Rightarrow \quad -4 + 3Ln(2) + k = 3Ln(2)$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 3Ln|x| - 2Ln|x-1| + 4$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Hallemos el haz de planos que determina a la recta r:

$$\lambda(x - 4y + 9) + \mu(3y - z - 9) = 0 \qquad [1]$$

Calculemos el plano del haz que pasa por el punto P = (1, 4, 0), para ello, sustituiremos las coordenadas del punto en la ecuación del haz:

$$\lambda(1 - 16 + 9) + \mu(12 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad -6\lambda + 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2\lambda$$

sustituyamos este valor de μ en [1]:, y simplifiquemos después por λ:

$$\lambda(x - 4y + 9) + 2\lambda(3y - z - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 4y + 9 + 6y - 2z - 18 = 0$$

$$x + 2y - 2z - 9 = 0$$

que es la ecuación del plano del haz que pasa por el punto P.

(2) El haz de planos es:

$$\lambda(x-4y+9) + \mu(3y-z-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x + (3\mu-4\lambda)y - \mu z + 9\lambda - 9\mu = 0$$

Sustituyamos las coordenadas del origen en la expresión que nos da la distancia de un punto al plano:

$$dist(O,\Pi) = \left| \frac{9\lambda - 9\mu}{\sqrt{\lambda^2 + (3\mu-4\lambda)^2 + \mu^2}} \right| = 3 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{9\lambda - 9\mu}{\sqrt{\lambda^2 + (3\mu-4\lambda)^2 + \mu^2}} = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{(9\lambda - 9\mu)^2}{\lambda^2 + (3\mu-4\lambda)^2 + \mu^2} = 9 \quad \Rightarrow$$

$$81\lambda^2 + 81\mu^2 - 162\lambda\mu = 9\lambda^2 + 81\mu^2 + 144\lambda^2 - 216\lambda\mu + 9\mu^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\mu^2 - 6\lambda\mu + 8\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{6\lambda \pm \sqrt{36\lambda^2 - 32\lambda^2}}{2} = \frac{6\lambda \pm 2\lambda}{2} = \begin{cases} \nearrow \ \mu = 4\lambda \\ \searrow \ \mu = 2\lambda \end{cases}$$

Sustituyamos, en primer lugar, $\mu = 4\lambda$, en la ecuación del haz de planos, y después $\mu = 2\lambda$:

$$\lambda x + (12\lambda - 4\lambda)y - 4\lambda z + 9\lambda - 36\lambda = 0 \quad \Rightarrow \qquad \Pi_1 \equiv x + 8y - 4z - 27 = 0$$

$$\lambda x + (6\lambda-4\lambda)y - 2\lambda z + 9\lambda-18\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_2 \equiv x + 2y - 2z - 9 = 0$$
que son los dos planos del haz cuya distancia al origen es tres.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 5m^2-8 & 5m-5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5m^2-5 & 5m-5 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow 5m^2 - 5 = 0 \Rightarrow m = 1$ y $m = -1 \Rightarrow$

** Si $m = 1 \Rightarrow$ la última ecuación es, 0 = 0, que es una ecuación trivial, se elimina, el sistema se queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $m = -1 \Rightarrow$ la última ecuación es, 0 = -10, que es una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible, no tiene solución.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow 5m^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ en este caso todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado.

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) La función $f(x) = x\,e^{2x}$, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que los extremos relativos hay que buscarlos en los puntos de derivada cero.

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} \Rightarrow e^{2x} + 2xe^{2x} = 0 \Rightarrow e^{2x}(1+2x) = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 2e^{-1} + 2e^{-1} - 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow$$

luego hay un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{-1}{2e} \;\Rightarrow\; \textit{mínimo relativo}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1}{2e}\right)$$

(2) Calculemos la integral que nos dice el ejercicio:

$$\int_0^{1/2} (1 + f(x))\,dx = \int_0^{1/2} \left(1 + xe^{2x}\right) dx = \int_0^{1/2} dx + \int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx =$$

$$= \left[x\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx = = \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx = \qquad [1]$$

Resolvamos la última integral mediante el método de integración por partes.

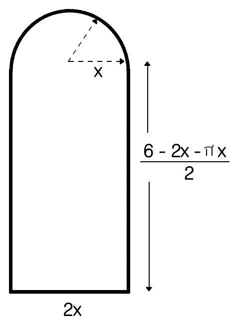
$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^{2x}\,dx \quad ; \quad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

continuando en [1], tendremos:

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e - 0\right) - \int_0^{1/2} \frac{1}{2}e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{e}{4} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{e}{4} - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e^{0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



Teniendo en cuenta el dibujo, construyamos la función área de la figura, que queremos maximizar:

$$A(x) = 2x\left(3 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi x^2}{2} = -\frac{4+\pi}{2}x^2 + 6x$$

El dominio de esta función polinómica es el intervalo abierto $(0, +\infty)$, y se trata de una función continua y derivable en él. El máximo absoluto se encontrará entre los relativos, calculémoslos:

$$A'(x) = -(4+\pi)x + 6 \;\Rightarrow\; -(4+\pi)x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{6}{4+\pi}$$

$$A''(x) = -(4+\pi) \;\Rightarrow\; A''\left(\frac{6}{4+\pi}\right) < 0 \;\Rightarrow\; \textit{máximo relativo en } x = \frac{6}{4+\pi}$$

este máximo relativo es el absoluto, ya que al ser el coeficiente del término en x^2 negativo la función crece, alcanza el máximo relativo y después decrece.

La base medirá $\frac{12}{4+\pi}$, y el radio de la semicircunferencia $\frac{6}{4+\pi}$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Decimos que una matriz cuadrada, A, de orden n, tiene matriz inversa, A^{-1}, si se satisface que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

siendo I la matriz unidad.

(2) Un criterio para saber si una matriz cuadrada A de orden n es invertible, puede ser, por ejemplo, el que el determinante asociado a la matriz A, $|A|$, sea distinto de cero.

Otro criterio podría ser que el rango de la matriz A sea n.

(3) Veamos si la matriz A siguiente es invertible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0$$

luego la matriz A no es invertible.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro a, discutiremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - z = a \\ (2+a)x - y - 2z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & a \\ 2+a & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: $3 \cdot [2^a f.] - (2+a) \cdot [1^a f.]$

Sustituyamos la 3ª fila por: $3 \cdot [3^a f.] - [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & a \\ 0 & -3 & -4+a & -2a-a^2 \\ 0 & 3+3a & 4 & -a \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: $[3^a f.] + (1+a) \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & a \\ 0 & -3 & -4+a & -2a-a^2 \\ 0 & 0 & a^2-3a & -a^3-3a^2-3a \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.

Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ y $a = 3 \quad \Rightarrow$

** Si $a = 0 \quad \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = 0$, que es una ecuación trivial, se elimina, el sistema se queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, por lo que la recta está contenida en el plano.

** Si $a = 3 \quad \Rightarrow$ la última ecuación es, $0 = -63$, que es una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible, no tiene solución, por lo que la recta y el plano son paralelos.

* Si $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$ y $a \neq 3 \quad \Rightarrow$ En este caso todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado, la recta y el plano se cortan en un punto.

(2) Para a = 1 determinemos el punto de intersección de la recta con el plano.

Partimos del sistema triangulado inferiormente al que habíamos llegado en el apartado anterior, y sustituimos la "a" por 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & a \\ 0 & -3 & -4+a & -2a-a^2 \\ 0 & 0 & a^2-3a & -a^3-3a^2-3a \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $-2 \cdot$ [2ªf.] + [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot$ [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es el punto donde se corta la recta y el plano que es:

$$P = \left(\frac{9}{6},\ -\frac{5}{2},\ \frac{7}{2} \right)$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 25 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(sen(x))^2}{e^x - x - 1}.$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Determina la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es dos veces derivable, que su gráfica pasa por el punto (1, 1), que $f\,'(1) = 0$ y que $f\,''(x) = \dfrac{1}{x}$.

EJERCICIO 3. Se sabe que la siguiente matriz M tiene rango 1,

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}.$$

(1) [1 PUNTO]. ¿Pueden determinarse a, b, c y d? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.
(2) [1´5 PUNTOS]. ¿Cuál es la situación de los planos de ecuaciones respectivas
$\Pi_1 \equiv 5x + 6y + 7z = 5,$ $\Pi_2 \equiv x + ay + bz = 2$ y $\Pi_3 \equiv 2x + cy + dz = 1$?

EJERCICIO 4. Consideremos el punto P = (1, 0, -1) y la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Halla el punto de r más cercano a P y la distancia entre P y r.
(2) [1 PUNTO]. Determina el plano que pasa por el punto P y contiene la recta r.

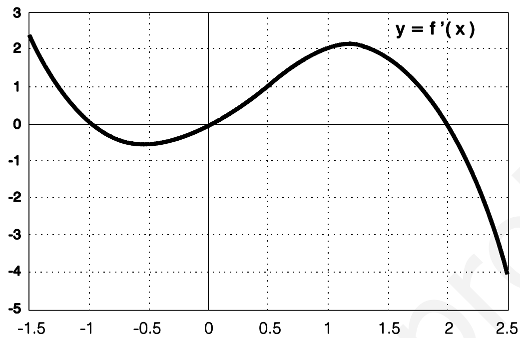
Opción B

EJERCICIO 1. **(1)** [0´5 PUNTOS]. Enuncia la Regla de Barrow.

(2) [2 PUNTOS]. Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, calcula la integral

$$\int_0^{\sqrt{x}} x \cos\left(x^2\right) dx.$$

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. De una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Se sabe que pasa por el punto (3, 0) y que la gráfica de su función derivada es la que se muestra en la figura.



Determina sus extremos locales así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y, con estos elementos, esboza razonadamente la gráfica de f.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Demuestra que las recta r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda, \\ y = 4 + 2\lambda, \\ z = 1 + \lambda; \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu, \\ y = -\mu, \\ z = 4 + 2\mu; \end{cases}$$

se intersecan y halla el punto donde lo hacen

(2) [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

EJERCICIO 4. Considera el sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real a:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x + 3y + z &= 2, \\ 5x + ay + z &= 6. \end{aligned}$$

(1) [1´5 PUNTOS]. Discute el sistema según los valores de a.

(2) [1 PUNTO]. Resuélvelo para a = 8.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(sen(x))^2}{e^x - x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2\,sen(x)\cos(x)}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(\cos(x))^2 - 2(sen(x))^2}{e^x} = \frac{2-0}{1} = 2$$

Para destruir las indeterminaciones de infinito partido por infinito hemos usado la Regla de L´Hôpital, consistente en derivar numerador y denominador independientemente el uno del otro

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Como la función *f(x)* es dos veces derivable, y nos dan la función segunda derivada, podemos obtener mediante la integración de ésta, la familia de primitivas de la misma, es decir:

$$f´(x) = \int f´´(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = Ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad f´(x) = Ln(x) + C$$

como $f´(1) = 0$, tendremos que

$$f´(1) = Ln(1) + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad f´(x) = Ln(x)$$

Integremos *f´(x)* para obtener su familia de primitivas, o sea,

$$f(x) = \int f´(x)\,dx = \int Ln(x)\,dx = \qquad [1]$$

resolvamos esta integral mediante el método de integración por partes:

$$u = Ln(x)\ ;\quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx\ ;\quad v = \int dx = x$$

continuando en [1]:

$$= x\,Ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\,Ln(x) - x + K \quad \Rightarrow \quad f(x) = x\,Ln(x) - x + K$$

finalmente, como la gráfica de la función *f(x)* pasa por el punto (1, 1):

$$f(1) = 1 \cdot Ln(1) - 1 + K \;\Rightarrow\; 1 = 0 - 1 + k \;\Rightarrow\; K = 2 \;\Rightarrow\; f(x) = x\,Ln(x) - x + 2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Calculemos el rango de la matriz M mediante el método de Gauss.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5a-6 & 5b-7 \\ 0 & 5c-12 & 5d-14 \end{pmatrix}$$

Como la matriz tiene de rango 1, significa que sólo hay una línea linealmente independiente, y todas las demás son cero, lo que implica que todos los elementos de la 2ª y 3ª fila son ceros:

$$5a-6 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{6}{5} \quad ; \quad 5b-7 = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{7}{5}$$

$$5c-12 = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{12}{5} \quad ; \quad 5d-14 = 0 \;\Rightarrow\; d = \frac{14}{5}$$

(2) Para estudiar la posición relativa de los tres planos, discutiremos el sistema formado por sus ecuaciones. Sustituyamos los valores de a, b, c y d por los anteriormente calculados:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+6y+7z=5 \\ x+\frac{6}{5}y+\frac{7}{5}z=2 \\ 2x+\frac{12}{5}y+\frac{14}{5}z=1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 7 & 5 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & 2 \\ 2 & \frac{12}{5} & \frac{14}{5} & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 5 · [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Hemos obtenido dos ecuaciones absurdas, luego el sistema es incompatible, no tiene solución por lo que los tres planos son paralelos, pero lo son incluso dos a dos.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Expresemos la recta r en forma paramétrica, para ello resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ z-1=0 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

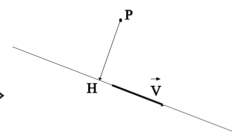
El sistema prácticamente está triangulado inferiormente, basta que la 2ª columna, la de los coeficientes de la incógnita *y*, la pasemos al segundo miembro como incógnita secundaria:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

La solución es: $x = -y$; $z = 1$
Sustituyamos la incógnita secundaria *y*, por un parámetro t, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico de la recta r, por ejemplo: H = (-t, t, 1).
Para que este punto sea el más cercano a P, se ha de verificar que el vector que determinan ambos puntos sea perpendicular al de dirección de la recta r, es decir:



$$\vec{PH} = (-t,\ t,\ 1) - (1,\ 0,\ -1) = (-t-1,\ t,\ 2)$$

$$\vec{PH} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{PH}\cdot\vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-t-1,\ t,\ 2)\cdot(-1,\ 1,\ 0) = 0 \Rightarrow$$

$$t+1+t=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad H=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$$

La distancia del punto P a la recta coincide con el módulo del vector $\vec{PH}$.

$$\vec{PH} = \left(\tfrac{1}{2}-1,\ -\tfrac{1}{2},\ 2\right) = \left(-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ 2\right)$$

$$dist(P,r) = |\vec{PH}| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+2^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2) La ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a r, tendrá como vectores de dirección el de la recta y el vector $\vec{PH}$.

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda - \frac{1}{2}\mu \\ y = \lambda - \frac{1}{2}\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) El Teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b], se verifica que la función

$$F(x) = \int_a^x f \qquad ; \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

es una función derivable y además que $F'(x) = f(x)$.

La aplicación más interesante de este teorema es la Regla de Barrow que dice:

Si $f(x)$ es una función continua en [a, b] y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

(2) Calculemos, en primer lugar la integral indefinida siguiente, haciendo el cambio:

$$x^2 = t \qquad \Rightarrow \qquad 2x\, dx = dt$$

$$\int x \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos(t)\, dt = \frac{1}{2}\, sen(t) = \frac{1}{2}\, sen\left(x^2\right)$$

Calculemos ahora la integral definida que nos dice el ejercicio

$$\int_0^{\sqrt{x}} x \cos\left(x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2}\, sen\left(x^2\right)\right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\, sen\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\, sen\left(0^2\right) = \frac{1}{2}\, sen(x)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

. Sabemos que la función f es derivable y que por tanto es continua. De la observación de la gráfica de su función derivada podemos deducir lo siguiente:

* En el intervalo]-∞, -1[$f'(x)$ es positiva $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente en]-∞, -1[
* En el intervalo]-1, 0[$f'(x)$ es negativa $\Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente en]-1, 0[
* En el intervalo]0, 2[$f'(x)$ es positiva $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente en]0, 2[
* En el intervalo]2, +∞[$f'(x)$ es negativa $\Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente en]2, +∞[

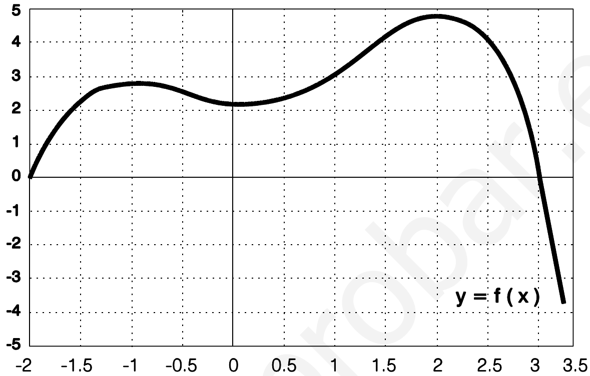
En los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, $f\,'(x) = 0$, por lo que teniendo en cuenta el estudio que se ha hecho de la monotonía así como de la continuidad, tendremos:

* En el punto $x = -1$ la función $f(x)$ pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo relativo.

* En el punto $x = 0$ la función $f(x)$ pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo relativo.

* En el punto $x = 2$ la función $f(x)$ pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo relativo.

Con los elementos anteriores y sabiendo además que la función f pasa por el punto (3,0), un esbozo de su gráfica podría ser la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para demostrar que las rectas se intersecan, resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas, para ello igualamos las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} 2+3\lambda = 1+\mu \\ 4+2\lambda = -\mu \\ 1+\lambda = 4+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3\lambda - \mu = -1 \\ 2\lambda + \mu = -4 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última ecuación es trivial, la eliminamos.
Simplifiquemos la 2ª fila por 5.a por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es un sistema compatible determinado, luego las dos rectas se cortan en un punto.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

La solución es: $3\lambda = -3$; $\mu = -2$ $\Rightarrow$ $\lambda = -1$; $\mu = -2$
El punto donde se cortan es: $(1+\mu,\ -\mu,\ 4+2\mu) = (-1,\ 2,\ 0)$.

(2) El plano que contiene a las rectas r y s, es el que pasa por el punto de intersección, (-1, 2, 0), y tiene como vectores de dirección los de las rectas. Su ecuación es:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para discutir el sistema, lo expresamos en forma matricial y usamos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & a & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 5 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & a-10 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + (a-10) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3a-24 & -2a+16 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el a_{33} que puede serlo o no, veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \quad \Rightarrow$ la última ecuación es, 0 = 0, que es una ecuación trivial, se elimina, el sistema se queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3a - 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 8 \quad \Rightarrow$ en este caso todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible determinado.

(2) Teniendo en cuenta el apartado anterior, resolvamos el sistema para a = 8, es decir, la última ecuación, que es trivial, la eliminamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2+z \\ 0 & -1 & -2-3z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2-5z \\ 0 & -1 & -2-3z \end{array}\right)$$

La solución del sistema es: $x = -2 - 5z$; $y = -2 - 3z$.
Sustituyamos la incógnita secundaria z por el parámetro t:

$$x = -2 - 5t \quad ; \quad y = -2 - 3t \quad ; \quad z = t.$$

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	L.O.G.S.E. MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

MODELO 26 DE EXAMEN

Opción A

EJERCICIO 1. **(1)** [1 PUNTO]. Esboza la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2x + 2 & si \;\; x \leq -1, \\ x^3 - x & si \;\; x > -1. \end{cases}$$

(2) [1´5 PUNTOS]. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x + 2 = 0$ y $2x - 1 = 0$.

EJERCICIO 2. [2´5 PUNTOS]. Una imprenta recibe el encargo de diseñar carteles en los que la zona impresa debe ocupar 100 $cm.^2$ y hay que dejar 4 cm. de margen derecho, 4 cm. De margen izquierdo, 3 cm. de margen superior y 2 cm. de margen inferior. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel para que se utilice la menor cantidad de papel que sea posible.

EJERCICIO 3. **(1)** [1´5 PUNTOS]. Determina los valores del parámetro a para los que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

(1, 1, a), (a, 3, 2) y (0, 0, a),

son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

(2) [1 PUNTO]. Determina la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones son:

$$\Pi_1 \equiv x + y + 3z = 5, \qquad \Pi_2 \equiv 3x + 3y + 2z = 8 \qquad y \qquad \Pi_3 \equiv 3z = 3.$$

EJERCICIO 4. [2´5 PUNTOS]. Calcula todos los planos perpendiculares a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = -10 + 5t, \\ y = 100, \\ z = 250 - 12t, \end{cases}$$

que se encuentran a 2 unidades de distancia del punto P = (2, -7, 1).

Opción B

EJERCICIO 1. [2´5 PUNTOS]. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

dibuja su gráfica determinando previamente los siguientes elementos: sus asíntotas, extremos locales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de simetrías.

EJERCICIO 2. La recta de ecuación $y = -4x + 2$ representa la trayectoria de un móvil A. Otro móvil B se desplaza según la trayectoria dada por la curva de ecuación $y = g(x)$ donde $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Es la función definida por $g(x) = -x^2 + 2x + c$.

(1) [1´25 PUNTOS]. Halla el valor de c sabiendo que ambas trayectorias coinciden en el punto en el que la función g tiene su máximo local.

(2) [1´25 PUNTOS]. ¿Coinciden ambas trayectorias en algún otro punto? En tal caso, dibuja la región limitada por ambas trayectorias y calcula su área.

EJERCICIO 3. [2´5 PUNTOS]. Dado el punto A = (3, 1, 0), halla su simétrico respecto de la recta r dada por las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

EJERCICIO 4. Considera la matriz B que depende de un parámetro a.

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [1´25 PUNTOS]. ¿Para qué valores de a tiene B inversa? Justifica la respuesta.

(2) [1´25 PUNTOS]. Para a = 0 halla la inversa de B.

SOLUCIONES Opción A

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) * Representemos el trozo de función $y = 2x + 2$, para $x \le -1$, cuya gráfica es una recta.

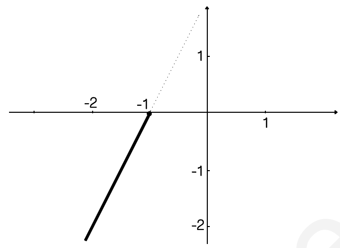
1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

2.- Punto de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad (-1, 0)$

3.- La gráfica es la situada al lado, en la que se ha destacado sólo donde está definida en este caso



* Representemos el trozo de función $y = x^3 - x$, para $x > -1$, que al ser polinómica, es continua y derivable.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow$

$x = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad (-1, 0);\ (0, 0),\ (1, 0)$

3.- Simetría.

$\forall x \in Dom(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in Dom(f)$

$f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

luego $f(-x) = -f(x)$ para $\forall x \in \mathbb{R}$ por lo que la función es una función impar, es decir, es simétrica respecto del origen.

4.- Crecimiento y decrecimiento.

$f(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

construimos los tres posibles intervalos de monotonía, $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$. Probemos un valor cualquiera de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el -1, 0 y 1, respectivamente, en la primera derivada de $f(x)$:

$f\,'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es creciente en $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$f\,'(0) = 3(0)2 - 1 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$f\,'(1) = 3(1)^2 - 1 = 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.

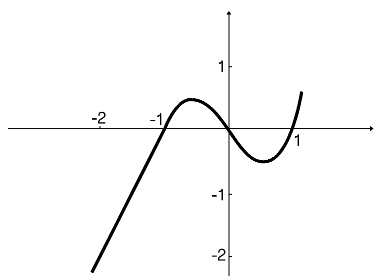
5.- Teniendo en cuenta el estudio anterior de la monotonía , y la continuidad de la función:

• En el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ hay un máximo relativo.

• En el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ hay un mínimo relativo.

Las ordenadas de los extremos se han obtenido a partir de la función.

6.- La gráfica la función f es la situada al lado

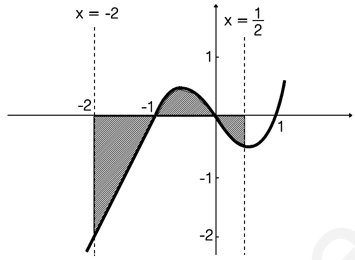


(2) El área que me piden es la del recinto que se encuentra rayado en la gráfica de la página siguiente.

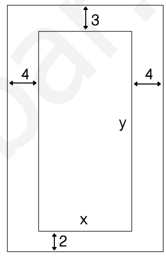
$$Área = \left|\int_{-2}^{-1}(2x+2)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1/2}(x^3 - x)\,dx\right| =$$

$$= \left| \left[2\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \right| =$$

$$= \left|-1\right| + \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{7}{64}\right| = \frac{87}{64}\ u^2$$



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-



Construyamos la función superficie, que queremos hacer mínima:

$$S = (8+x)(5+y) = 40 + 5x + 8y + xy$$

teniendo en cuenta que $x \cdot y = 100 \Rightarrow$

$$S(x) = 40 + 5x + \frac{800}{x} + 100 \quad \Rightarrow \quad S(x) = 140 + 5x + \frac{800}{x}$$

Para saber cuál es el mínimo absoluto de la función, calculemos en primer lugar los mínimos relativos de la función. El dominio de la función lógicamente es el intervalo abierto]0, +∞[, siendo la función, continua y derivable en dicho intervalo.

$$S'(x) = 5 - \frac{800}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 5 - \frac{800}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{800}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 4\sqrt{10}$$

$$S''(x) = -\frac{-1600x}{x^4} = \frac{1600}{x^3} \quad \Rightarrow \quad S''\left(4\sqrt{10}\right) = \frac{1600}{\left(4\sqrt{10}\right)^3} > 0 \quad \Rightarrow$$

luego hay un mínimo relativo en $x = 4\sqrt{10}$.

Los dos intervalos de monotonía son: $\left]0,\ 4\sqrt{10}\right[$ y $\left]4\sqrt{10},\ +\infty\right[$. Probemos valores intermedios de estos intervalos, por ejemplo, 1 y 20, en la primera derivada:

$$S'(1) = 5 - \frac{800}{1^2} = -795 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decreciente en } \left]0,\ 4\sqrt{10}\right[$$

$$S'(20) = 5 - \frac{800}{20^2} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente en } \left]4\sqrt{10},\ +\infty\right[$$

Como la función es continua y derivable en su dominio, que es un intervalo abierto, y teniendo en cuenta la monotonía, el mínimo relativo es el mínimo absoluto.

Las dimensiones del cartel son $(8 + x)$ por $(5 + y)$, es decir:

$$8 + 4\sqrt{10} \quad \text{por} \quad 5 + \frac{100}{4\sqrt{10}} = 5 + \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

(1) Para que los tres vectores sean linealmente independientes, el rango de la matriz formada por sus componentes debe ser tres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - a · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 3-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Como la matriz tiene que tener rango 3, significa que todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, es decir:

$3-a \neq 0 \quad ; \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 3 \quad y \quad a \neq 0.$

(2) Para estudiar la posición relativa de los tres planos, discutiremos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 5 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \\ 3z = 3 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método reductivo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -7 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 7 ·[3ªf.] + 3 · [2ªf.]

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente.
Hemos obtenido una ecuación trivial, que podemos eliminar, nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico, por lo que los tres planos se cortan en una recta.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Para obtener los planos perpendiculares a la recta r, tomamos como vector normal de los planos el de dirección de la recta, luego la ecuación de esos planos será:

$$\vec{v}_r = (5, 0, -12) \quad \Rightarrow \quad 5x - 12z + D = 0$$

Impongamos la condición a esos planos de estar a dos unidades del punto P = (2, -7, 1), para ello sustituiremos en la ecuación normal del plano las coordenadas del punto, la cantidad que obtengamos en valor absoluto es la distancia a la que se encuentran, en nuestro caso, 2.

$$dist(P,\Pi) = \left| \frac{5x_0 - 12z_0 + D}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \right| \Rightarrow$$

$$2 = \left| \frac{10 - 12 + D}{\sqrt{169}} \right| \Rightarrow 2 = \left| \frac{-2 + D}{13} \right| \Rightarrow \begin{cases} \nearrow \dfrac{-2 + D}{13} = 2 \Rightarrow D = 28 \\ \searrow \dfrac{-2 + D}{13} = -2 \Rightarrow D = -24 \end{cases}$$

Los dos planos que hemos obtenido son:

$$5x - 12z + 28 = 0 \quad ; \quad 5x - 12z - 24 = 0$$

SOLUCIONES Opción B

SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

(1) - Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $1 + x^2 = 0 \Rightarrow$ no hay ningún valor, por lo que no hay asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \Re$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

la indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la regla de Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

Hay asíntota horizontal, $y = 0$, Tanto por la derecha como por la izquierda.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal.

* Para valores de x muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000}{1 + 1000^2} = 0´000999 \\ y_{asíntota}(1000) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1000) > y_{asíntota}(1000)$$

luego la gráfica de f, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{-1000}{1 + (-1000)^2} = -0´000999 \\ y_{asíntota}(1000) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1000) < y_{asíntota}(1000)$$

luego la gráfica de f, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota.

- Asíntota Oblicua.

En el caso de las funciones racionales si hay horizontal no puede haber oblicua.

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

La función *f(x)* es continua en todo ℝ.

La función derivada, *f´*, de la función *f*, es: $f'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

luego la función *f(x)* es derivable en todo su dominio.

Obtengamos los valores que la anulan

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nearrow x = 1 \\ \searrow x = -1 \end{array}$$

Con estos dos valores que hacen cero a la función *f´*, construimos los tres posibles intervalos de monotonía, (-∞, -1), (-1, 1) y (1, +∞). Probemos un valor cualquiera de cada uno de estos intervalos, por ejemplo, el -2, 0 y 2, respectivamente, en la primera derivada de *f(x)*:

$f'(-2) = \frac{1-4}{(1+4)^2} = -\frac{3}{25} < 0 \quad \Rightarrow$ *f(x)* es decreciente en]-∞, -1[.

$f'(0) = \frac{1-0}{(1+0)^2} = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ *f(x)* es creciente en]-1, 1[.

$f'(2) = \frac{1-4}{(1+4)^2} = -\frac{3}{25} < 0 \quad \Rightarrow$ *f(x)* es decreciente en]1, +∞[.

- Extremos locales.

Como la función *f* es continua y derivable en todo su dominio, y en el punto *x* = -1, pasa de decreciente a creciente, la función presenta un mínimo relativo en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

En el punto *x*=1, al pasar de creciente a decreciente, hay un máximo local en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Las ordenadas de los extremos se han obtenido sustituyendo las abscisas respectivas en la función.

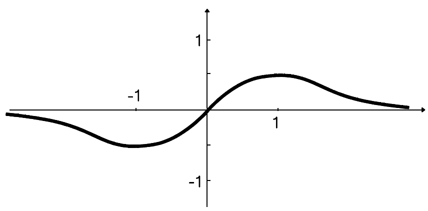
- Simetría

$\forall x \in Dom(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in Dom(f)$

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \quad ; \quad f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -f(x)$

luego *f(-x)* = - *f(x)* para $\forall x \in \mathbb{R}$ por lo que la función es una función impar, es decir, es simétrica respecto del origen.

La gráfica aproximada de la función *f(x)* es la situada al lado.



SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

(1) Calculemos el máximo local de la función *g*:

g(x) = -x^2 + 2*x* + c ⇒ *g´(x)* = -2*x* + 2 ⇒ -2*x* + 2 = 0 ⇒ *x* = 1

g´´(x) = -2 ⇒ *g´´*(1) = -2 < 0 ⇒ Máximo local en *x* = 1

Igualemos *f* (1) con *g* (1), que es donde nos dice el ejercicio que coinciden:

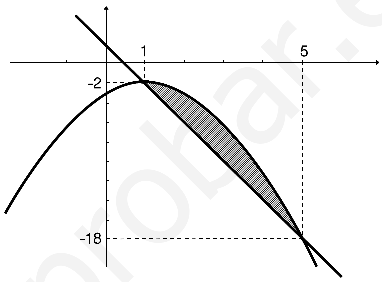
$g(1) = -1 + 2 + c \Rightarrow g(1) = 1 + c$; $f(1) = -4 + 2 = -2$

$g(1) = f(1) \Rightarrow 1 + c = -2 \Rightarrow c = -3$

(2) Para saber si coinciden en algún otro punto resolvamos el sistema formado por ambas expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x+2 \\ y = -x^2+2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -4x+2 = -x^2+2x-3 \Rightarrow x^2-6x+5 \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow x = 1 \\ \searrow x = 5 \end{array}$$

luego ambas trayectorias además de coincidir en el punto (1, -2), coinciden en el (5, -18), donde la ordenada -18 se obtiene sustituyendo 5 en una cualquiera de las dos funciones.



Con los datos anteriores, podemos dibujar la trayectoria rectilínea del móvil A que pasa por los dos puntos anteriores, y la de la del móvil B por ser una parábola que pasa por los mismos puntos pero que el primero de ellos es además, el vértice.

Calculemos el área rayada limitada por las dos curvas

$$Área = \left| \int_1^5 (-4x+2-(-x^2+2x-3))\,dx \right| = \left| \int_1^5 (x^2-6x+5)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^5 \right| =$$

$$= \left| \frac{5^3}{3} - 6\frac{5^2}{2} + 25 - \left(\frac{1^3}{3} - 6\frac{1^2}{2} + 5 \right) \right| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}\ u^2$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Para calcular el simétrico, A´,del punto A respecto de la recta r, elegiremos un punto genérico de la recta, por ejemplo, H = (1-t, -2+t, -2t), que satisfaga las condiciones siguientes:

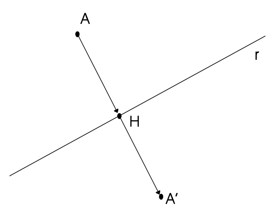
El vector $\vec{AH}$ es perpendicular al vector de dirección de r, y además $\vec{AH} \equiv \vec{HA´}$.

$$\vec{AH} = (1-t,\ -2+t,\ -2t) - (3,\ 1,\ 0) = (-2-t,\ -3+t,\ -2t)$$

$$\vec{AH} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-2-t,\ -3+t,\ -2t)\cdot(-1,\ 1,\ -2) = 0 \Rightarrow$$

$$2+t-3+t+4t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow H = \left(1-\frac{1}{6},\ -2+\frac{1}{6},\ -2\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6},\ -\frac{11}{6},\ -\frac{2}{6}\right)$$

$$\vec{AH} = \left(-2-\frac{1}{6},\ -3+\frac{1}{6},\ -2\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{13}{6},\ -\frac{17}{6},\ -\frac{2}{6}\right)$$



Supongamos que el simétrico del A respecto de r, el A´, tenga de coordenadas, por ejemplo, A´ = (a, b, c), luego las coordenadas del vector $\vec{HA´}$ son:

$$\vec{HA}' = (a, b, c) - \left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{2}{6}\right) = \left(a-\frac{5}{6}, b+\frac{11}{6}, c+\frac{2}{6}\right)$$

igualemos los vectores $\vec{AH} \equiv \vec{HA}'$

$$\left(-\frac{13}{6}, -\frac{17}{6}, -\frac{2}{6}\right) = \left(a-\frac{5}{6}, b+\frac{11}{6}, c+\frac{2}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{13}{6} = a-\frac{5}{6} & \Rightarrow a = -\frac{8}{6} \\ -\frac{2}{6} = b+\frac{11}{6} & \Rightarrow b = -\frac{28}{6} \\ -\frac{2}{6} = c+\frac{2}{6} & \Rightarrow c = -\frac{4}{6} \end{cases}$$

Las coordenadas del simétrico del punto A son:

$$A' = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

(1) Para conocer los valores del parámetro "a" que hacen que la matriz B tenga inversa, lo haremos calculando el rango de la matriz por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2a · [1ªf.]
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2a · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$ Supongamos que 1-a es distinto de cero.
Tomemos como pivote el elemento a_{22} = 1-a ≠ 0.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - a · [2ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}$$ Hemos triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal son distintos de cero salvo el a_{22} y el a_{33} que pueden ser o no cero. Veamos lo que ocurre en cada caso.

* Si $a_{22} = 0$ ⇒ 1-a = 0 ⇒ a = 1 ⇒ la 2ª y la 3ª fila son filas de ceros, el rango de A es uno, menor que el orden de la matriz que es tres, luego la matriz B no tendrá inversa si a = 1.

* Si $a_{22} \neq 0$ ⇒ 1-a ≠ 0 ⇒ a ≠ 1 ⇒ $a_{33} \neq 0$ ⇒ el rango de B es tres, igual que el orden de la matriz cuadrada, luego la matriz B tendrá inversa si a ≠ 1.

(2) Como existe matriz inversa para a ≠ 1, calculémosla para a = 0. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz B la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de B, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a^2 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a & a+1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la "a" por el valor cero.
Intercambiemos entre sí las filas 1 ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, la matriz B tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$