PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (*I* es la matriz identidad).

b) Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A+\lambda I$.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{pmatrix}$$

Para que no tenga inversa el determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\ \lambda=-2\ ;\ \lambda=3$$

Luego, la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa para los valores: $\lambda=2$; $\lambda=-2$; $\lambda=3$.

b) Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r}-2x-2y=-3x\\ -2x+\ \ y=-3y\\ -2z=-3z\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}x-2y=0\\ -2x+4y=0\\ z=0\end{array}\right.\Rightarrow x=2y\ ;\ y=y\ ;z=0$

Si $x=1$, entonces la solución es: $x=1\ ;\ y=\dfrac{1}{2}\ ;\ z=0$

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.
a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos?. Razona la respuesta.
b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos $x =$ Precio del lápiz, $y =$ Precio del rotulador, $z =$ Precio de la carpeta

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+7y=25 \\ 2x+4y+z=20 \\ 3x+y+2z=15 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 2 & 4 & 1 & 20 \\ 3 & 1 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & -20 & 2 & -60 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+7y= \ 25 \\ -10y+z=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-7t \\ y=t \\ z=-30+10t \end{array}\right\}$$

Vemos que es un sistema compatible indeterminado, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. No podemos deducir el precio de cada artículo, pues algunas soluciones son absurdas, por ejemplo, si $t=1$, entonces: $x=18$; $y=1$; $z=-20$

b) Planteamos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} z=10x \\ 2x+4y+z=20 \\ 3x+y+2z=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+4y+10x=20 \\ 3x+y+20x=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=5 \\ 23x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow 20x=10 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \ ; \ y=\frac{7}{2} \ ; \ z=5$$

Luego, el lápiz cuesta 0’5 €, el rotulador 3’5 € y la carpeta 5 €

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **;** $M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula *BM*.
b) Razona si el sistema dado por $A\cdot X=B$ tiene solución o no y, en caso afirmativo, cuántas soluciones tiene.
c) Resuelve $A\cdot X=B$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $B\cdot M=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow R(M)=1$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

c) Resolvemos el sistema. Como el rango es 1, solamente tenemos una ecuación, luego, el sistema que tenemos que resolver es: $-x+y+2z=1\}\Rightarrow\begin{cases} x=-1+y+2z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x+ky=1} \\ \mathbf{2x-y+kz=1} \\ \mathbf{x-3y+2z=1} \end{array}\right.$

del que se sabe que para un cierto valor de *k* es compatible indeterminado.
a) Determina el valor de *k*.
b) Resuelve el sistema para $\mathbf{k=1}$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5k^2+5k-6=0 \Rightarrow k=1 \ ; \ k=-6$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema. Cambiamos de orden 1ª y 3ª ecuación.

Para $k=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $k=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $k=-6 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$k=-6 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{3}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$k=-6$	2	3	Sistema incompatible
$k\neq 1 \ y \ -6$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $k=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=1 \\ 2x-y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{2-z}{5} \ ; \ y=\frac{-1+3z}{5} \ ; \ z=z$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m = 2$, si es posible, resuelve el sistema dado.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \ ; \ m = -1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

	R(A)	R(M)	
$m = 2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = -1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 2 \ y \ -1$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = 2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{3 - 4z}{3} \ ; \ y = -\frac{z}{3} \ ; \ z = z$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad y \qquad B=\begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para $m=2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z=17$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 3+6-2m+4-9=0 \Rightarrow m=2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m\neq 2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=2$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+2t \end{array}\right.$

Si $z=17$, la solución del sistema sería: $x=-23$; $y=8$; $z=17$