BLOQUE 2: GEOMETRÍA.

JUN05, P2A: Se considera el plano $\pi : y + z - 12m = 0$ (m parámetro real) y las rectas $u : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$, $v : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases}$ y $w : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$. Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u, v y w respectivamente.

a) Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m.
b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a.

RESOLUCIÓN:

a) Sustituimos las ecuaciones de la recta u en el plano π : $y + y - 12m = 0$, obtenemos $y = 6m$, por lo que $A = (1, 6m, 6m)$
De la misma forma, $B = (2, 8m, 4m)$ y $C = (3, 9m, 3m)$.

b) Calculamos $\overrightarrow{AB} = (1, 2m, -2m)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 3m, -3m)$, con lo que el área del triángulo se calcula así:
$\frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} \right\| = 1$. Por tanto, $|(0, -m, -m)| = 2 \rightarrow \sqrt{2m^2} = 2 \rightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

JUN05, P2B: Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto $(-7, 2, -3)$ y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta $(x, y. z) = (0, 4, 1) + t(1, 0, 0)$

RESOLUCIÓN:

Un punto cualquiera de la recta (la llamaremos r) es $P(t, 4, 1)$.

Si la proyección perpendicular de O sobre el plano es un punto P de r, entonces $\overrightarrow{PO} = (t, 4, 1)$ es un vector perpendicular al plano.

Así, la ecuación del plano tendrá la forma $tx + 4y + z + D = 0$.

Como $Q = (-7, 2, -3)$ es un punto del plano, cumplirá su ecuación: $, t(-7) + 4 \cdot 2 - 3 + D = 0$

$\rightarrow D = 7t - 5$. Y la ecuación del plano queda: $tx + 4y + z + 7t - 5 = 0$.
Además también P es un punto del plano, por lo que se verifica: $t \cdot t + 4 \cdot 4 + 1 + 7t - 5 = 0$

$\rightarrow t^2 + 7t + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -4 \end{cases}$

Por lo que encontramos 2 planos que son soluciones de las condiciones pedidas:$\rightarrow \begin{cases} -3x + 4y + z - 26 = 0 \\ -4x + 4y + z - 33 = 0 \end{cases}$

SEP05, P2A: Un paralelepípedo rectangular (ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas: $l : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $m : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, y $n : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
y uno de sus vértices es (12,21,-11). Se pide:

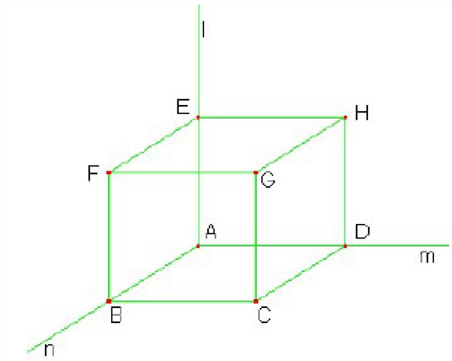
a) Hallar los vértices restantes b) Calcular su volumen.

RESOLUCIÓN:

a) Las rectas expresadas en paramétricas quedarían: $l\ :\ (0,0,t);\ m\ :\ (2u,u,0);\ n\ :\ (v,-2v,0)$.

Igualando las coordenadas, podemos comprobar que las tres rectas se cortan en $(0,0,0)$ y multiplicando sus vectores directores $((0,0,1);(2,1,0);(1,-2,0))$ concluimos que son perpendiculares

También podemos comprobar que el punto (12,21,-11) no pertenece a ninguna de las rectas.



Llamamos a los vértices como indica la figura.

Entonces $A = (0,0,0); E = (0,0,t); D = (2u,u,0); B = (v,-2v,0)$ (valores de t,u,v por determinar)

$C = (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (2u+v, u-2v, 0);$

Análogamente $F = (v,-2v,t);\ H = (2u,u,t)$.

Por eliminación $G = (12,21,-11)$.

Ahora $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, por lo que $G - C = (0,0,t) \rightarrow C = (12,21,-11-t)$.

Igualamos las coordenadas de C con las obtenidas anteriormente:$\rightarrow \begin{cases} 2u+v = 12 \\ u-2v = 21 \\ 0 = -11-t \end{cases}$

Obtenemos $t = -11,\ v = -6, u = 9$.

Así: $A = (0,0,0); E = (0,0,-11); D = (18,9,0); B = (-6,12,0);$
$C = (12,21,0); F = (-6,12,-11);\ H = (18,9,-11); G = (12,21,-11)$

b) Para obtener el volumen basta con calcular:

$$V = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] = \left\|\begin{matrix} -6 & -12 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{matrix}\right\| = 594\ u^2$$

SEP05, P2B: Dados los planos π : 5x - y - z = 0 , σ : x + y - z = 0 y el punto P(9,4,-1) , determinar:

a) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y σ.
b) El punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ.

RESOLUCIÓN:

a) Si es perpendicular a π y a σ entoces su vector normal lo obtendremos con el producto vectorial de los vectores normales a π y σ.

$$(5,-1,-1) \times (1,1,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,4,6).\ \text{Tomaremos el vector } (1,2,3).$$

La ecuación del plano será $x+2y+3z+D=0.$ Como contiene al punto P(9,4,-1):

$9+2\cdot 4+3\cdot(-1)+D=0 \to D=-14,$ y así $x+2y+3z-14=0.$

b) Llamemos P' al punto simétrico, que deberá encontrarse en el plano calculado en el apartado a).

Para calcular la recta r como interseción de π y σ hay que resolver el sistema $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$,

Naturalmente es SCI, y tomando $z=t,$ obtenemos $r:\begin{cases} x=\dfrac{t}{3} \\ y=\dfrac{2t}{3} \\ z=t \end{cases}$

En la intersección del plano de **a**) con la recta r encontramos el punto *M*, punto central o punto medio de *P* y *P´*.

Calculemos M : Sustituimos las coordenadas paramétricas de un punto de *r* en la ecuación del plano:

$x+2y+3z-14=0 \to \frac{t}{3}+2\frac{2t}{3}+3t-14=0 \to t+4t+9t-42=0 \to 14t=42 \to t=3.$

Por lo que el punto *M* es el punto de la recta *r* para el cual $t=3:\ M=(1,2,3).$

Dados *P* y *M*, sea $P'=(p_1,p_2,p_3)$, con lo que $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}}{2} \to \begin{cases} 1=\dfrac{9+p_1}{2} \\ 2=\dfrac{4+p_2}{2} \\ 3=\dfrac{-1+p_3}{2} \end{cases}$

Y así $P'=(-7,0,7).$

SEP05, P3B: En el plano se tiene la curva $y=x^2+2x-1.$ Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2,3) y son tangentes a dicha curva.

RESOLUCIÓN:

Si realizamos un dibujo orientativo observaremos que podemos encontrar 2 soluciones.

La recta tangente a $y=x^2+2x-1$ en un punto cualquiera (x_0,y_0), habrá de tener por pendiente $y'=2x_0+2,$

La recta la podríamos escribir así: $y-y_0=(2x_0+2)(x-x_0).$ Como $y_0=x_0^2+2x_0-1,$ queda

$y-(x_0^2+2x_0-1)=(2x_0+2)(x-x_0) \quad \to \quad y-x_0^2-2x_0+1=2x_0x-2x_0^2+2x-2x_0$

$y=(2x_0+2)x-x_0^2-1.$

Ahora esta recta debe contener al punto (2,3) $\to$ $3=(2x_0+2)2-x_0^2-1 \quad \to$

$3=4x_0+4-x_0^2-1 \quad \to \quad x_0^2-4x_0=0 \quad \to \quad \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=4 \end{cases}$

Estos son los puntos de tangencia de la recta con la parábola. Calculemos los valores de y_0 :

$x_0=0 \to y_0=0^2+2\cdot 0-1=-1 \to$ Punto $(0,-1)$

$x_0=4 \to y_0=4^2+2\cdot 4-1=23 \to$ Punto $(4,23)$

Ahora las 2 soluciones serán:

La recta que pasa por $(0,-1)$ y por $(2,3)$:

$y=ax+b \to \begin{cases} -1=a\cdot 0+b \\ 3=a\cdot 2+b \end{cases} \to \begin{matrix} b=-1 \\ a=2 \end{matrix} \to$ Recta $y=2x-1$

La recta que pasa por $(4,23)$ y por $(2,3)$:

$$y = ax + b \rightarrow \begin{cases} 23 = a \cdot 4 + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b = -17 \\ a = 10 \end{matrix} \rightarrow \quad \text{Recta } y = 10x - 17$$

$\boxed{\text{JUN06, P2A}}$: En el espacio se consideran:

• La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas: $x + y - z = 5$ y $2x + y - 2z = 2$.
• Y la recta s que pasa por los puntos $P = (3, 10, 5)$ Y $Q = (5, 12, 6)$.

Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r y de la recta s.

b) Calcular el punto H intersección de r y s y el ángulo α, que determinan r y s.

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los cuales el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es 3 unidades de área.

RESOLUCIÓN:

a) Recta r:

Hay que resolver $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases} \rightarrow (F_2 \rightarrow F_2 + (-2)F_1) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 5 \\ \quad -y \quad = -8 \end{cases}$

Tomando $z = t, y = 8,\ x + 8 - t = 5 \rightarrow x = t - 3.$ Solución: $r : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 8 \\ z = t \end{cases}$

Recta s: El vector director será $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 1)$.

Con el punto P y el vector $\overrightarrow{PQ}$ $:\rightarrow s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 10 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$

b) Para hallar la intersección, cambiamos en la recta s el parámetro "t" por "s" e igualamos las coordenadas.

$$\begin{cases} t - 3 = 3 + 2s \\ 8 = 10 + 2s \\ t = 5 + s \end{cases} \qquad \text{Por la Ec2, } s = -1, \text{ y entonces } t = 4.$$

Sustituimos $t = 4$ en r (o $s = -1$ en s) : $H = (1, 8, 4)$

Averiguaremos el ángulo con la fórmula del producto escalar:

$$\cos\alpha = \frac{|(1,0,1) \cdot (2,2,1)|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

c) Los puntos M y N tendrán la forma $(t - 3, 8, t)$, cada uno con un valor de t distinto.

Para calcular el área del triángulo PQM, hay que calcular $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PM}\right|$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 1), \overrightarrow{PM} = (t - 6, -2, t - 5). \text{ Área} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ t-6 & -2 & t-5 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}|(2t - 8, -t + 4, -2t + 8)| = \frac{1}{2}\sqrt{(2t - 8)^2 + (4 - t)^2 + (8 - 2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 - 32t + 64 + 16 - 8t + t^2 + 64 - 32t + 4t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9t^2 - 72t + 144}.$$

Igualamos el valor del área a 3 y resolvemos:

$$\frac{1}{2}\sqrt{9t^2 - 72t + 144} = 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9t^2 - 72t + 144} = 6 \quad \rightarrow \quad 9t^2 - 72t + 144 = 36$$

$$9t^2 - 72t + 108 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 8t + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 6 \\ t = 2 \end{cases}$$

Valores que sustituidos en la ecuación de r nos da los puntos M y N.

$M = (3,8,6); N = (-1,8,2)$

JUN05, P3A: Dados los puntos A = (4,-4,9) , B = (2,0,5) , C = (4,2,6) , L = (1,1,4) ,M = (0,2,3) y N = (3,0,5) , se pide:

a) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B y el área S del triángulo de vértices A, B, C.

b) Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C y del plano π' que pasa por los puntos L, M, N.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' y el ángulo α que determinan los planos π y π'.

RESOLUCIÓN:

a) Calculamos el punto medio de $\overline{AB}$: $M_{AB} = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{9+5}{2}\right) = (3,-2,7)$.

$d = d(C, M_{AB}) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ u.$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-12)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{324} = 9\ u^2$$

b) El plano que pasa por los puntos A, B y C, tiene por vector normal $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12,-6,-12)$.

Simplificando podemos tomar $\overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,-2) \rightarrow \pi : 2x - y - 2z + D = 0$

Sustituimos el punto B: $4 - 10 + D = 0 \rightarrow D = 6 \rightarrow \pi : 2x - y - 2z + 6 = 0$

Para calcular el plano LMN,

$\overrightarrow{LM} = (-1,1,-1); \overrightarrow{LN} = (2,-1,1); \overrightarrow{LP} = (x-1, y-1, z-4)$, donde $P = (x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano, han de ser linealmente dependientes Entonces su matriz por filas ha de tener determinante 0:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - z - y = 0. \rightarrow \pi' : -y - z + 5 = 0$$

c) r : Hay que resolver $\begin{cases} 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ -y - z + 5 = 0 \end{cases}$ Resolvemos el sistema tomando $z = t$:

$y = 5 - t \rightarrow (1^{a}\ ec) \rightarrow 2x - 5 + t - 2t + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{t-1}{2}.$

$$\text{Recta } r : \begin{cases} x = \frac{t-1}{2} \\ y = 5 - t \\ x = t \end{cases}$$

Para calcular el ángulo que forman los planos, calculamos el ángulo de sus vectores normales, utilizando la fórmula del producto escalar:

$$\cos\alpha = \left| \frac{(2,-1,-2) \cdot (0,-1,-1)}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

SEP06, P2A: En el espacio se consideran:

• La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $2x-2y-z=9$ y $4x-y+z=42$.
• Y la recta s que pasa por los puntos (1,3,-4) y (3,-5,-2) . Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r y de la recta s.

b) Justificar que las rectas r y s se cruzan.

c) Calcular un vector direccional de la recta t, perpendicular común a las rectas r y s y calcular el punto P de intersección de las rectas s y t.

RESOLUCIÓN:

a) Ecuaciones de r : Hay que resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l}2x-2y-z=9\\4x-y+z=42\end{array}\right.$. Hacemos 1 cero:

$$\left\{\begin{array}{l}2x-2y-z=9\\3y+3z=24\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}2x-2y-z=9\\y+z=8\end{array}\right. .\ \text{Tomando } z=t: \qquad (ec2)\ y=8-t$$

$$(ec3)\ 2x-2(8-t)-t=9 \quad \to 2x+t=25 \quad \to x=\frac{25-t}{2} \quad : r: \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{25-t}{2}\\y=8-t\\z=t\end{array}\right.$$

Ecuaciones de s : vector director $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-8,2)$ (Llamando A y B a los puntos de s dados)

Podemos tomar como vector director $(1,-4,1)$, y el punto $A=(1,3,-4)$. $s: \left\{\begin{array}{l}x=1+t\\y=3-4t\\z=-4+t\end{array}\right.$

b) Vectores directores de ambas: $r: (\frac{-1}{2},-1,1) \sim (-1,-2,2)$; $s: (1,-4,1)$.
Como no son proporcionales, no son rectas paralelas, pueden ser secantes o que se crucen.
Intentamos encontrar el punto de corte, para ello igualamos las coordenadas de ambas rectas (llamando s al parámetro de la recta s):

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{25-t}{2}=1+s\\8-t=3-4s\\t=-4+s\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}2s+t=23\\4s-t=-5\\-s+t=-4\end{array}\right. \to \underset{(ec3)}{t=s-4} \quad \to \underset{(ec2)}{4s-s+4=-5}$$

$$\to 3s=-9 \qquad \to s=-3 \qquad \to \underset{(ec3)}{t=-3-4=-7}$$

→Pero estos valores de s y t no cumplen la 1ª ec, por lo que no tiene solución el sistema y por lo tanto no exixte punto de corte.

Así, se trata de rectas que se cruzan.

c) Un vector perpendicular a los vectores de r y s , se puede obtener realizando el producto vectorial de los mismos.

$$(-1,-2,2)\times(1,-4,1)=\left|\begin{array}{ccc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&-2&2\\1&-4&1\end{array}\right| = \left(\begin{array}{ccc}6&3&6\end{array}\right) \sim (2,1,2)$$

Como la recta atraviesa perpendicularmente a las rectas r y s, en sendos puntos M y N debe suceder que $\overrightarrow{MN}$ sea paralelo a $(2,1,2)$.

Tomando $M=\left(\frac{25-t}{2},8-t,t\right)$, $N=(1+s,3-4s,-4+s)$

$$\to \overrightarrow{MN}=\left(1+s-\frac{25-t}{2},3-4s-8+t,-4+s-t\right)=\left(\frac{2s-t-23}{2},-4s+t-5,s-t-4\right)$$

Para que sean paralelos, sus coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{2s-t-23}{2\cdot 2} = \frac{-4s+t-5}{1} = \frac{s-t-4}{2}$$

(1ª igualdad): $2s-t-23 = -16s+4t-20 \quad \to 18s-5t = 3$

(2ª igualdad) $-8s+2t-10 = s-t-4 \quad \to -9s+3t = 6 \to -3s+t = 2$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 18s-5t = 3 \\ -3s+t = 2 \end{cases} \quad \to s = \frac{13}{3}, \quad t = 15$

Ahora como se nos pide el punto de intersección con *s*, sustituimos el parámetro s en la expresión del punto *N*:

$$N = (1+s, 3-4s, -4+s) = \left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{\text{SEP06, P2B}}$: En el espacio se consideran:

• El plano π que pasa por los puntos $(11,1,2), (5,7,5)$ y $(7,-1,-2)$.

• Y la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x+y+z = 15$ y $2x-7y+2z = 3.$

a) Calcular la ecuación paramétrica de r y la ecuación implícita del plano π .

b) Calcular el punto P intersección de r y π y el ángulo α que determinan r y π .

c) Calcular los puntos M y N de la recta r cuya distancia al plano π es igual a 3 u.l.

RESOLUCIÓN:

a) Recta r : $\begin{cases} x+y+z = 15 \\ 2x-7y+2z = 3 \end{cases}$ Por Gauss: $\begin{cases} x+y+z = 15 \\ -9y = -27 \end{cases} \quad \to y = 3$

Tomamos $z = t \quad (ec1)\ x+3+t = 15 \quad \to x = 12-t \quad \to r : \begin{cases} x = 12-t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$

Plano π : Si llamamos A,B,C a los tres puntos respetivamente, tomando dos vectores l.i. del plano (por ejemplo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$), y calculando su producto vectorial obtenemos el vector normal al plano:

$\overrightarrow{AB} = (-6,6,3); \overrightarrow{AC} = (-4,-2,-4);$ Entonces $\vec{u} = (-2,2,1); \vec{v} = (2,1,2)$ (proporcionales a los anteriores) también son vectores linealmente independientes del plano:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6j-6k+3i = (3,6,-6) \quad \to \pi : 3x+6y-6z+D = 0$$

Simplificando $\pi : x+2y-2z+D = 0.$ Sustituimos el punto $A : 11+2\cdot 1-2\cdot 2+D = 0$

$D = -9 \quad \to \pi : x+2y-2z-9 = 0$

b) Para calcular el punto P, sustituimos las coordenadas paramétricas de un punto de *r* en π :

$(12-t)+2\cdot 3-2\cdot t-9 = 0 \quad \to 9-3t = 0 \quad \to t = 3,$

con lo que sustituimos este valor en la ecuación de *r* y ya tenemos P: $P = (9,3,3)$

Para obtener el ángulo α, calcularemos primero el ángulo que forma el vector director de r $(-1,0,1)$ con el vector normal al plano $(1,2,-2)$:

$$\cos\beta = \frac{|(-1,0,1)\cdot(1,2,-2)|}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{|-3|}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \beta = 45º.$$

Ahora, $\alpha = 90-\beta = 45º.$

c) Como *M* y *N* son puntos de la recta *r* tienen la forma $(12-t,3,t)$

La distancia de π a uno de estos puntos viene dado por la expresión:

$$\frac{|12-t+2\cdot 3-2t-9|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}} = \frac{|9-3t|}{3} = |3-t| \quad \to |3-t| = 3$$

$\rightarrow \begin{cases} 3-t=3 \\ t-3=3 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$ Valores que nos dan los puntos M y N.

$\rightarrow M=(12,3,0); \qquad N=(6,3,6)$

JUN07, P2.1: Dadas las rectas r y s, que se cortan, de ecuaciones

$r: \frac{x-1}{2}=\frac{2y-1}{-6}=\frac{2z-3}{6}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{2y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$ se pide calcular:

a) El punto P de corte de las rectas r y s.

b) Un vector direccional de r y otro de s, y el ángulo α que forman las rectas r y s en el punto de corte P.

c) La ecuación implícita $ax+by+cz+d=0$ del plano π que contiene a las rectas r y s.

RESOLUCIÓN:

a) Tomaremos las ecuaciones paramétricas, a partir de punto y vector

$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1/2}{-3}=\frac{z-3/2}{3}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y+3/2}{1}=\frac{z-1}{4}$

$$r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1/2-3t \\ z=3/2+3t \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x=3-2s \\ y=-3/2+s \\ z=1+4s \end{cases}$$

Igualamos las coordenadas $\begin{cases} 1+2t=3-2s \\ 1/2-3t=-3/2+s \\ 3/2+3t=1+4s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t+2s=2 \\ -3t-s=-2 \\ 3t-4s=-1/2 \end{cases}$

$$\begin{cases} t+s=1 \\ 3t+s=2 \\ 6t-8s=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2ªec): $2s=1 \quad \rightarrow s=\frac{1}{2} \quad \rightarrow$ (1ª*ec*): $t+\frac{1}{2}=1 \quad \rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Sustituyendo t en las ecuaciones de r (o el valor de s en las ecuaciones de s) :

$P=(2,-1,3)$

b) Sean $\vec{v}=(2,-3,3)$ y $\vec{u}=(-2,1,4)$ los vectores de r y s respectivamente (obtenidos en **a**))

Con la fórmula del producto escalar obtenemos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|-4-3+12|}{\sqrt{4+9+9}\cdot\sqrt{4+1+16}}=\frac{5}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}}\approx 0.23262$$

$\rightarrow \alpha = ar\cos(0.23262)=76.55^{o}$

c) Como el plano π contiene a ambas rectas, el producto vectorial de sus vectores directores será un vector normal al plano:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-15\vec{i}-14\vec{j}-4\vec{k}=(-15,-14,-4)$$

Podemos tomar como vector normal a π el vector $(15,14,4) \quad \rightarrow \pi: 15x+14y+4z+D=0$

Para obtener D sustituimos el punto P, que ha de verificar la ecuación de π :

$15\cdot 2+14\cdot(-1)+4\cdot 3+D=0 \quad \rightarrow 30-14+12+D=0 \quad \rightarrow D=-28$

$\rightarrow 15x+14y+4z-28=0$

JUN07, P2.2: Dados el punto Q = (3,-1,4) y la recta r de ecuación paramétrica $r: x=-2+3\lambda, y=-2\lambda$,

$z = 1 + 4\lambda$, se pide:
a) Hallar la distancia del punto Q a la recta r.
b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a (1,-1,1) como vector direccional, no corta a r.
c) Calcular la distancia entre las rectas r y s

RESOLUCIÓN:

a) Procedimiento: $\begin{cases} \text{1º Obtenemos el plano } \perp \text{ a } r \text{ que pasa por } Q. \\ \text{2º Calculamos el punto de corte de recta y plano (P)} \\ \text{3º Calculamos la distancia de P a Q.} \end{cases}$

1º Vector de $r: (3,-2,4)$ Plano $3x - 2y + 4z + D = 0$. Para averiguar D, sustituimos el punto Q :
$3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + D = 0 \quad \to D = -27 \quad \to$ Plano π: $3x - 2y + 4z - 27 = 0$.

2º Para calcular el punto de corte de r y π sustituimos las coordenadas de r en la ecuación de π :
$3 \cdot (-2 + 3\lambda) - 2 \cdot (-2\lambda) + 4(1 + 4\lambda) - 27 = 0$
$-6 + 9\lambda + 4\lambda + 4 + 16\lambda - 27 = 0 \quad \to 29\lambda = 29 \quad \to \lambda = 1$
Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r : $P = (1,-2,5)$

3º $d(r,Q) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

b) Obtenemos la recta s en paramétricas : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$. Para intentar averiguar el punto de corte, igualamos las coordenadas de ambas rectas:

$$\begin{cases} -2 + 3\lambda = 3 + t \\ -2\lambda = -1 - t \\ 1 + 4\lambda = 4 + t \end{cases} \to \begin{cases} -t + 3\lambda = 5 \\ t - 2\lambda = -1 \\ -t + 4\lambda = 3 \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(3ªec) $0\lambda = -6$ .Luego el sistema es Incompatible y por lo tanto no hay punto de corte.

c) Para calcular la distancia entre 2 rectas que se cruzan (sabemos que no son paralelas porque sus vectores directores no son proporcionales), seguimos el siguiente procedimiento:

$\begin{cases} \text{1º Obtenemos el plano que contiene a la recta } r \text{ y es } \perp \text{ a la recta } s \text{ (lo llamaremos } \pi_1). \\ \text{2º Escogemos un punto cualquiera de } s \text{ y calculamos su distancia al plano calculado.} \end{cases}$

1º El vector normal de π_1 se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores de r y s (es $\perp$ a ambos).

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = j - k + 2i = (2,1,-1). \qquad \to \pi_1 : 2x + y - z + D = 0$$

Para averiguar D, sustituimos un punto de la recta $r: (-2,0,1)$, $\quad 2 \cdot (-2) + 0 - 1 + D = 0$

$-5 + D = 0 \quad \to D = 5 \quad \to \pi_1 : 2x + y - z + 5 = 0$.

2º Un punto de s es $(3,-1,4)$ y su distancia al plano viene dado por la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$\text{distancia} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

SEP07, P2.1: Dado el plano $\pi : 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q(2,1,3)$, se pide calcular:

a) La distancia del punto Q al plano π

b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados.

c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q.

RESOLUCIÓN:

a) Utilizamos la fórmula correspondiente $d(Q,\pi) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{14}}$.

b) Sea P_1 el punto sobre el eje OX: $\rightarrow P_1 = (a,0,0)$. Para que esté en el plano ha de cumplir su ecuación:

$2a + 0 + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \quad \rightarrow a = 1/2 \quad \rightarrow P_1 = (1/2, 0, 0)$

Análogamente $P_2 = (0,b,0) \quad \rightarrow 2 \cdot 0 + b + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \quad \rightarrow b = 1 \rightarrow P_2 = (0,1,0)$

$P_3 = (0,0,c) \quad \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot c - 1 = 0 \quad \rightarrow c = 1/3 \quad \rightarrow P_3 = (0,0,1/3)$

Tomando los vectores $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$, el módulo de su producto vectorial resulta ser el área del paralelogramo que determinan. El triángulo pedido resulta ser la mitad:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{36}} =$$

c) El producto mixto de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1Q}$ nos da el volumen del paralelepípedo que generan.

Como la base del tetraedro resulta ser la mitad, habrá que multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Además, como el tetraedro es un cuerpo piramidal, su volumen es $\frac{1}{3}$ del prisma correspondiente.

Entonces el volumen pedido es $\frac{1}{6}$ del resultado del producto mixto.:

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{36}$$

SEP07, P2.2: Dados los planos de ecuaciones : $\pi_1 : x + 2y + z + 3 = 0$, y $\pi_2 : 2x + y - z - 6 = 0$,

a) Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2 .

b) Calcular la ecuación paramétrica de la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2

c) Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2 , es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos π_1 y π_2.donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

RESOLUCIÓN:

a) El ángulo entre los plano coincide con el ángulo que forman sus rectas normales. Tomamos los vectores correspondientes:

$$\cos\alpha = \frac{|(1,2,1)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \to \alpha = 60^{\circ}.$$

b) Hemos de resolver el sistema formado por sus ecuaciones: $\begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$,

Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Tomando $z=\lambda$, $\to y=-\lambda-4$ $\to x=\lambda+5$ $\to$Solución: $r:\ \{(\lambda+5,-\lambda-4,\lambda)\ :\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

c) Calculemos el ángulo α_1 entre π_1 y π :

$$\cos\alpha_1 = \frac{|(1,2,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \to \alpha_1 = 30^{\circ}$$

Y el ángulo α_2 entre π y π_2 :

$$\cos\alpha_2 = \frac{|(1,1,0)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \to \alpha_2 = 30^{\circ}$$

$\boxed{\text{JUN08, P2.1}}$: Se dan los puntos A(2,1,1) y B(1,0,-1) , y la recta r de ecuación $r:\ x-5=y=\frac{z+2}{-2}$. Se pide calcular razonadamente:

a) El punto C de r que equidista de A y B.

b) El área del triángulo ABC.

Resolución:

a) Los puntos que equidistan de A y B forman su plano mediatriz Vamos a obtenerlo:

Sea P un punto cualquiera P(x,y,z),

$$d(P,A)=d(P,B) \qquad \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-1)^2+y^2+(z+1)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-2z+1 = x^2-2x+1+y^2+z^2+2z+1$$

$$-2x-2y-4z+4=0 \qquad \Rightarrow x+y+2z-2=0.$$

El punto C que buscamos se encuentra en la intersección de este plano mediatriz y la recta r :

$$r:\ x-5=y=\frac{z+2}{-2} \qquad \Rightarrow r:\ \begin{cases} x-y = 5 \\ 2y+z=-2 \end{cases}$$

Así, C es la solución del sistema: $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-y=5 \\ 2y+z=-2 \end{cases}$.

Este sistema se puede resolver por Gauss, por Cramer, expresándolo en forma matricial (así se hace con calculadora gráfica). Has de saber resolverlo de cualquiera de estas formas. Aquí lo resolveremos por sustitución:

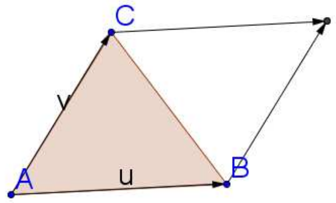
(2ª ec) $\longrightarrow x=y+5.$ (3ªec) $\longrightarrow z=-2y-2.$ Sustituyendo en la ec1:

$$y+5+y+2(-2y-2)=2 \qquad \longrightarrow -2y=1 \qquad \longrightarrow y=-\frac{1}{2}.$$

$$x=-\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2} \qquad\qquad z=-2\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-1.$$

Solución: $C=\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

b) El área del triángulo ABC resulta ser la mitad del área del paralelogramo definido por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-2);\overrightarrow{AC} = (\frac{5}{2},\frac{-3}{2},-2)$$

$$\text{Área ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = (-1,-7,4). \qquad \Rightarrow \text{Área ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-7)^2+4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{66}$$

$\boxed{\text{JUN08, P2.2}}$: Dada la recta r, intersección de los planos $y+z=0$ y $x-2y-1=0$, y la recta s de ecuación $\frac{x}{2} = y-1 = -z+3$, se pide:

a) Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de r y s.

b) Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas r y s.

c) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Resolución:

a) Para la recta r resolvemos el SCI $\left\{\begin{array}{l} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{array}\right.$, tomando $z=\lambda$, $\quad y=-\lambda$

$$\Rightarrow x+2\lambda-1=0 \rightarrow x=1-2\lambda \qquad \Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Para la recta s resolvemos el SCI $\left\{\begin{array}{l} x-2y \quad\;\; =-2 \\ \quad\;\; y+z=4 \end{array}\right.$, tomando $y=\beta$, $\quad s:\left\{\begin{array}{l} x=-2+2\beta \\ y=\beta \\ z=4-\beta \end{array}\right.$

b) Para analizar la posición relativa compararemos los vectores directores:

$$\vec{v_r} = (-2,-1,1) \text{ y } \vec{v_s} = (2,1,-1) : \frac{-2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Son vectores proporcionales, por lo que tienen la misma dirección. Entonces se trata de rectas paralelas o coincidentes. Para comprobarlo escogemos un punto cualquiera de la recta r (tomamos $\lambda=0$ y lo llamamos P) :

$P=(1,0,0)$. Ahora vemos si pertenece o no a s : $\left\{\begin{array}{l} 1=-2+2\beta \\ 0=\beta \\ 0=4-\beta \end{array}\right.$, sistema que no tiene solución para β, y por eso P no pertenece a la recta s.

Entonces, las rectas son paralelas.

c) Dado que se trata de rectas paralelas, escogemos un punto cualquiera de la recta r ($P=(1,0,0)$) y calculamos su distancia a la recta s.

Escogiendo un punto cualquiera de s ($Q=(-2,0,4)$), la distancia de P a s resulta ser la altura del paralelogramo definido por $\overrightarrow{QP}$ y $\vec{v_s}$. Y la altura es el área ($\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{v_s}\right|$) dividido entre la longitud de la base.($\left|\vec{v_s}\right|$) :

$$d(P,s) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|(4,-5,3)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{16+25+9}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{50}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

SEP08, P2.1: Dados los dos planos $\pi_1 : x+y+z = 3$ y $\pi_2 : x+y-\alpha z = 0$, se pide calcular razonadamente:

a) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares y, para este valor de α , obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de esos dos planos. (1,5 puntos).

b) El valor de α para que los planos 1 y 2 sean paralelos y, para este valor de α , obtener la distancia entre los dos planos π_1 y π_2. (1,8 puntos).

Resolución:

a) Los vectores normales a los planos son $v_1 = (1,1,1)$ y $v_2 = (1,1,-\alpha)$. Los planos serán perpendiculares cuando los vectores v_1 y v_2 lo sean (su producto escalar ha de ser 0).

$v_1 \cdot v_2 = 1+1-\alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 2$ (valor pedido de α).

Vamos a obtener ahora (con $\alpha = 2$) la recta intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x+y-2z = 0 \end{cases} \underset{F_2 \to (-1)\cdot F_1 + F_2}{\sim} \begin{cases} x+y+z = 3 \\ -3z = -3 \end{cases} \to r : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Los planos serán paralelos cuando sus vectores normales lo sean. Para ser paralelos han de ser proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-\alpha} \qquad \Rightarrow \alpha = -1.$$

Para calcular la distancia entre planos paralelos (con $\alpha = -1$), escogemos un punto del plano π_1 ($P = (1,1,1)$) y calculamos su distancia al plano π_2 :

$$d(P,\pi_2) = \frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

También se puede calcular la distancia del punto al plano con el siguiente procedimiento:

1º) Obtenemos la recta ⊥ al plano π_2 que pasa por P: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

2º) Obtenemos el punto Q intersección de la recta y el plano (sustituyendo las coordenadas de un punto de la recta en la ecuación del plano):

$$(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda) = 0 \qquad \to \lambda = -1. \to \begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = 1-1 = 0 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \to Q = (0,0,0)$$

3º) La distancia $d(P,\pi_2) = d(P,Q)$. Calculamos esta última:

$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{1^2+1^1+1^2} = \sqrt{3}.$

SEP08, P2.2: Dados el punto $O = (0,0,0)$ y el plano $\pi : x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:
a) La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π. (1,1 puntos).
b) Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π. (1,1 puntos).
c) La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta r. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Si es $\perp \pi$ su vector director será $\vec{v} = (1,1,1) \rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow x = y = z$

b) Calculemos primero el punto M intersección de la recta r y el plano π :
$\lambda + \lambda + \lambda = 6 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow M = (2,2,2)$. El punto O' que buscamos es $M + \overrightarrow{OM}$:
$O' = (2,2,2) + (2,2,2) = (4,4,4)$.

c) Un punto del eje X es $O = (0,0,0)$ (de hecho también pertenece a la recta r, es el punto de corte de ambas rectas)
Un vector del eje X es $\vec{u} = (1,0,0)$ y de la recta r es $\vec{v} = (1,1,1)$. Ya tenemos un punto y dos vectores del plano que buscamos:
$\pi' : \begin{cases} x = \lambda + \beta \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases}$ Para obtener la ecuación general resolvemos $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$
$\rightarrow -y + z = 0$

JUN09, P2.1: Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y - 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:
a) El área del triángulo ABC. (1,1 puntos).
b) El perímetro del triángulo ABC. (1,1 puntos).
c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Calculemos los puntos A,B y C:
A tiene sus coordenadas $y = 0$, $z = 0 \rightarrow x + 4 \bullet 0 - 2 \bullet 0 - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow A = (4,0,0)$
B tiene sus coordenadas $x = 0$, $z = 0 \rightarrow 0 + 4 \bullet y - 2 \bullet 0 - 4 = 0 \rightarrow 4y = 4 \rightarrow B = (0,1,0)$
C tiene sus coordenadas $x = 0$, $y = 0 \rightarrow 0 + 4 \bullet 0 - 2z - 4 = 0 \rightarrow -2z = 4 \rightarrow C = (0,0,-2)$
Para calcular el área obtendremos los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$. El módulo de su producto vectorial es el área del paralelogramo que generan los 2 vectores.
El área del triángulo pedido es la mitad del área del paralelogramo citado.
$\overrightarrow{CA} = (4,0,2); \overrightarrow{CB} = (0,1,2)$
$\rightarrow$Área ABC
$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}|(-2,-8,4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \sqrt{21}$$

b) Tenemos que calcular las medidas de los lados, que son $\left|\overrightarrow{CA}\right|, \left|\overrightarrow{CB}\right|, \left|\overrightarrow{AB}\right|$:
$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 1^1 + 0^2} = \sqrt{17}.\ \text{Perímetro ABC} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{17} = 3\sqrt{5} + \sqrt{17} \approx 10.831$$

c) El ángulo sobre el vértice A viene determinado por $\overrightarrow{AC} = (-4,0,-2)$ y $\overrightarrow{AB} = (-4,1,0)$.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16+0+0}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}} \to \widehat{A} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) \approx 29.805^{\circ}$$

El ángulo sobre el vértice B viene determinado por $\overrightarrow{BC} = (0,-1,-2)$ y $\overrightarrow{BA} = (4,-1,0)$.

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{0+1+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \to \widehat{B} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) \approx 83.772^{\circ}$$

El ángulo sobre el vértice C viene determinado por $\overrightarrow{CA} = (4,0,2)$ y $\overrightarrow{CB} = (0,1,2)$.

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{0+0+4}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \to \widehat{B} = \arccos\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66.423^{\circ}$$

$\boxed{\text{JUN09, P2.2}}$: Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(4,4,0)$ y $P(0,0,12)$, se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación $z = 0$. (1 punto).

b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

– Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación $x = y = 4$

– Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q. (2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución).

Resolución:

a) El plano $z = 0$ tiene por vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$. La recta pedida es $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$

b) Sea $Q = (4,4,\lambda)$. $\overrightarrow{OQ} = (4,4,\lambda)$. Por lo que el plano pedido tendrá como vector normal $(4,4,\lambda)$:

La ecuación del plano tendrá la forma $4x + 4y + \lambda z = d$. Ahora bien, si ha de pasar por P y por Q:

P: $4\cdot 0 + 4\cdot 0 + \lambda\cdot 12 = d \quad \to \quad 12\lambda = d$

Q: $4\cdot 4 + 4\cdot 4 + \lambda\cdot\lambda = d \quad \to \quad 32 + \lambda^2 = d$

. Resolvemos por sustitución: $32 + \lambda^2 = 12\lambda \quad \to \quad \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0.$

Ecuación cuyas soluciones son $\lambda_1 = 8\ (d_1 = 96)$; $\lambda_2 = 4\ (d_2 = 48)$.

Entonces las 2 posibilidades para el plano pedido son $\pi_1 : 4x + 4y + 8z = 96.$ y $\pi_2 : 4x + 4y + 4z = 48$

Simplificadas: $\pi_1 : x + y + 2z = 24.$ y $\pi_2 : x + y + z = 12$

$\boxed{\text{SEP09, P2.1}}$: Dados los puntos $P = (3,1,4)$ y $Q = (1,0,1)$, y el plano π de ecuación $\pi : x - 2y + 2z + 5 = 0$, se pide calcular razonadamente :

a) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. (1,4 puntos).

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π. (1 punto).

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π. (0,9 puntos).

Resolución:

a) Si la recta r es perpendicular a π, su vector director será el vector normal de π.: $\vec{v_r} = (1,-2,2)$.

Con el punto P y el vector $\vec{v_r}$: $r\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 4+2\lambda \end{cases} \to \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{2} \to$

$$r : \begin{cases} 2x+y \qquad -7 = 0 \\ \quad 2y+2z-10 = 0 \end{cases}$$

b) Los planos buscados son todos aquellos que contienen a la recta del apartado a).

Entonces, se trata de planos que pasan por el punto P y tienen como vectores directores a $\vec{v_r}$, y a cualquier otro vector $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$:

Planos pedidos: $\begin{cases} x = 3+\lambda+a\beta \\ y = 1-2\lambda+b\beta \\ z = 4+2\lambda+c\beta \end{cases} \to \begin{vmatrix} x-3 & 1 & a \\ y-1 & -2 & b \\ z-4 & 2 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \to$

$(-2b-2c)x+(2a-c)y+(2a+b)z+(2b-10a+7c) = 0,$ siendo a,b,c números cualesquiera, no todos nulos (ya que representan al vector $\vec{u}$).

Resolución alternativa:

Dado que se trata de todos los planos que contienen a la recta $r,$ esto se llama el haz de planos de $r.$ El haz de planos se construye realizando una Combinación Lineal de las 2 ecuaciones generales de la recta r :

$m(2x+y \qquad -7)+n(2y+2z-10) = 0 \qquad \to 2mx+(m+2n)y+2nz+(-7m-10n) = 0.$

c) Expongo 2 formas de resolución, la 2ª es más sencilla, aunque es muy útil repasar y comprender ambas. Sea $ax+by+cz+d = 0$ la ecuación de π' :

Como π' contiene a $Q \to a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 1+d = 0 \to a+c+d = 0$

Como π' contiene a $P \to a\cdot 3+b\cdot 1+c\cdot 4+d = 0 \to 3a+b+4c+d = 0$

Como π' es perpendicular a π, sus vectores normales son perpendiculares:

$(a,b,c)\cdot(1,-2,2) = a-2b+2c = 0$

Resolvamos el sistema que hemos obtenido:

$\begin{cases} a+ \qquad c+d = 0 \\ 3a+b+4c+d = 0 \\ a-2b+2c \qquad = 0 \end{cases}$. Como no es un sistema cuadrado, lo resolveremos por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2+(-3)F_1 \\ F_3\to F_3+(-1)F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3+2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos más ecuaciones que incógnitas, tomaremos d como parámetro:

(ec3) $3c-5d = 0 \to c = \frac{5d}{3}$

(ec2) $b+c-2d = 0 \to b+\frac{5d}{3}-2d = 0 \to b = 2d-\frac{5d}{3} = \frac{d}{3}$

(ec1) $a+c+d = 0 \to a = -c-d = -\frac{5d}{3}-d = \frac{-8d}{3}$

La ecuación del plano π' queda: $\frac{-8d}{3}x+\frac{d}{3}y+\frac{5d}{3}z+d = 0$, donde d puede tomar un valor cualquiera (saldrían ecuaciones proporcionales que representan el mismo plano). Si tomamos por ejemplo $d = 3 : -8x+y+5z+3 = 0.$

Resolución alternativa:

Como π' es perpendicular a $\pi,$ el vector normal de π está contenido en π' ($\vec{n_\pi} = (1,-2,2)$).

Así conocemos 2 puntos y un vector de $\pi'.$ Restamos los dos puntos y así obtenemos otro vector de

π' :

$\overrightarrow{QP} = P - Q = (2,1,3).$

Construimos ahora el plano π' con el punto $Q = (1,0,1)$ y los dos vectores anteriores:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -2 & 1 \\ z-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8x + y + 5z + 3 = 0.$$

NOTA: Existiría una tercera resolución posible cogiendo la ecuación del haz de planos del apartado b), y sustituyendo en ella las coordenadas de Q. Resolvemos los valores de m y n, y con ellos obtenemos la ecuación de π'.

SEP09, P2.2: Sea π el plano de ecuación : $3x + 2y + 4z - 12 = 0$. Calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π. (1,2 puntos).

b) Los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (0,6 puntos).

c) Los tres ángulos del triángulo ABC. (1,5 puntos).

Resolución:

a) Como son planos paralelos a π, su ecuación es $\pi' : 3x + 2y + 4z + d = 0.$

Dado un punto de π, $P = (4,0,0)$, su distancia al plano π' es 5 unidades:

$$d(P,\pi') = \frac{|3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = 5 \quad \to |3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d| = 5\cdot\sqrt{29}$$

$$\text{2 posibilidades: } \begin{cases} 3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d = 5\cdot\sqrt{29} \to d = 5\sqrt{29} - 12 \approx 14.926 \\ 3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d = -5\cdot\sqrt{29} \to d = -5\sqrt{29} - 12 \approx -38.926 \end{cases}$$

$$\text{Así, los planos pedidos son: } \begin{cases} \pi_1' : 3x + 2y + 4z + 5\sqrt{29} - 12 = 0 \\ \pi_2' : 3x + 2y + 4z - 5\sqrt{29} - 12 = 0 \end{cases}$$

b) Un punto del eje OX tiene las coordenadas y,z nulas:

$(a,0,0) \to 3a + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 - 12 = 0 \to a = 4.$ El punto de corte con OX es $A = (4,0,0)$.

Análogamente,

$(0,b,0) \to 3\cdot 0 + 2\cdot b + 4\cdot 0 - 12 = 0 \to b = 6.$ El punto de corte con OY es $B = (0,6,0)$.

$(0,0,c) \to 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot c - 12 = 0 \to c = 3.$ El punto de corte con OY es $C = (0,0,3)$.

c) Para calcular los ángulos calculemos los vectores que determinan los lados.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,6,0) : \overrightarrow{AC} = (-4,0,3).$

Con las 2 expresiones del producto escalar: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$$(-4)\cdot(-4) + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\to \cos\alpha = \frac{16}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{16+36}\cdot\sqrt{16+9}} = \frac{16}{\sqrt{52}\cdot 5} = \frac{16}{10\sqrt{13}} = \frac{8}{5\sqrt{13}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{8}{5\sqrt{13}} \approx 63´656^{\circ}$$

Ángulo sobre el vértice B : $\overrightarrow{BA} = (4,-6,0); \overrightarrow{BC} = (0,-6,3).$

$$\cos\beta = \frac{36}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{45}} = \frac{36}{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{36}{6\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\beta = \arccos\frac{6}{\sqrt{65}} \approx 41´909^{\circ}$$

Ángulo sobre el vértice C : $\overrightarrow{CA} = (4,0,-3); \overrightarrow{CB} = (0,6,-3)$

$$\cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{45}} = \frac{9}{15\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$
$$\gamma = \arccos\frac{3}{5\sqrt{5}} \approx 74´435º$$

Comprobación: $\alpha+\beta+\gamma \approx 63.656º + 41.909º + 74.435º = 180.0º$

$\boxed{\text{JUN10, PA2}}$: Dadas las rectas de ecuaciones $r:\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases}$

se pide:
a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. (4 puntos).
b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s . (3 puntos).
c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. (3 puntos).

Resolución:

a) Se puede resolver de dos formas:

1ª forma: Estudiamos el rango de la matriz determinada por las 4 ecuaciones.

$$rg\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{Trans}{=} rg\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_4\to -4F_3+F_4}{=} rg\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

El rango es 4 porque el determinante de la matriz que queda es $1\cdot -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -54 \neq 0.$

Por tener rango 4, el sistema formado por las 4 ecuaciones no tiene solución, ya que

$$rg(A^*) = 4,\ rg(A) = 3 \text{ (es 4x3)}$$

Así, las rectas no tiene nigún punto en común, y como $rg(A) = 3,$ las rectas tienen distinta dirección, luego las rectas se cruzan.

2ª Forma:

Estudiemos la posición relativa de las rectas. Para ello tomaremos el vector director de cada una de ellas y un vector que vaya de un punto de r a un punto de s $(\overrightarrow{PQ})$:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3j - 12k - 3i = (-3,3,-12) \to \text{Tomamos } \vec{v_r} = (-1,1,-4)$$

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j - i = (-1,-1,0) \to \text{Tomamos } \vec{v_s} = (1,1,0)$$

$\overrightarrow{PQ}$: Tomando $z=0$ en las ecuaciones de $r,$ $P = \left(\frac{1}{4},\frac{11}{4},0\right),$

y tomando $x=0$ en las ecuaciones de $r,$ $Q = (0,5,4) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{4},\frac{9}{4},4\right).$

Podemos tomar en su lugar $\vec{w} = (-1, 9, 16)$, que tiene la misma dirección.

Estudiamos ahora el rango de $\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$

Luego los tres vectores son linealmente independientes y por lo tanto $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ no tienen la misma dirección y además el vector que va de una recta a la otra no se encuentra en el plano determinado por $\vec{v_r}, \vec{v_s}$., por lo que las rectas se cruzan.

b) Para calcular la distancia de r a s, primero obtenemos el plano π_{rs} que contiene a r siendo paralelo a s. Entonces la distancia del plano π_{rs} a la recta s es la distancia entre rectas.

Tomamos los vectores directores de r y s y un punto de r :

$\vec{v_r} = (-1, 1, -4); \vec{v_s} = (1, 1, 0); P = (\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, 0)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x - \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & y - \frac{11}{4} \\ -4 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow : 4x - 4y - 2z = -10 \Rightarrow \pi_{rs} : 2x - 2y - z = -5$$

Ahora tomamos un punto cualquiera de s ($Q = (0, 5, 4)$) y calculamos su distancia al plano π_{rs} :

$$d(Q, \pi_{rs}) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \text{ unidades.}$$

Y esta es la distancia entre las rectas r y s.

c) El plano calculado en b) es paralelo a ambas rectas, por lo que su vector normal nos servirá,

$\vec{n} = (2, -2, -1)$. El plano que buscamos es $2x - 2y - z + D = 0$ (Falta averiguar D)

La distancia que le separa de ambas rectas (r y s) ha de ser la mitad de la calculada en b): $\frac{3}{2}$

$$d(s, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot |-14 + D| = 3 \cdot 3 \Rightarrow |-14 + D| = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 + D = \frac{9}{2} \Rightarrow D = \frac{37}{2} \\ -14 + D = -\frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{D = \frac{19}{2}} \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{11}{4} - 1 \cdot 0 + D\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|-5 + D|}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} -5 + D = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{D = \frac{19}{2}} \\ -5 + D = -\frac{9}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Así pues, el valor de D que da una distancia de $\frac{3}{2}$ a cada una de las rectas es $D = \frac{19}{2}$.

Por lo que el plano π que buscamos es $2x - 2y - z + \frac{19}{2} = 0 \Rightarrow 4x - 4y - 2z = -19.$

$\boxed{\text{JUN10, PB2}}$: Sea r la recta de vector director $(2,-1,1)$ que pasa por el punto $P = (0,3,-1)$. Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto $A = (0,1,0)$ a la recta r . (4 puntos).

b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. (4 puntos).

c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación $z = 0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. (2 puntos).

Resolución:

a) Hallaremos el plano $\pi \perp$ a r que pasa por A. Después halaremos el punto A' intersección de r y π.

A' es el punto de r que está más próximo a A. Por eso la distancia de A a la recta r es la distancia entre los puntos A' y A.

El vector normal a π será el vector director de r : $\vec{n} = (2,-1,1)$. Con este vector normal y el punto A, construimos π :

$$\pi : 2x - y + z = D \rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + 0 = D \rightarrow D = -1$$

$$\pi : 2x - y + z = -1$$

Ahora hallamos A' :

$$\text{Recta } r : \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \rightarrow 2 \cdot (2\lambda) - (3 - \lambda) + (-1 + \lambda) = -1 \rightarrow 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Sustituimos λ en la ecuación de r y ya tenemos $A' = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$d(A,A') = \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

b) Para calcular el ángulo entre rectas tomamos sus vectores directores:

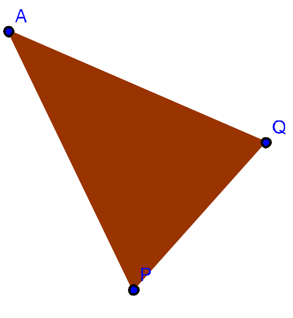
$$\overrightarrow{AP} = (0,2,-1); \vec{v_r} = (2,-1,1) \rightarrow \cos\alpha = \frac{|(0,2,-1) \cdot (2,-1,1)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\alpha = 56^\circ\, 47'\, 21''$$

c) Primero hallaremos Q :

Como $z = 0$, en las ecuaciones de r, $z = 0 = -1 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$

Sustituyendo en r, $Q = (2,2,0)$.



Tener ángulos iguales en P y en Q quiere decir que es isósceles, por lo que es equivalente a que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ tengan el mismo módulo.

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = |(0,2,-1)| = \sqrt{5}; \left|\overrightarrow{AQ}\right| = |(2,1,0)| = \sqrt{5},$$

Luego el triángulo es isósceles y los ángulos en P y en Q son iguales

SEP10, PA2: Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (6,-3,0)$ y $B = (3,0,1)$. (3 puntos).
b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (8,7,-2)$ y es perpendicular al plano π .(3 puntos).
c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. (4 puntos).

Resolución:

a) Lo construiremos con los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y el punto O :

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x \\ -3 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9z - 6y - 3x = 0 \rightarrow \pi : -x - 2y + 3z = 0$$

b) Su vector director ha de ser el normal del plano: $\vec{v_r} = (-1,-2,3)$.

Con P y con $\vec{v_r}$, $r : \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$

c) Buscamos el punto de π más próximo a P. Para encontrarlo usaremos la recta r perpendicular al plano π que pasa por P.

El punto Q será la intersección de la recta r con π.

Sustituimos un punto genérico de r en la ecuación de $\pi : -(8-\lambda) - 2(7-2\lambda) + 3(-2+3\lambda) = 0$

$\rightarrow 14\lambda = 28 \Rightarrow \lambda = 2.$ Sustituimos en $r : Q = (6,3,4)$

SEP10, PB2: Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones $r : \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-4}{2} = z - 4$ y $s : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. (3 puntos).
b) El ángulo que forman las rectas r y s. (3 puntos).
c) Ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ del plano π que contiene a las rectas r y s. (4 puntos).

Resolución:

a) Pasaremos las ecuaciones a paramétricas para igualar las coordenadas:

r : Punto $A = (4,4,4)$, vector $\vec{v_r} = (3,2,1)$. s : Punto $B = (0,0,0)$, vector $\vec{v_s} = (1,2,3)$

$r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3s \end{cases}$, donde t y s son los parámetros de cada una de las rectas.

Igualamos: $\begin{cases} 4 + 3t = s \\ 4 + 2t = 2s \\ 4 + t = 3s \end{cases}$ Sustituimos la ec1 en la ec2 y en la ec3:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\text{ec2}) \Rightarrow 4+2t = 2(4+3t) \rightarrow -4t = 4 \rightarrow t = -1; s = 1 \\ (\text{ec3}) \Rightarrow 4+t = 3(4+3t) \rightarrow -8t = 8 \rightarrow t = -1; s = 1 \end{cases}$$

Como los valores de s y t coinciden, existe el punto de corte y lo averiguamos sustituyendo en las ecuaciones de una de las rectas (por ejemplo s):

$$P = (1,2,3)$$

b) Lo calcularemos con sus vectores directores:

$$\cos\alpha = \frac{|(3,2,1)\cdot(1,2,3)|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44^{\circ}\,24'\,55''$$

c) Tomemos los vectores $\vec{v_r} = (3,2,1), \vec{v_s} = (1,2,3)$ y el punto $B = (0,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 8y + 4z = 0 \Rightarrow \pi : x - 2y + z = 0$$

$\boxed{\text{JUN11, PA2}}$: En el espacio se dan las rectas $r : \begin{cases} x \quad + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} 2x - y \quad = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$. Obtener razonadamente:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (3 puntos).
b) La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos).
c) La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . (3 puntos).

Resolución:

a) Tomamos $z = 0$ en las ecuaciones de r :

$$\begin{cases} (ec1)\ x = 2 \\ (ec2)\ 2\cdot 2 - y = 0 \rightarrow y = 4 \end{cases} . \Rightarrow \text{Punto } P = (2,4,0)$$

Para obtener el vector podemos hacer el producto vectorial de los vectores normales de cada uno de los planos que forman las ecuaciones de r :

$$(1,0,1)\times(2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k = (1,1,-1) \rightarrow \vec{v}_r = (1,1,-1)$$

Para obtener punto de s, tomamos $x = 0$.

$$\begin{cases} (ec1)\ -y = 3 \rightarrow y = -3 \\ (ec2)\ -y - z = 2 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto } Q = (0,-3,1)$$

Obtenemos el vector de s como en la recta r :

$$(2,-1,0)\times(1,-1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - k = (1,2,-1) \rightarrow \vec{u}_s = (1,2,-1)$$

Así, recta $r : P = (2,4,0)$ y $\vec{v}_r = (1,1,-1)$; recta $s : Q = (0,-3,1)$ y $\vec{u_s} = (1,2,-1)$

b) Como los vectores no son proporcionales, no tienen la misma dirección, por lo que sólo puede pasar que se crucen o que se corten.

Para saberlo estudiaremos si el vector $\overrightarrow{PQ}$ depende linealmente de $\vec{v_r}$ y $\vec{u_s}$. Si así fuese, significaría que ambas rectas están en un mismo plano, por lo que habrían de ser secantes. Si no, se cruzan.

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,-7,1). \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Entonces los tres vectores $\vec{v_r}$, $\vec{u_s}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, y las rectas r y s se cruzan.

c) El plano pedido tiene el vector de r, el vector de s y un punto de r :

$\vec{v}_r = (1,1,-1), \vec{u}_s = (1,2,-1), P = (2,4,0).$

Ecuación del plano $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 1 & 2 & y-4 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+z-2 = 0 \rightarrow x+z = 2$

$\boxed{\text{JUN11, PB2}}$: En el espacio se dan las rectas $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s : x-1 = y = z-3$. Obtener:

razonadamente:
a) Un vector director de cada una de dichas rectas r y s . (2 puntos).
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,1,3)$. (3 puntos).
c) El punto de intersección de las rectas r y s (2 puntos) y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas r y s . (3 puntos).

Resolución:

a) El vector de r viene determinado por los coeficientes de r : $\vec{v_r} = (1,-1,0)$.

El vector de s por la forma continua de la ecuación de la recta: $\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$,

como recta que pasa por el punto (a,b,c) y tiene como vector director (u_1,u_2,u_3).

Así, un vector director de s es $\vec{u_s} = (1,1,1)$.

b) Por ser perpendicular a r, el vector director de r es el vector normal del plano.

Ecuación del plano: $1x - 1y + 0z = D$. Y el punto $(0,1,3)$ ha de cumplir la ecuación:

$1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = D \rightarrow D = -1. \Rightarrow x - y = -1$

c) Para buscar el punto de corte, sustituimos las expresiones de r en las ecuaciones de s :

$\lambda - 1 = 1 - \lambda = 3 - 3 \Rightarrow$ Por la primera igualdad $\lambda = 1$, y se cumplen las 2 igualdades.

Así, el punto de corte es (tomamos $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r) $: r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1-1 \\ z = 3 \end{cases}$

Punto de corte: $(1,0,3)$

Para la ecuación del plano podemos tomar el vector de r, el vector de s, y un punto cualquiera de cualquiera de las rectas (tomamos $(1,0,3)$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z - y - x - 5 = 0 \Rightarrow \pi : -x - y + 2z = 5$$