Ejercicios resueltos de selectividad
Matemáticas II
Universidad de Extremadura

2000-2011

TOMO II: ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Vicente González Valle
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Noviembre 2011

Prólogo

Este libro se ha hecho para uso y disfrute de los alumnos de segundo de bachillerato de la opción científico-tecnológica. Se trata de la sexta edición. Espero que tengáis la bondad de perdonar los errores que he cometido al hacerlo.

También agradezco de corazón la colaboración de algunos compañeros y compañeras que tuvieron conocimiento de la primera versión gracias a la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", la cual no sólo comunicó la primera edición, sino que además me permitió obtener los enunciados de todos los años y así ayudarme a clasificarlos.

En especial acordarme de su secretario, Cipri, que falleció el curso pasado y era mi enlace con todos los componentes de la asociación. Descanse en paz.

Si quieres hacer algún comentario, comunicar algún error o decir algo que se te ocurra, puedes ponerte en contacto conmigo en vicente@vicentegonzalezvalle.es.

Este libro se irá actualizando con los exámenes que cada año vaya poniendo la universidad, incorporando este año los del curso 2010, tanto de la fase general, como de la específica, pudiendo obtenerse la versión actualizada en la página
http://www.vicentegonzalezvalle.es.

Este trabajo se ha hecho utilizando LaTeXy su frontend para linux Kile. Para los gráficos se ha usado el software de Geogebra. Gracias a todos los que han hecho posible estos programas y los han compartido gratuitamente con los demás.

He dividido el libro en dos tomos por el volumen que tiene. También he hecho una clasificación de los ejercicios por temas, esperando que la clasificación realizada sea del agrado de todos.

Se trata de un trabajo que ofrezco a la comunidad educativa, pero es conveniente saber que se emite bajo una licencia Creative Commons en la que tienes que tener presente que:

A mi mujer Mª Teresa,
y a mis hijos Ana Mª, Isabel y Vicente.

A los tios Manolo, Chencho, Pepi, Gonzalo, Aurín y Modesto,
y, como no, al abuelo Paco,
los últimos que nos dejaron siendo testigos del amor.

En especial a mi padre Juan Antonio, ya fallecido,
que me enseño a servir y actuar gratuitamente en esta vida

Gracias a todos.

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Matrices y determinantes

1.1.1. Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.

(Septiembre 00)

- Solución:

La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

Como ejemplo de matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Es evidente que estas matrices no pueden sumarse, pues no son de la misma dimensión. De forma análoga no es difícil comprobar que no pueden multiplicarse, pues para eso es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, cosa que no ocurre en ninguno de los casos.

1.1.2. Determinar todos los números reales x para los que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a calcular el valor del determinante en función de x para luego estudiar la inecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x(x+1) + 6 - 2x(x+1) + 3x(1-x) =$$

$$= \cancel{3x^2} + 3x + 6 - 2x^2 - 2x + 3x - \cancel{3x^2} = -2x^2 + 4x + 6$$

Vamos a ver donde $-2x^2 + 4x + 6 > 0$. En primer lugar buscaremos las raices y con ellas construiremos la tabla para estudiar el signo de la función.

$$-2x^2+4x+6=0 \Longrightarrow x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Vamos a estudiar el signo de la función:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$-2x^2+4x+6$	$-$	$+$	$-$

Luego el determinante es positivo en $(-1,3)$.

1.1.3. Calcular todas las matrices X tales que $AX+B=X$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ , } B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 01)

- Solución:

Empezaremos por despejar la X y después realizaremos las operaciones que sean necesarias:

$$AX+B=X \Longrightarrow AX-X=-B \Longrightarrow (A-I)\,X=-B \Longrightarrow X=(A-I)^{-1}\cdot(-B)$$

El último paso sólo podemos hacerlo si la matriz $A-I$ es regular, cuestión que veremos a continuación.

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que esta matriz es regular, pues su determinante es distinto de cero. Vamos a calcular la inversa. Supongamos que dicha matriz es:

$$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Dicha matriz cumplirá:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sustituyendo tenemos:

$$X=(A-I)^{-1}\cdot(-B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.4. Calcular la matriz X tal que $AX=B$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ , } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(Junio 02)

- Solución:

Como la matriz A es invertible (pues $|A| = 1 \neq 0$) podemos despejar la matriz X multiplicando por la izquierda por la inversa de A.

$$A \cdot X = \cdot B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Vamos a calcular la inversa de A.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 0 \Longrightarrow y = -2 \\ z = 0 \\ 2z + t = 1 \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.1.5. Calcular dos números naturales a, b menores que 10 y tales que la siguiente matriz A tenga rango 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

(Junio 03)

- Solución:

Es evidente que $Rg(A) \geq 2$, pues $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Calculemos el valor del $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 10b + 6a - 15b - 2a = -5b + 4a$$

Los números que buscamos tienen que ser **naturales, menores que 10 y anular el determinante**. Por tanto:

$$-5b + 4a = 0 \Longrightarrow 4a = 5b \Longrightarrow b = \frac{4a}{5}$$

Esto sólo es posible si $a = 5$ y $b = 4$.

1.1.6. Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con 2 filas y 2 columnas, tales que $A \cdot B$ no coincida con $B \cdot A$.

(Septiembre 03)

- Solución:

La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

Lo más natural sería que al elegir dos matrices el producto no sea conmutativo. Vamos a encontrar dos matrices que cumplan lo que piden y vamos a comprobar que así ocurre. Tomamos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realicemos ambos productos para ver que no coinciden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1.1.7. Determinar todas las matrices X tales que $A \cdot X = X \cdot A$, donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 04)

- Solución:

Supongamos que nuestra matriz X tiene la forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Siendo A como es tenemos que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

Buscamos que $A \cdot X = X \cdot A$, por tanto igualando tenemos:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

De lo que deducimos que:

$$\cancel{a} + c = \cancel{a} + b \Longrightarrow c = b$$

$$\cancel{b} + d = a + \cancel{b} \Longrightarrow a = d$$

$$a + \cancel{c} = \cancel{c} + d \Longrightarrow a = d$$

$$b + \cancel{d} = c + \cancel{d} \Longrightarrow c = b$$

Por tanto la matriz X buscada tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1.1.8. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.

(Junio 04)

- Solución:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.9. Definir el concepto de rango de una matriz. Dar un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.

(Septiembre 04)

- Solución:

La parte de teoría se puede consultar en cualquier libro.

Para el segundo interrogante basta con coger las dos primeras filas que den rango 2 y la tercera sea combinación lineal de estas dos, por ejemplo, la suma de las dos:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1-1 & 3+1 & 2+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.10. ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0?¿y permanecer igual?. Justificar las respuestas.

(Septiembre 04)

- Solución:

En ambos casos la respuesta es SI. Veámoslo con un ejemplo.

En el primer caso, supongamos una matriz de rango 2 en la que la tercera fila sea suma de las dos primeras. si en la tercera fila cambiamos un número por cero es posible que el rango sea tres. Veamos un ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, mientras que la matriz A' que mencionamos a continuación tiene rango 3:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 27 - 12 - 6 \neq 0$$

En el segundo caso veamos el ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 3, pues $|A| = 2 \neq 0$

Además si cambio un 1 por un 0, como en el ejemplo que sigue, tenemos:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 3, pues $|A'| = 1 \neq 0$

1.1.11. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.

(Junio 06)

- Solución:

Una posible manera de resolverlo es comprobar que la matriz $B = A - I$ es la inversa de A. Vamos a comprobarlo.

$$A \cdot B = A \cdot (A - I) = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

$$B \cdot A = (A - I) \cdot A = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

Luego la matriz B así construida es la inversa de A y por tanto A es invertible.

Otra forma de resolverlo sería la siguiente:

Tenemos que $A^2 = A + I$, por tanto:

$$A^2 - A = I \Longrightarrow A(A - I) = I$$

Como ambas matrices son iguales, sus determinantes son iguales y operando llegamos a lo que queremos.

$$|A(A - I)| = |I| \Longrightarrow |A|\,|A - I| = |I| = 1$$

En consecuencia ninguno de los factores puede ser cero al ser el producto 1 y de ahí deducimos que $|A| \neq 0 \Longrightarrow A$ es invertible.

1.1.12. Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con 3 filas y 4 columnas, que no tenga ningún coeficiente nulo.

(Septiembre 06)

- Solución:

Basta con tomar las dos primeras filas linealmente independientes sin coeficientes nulos y sumarlas para obtener la tercera, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

1.1.13.

a) Calcula el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

(Junio 07)

- Solución:

a) Es evidente que las columnas 2ª y 3ª son proporcionales a la primera, luego como mucho el rango será 2. De igual manera las filas 2ª y 3ª son proporcinales ($F_3 = \frac{3}{2}F_2$), por tanto el único menor que puede dar distinto de cero es:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 4$$

En consecuencia:

- Si $a = 4 \Longrightarrow RgA = 1$
- Si $a \neq 4 \Longrightarrow RgA = 2$

b) Mirar en un libro, aunque ya se razonó en el apartado anterior.

1.1.14. Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La matriz $2A$ se obtiene multiplicando cada fila por 2. Como son tres sus filas tenemos:

$$|2A| = 2^3 \cdot |A|$$

En consecuencia tenemos $|A| = 1$.

La propiedad que hemos usado es aquella que dice que *si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un mismo número, el determinante de la matriz resultante es el producto de dicho número por el determinante de la matriz original.*

b) Según lo anterior $|A| = 1$. Ahora bien

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 2x + 2x + (x+1)(2-x) - 2x - (x+1) - 2x(2-x) =$$

$$= 2x + 2x + 2x + 2 - x^2 - x - 2x - x - 1 - 4x + 2x^2 = x^2 - 2x + 1$$

En consecuencia:

$$|A| = x^2 - 2x + 1 = 1 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{array} \right.$$

1.1.15. Calcula la matriz X tal que $A^2X = A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 07)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es obvio que la matriz resultante es regular, pues su determinante vale 1.

Mi ecuación es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular primero la inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.16. Determina el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 08)

- Solución:

Vamos a resolver el determinante de orden 3 e igualaremos a cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(b-3) + 2b^2 - 2b - 2 = -b + 3 + 2b^2 - 2b - 2 = 2b^2 - 3b + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{4} = 1 \\ \\ \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $b \neq 1, \dfrac{1}{2}$ el rango es 3.

- Si $b = 1$ la matriz es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  En este caso el rango es 2, pues las dos primeras filas son linealmente dependientes y la 2ª y 3ª son linealmente independientes.

- Si $b = \dfrac{1}{2}$ la matriz es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  En este caso el rango también es 2 pues las filas 2ª y 3ª son linealmente independientes y no puede ser tres al anularse el determinante.

1.1.17.

a) **Define el concepto de rango de una matriz.**

b) **Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz A es combinación lineal de las dos primeras**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 08)

- Solución:

a) La respuesta a este apartado puede encontrarse en cualquier libro de texto.

b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vamos a ver si existen a y b distintos de cero tal que:

$$(2, 1, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, 2, -1)$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ a & + & 2b & = & 1 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right]$$

De las ecuaciones 1ª y 3ª deducimos:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 2 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow 2a = 3 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Por tanto $b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Si estos valores cumplen la segunda ecuación tendríamos que si es dependiente de las dos primeras, en caso contrario sería independiente. Sustituimos y tenemos

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2} \neq 1$$

Luego la tercera fila es independiente de las dos primeras.

1.1.18. Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|2A|$.

b) $\left|A^{-1}\right|$.

c) $|A \cdot A^t|$ **(A^t es la traspuesta de la matriz A).**

d) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A.

e) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

(Junio 09)

- Solución:

a) La matriz $2A$ es aquella que se obtiene multiplicando cada elemento de A por 2. Además hay una propiedad de los determinantes que afirma, que si multiplicamos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número no nulo, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.
En consecuencia, como todas las filas están multiplicadas por 2 y la matriz A es de orden 3,

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 2 = 16$$

b) Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Además, $A \cdot A^{-1} = I$ cuyo determinante vale 1.
Por tanto,

$$\left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| \Rightarrow \left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

c) Aplicando la misma propiedad anterior y otra que dice que $|A^t| = |A|$,

$$\left|A \cdot A^t\right| = |A| \cdot \left|A^t\right| = |A|^2 = 4$$

d) Hay otra propiedad de los determinantes que dice que si intercambiamos dos filas o columnas de una matriz, el determinante de dicha matriz cambia de signo.
Por tanto el determinante buscado vale -2.

e) Hay otra propiedad que dice que si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, su determinante no varía. En consecuencia el determinante de esta nueva matriz sigue siendo 2.

1.1.19. **Determine el rango de la matriz A siguiente según los valores del parámetro b:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Junio 09)

- Solución:

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante de la matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = 0 \Rightarrow b(b-2) = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b=0 \\ b=2 \end{array} \right.$$

Luego:

- Si $b \neq 0, 2 \Rightarrow RgA = 3$
- Si $b = 0$ la matriz resultante es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
En este caso $RgA = 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
- Si $b = 2$ la matriz resultante es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
En este caso $RgA = 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

1.1.20. **Considere las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz $A \cdot B$.

b) Clasifique y resulva el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot B \cdot X = O$$

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Por definición, el rango de $A \cdot B$, tiene tantas filas como A y tantas columnas como B. Por tanto es una matriz cuadrada de orden 3.

b) Veamos cuál es la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema sale de:

$$A \cdot B \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & 2z & = 0 \\ -2x & + & 4y & - & 4z & = 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = 0 \end{array}\right\}$$

Es obvio que se trata de un sistema homogéneo, luego ya sabemos que es compatible. Además es fácil observar que las ecuaciones segunda y tercera son proporcionales a la primera, luego podemos eliminarlas y quedarnos sólo con la primera.

Tengo pues un sistema compatible con una ecuación y tres incógnitas, luego es compatible indeterminado y además voy a necesitar dos parámetros.

Para resolverlo voy a transformar en parámetros las incógnitas y y z. Entonces tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{rrcr} x = & 2\alpha & - & 2\beta \\ y = & \alpha & & \\ z = & & & \beta \end{array}\right]$$

1.1.21. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule el determinante de A y compruebe la igualdad

$$|A| = (b-a)(c-a)(c-b)$$

b) ¿Qué relación debe existir entre a, b y c para que el rango de la matriz A sea igual a 1? Justifique la respuesta.

(Septiembre 09)

- Solución:

Este determinante es conocido como determinante de Vandermonde.

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\binom{F_2=F_2-aF_1}{F_3=F_3-a^2f_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} = \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)\left(c^2-a^2\right) - (c-a)\left(b^2-a^2\right) \\
&= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = \\
&= (b-a)(c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right] = (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

Vamos a responder al segundo apartado.

Es obvio que $RgA = 1$ por la primera fila. Para que sea sólo 1 las otras dos filas tienen que ser dependientes de ésta, es decir, tienen que ser proporcionales a ella. De aquí deducimos que a, b, y c tienen que ser iguales.

1.1.22. Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$$

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

Como es una matriz cuadrada empezamos por estudiar el propio determinante de orden 3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{vmatrix} &= b-1+2+b(b+1)-1-2(b+1)(b-1)-b = \\
&= b-1+2+b^2+b-1-2b^2+2-b = -b^2+b+2 = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b=2 \\ b=-1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Por tanto,

- Si $b \neq -1, 2 \Longrightarrow RgA = 3$.

- Si $b = -1$ la matriz queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es 2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right)$

- Si $b = 2$ la matriz resultante es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
cuyo rango es 2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \right)$

1.1.23.

a) **Defina el concepto de rango de una matriz.**

b) **Calcule el rango de la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) **Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz A anterior es combinación lineal de las otras dos columnas.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

El primer apartado podemos encontrarlo en cualquier libro. Veamos el segundo.

Es obvio que $RgA \geqslant 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Vamos a ver si tiene rango 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 1 + 4 - 2 - 1 = 0$$

Luego el $RgA = 2$.

La respuesta al tercer apartado es que no es posible, pues la tercera es proporcional a la primera, por tanto, para que la segunda se pueda poner como combinación lineal de las otras dos tendría que ser proporcional a ellas, cosa que no ocurre.

1.1.24.

a) **Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición, C es la matriz inversa de B.**

b) **Diga razonadamente si la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz A^{-1}.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

La respuesta al primer apartado podemos encontrarla en cualquier libro. Vamos a responder al segundo.

Para que una matriz tenga inversa tiene que ser una matriz regular, es decir, tener determinante distinto de cero. Veamos que ocurre en nuestro caso.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Luego la matriz A tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.1.25. Determine el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a empezar estudiando el determinante de A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{vmatrix} = -(a-2) + 2(a+1)^2 - 2 - 2(a+1) = \\ &= -a + 2 + 2a^2 + 4a + 2 - 2 - 2a - 2 = 2a^2 + a = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Luego

- Si $a \neq 0, -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow RgA = 3$.
- Si $a = 0$ la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$RgA = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$ la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{5}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$RgA = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

1.1.26. Calcule las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde X^t es la matriz traspuesta de X

(Junio 11)

- Solución:

La traspuesta de X es:

$$X^t = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Igualando la matriz obtenida a la matriz identidad tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+1 & = & 1 \\ xy & = & 0 \\ y^2 & = & 1 \end{array}\right]$$

De la primera deducimos que $x = 0$. Esto hace que se cumpla la segunda y de la tercera deducimos que $y = \pm 1$.

Por tanto, las matrices buscadas son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.27.

a) **Diga, razonadamente, si la tercera columna de la matriz A siguiente es combinación lineal de las dos primeras columnas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule el rango de la matriz A.

(Septiembre 11)

- Solución:

En el primer apartado basta con observar que $c_3 = -c_1 - c_2$.

El segundo apartado nos pide calcular el rango de la matriz A. Tenemos que A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es obvio que $RgA \geqslant 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

El máximo rango que puede tener A es tres, pues sólo tiene tres filas. Para probar si tiene rango tres basta con ver cuanto valen los menores de orden tres que contienen al menor de orden dos que dió distinto de 0, es decir, las matrices formadas por las columnas c_1, c_2, c_3 y c_1, c_2, c_4.

En el primer caso el determinante vale cero, pues, según el apartado anterior, la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras. Veamos el otro menor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Luego $RgA = 3$.

1.2. Sistemas de ecuaciones

1.2.1. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a aplicar el método de Gauss para hacer los ceros que nos piden.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=3F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Junio 00)

- Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

1.2.3. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-3)x & & & + & 4z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & -1 \\ -x & + & ay & + & 2z & = & a \end{array}$$

(Septiembre 00)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{array}\right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4a + 2a(a-3) = 4a + 2a^2 - 6a = 2a^2 - 2a$$

Igualando a cero resulta:

$$2a^2 - 2a = 0 \Longrightarrow (2a-2)\,a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vamos pues a estudiar cada caso.

- Si $a \neq 0, 1 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ S. C. Determinado.
- Si $a = 0$ la matriz que resulta es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

  Las filas segunda y tercera hacen que el sistema sea incompatible.

- Si $a = 1$ la matriz que obtenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

  Vamos a estudiar el rango de A y A' para ver como sería.

  Es evidente que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Vamos a ver que pasa con la matriz ampliada. Su rango es igual a dos, pues las filas primera y segunda son proporcionales.

  Por tanto el sistema es compatible indeterminado, pues

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^o \text{ de incógnitas}$$

1.2.4. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} ax & - & ay & + & az & = a \\ & & & & (3-2a)z & = 1 \\ x & + & (a-1)y & & & = 0 \end{array}\right\}$$

(Junio 01)

- Solución:

La matriz asociada a nuestro sistema es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & a & a \\ 0 & 0 & 3-2a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Veamos donde el determinante de la matriz de los coeficientes es cero.

$$\begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a(3-2a) - a(a-1)(3-2a) = -3a + 2a^2 - (3a^2 - 2a^3 - 3a + 2a^2) =$$

$$= -\cancel{3a} + 2a^2 - 3a^2 + 2a^3 + \cancel{3a} - 2a^2 = 2a^3 - 3a^2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0, \dfrac{3}{2} \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = n^o$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $a = 0$ la matriz es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  Como la primera fila es entera de ceros, y es evidente que hay menores de orden 2 distintos de cero, por lo que tenemos que:

$$RgA = 2 = RgA' < n^o \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

- Si $a = \dfrac{3}{2}$ la matriz que resulta es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  Como la segunda fila crea una imposiblidad tenemos que el sistema es incompatible para dicho valor.

1.2.5. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcl} & & a\,y & + & (a+1)\,z = a \\ a\,x & & & + & z = a \\ x & & & + & a\,z = a \end{array}$$

(Junio 02)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & a \end{array} \right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de A, ya que es una matriz cuadrada.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - a^3 = 0 \Longrightarrow a(1-a^2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Luego:

- Si $a \neq 0, 1, -1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' = n^\circ$ incógnitas $\Longrightarrow$ S. C. Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz que nos queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  El sistema es compatible por ser homogéneo. Además la 1ª y la 2ª fila son iguales y hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 3, y las columnas 1 y 3). Por tanto el $RgA = 2$. En consecuencia:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ S. C. Indeterminado.}$$

- Si $a = 1$ la matriz es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  Las filas 2ª y 3ª son iguales, pero hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 2, y las columnas 2 y 3). Por tanto el $RgA = 2$. Veamos el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

  Luego el $RgA' = 2$ y por tanto:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ S. C. Indeterminado.}$$

- Si $a = -1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

  Es fácil observar que las filas 2ª y 3ª son incompatibles, luego el sistema, para este valor, es incompatible.

1.2.6. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a conseguir los ceros que nos piden utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 = 8F_2 + F_3]{F_1 = 4F_1 - F_3} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Esta sería la matriz asociada al sistema buscado.

1.2.7. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a:

$$\begin{array}{ccccc} & & ay & + & az & = 0 \\ x & & & + & z & = 0 \\ 4x & - & 2y & + & az & = a \end{array}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array} \right)$$

Vamos a ver el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a - a^2 = -a^2 + 2a$$

Igualando a cero obtenemos los valores que anulan el determinante.

$$-a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

En consecuencia tenemos que:

- Si $a \neq 0, 2$ el sistema va a ser compatible determinado.

- Si $a = 0$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se trata de un sistema homogéneo. Tiene una fila de ceros, luego el rango no puede ser tres y además $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Por tanto el sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.

$$RgA = RgA' = 2 < 3 = n^o \text{ de incógnitas.}$$

- Si $a = 2$ la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es dos, pues $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
En cambio la matriz ampliada tiene rango tres, pues

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow RgA = 2 \neq 3 = RgA'$$

Por tanto el sistema para este valor es incompatible.

1.2.8. Determinar el valor del parámetro a para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = 1 \\ & & y & + & 2z & = a \end{array}$$

(Junio 03)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$$

Para que ocurra lo que nos piden, el sistema ha de ser compatible indeterminado, es decir, $RgA = RgA' < n^o$ de incógnitas. Veamos cuanto vale el rango de A.

- $RgA \geq 2$ pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

- $RgA = 2$ pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 6 - 1 = 0$$

Por tanto se producirá lo que piden si el $RgA' = 2$, es decir, si

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a + 3 - 3a - 1 = -a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

1.2.9. Dar un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interprétalo geométricamente.

(Septiembre 03)

- Solución:

Un ejemplo válido es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & & & = 3 \\ 3x & & & + & z & = 4 \end{array}\right\}$$

En este ejemplo hemos elegido dos ecuaciones independientes y la tercera la hemos obtenido sumando las dos primeras.

Geométricamente hablando pueden existir varias posibilidades.

- Pueden ser tres planos que se cortan en una recta (para ejemplo vale el anterior).
- Pueden ser también tres planos coincidentes (tres ecuaciones proporcionales).
- Pueden ser dos planos coincidentes y otro que los corte (dos ecuaciones proporcionales y una independiente de ellas).

1.2.10. Determinar un valor del parámetro a para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible e indeterminado.

$$\begin{array}{cccl} x & +y & +z & = a \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & -3y & +z & = 0 \end{array}$$

(Junio 05)

- Solución:

La matriz asociada al sistema será:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz de los coeficiente y despues veremos la ampliada.

- $RgA \geq 2$ pues tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Además el $RgA = 2$, pues las columnas primera y tercera de la matriz de los coeficiente son iguales.

Para que el sistema sea compatible e indeterminado la matriz ampliada tiene que tener rango 2, es decir,

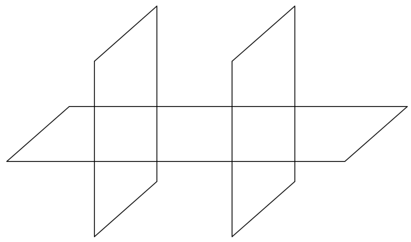
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3a + a + 3 = -2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

1.2.11. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Interprétalo geométricamente.

(Junio 05)

- Solución:

Tenemos varias opciones. Por ejemplo, podemos considerar dos planos paralelos y uno que corte a ambos.

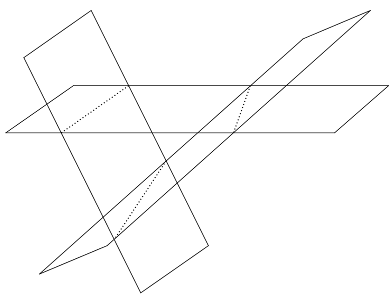


$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =3 \\ x & +y & +z & =5 \\ 2x & -y & +z & =3 \end{array}\right\}$$

En este ejemplo, las dos primeras ecuaciones representan planos paralelos y la tercera corta a los dos. Es obvio que no tienen ningún punto en común, por lo que el sistema es incompatible.

Otra opción es coger dos planos que se corten, sumar sus ecuaciones (con lo que obtendríamos un plano que se corta en la misma recta que los anteriores) y al resultante cambiarle el término independiente, con lo que obtenemos un plano paralelo al último que no pasaría por la recta de corte de los dos planos, y con ello no tendrían ningún punto en común.

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & =3 \\ 2x & -y & +z & =3 \\ 3x & & +2z & =8 \end{array}\right\}$$



Otra posibilidad son dos planos coincidentes y uno paralelo, o bien tres planos paralelos.

1.2.12. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lll} y & -x & = z \\ x & -z & = y \\ y & +z & = x \end{array}$$

(Septiembre 05)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Se trata de un sistema homogéneo, luego es compatible. Veremos cuanto vale el RgA para decidir si es determinado o indeterminado.

Es evidente que $RgA \geq 2$ pues

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right| = -1 - 1 = -1 \neq 0$$

Veamos cuanto vale el $|A|$.

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

Luego resulta que el $RgA = 2 \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.

Vamos a resolverlo:

Hacemos $x = \lambda$. Para eso usamos las filas que dan rango 2 y resolviendo por reducción tenemos:

$$\begin{array}{cccc} \cancel{y} & -z & = & \cancel{\lambda} \\ \cancel{-y} & -z & = & \cancel{-\lambda} \\ \hline & -2z & = & 0 \\ & z & = & 0 \end{array}$$

Si $x = \lambda$; $z = 0 \Longrightarrow y = \lambda$.

Por tanto la solución es $(\lambda, \lambda, 0)$.

1.2.13. Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

(Septiembre 05)

- Solución:

El sistema será compatible cuando los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada coincidan y será indeterminado cuando éste sea menor que el número de incógnitas. En nuestro caso ocurrirá cuando el rango de la matriz de los coeficientes valga 1 ó 2. Por tanto, o bien tomamos dos ecuaciones linealmente independientes y las sumamos ($RgA = 2$), o bien cogemos una ecuación y la repetimos dos veces multiplicada por distintos números ($RgA = 1$). También vale para el primer caso dos ecuaciones proporcionales y una que sea linealmente independiente con ellas.

Valdrían como ejemplo los siguientes:

Para $RgA = 2$ tendríamos:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = 3 \\ x & - & y & + & z & = 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = 7 \end{array}\right\}$$

Para $RgA = 1$ nos vale:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = 3 \\ 4x & + & 6y & - & 4z & = 6 \\ -2x & - & 3y & + & 2z & = -3 \end{array}\right\}$$

Geométricamente el primer caso representa tres planos que se cortan en una recta, o dos coincidentes y uno que los corta y el segundo tres planos coincidentes.

1.2.14. Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & (1+b)y & - & bz & = & 2b \\ x & + & by & + & (1+b)z & = & 1 \end{array}\right]$$

según los valores de b.

(Junio 06)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes para realizar el estudio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)^2 - 2b - b + (1+b) - 2(1+b) + b^2 = \cancel{1} + b^2 + \cancel{2b} - \cancel{2b} - \cancel{b} + \cancel{1} +$$

$$+\cancel{b} - \cancel{2} - 2b + b^2 = 2b^2 - 2b = 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ y } b = 1$$

Luego:

- Si $b \neq 0, 1 \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.

- Si $b = 0$ la matriz quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso tenemos que $RgA = 2$ pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Veamos cuanto vale el RgA'.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$$

Por tanto $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ El sistema es incompatible.

- Si $b = 1$ a matriz quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso $RgA = 2$, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

y a su vez coincide con el RgA', ya que la primera y la segunda fila coinciden.
Por tanto $RgA = 2 = RgA' < 3 = n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro para su resolución.

1.2.15. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & -z & = 1 \\ x & +y & -z & = 1 \\ x & & -z & = 1 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss, pues parece cómodo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las filas segunda y tercera son proporcionales, luego sobra una y el sistema es compatible indeterminado.

De la segunda ecuación deducimos que $y = 0$. Si en la primera ecuación sustituimos $y = 0$ y hacemos $z = \lambda$ resulta:

$$x - \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1 + \lambda$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 + \lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

1.2.16.

a) **Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius.**

b) **Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores del parámetro a:**

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = a \\ x & +y & +az & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \end{array}$$

(Junio 07)

- Solución:

a) Es teoría que podemos encontrar en cualquier libro.

b) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + a - 1 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a - 1$$

Igualando a cero resulta:

$$-a^2 + 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Luego:

- Si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1$ la matriz queda:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
y el $RgA = 1 = RgA' < n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado (necesita dos parámetros)

1.2.17. Discute, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones (NO es necesario resolverlo en ningún caso)

$$\begin{array}{ccccccc} -x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ ax & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (a-1)z & = & 2 \end{array}$$

(Junio 08)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$$

Veamos donde el determinante de la matriz de los coeficientes vale 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 2 \\ 2 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = a-1+8+2-2a(a-1) = a-1+8+2-2a^2+2a = -2a^2+3a+9 = 0$$

Vamos a resolver la ecuación:

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-3+9}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{2}{3} \\ \\ \dfrac{-3-9}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \end{array}\right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq \frac{2}{3}, -3 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $a = \frac{2}{3}$ la matriz resultantes es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues
$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2+8+2-\frac{8}{3} = \frac{36}{3} - \frac{8}{3} = \frac{28}{3} \neq 0$$

Luego $RgA' = 3$.

De aquí deducimos que:

$RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a = -3$ la matriz que queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 2 + 12 = 24 \neq 0$$

Luego $RgA' = 3$.

De aquí deducimos que:

$RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

1.2.18. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro *a*:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 0 \\ x & + & z & = & a \\ -2y & + & az & = & a \end{array}$$

No es necesario resolver el sistema en ningún caso.

(Septiembre 08)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & a & a \end{array}\right)$$

Vamos a empezar estudiando el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a(-a+2) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0, 2 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz resultantes es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es evidente que sobra la primera fila. Además el sistema resultante es homogéneo y por tanto compatible. También es obvio que la segunda y tercera fila son linealmente independientes.

En consecuencia:

$RgA = RgA' = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incognitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $a = 2$ la matriz que queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 8 = 4 \neq 0$$

Luego $RgA' = 3$.

De aquí deducimos que:

$RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

1.2.19.

a) Discute el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el anterior sistema.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes.
Tenemos que:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow RgA \geqslant 2$$

Por otro lado el determinate de dicha matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 1 + 2 = 0 \Longrightarrow RgA = 2$$

Veamos ahora el rango de la matriz ampliada. Sabemos que $RgA' \geqslant 2$, pues nos vale el mismo menor que sirvió para el RgA. Bastará con ver que ocurre con el menor:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$$

En consecuencia tenemos que $RgA = RgA' = 2 < 3 =$ nº de incógnitas, por tanto el sistema es compatible indeterminado y necesitaré un parámetro para su resolución.

b) Del estudio anterior también deducimos que me "sobra" la última ecuación y que tengo que transformar en parámetro la incógnita **z**.
Por tanto el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & \lambda & = & 1 \\ -x & + & y & - & \lambda & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1-\lambda \\ -x & + & y & = & \lambda \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de reducción tenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & \cancel{y} & = & 1-\lambda \\ -x & + & \cancel{y} & = & \lambda \\ \hline \\ & x = 1 & & & \end{array}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se tendría que $y = \lambda + 1$
Luego la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & & \\ y & = & 1 & + & \lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

1.2.20. Discute, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} bx & + & by & & & = & 1 \\ 3x & & & + & bz & = & b-2 \\ & - & y & + & z & = & b-3 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & b & 0 & 1 \\ 3 & 0 & b & b-2 \\ 0 & -1 & 1 & b-3 \end{array}\right)$$

Comenzaremos por estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3b - b^2 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \end{array}\right.$$

Estudiemos los distintos casos:

- Si $b \neq 0, 3 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ S. Compatible Determinado.

- Si $b = 0$ la matriz que tenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

  Sabemos que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

  Vamos a ver el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

  Luego $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

- Si $b = 3$ la matriz que tenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  Sabemos que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

  Vamos a ver el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

  Por tanto $RgA = 2 = RgA' \neq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incognitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (1 parámetro).

1.2.21.

a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} & & y & - & z & = & 1 \\ -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Sabemos que un sistema es de Cramer si la matriz de los coeficientes es una matriz regular, es decir, su determinante es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Luego el sistema es de Cramer.

Vamos a resolverlo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-8}{1} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2+1}{1} = -1$$

1.2.22. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & & & = & a+1 \\ -2x & - & y & + & az & = & -2 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a+1 \\ -2 & -1 & a & -2 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1 + a(a+1) - 2 - a = 1 + a^2 + a - 2 - a = a^2 - 1 = 0 \\ &= a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $a = 1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Veamos cual es el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Pues } c_3 = 2c_2$$

Luego $RgA = RgA' = 2 \neq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $a = -1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

De nuevo $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Veamos cual es el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 2 = 4 \neq 0$$

Luego $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

1.2.23. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 0 \\ ax & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 11)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a & 0 \\ a & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes, pues el sistema es 3 x 3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & a-1 & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)+2a^2+2-a(a-1)-2+2a = -a+1+2a^2+2-$$
$$- \; a^2+a-2+2a = a^2+2a+1 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' =$ nº incognitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $a = -1$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

  Es obvio que $RgA = 1$ y que $RgA' = 2$ (basta con tomar $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). Luego $RgA = 1 \neq 2 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

1.2.24. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & bz & = & 1+b \\ x & & & + & z & = & 3-b \\ bx & - & by & & & = & 1-b \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Septiembre 11)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & b & 1+b \\ 1 & 0 & 1 & 3-b \\ b & -b & 0 & 1-b \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes, pues el sistema es 3 x 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \end{vmatrix} = b - b^2 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

- Si $b \neq 0, 1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' =$ nº incognitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $b = 0$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es obvio que $RgA = 2$,pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$. Veamos el RgA'.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por tanto $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $b = 1$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es obvio que $RgA = 2$,pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$. Veamos el RgA'.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Por tanto $RgA = 2 = RgA' \neq 3 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (Necesita un parámetro).

Capítulo 2

Geometría

2.1. Vectores, puntos, rectas y planos en el espacio

2.1.1. Hallar la ecuación de una circunferencia que, siendo tangente a la recta $y = \sqrt{3}\,x$, sea tangente al eje de abcisas en el punto $(3, 0)$. (Indicación: $tg60^o = \sqrt{3}$, $tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

(Septiembre 00)

- Solución:

La figura 2.1 nos muestra una visión del problema.

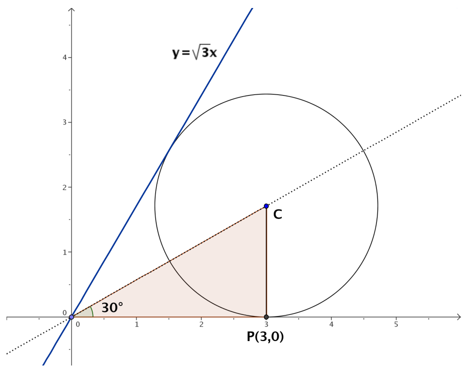


Figura 2.1: Representación detallada del problema

Vamos a utilizar propiedades conocidas de las circunferencias. Se sabe que la recta que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto de corte de las dos tangentes (en nuestro caso el origen de coordenadas) es la recta bisectriz del ángulo formado por las tangentes. Como la recta $y = \sqrt{3}\,x$ forma un ángulo con la horizontal de 60^o, se deduce que la recta anteriormente citada forma un ángulo de 30^o con la horizontal (ver figura 2.1). También es obvio que el radio es perpendicular con la horizontal en el punto de tangencia (por ser el eje de abcisas una de las tangentes), luego tenemos el triángulo rectangulo que podemos ver en la figura 2.1.

De aquí deducimos:

$$tg\ 30^o = \frac{r}{3} \Longrightarrow r = 3 \cdot tg\ 30^o = 3\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto el centro es $C\left(3, \sqrt{3}\right)$ y la ecuación buscada es:

$$(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$$

2.1.2. Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación $x + y + z = 3$, que corte a la recta de ecuaciones $x = 0,\ z = 0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z = 1,\ y = 0$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a coger un plano paralelo al que nos dan. Luego vamos a cortarlo con las dos rectas indicadas. La recta que pasa por estos dos puntos está contenida en este último plano, por tanto es paralela al plano que nos dan y por supuesto corta a las rectas indicadas.

Como plano paralelo vale el plano $x+y+z = 1$. Si cortamos este plano con las rectas obtenemos:

- Con $x = 0,\ z = 0 \Longrightarrow A(0, 1, 0)$.
- Con $z = 1,\ y = 0 \Longrightarrow B(0, 0, 1)$.

La recta buscada pasa por los puntos A y B, por tanto queda definida por $A(0, 1, 0)$ y por $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$.

En forma paramétrica, la ecuación resultante es:

$$\left.\begin{array}{rcc} x = & 0 & \\ y = & 1 & -\lambda \\ z = & & +\lambda \end{array}\right]$$

2.1.3. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 0, 1), (0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$.

(Junio 01)

- Solución:

Bastará con coger planos paralelos a los dos que nos dan y el corte de dichos planos será la recta que buscamos.

Vamos a empezar por calcular la ecuación general del plano que pasa por los tres puntos, que denominaremos: $A(2, 0, 1), B(0, 2, 1), C(1, -1, 0)$.

Como vectores directores de este plano tomamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, cuyas coordenadas serán:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$$

Por tanto, la ecuación del plano vendrá determinada por $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(x-2) + 2(z-1) + 2(z-1) - 2y =$$

$$= -2x + 4 + 2z - 2 + 2z - 2 - 2y = -2x - 2y + 4z - 2 = 0$$

Por tanto podemos tomar como ecuación de dicho plano $x + y - 2z + 1 = 0$.

Tenemos por tanto dos planos que son:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & 1 & = 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & 1 & = 0 \end{array}\right]$$

Para conseguir nuestra recta cogemos dos planos paralelos a ellos, para lo que basta con cambiar el término independiente:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & 3 & = 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & 8 & = 0 \end{array}\right]$$

Está sería la ecuación de la recta buscada.

2.1.4. Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(1,0,2)$ y $(2,1,0)$.

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a realizar el producto vectorial de los dos vectores, pues el vector así obtenido será ortogonal a los dos. Después normalizaremos ese vector y obtendremos el vector buscado.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i}$$

Luego un vector ortogonal a ambos sería $\vec{w} = (-2, 4, 1)$.

Vamos a normalizarlo. Su módulo vale $|\vec{w}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$.

Dividiendo el vector por su módulo obtenemos el vector $\vec{o}$ buscado:

$$\vec{o} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

2.1.5. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x + z = 2$ y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones $x + y = 0, y + z = 2$.

(Septiembre 01)

- Solución:

El procedimiento que vamos a seguir lo narro a continuación. Nuestra recta va a ser el corte de dos planos, uno paralelo al primero (con eso garantizamos que la recta es paralela al plano) y el otro va a pertenecer al haz de planos que obtenemos a partir de los planos que definen la segunda recta. De esa forma, como nuestra recta estará contenida en dicho plano cortará a la que nos dan. El plano que eligiremos será aquel que haga que la recta obtenida corte perpendicularmente a la dada en el enunciado.

Dicho esto nos ponemos manos a la obra. Es fácil obtener un plano paralelo al que nos dan, valdría $x + z = 0$. Vamos a por el otro. El haz de planos a que nos referíamos tendría la siguiente forma:

$$\alpha(x + y) + y + z - 2 = 0$$

Luego nuestra recta quedará definida por los planos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ \alpha(x + y) + y + z - 2 & = & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ \alpha x & + & (\alpha + 1)y & + & z & = & 2 \end{array}\right] \tag{2.1}$$

Vamos a buscar cual es el vector director de las rectas (en función de α) para después decidir cual es el perpendicular a la recta dada. Resolviendo el sistema tenemos:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ \alpha x & + & (\alpha + 1)y & + & z & = & 2 \end{array}\right] z = \lambda \Longrightarrow x = -\lambda$$

Sustituyendo:

$$\alpha(-\lambda) + (\alpha+1)y + \lambda = 2 \Longrightarrow (\alpha+1)y = 2 - \lambda + \alpha\lambda \Longrightarrow y = \frac{2}{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\lambda$$

Luego la ecuación de la recta en forma paramétrica, en función de α, será:

$$\left.\begin{array}{rcccc} x & = & & - & \lambda \\ y & = & \dfrac{2}{\alpha+1} & + & \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{v} = \left(-1, \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, 1\right)$$

Vamos a encontrar el vector director de la recta que nos dieron.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ y + z = 2 \end{array}\right] y = \lambda \Longrightarrow x = -\lambda \ , \ z = 2 - \lambda$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} x & = & & - & \lambda \\ y & = & & & \lambda \\ z & = & 2 & - & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{u} = (-1, 1, -1)$$

Nos falta por encontrar el valor de α que hace que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, es decir, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1, -1) \cdot \left(-1, \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, 1\right) = 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

Luego, si sutituimos $\alpha = 1$ en la ecuación (2.1), la recta pedida es:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right]$$

2.1.6. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\vec{e} - \vec{v}$

(Septiembre 01)

- Solución:

Queremos que:

$$|\vec{e}| = |\vec{v}| = |\vec{e} - \vec{v}| \tag{2.2}$$

Sabemos que

$$cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

Si aplicamos esta última fórmula a los vectores $\vec{e} - \vec{v}$ y $\vec{e} - \vec{v}$ tendremos:

$$cos(\widehat{\vec{e} - \vec{v}, \vec{e} - \vec{v}}) = \frac{(\vec{e} - \vec{v}) \cdot (\vec{e} - \vec{v})}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{e} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{e} \cdot \vec{v}}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|} =$$

$$= \frac{|\vec{e}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{e}| \cdot |\vec{v}|\, cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}})}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|}$$

Teniendo en cuenta 2.2 y que $cos(\widehat{\vec{e} - \vec{v}, \vec{e} - \vec{v}}) = 1$, resulta:

$$1 = \frac{|\vec{e}|^2 + |\vec{e}|^2 - 2\,|\vec{e}|^2\, cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}})}{|\vec{e}|^2} \Longrightarrow 2\,|\vec{e}|^2 - 2\,|\vec{e}|^2\ cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = |\vec{e}|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 - 2\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = 1 \Longrightarrow -2\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = -1 \Longrightarrow cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = \frac{1}{2}$$

Luego el ángulo buscado es:

$$(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$$

2.1.7. **Hallar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector $\vec{e}$ de coordenadas $(1,1,3)$.**

(Junio 02)

- Solución:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores buscados.

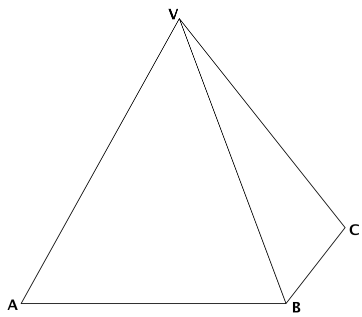
Para que sean linealmente independientes basta con no ser proporcionales y para ser ortogonales tiene que cumplirse

$$\vec{u}\cdot\vec{e} = \vec{v}\cdot\vec{e} = 0$$

Dos vectores válidos para lo que buscamos serían:

$$\begin{array}{l}\vec{u} = (2,1,-1) \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{e} = (2,1,-1)\cdot(1,1,3) = 2+1-3 = 0\\ \vec{v} = (1,2,-1) \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{e} = (1,2,-1)\cdot(1,1,3) = 1+2-3 = 0\end{array}$$

2.1.8. **La base de una pirámide es un cuadrado $ABCD$ de 2 metros de largo y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.**



(Junio 02)

- Solución:

Vamos a asignarle coordenadas a los puntos que nos dan. $A(2,0,0)$; $B(2,2,0)$; $C(0,2,0)$ y $V(1,1,3)$.

Vamos a calcular los planos.

- Sea $\pi \equiv ABV$. Para calcular la ecuación de este plano vamos a usar el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AV}$, es decir $A(2,0,0)$; $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$ y $\overrightarrow{AV} = (-1,1,3)$. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) + 2z = 6x - 12 + 2z = 0$$

Luego la ecuación del primer plano será $\pi \equiv 3x + z = 6$.

- Sea $\pi' \equiv BCV$. Para calcular éste usaremos B y los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BV}$, es decir, $B(2,2,0)$; $\overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$ y $\overrightarrow{BV} = (-1,-1,3)$. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2z + 6(y-2) = 2z + 6y - 12 = 0$$

Luego la ecuación del segundo plano es $\pi' \equiv 3y + z = 6$

Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden, es decir el ángulo que forman π y π'. Sus vectores normales son $\vec{n} = (3,0,1)$ y $\vec{n'} = (0,3,1)$. En consecuencia:

$$cos\alpha = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{n'}\right|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|} = \frac{1}{\sqrt{10}\,\sqrt{10}} = \frac{1}{10} \Longrightarrow \alpha = 84^o 15' 39''$$

2.1.9. Determinar si el plano $3x-2y+z=1$ es perpendicular a la recta de ecuaciones $-x = 3y+3z, y+2z = -1$. Determinar también si es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,-1,1)$ y $(-1,-1,0)$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Veamos lo primero.

Vamos a calcular el vector director de la recta ($\vec{u}$) como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 3y & + & 3z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \vec{n_1} = (1,3,3) \\ \Longrightarrow \vec{n_2} = (0,1,2) \end{array}$$

$$\vec{u} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j} - 3\vec{i} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Longrightarrow \vec{u} = (3,-2,1)$$

Como el vector normal al plano era el mismo, deducimos que la recta es perpendicular al plano.

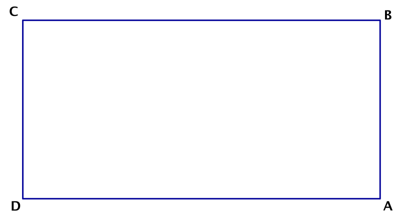
Veamos ahora lo segundo. Llamemos $P(1,-1,1)$ y $Q(-1,-1,0)$. Por tanto la recta tendrá como vector director $\overrightarrow{PQ} = (-2,0,-1)$.

Para ver si la recta es paralela al plano vamos a ver si $\vec{n}$ es ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = (3,-2,1).(-2,0,-1) = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

Luego no son paralelos.

2.1.10. **Sabiendo que los lados de un rectángulo $ABCD$ miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{BA}$.**



(Septiembre 03)

- Solución:

Vamos a asignarles coordenadas a los puntos:

$$D(0,0,0),\ A(3,0,0),\ B(3,1,0),\ C(0,1,0).$$

Vamos a ver paso a paso cada una de las dos cosas que nos piden calcular:

- Para hallar el producto escalar pedido vamos a calcular primero los vectores y a continuación haremos el producto.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CB}=(3,0,0)\\ \overrightarrow{AD}=(-3,0,0)\end{array}\right] \Longrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=(3,0,0)\cdot(-3,0,0)=-9$$

- Para calcular el producto vectorial es necesario calcular el vector $\overrightarrow{BA}$, pues el vector $\overrightarrow{CB}$ ya lo calculamos antes.

$$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$$

Ahora realizaremos el producto vectorial y posteriormente calcularemos el módulo.

$$\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{BA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3\vec{k}$$

Por tanto $\left|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{BA}\right|=3.$

2.1.11. **Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $x+y=1, y+z=2$, y también sea paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.**

(Septiembre 03)

- Solución:

Para calcular el plano usaremos un punto y dos vectores. Como punto usaremos el origen y como vectores los vectores directores de las dos rectas. Vamos a calcular estos últimos:

- Empezamos por la primera recta, multiplicando los vectores normales asociados a los planos que la definen.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right] \left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,1,0) \\ \Longrightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,1,1) \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}-\vec{j}$$

Luego el primer vector buscado es $\vec{u}=(1,-1,1)$.

- En la segunda recta un vector válido es:

$$\vec{v}=(0,1,1)-(1,1,0)=(-1,0,1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-x-y-z-y=-x-2y-z$$

es decir, valdría

$$x+2y+z=0$$

2.1.12. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$$ax+by+cz=d \text{ , } a'x+b'y+c'z=d'$$

de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

(Junio 04)

- Solución:

La relación que deben guardar es:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$$

Ello se debe a:

1. La doble igualdad implica que los vectores normales son proporcionales y por tanto paralelos.
2. La desigualdad hace que no hablemos del mismo plano.

2.1.13. Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0);(1,0,1)$ y $(0,1,1)$, que también sea paralela al plano $x+2y+3z=0$, y que no esté contenida en ninguno de estos dos planos.

(Septiembre 04)

- Solución:

Para eso vamos a considerar sendos planos paralelos a los que nos dan y la recta en que se cortan es paralela a ambos planos y no está en ninguno.

Empezemos por calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Dichos puntos son $A(1,1,0);B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$. Para hallar la ecuación del plano vamos a considerar el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Los vectores son $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Por tanto la ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)-(y-1)-z = -x+1-y+1-z = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x+y+z-2 = 0$$

Tenemos, en consecuencia, dos planos y voy a coger dos planos paralelos a ellos para construir la recta:

$$\text{Plano } 1^o \longrightarrow x+y+z-2=0 \longrightarrow x+y+z+3=0 \text{ (Paralelo)}$$

$$\text{Plano } 2^o \longrightarrow x+2y+3z=0 \longrightarrow x+2y+3z-1=0 \text{ (Paralelo)}$$

Por tanto, una recta posible es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+3=0 \\ x+2y+3z-1=0 \end{array}\right\}$$

2.1.14. Hallar un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(0, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Una forma posible es calcular el producto vectorial de los vectores y obtendremos un vector ortogonal a ambos, después lo normalizamos y terminamos.

Vamos a llamar $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} \Longrightarrow \vec{w} = (-1, 2, -2)$$

El vector que buscamos lo obtenemos dividiendo $\vec{w}$ entre su módulo.

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

2.1.15. Determina la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas $(1, 0, 0), (a, b, 0), (a, 0, b)$ y $(0, a, b)$ estén en un plano.

(Junio 06)

- Solución:

Para que ocurra lo que nos piden los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tiene que ser linealmente dependientes. Veamos cuales son esos vectores e impongamos que el determinante que los tiene como filas valga 0.

$$\overrightarrow{AB} = (a-1, b, 0); \overrightarrow{AC} = (a-1, 0, b) \text{ y } \overrightarrow{AD} = (-1, a, b)$$

Su determinate es

$$\begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = -b^2 - b^2(a-1) - ab(a-1) = 0 \Longrightarrow \cancel{b^2} - ab^2 + \cancel{b^2} - a^2b + ab = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ab(-b-a+1)=0$$

2.1.16. Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1,2,3)$ y por la recta de ecuaciones $x+y=1, y+z=1$.

(Junio 06)

- Solución:

Vamos a llamar A al punto que nos dan. Vamos a pasar a paramétricas la ecuación de la recta y así tendremos un punto (que llamaremos B) y el vector director ($\vec{u}$) de la misma. Para encontrar la ecuación del plano usaremos $A, \overrightarrow{AB}, \vec{u}$.

Hacemos $y=\lambda$ y nos resulta:

$$\left.\begin{array}{rl} x+\lambda & =1 \\ y & =\lambda \\ \lambda+z & =1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{rrr} x= & 1 & -\lambda \\ y= & & \lambda \\ z= & 1 & -\lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B(1,0,1) \\ \vec{u}=(-1,1,-1) \end{array}\right.$$

De aquí deducimos que el plano queda determinado por:

$$A(1,2,3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,-2,-2)$$

$$\vec{u}=(-1,1,-1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\left|\begin{array}{ccc} x-1 & 0 & -1 \\ y-2 & -2 & 1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{array}\right| = 2(x-1)+2(y-2)-2(z-3)+2(x-1)=$$

$$=2x-2+2y-4-2z+6+2x-2=4x+2y-2z-2=0$$

Una ecuación más simple sería

$$2x+y-z-1=0$$

2.1.17. Determina el plano que pase por los puntos de coordenadas $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, y sea paralelo a la recta

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =2 \\ x & -y & +z & =2 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- Solución:

Supongamos que nuestros puntos son $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$.

El plano que buscamos va a quedar definido por uno de los puntos (por ejemplo A), por el vector $\overrightarrow{AB}$ y por el vector director de la recta ($\vec{u}$).

Vamos a calcular primero los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{u}$.

- $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$.

- El vector $\vec{u}$ lo obtenemos al hacer el producto vectorial de los vectores normales a los planos que definen la recta.

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2 \\ x & -y & +z & =2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \overrightarrow{n_1}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{n_2}=(1,-1,1) \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}$$

Por tanto,

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\cancel{\vec{j}}-\vec{k}-\vec{k}-\cancel{\vec{j}}+\vec{i}=2\vec{i}-2\vec{k}\Longrightarrow \vec{u}=(2,0,-2)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2(x-1)-2z-2y=-2x+2-2z-2y=0$$

En consecuencia el plano buscado tiene ecuación

$$x+y+z-1=0$$

2.1.18. Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto $P=(0,a,b)$ esté en el punto determinado por los puntos $A=(1,0,0), B=(1,1,1)$ y $C=(0,2,1)$.

(Junio 07)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular la ecuación del plano. Para ello usamos como punto A(1,0,0) y como vectores $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$.

La ecuación será:

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)-y+z-2(x-1)=x-1-y+z-2x+2=-x-y+z+1$$

Por tanto, una ecuación válida para el plano será $\pi\equiv x+y-z-1=0$

Vamos a imponer que $P\in\pi$, resultando la relación buscada

$$a-b-1=0$$

2.1.19. Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas $(1,2,1)$.

(Junio 07)

- Solución:

Llamemos a nuestro vector $\vec{u}(1,2,1)$. Para obtener un vector $\vec{v}$ ortogonal a él tiene que ocurrir que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Podemos tomar el vector $\vec{v}(1,1,3)$, el cual es evidente que es ortogonal a $\vec{u}$.

Además nos piden que sea de módulo uno, luego vamos a normalizarlo.

$$|\vec{v}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

Por tanto, el vector buscado es:

$$\vec{w}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}\right)$$

2.1.20.

a) Determina la posición relativa de plano $x - y + z = 2$ y la recta de ecuaciones

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

b) Calcula la distancia entre la recta y el plano anteriores.

(Septiembre 07)

- Solución:

a) Vamos a tomar el vector normal y un punto del plano.

$$x - y + z = 2 \Longrightarrow \vec{n} = (1, -1, 1) \text{ y } A = (0, 0, 2)$$

Ahora veremos el vector director y un punto de la recta:

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1} \Longrightarrow \vec{u} = (2, 1, -1) \text{ y } B = (0, -1, -2)$$

Tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow$ La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Si $B \in \pi$ entonces la recta estaría contenida en el plano, pero:

$$0 + 1 - 2 \neq 2$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) Vamos a calcular la distancia de la recta al plano.

$$d(r, \pi) = d(B, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

2.1.21. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3 respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$, indicando los resultados teóricos en que te basas para ello.

(Junio 08)

- Solución:

Tenemos que $\vec{v}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{u}| = 4$ y que $|\vec{v}| = 3$

- Vamos a calcular el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$.

$$|\vec{u} + \vec{v}| \overset{(1)}{=} \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} \overset{(2)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}} \overset{(3)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

- Vamos a calcular el módulo de $\vec{u} - \vec{v}$.

$$|\vec{u} - \vec{v}| \overset{(1)}{=} \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} \overset{(2)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}} \overset{(3)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Vamos a comentar los conceptos teóricos utilizados.

(1) Nos basamos en la definición de módulo de un vector en función del producto escalar.

(2) Usamos la propiedad que dice: " $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$ ".

(3) Hemos utilizado la propiedad del producto escalar que dice: "El producto escalar de dos vectores ortogonales es cero".

2.1.22. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no proporcionales del espacio real tridimensional. ¿Qué relación existe entre las direccciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y la dirección de su producto vectorial? ¿Cuánto vale el módulo del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

(Junio 08)

- Solución:

A la primera pregunta contestamos, por definición de producto vectorial, que la dirección del mismo es perpendicular a la de los dos vectores.

La segunda pregunta tiene también fácil respuesta.

$$\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sen\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

2.1.23.

a) Determina la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular al plano $x+y=1$.

b) Calcula el punto donde la recta obtenida corta al plano dado $x+y=1$.

(Septiembre 08)

- Solución:

Contestaremos primero al apartado *a*.

Como la recta es perpendicular al plano valdrá como vector director de la misma el vector normal al plano.

$$\pi : x+y=1 \Longrightarrow \vec{n}(1,1,0)$$

Por tanto la ecuación paramétrica de la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1 \end{array}\right\}$$

Su ecuación en forma continua será:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$$

De donde deducimos que su ecuación general será:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-1 & = & y-1 \\ z & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rl} x-y & =0 \\ z & =1 \end{array}\right\}$$

Veamos ahora el apartado *b*.

Para ello usaremos la ecuación paramétrica de la recta y sustituiremos en la ecuación del plano.

$$1 + \lambda + 1 + \lambda = 1 \Longrightarrow 2\lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto buscado es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \dfrac{1}{2} \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \\ \\ z = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

2.1.24.

a) **Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

b) **Calcula el punto donde se cortan la recta y el plano.**

(Septiembre 08)

- Solución:

Calculemos primero el plano que nos piden en el apartado *a*.

Como dicho plano corta perpendicularmente a la recta, el vector director de la misma valdrá como vector normal del plano. Por tanto, dicho vector normal es $\vec{n}(2, 1, 1)$.

En consecuencia, la ecuación del plano es:

$$2x + y + z + D = 0$$

Como el plano pasa por el punto de coordenadas $(1, 1, 1)$, sustituyendo estas coordenadas en la ecuación anterior podemos calcular el valor de D.

$$2 + 1 + 1 + D = 0 \Longrightarrow D = -4$$

La ecuación del plano buscada es $2x + y + z - 4 = 0$.

Vamos a resolver el segundo apartado.

La ecuación paramétrica de la recta es:

$$r \equiv \left[\begin{array}{rrcr} x = & 1 & + & 2\lambda \\ y = & & & \lambda \\ z = & -1 & + & \lambda \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos el valor de λ, y de ahí el punto buscado.

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda - 1 + \lambda - 4 = 0 \Longrightarrow 2 + 4\lambda + \lambda - 1 + \lambda - 4 = 0 \Longrightarrow 6\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación paramétrica de la recta obtenemos las coordenadas de dicho punto:

$$\left.\begin{array}{rcccl} x = & 1 & + & 1 & = & 2 \\ y = & & & \frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} \\ z = & -1 & + & \frac{1}{2} & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Longrightarrow Q\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

2.1.25. Dadas las rectas

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{array} \right. \quad , \quad r': \left\{ \begin{array}{ccccl} x & + & y & + & z & =0 \\ ax & + & & + & bz & =0 \end{array} \right.$$

determine la relación que debe existir entre a y b para que:

a) r **y** r' **sean paralelas.**

b) r **y** r' **sean perpendiculares.**

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a empezar calculando unos vectores directores de las rectas y después contestaremos a los interrogantes que nos plantean.

Cada recta viene definida como corte de dos planos, por tanto el producto vectorial de los vectores normales de dichos planos valdrá como vector director de cada recta.

Empecemos por r:

Los vectores directores de los planos que definen a r son $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,-1,1)$.

Por tanto:

$$\vec{d} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} + \vec{i} = 2\vec{i} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{d} = (2,0,-2)$$

Hacemos lo mismo con r' y tenemos que los vectores normales en este caso son $\overrightarrow{n_1'} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2'} = (a,0,b)$.

Luego,

$$\overrightarrow{d'} = \overrightarrow{n_1'} \wedge \overrightarrow{n_2'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = b\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{k} - b\vec{j} = b\vec{i} + (a-b)\vec{j} - a\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{d'} = (b, a-b, -a)$$

Una vez calculados los vectores pasamos a contestar las cuestiones que nos plantean.

a) Para que sean paralelas tiene que ocurrir que $\vec{d}$ tenga la misma dirección que $\overrightarrow{d'}$, es decir, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Por tanto

$$\frac{2}{b} = \frac{0}{a-b} = \frac{-2}{-a} \Rightarrow -2a = -2b \Rightarrow a = b$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores de las rectas tiene que valer 0. Luego

$$\vec{d} \cdot \overrightarrow{d'} = 0 \Rightarrow (2,0,-2) \cdot (b, a-b, -a) = 2b + 2a = 0 \Rightarrow 2b = -2a \Rightarrow b = -a$$

2.1.26.

a) **Calcule el punto de corte del plano $\Pi : x+y=0$ y la recta**

$$r: \begin{cases} x = & & & \lambda \\ y = & -2 & & \\ z = & 1 & + & \lambda \end{cases}$$

b) **Determine la recta s que está contenida en el plano Π y corta perpendicularmente a r.**

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a responder a los dos apartados.

a) Un punto cualquiera de r tiene la siguiente forma $(\lambda, -2, 1+\lambda)$. Vamos a sustituir este punto en la ecuación del plano y calcularemos de esa forma λ y el punto en cuestión.

$$\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

En consecuencia el punto buscado es $P(2, -2, 3)$.

b) La recta s vendrá definida por el punto P calculado anteriormente (ya que corta a r y está contenida en Π) y como vector director el producto vectorial de los vectores directores de r y el normal al plano Π (por la misma razón anterior).

El vector nomal de Π es $\vec{n} = (1,1,0)$ y el director de r es $\vec{d} = (1,0,1)$.

Luego el vector director de s será:

$$\vec{u} = \vec{d} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} \Rightarrow \vec{u} = (-1,1,1)$$

Por tanto la ecuación de la recta s es:

$$s: \begin{cases} x = & 2 & - & \lambda \\ y = & -2 & + & \lambda \\ z = & 3 & + & \lambda \end{cases}$$

2.1.27. Considere las rectas $r: \begin{cases} x = & & & \lambda \\ y = & & - & \lambda \\ z = & 1 & & \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$

a) **Compruebe que r y s son coplanarias.**

b) **Obtenga las ecuaciones de la recta que corta a r y a s, y es perpendicular a ambas.**

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Para comprobar eso vamos a coger los vectores directores de las dos rectas y el vector que va de un punto cualquiera de r a uno de s. Si los vectores resultantes son dependientes, las rectas serán coplanarias.

En la recta r es muy fácil de calcular:

$$r: \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & \lambda \\ y = & - & \lambda \\ z = & 1 & \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(0,0,1) \\ \vec{u} = (1,-1,0) \end{array} \right.$$

Vayamos a con la recta s. Vamos a pasarla a paramétricas haciendo $x = \alpha$.

$$s: \left\{ \begin{array}{rrrr} x & + & y & = 0 \\ x & - & z & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{rrrr} x = & & & \alpha \\ y = & & - & \alpha \\ z = & -1 & + & \alpha \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(0,0,-1) \\ \vec{v} = (1,-1,1) \end{array} \right.$$

El vector tercero que ibamos a calcular era el vector que va de P a Q. Dicho vector es $\overrightarrow{PQ} = (0,0,-2)$.

Para comprobar que los tres vectores son coplanarios vamos a calcular el determinante que los tiene como filas.

$$det\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right| = 2 - 2 = 0$$

Luego los vectores son dependientes y en consecuencia las rectas son coplanarias.

b) Dicha recta puede venir definida por:

- Punto: Punto de corte de r y s.
- Vector: $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Vamos a calcular el punto de corte de las dos rectas. Un punto genérico de r tendrá la forma $R(\lambda, \lambda, 1)$.

Si sustituimos en s obtenemos:

$$\left. \begin{array}{rrrr} \lambda & - & \lambda & = 0 \\ \lambda & - & 1 & = 1 \end{array} \right] \Rightarrow \lambda = 2$$

Por tanto el punto buscado es $R(2,-2,1)$.

El vector es:

$$\vec{d} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = -\vec{i} - \vec{k} + \vec{k} - \vec{j} \Rightarrow \vec{d} = (-1,-1,0)$$

Luego la recta buscada es:

$$r_1: \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & 2 & - & \lambda \\ y = & -2 & - & \lambda \\ z = & 1 & & \end{array} \right.$$

2.1.28. **De todos los planos que pasan por los puntos $P = (0,0,-1)$ y $Q = (1,0,0)$, calcule uno que sea paralelo a la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $x - z = 0$**

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

Sea Π el plano buscado y r la recta. Es obvio que P no está en la recta. Voy a utilizar para calcular el plano dicho punto P, el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector director de la recta.

Como P no está en la recta, y usamos el vector director de la misma para calcular el plano, eso hace que la recta sea paralela al plano.

Tenemos que $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1)$. Vamos a pasar la ecuación de la recta a paramétricas para hallar un vector director de la misma.

$$z = \lambda \ ; \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 - \lambda \\ x = \lambda \end{array}\right.$$

La ecuación paramétrica será:

$$\left.\begin{array}{rccc} x = & & & \lambda \\ y = & 1 & - & \lambda \\ z = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

De aquí deducimos que un vector director de la recta puede ser $\vec{u} = (1,-1,1)$.

Por tanto, la ecuación paramétrica del plano es:

$$\left.\begin{array}{rccccc} x = & & & \lambda & + & \mu \\ y = & & & & - & \mu \\ z = & -1 & + & \lambda & + & \mu \end{array}\right\}$$

2.1.29. **Dados los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,0)$ y $C = (0,2,1)$, sea r la recta que pasa por A y B, y sea Π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Calcule el punto P_0 en el que se cortan r y Π.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a encontrar la ecuación paramétrica de la recta. Tenemos que $\overrightarrow{AB} = (0,-1,-1)$ y usando el punto B obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rccc} x = & 1 & & \\ y = & & - & \lambda \\ z = & & - & \lambda \end{array}\right\}$$

La ecuación general del plano la obtenemos usando como vector normal $\overrightarrow{AB}$, luego,

$$-y - z + D = 0$$

imponiendo que pase por C encontramos el valor de D.

$$-2 - 1 + D = 0 \Longrightarrow D = 3$$

En consecuencia la ecuación del plano es $-y - z + 3 = 0$.

Vamos a calcular el punto de corte usando la ecuación general del plano y un punto genérico de la recta $P(1,-\lambda,-\lambda)$.

$$\lambda + \lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Por tanto el punto buscado es $P\left(1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2.1.30. **Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, \mu, 0)$, donde λ y μ son número reales.**

a) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $cos\theta = 0$.

b) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $sen\theta = 0$.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

a) Sabemos que

$$cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Por tanto tenemos que

$$cos\theta = \frac{\lambda \cdot 1 + 1 \cdot \mu + 0 \cdot 0}{\sqrt{\lambda^2 + 1} + \sqrt{1 + \mu^2}} = 0 \Longrightarrow \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{\lambda^2 + 1} + \sqrt{1 + \mu^2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda + \mu = 0 \Longrightarrow \mu = -\lambda$$

b) Si $sen\theta = 0 \Longrightarrow cos\theta = 1$. Luego

$$cos\theta = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{\lambda^2 + 1} + \sqrt{1 + \mu^2}} = 1 \Longrightarrow \lambda + \mu = \sqrt{\lambda^2 + 1} + \sqrt{1 + \mu^2}$$

2.1.31. **Considere las rectas $r : \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = z \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = z \end{array} \right.$.**

Obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a 1 y sea ortogonal al vector $(-1, 0, 1)$

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad s : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \mu \\ y & = & 0 \\ z & = & \mu \end{array} \right.$$

Luego los puntos genéricos de las rectas son $P(1, \lambda, \lambda)$ y $Q(\mu, 0, \mu)$. Por tanto $\overrightarrow{PQ} = (\mu - 1, -\lambda, \mu - \lambda)$.

Vamos a imponer las dos condiciones y obtendremos el sistema que nos permitirá calcular λ y μ.

$$\left. \begin{array}{l} \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 1 \Longrightarrow \sqrt{(\mu - 1)^2 + \lambda^2 + (\mu - \lambda)^2} = 1 \Longrightarrow (\mu - 1)^2 + \lambda^2 + (\mu - \lambda)^2 = 1 \\ \\ \overrightarrow{PQ} \perp (-1, 0, -1) \Longrightarrow (\mu - 1, -\lambda, \mu - \lambda) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Longrightarrow -\mu + 1 + \mu - \lambda = 0 \end{array} \right]$$

De la segunda condición obtenemos que $\lambda = 1$ y sustituyendo en la primera tenemos:

$$(\mu-1)^2+1+(\mu-1)^2=1 \Longrightarrow \mu^2-2\mu+1+1+\mu^2-2\mu+1=1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2\mu^2-4\mu+2=0 \Longrightarrow \mu^2-2\mu+1=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu=1$$

Luego los puntos buscados son $P(1,1,1)$ y $Q(1,0,1)$.

2.1.32.

a) Determine el plano Π que pasa por el punto $(1,0,1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x+y+z=0$, $x-z=1$.

b) Calcule el punto en el que se cortan r y Π.

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

a) Usaremos como vector normal del plano el vector director de la recta. Vamos a calcular la ecuación paramétrica de la recta.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\lambda \\ x=\lambda \ ; \ y=-2\lambda \end{array}\right.$$

Luego el plano buscado viene determinado por $P(1,0,1)$ y $\vec{n}=(1,-2,1)$.

Por tanto

$$x-2y+z+D=0$$

Imponiendo que P pertenezca al plano calculamos D.

$$1+1+D=0 \Longrightarrow D=-2$$

En consecuencia el plano buscado es

$$x-2y+z-2=0$$

b) Un punto genérico de la recta es $Q(\lambda,-2\lambda,\lambda)$. Vamos a sustituirlo en la ecuación del plano para calcular λ.

$$\lambda+4\lambda+\lambda-2=0 \Longrightarrow 6\lambda-2=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Luego el punto buscado es $Q\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2.1.33.

a) Estudie, en función de los parámetros a y b, la posición relativa de la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$ y el plano $\Pi \equiv x+y+az=b$.

b) Para cada una de las posiciones obtenidas, diga cómo es el sistema formado por las tres ecuaciones

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + az = b$$

(Junio 11)

- Solución:

En el primer apartado, la recta que nos dan es el propio eje Z, luego puedo usar como punto de la recta $O(0,0,0)$ y como vector director $\vec{k} = (0,0,1)$. Por otro lado tenemos que un vector normal al plano es $\vec{n} = (1,1,a)$ y un punto del mismo es $P(b,0,0)$ (basta con sustituir $y = z = 0$).

Hagamos el producto escalar de los dos vectores y tenemos:

$$\vec{k} \cdot \vec{n} = a$$

De aquí deducimos que si $a \neq 0$ la recta r corta al plano Π en un punto.

Si $a = 0$ la recta es paralela o está contenida en el plano.

Para que la recta esté contenida en el plano es basta con que el O esté en el plano. Eso sólo es posible si $b = 0$.

En resumen:

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow r$ corta a Π.
- Si $a = 0$ y $b = 0 \Longrightarrow r$ está contenida en el plano.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Longrightarrow r$ es paralela al plano.

Otra forma de hacerlo sería haber estudiado el sistema formado por la recta y el plano:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & b \end{array}\right]$$

Veámoslo y contestaremos de paso al segundo apartado. La matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right)$$

Es evidente que el rango de la matriz de los coeficientes es al menos 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Vamos a calcular el determinante de la matriz de los coeficientes para ver los casos resultantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a$$

En consecuencia tenemos que si $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado, y por tanto la recta y el plano se cortan en un punto.

Si $a = 0$ vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada. Es obvio que dicho rango es mayor o igual que 2. Estudiemos el menor de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b$$

Por tanto:

- Si $a = 0$ y $b = 0 \Longrightarrow RgA = RgA' = 2 \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado ($r \subset \Pi$).
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Longrightarrow RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible ($r \parallel \Pi$).

2.1.34. Considere las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{array} \right.$ **y** $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

a) Determine el plano Π que contiene a la recta r y corta perpendicularmente a la recta s.

b) Calcule el punto donde se cortan el plano Π y la recta s.

(Junio 11)

- Solución:

Vamos a pasar la recta r a paramétricas. Hacemos $x = \mu$ y tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{lrrl} x = & & & \mu \\ y = & & - & \mu \\ z = & -1 & + & \mu \end{array} \right.$$

Es evidente que $r \perp s$, pues lo son sus vectores directores. Veamos el primer apartado.

Como $\Pi \perp s$ el propio vector director de la recta nos vale como vector normal al plano. Además como $r \perp s$ tenemos que, o bien Π contiene a r, o bien $r \parallel \Pi$.

Luego, para que la recta esté contenida en el plano, basta con imponer que un punto de la recta esté en el plano (podemos tomar $A(0, 0, -1)$ que pertenece a r).

$$\left. \begin{array}{l} \Pi : y + z = b \\ A(0, 0, -1) \in \Pi \end{array} \right] \Longrightarrow b = -1 \Longrightarrow \Pi : y + z = -1$$

El segundo apartado nos pide que encontremos el punto de corte de s y Π. El punto que buscamos, por pertenecer a s, tiene la siguiente forma $P(1, \lambda, \lambda)$. Sustituyendo en Π tenemos.

$$\lambda + \lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = \frac{-1}{2} \Longrightarrow P\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

2.2. Problemas métricos

2.2.1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1, 1, 2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0); (1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a asignarles un nombre a los puntos $A(1, 1, 2)$; $B(1, 1, 0)$; $C(1, 0, 1)$ y $D(0, 1, 1)$.

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por B, C y D. Para ello vamos a usar $B, \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$. Empecemos por calcular los vectores, que tendrían por coordenadas $\overrightarrow{BC}(0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{BD}(-1, 0, 1)$.

Por tanto la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) - (y-1) - z = -x + 1 - y + 1 - z = -x - y - z + 2$$

Por tanto vale como ecuación $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$.

Vamos a calcular la distancia.

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 1 + 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

2.2.2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(3, 5, 0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0, 1, 2)$ y $(0, 1, 1)$.

(Junio 00)

- Solución:

A los puntos vamos a designarlos por $A(3, 5, 0), B(0, 1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$. La recta que pasa por B y C queda definida por $B(0, 1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, 0, -1)$. La distancia la calculamos por la fórmula conocida.

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

donde $\overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2)$. El producto vectorial del numerador queda:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (4, -3, 0)$$

Luego:

$$d(A, r) = \frac{\sqrt{16 + 9}}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u.}$$

2.2.3. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre dos puntos.

(Junio 01)

- Solución:

Al ser una pregunta teórica puedes encontrar la solución en cualquier libro.

2.2.4. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(1,0,1),(2,0,2),(3,1,3)$ y $(1,2,1)$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Para que formen un cuadrilátero tienen que ser coplanarios. Vamos a empezar por comprobar esto. Para eso vamos a asignarles nombre a los puntos $A(1,0,1)$; $B(2,0,2)$; $C(3,1,3)$ y $D(1,2,1)$. Vamos a considerar los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$; $\overrightarrow{AC}=(2,1,2)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

En consecuencia los vectores son linealmente dependientes y por tanto los puntos son coplanarios. La figura 2.2 nos muestra el cuadrilátero.

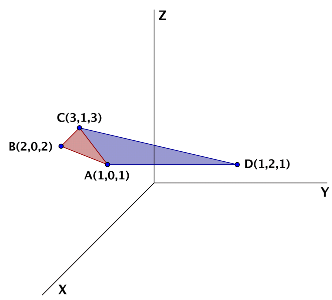


Figura 2.2: Representación gráfica del cuadrilátero.

Para calcular el área vamos a dividir el cuadrilátero, como observamos en la figura 2.2, en dos triángulos que serían ABC y ACD, después calcularemos el área de cada uno y por último sumaremos las dos para obtener el área que nos solicitan.

- Área de ABC

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2\vec{j}}+\vec{k}-\cancel{2\vec{j}}-\vec{i}\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$$

Luego:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(-1,0,1)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{u}^2$$

- Área de ACD

$$A_{ACD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right|$$

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k}-4\vec{i}\Longrightarrow \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}=(-4,0,4)$$

Luego:

$$A_{ACD}=\frac{1}{2}\left|(-4,0,4)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}\ \mathrm{u}^2$$

Luego el área que nos pedían es:

$$A = A_{ABD} + A_{ACD} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$$

2.2.5. Determinar una constante a para que el plano de ecuación $ax + y + z = 2$ forme un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $z = 0$.

(Junio 03)

- Solución:

Sabemos que la fórmula para hallar el ángulo es:

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

Los vectores normales de cada plano son:

$$\begin{array}{lcl} ax + y + z = 2 & \Longrightarrow & \overrightarrow{n_1} = (a, 1, 1) \\ z = 0 & \Longrightarrow & \overrightarrow{n_2} = (0, 0, 1) \end{array}$$

Luego tenemos que

$$cos\alpha = \frac{|(a, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{|(a, 1, 1)| \cdot |(0, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2} \cdot 1}$$

Como $\alpha = \pi/3$, sustituyendo resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}} = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\sqrt{a^2 + 2} = 2 \Longrightarrow a^2 + 2 = 4 \Longrightarrow a^2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

2.2.6. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 2, 0)$. Determinar la distancia del punto $(2, 1, 1)$ a dicho plano.

(Junio 04)

- Solución:

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Para ello vamos a considerar los tres puntos con los siguientes nombres: $A(1, 0, 0); B(0, 1, 1); C(1, 2, 0)$. Dicho esto, vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por el punto A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Por tanto tenemos $A(1, 0, 0), \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2z - 2(x - 1) = -2x - 2z + 2 = 0 \Rightarrow x + z - 1 = 0$$

Una vez hallada la ecuación del plano vamos a calcular la distancia del punto $P(2, 1, 1)$ a dicho plano.

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ u.}$$

2.2.7. Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(Junio 05)

- Solución:

Basta con tomar un vector perpendicular al vector director de la recta ($\vec{u}$) y un punto A de la misma. Le sumamos a dicho punto un vector de módulo 2 y que tenga la dirección y sentido del vector perpendicular calculado. De entrada tenemos que el punto A puede ser $A(1,0,1)$ y que el vector director puede ser $\vec{u} = (1,1,-1)$. Un vector perpendicular a $\vec{u}$ puede ser $\vec{v} = (0,1,1)$, pues tenemos que:

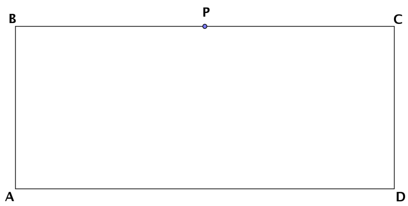
$$\vec{u} \perp \vec{v}, \text{ pues } (0,1,1).(1,1,-1) = 0$$

Falta por encontrar un vector de la dirección de $\vec{v}$ pero de módulo 2. Por ejemplo podemos tomar $\vec{w} = (0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Con estos datos, el punto buscado es:

$$P = A + \vec{w} = (1,0,1) + (0,\sqrt{2},\sqrt{2}) = (1,\sqrt{2},1+\sqrt{2})$$

2.2.8. Si los lados de un rectángulo *ABCD* miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo *PAC*, donde P es el punto medio del lado *BC*:



(Junio 05)

- Solución:

El ángulo al que nos referimos viene representado en la figura 2.3

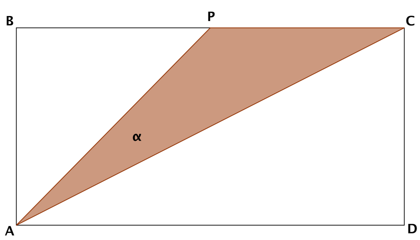


Figura 2.3: Visión del ángulo

Para resolverlo vamos a asignarle coordenadas a los puntos:

$$A(0,0,0); B(0,0,1); C(0,4,1); D(0,4,0); P(0,2,1).$$

El ángulo que buscamos sería el formado por los vectores $\overrightarrow{AP} = (0,2,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,4,1)$. Por tanto tendríamos:

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(0,2,1)\cdot(0,4,1)}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+1^2}} = \frac{0+8+1}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{16+1}} = \frac{9}{\sqrt{85}}$$

En consecuencia:

$$\alpha = arccos\frac{9}{\sqrt{85}} = 12^o 31' 44''$$

2.2.9. Si A, B y C son los puntos de coordenadas $(1,0,0)$; $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respectivamente

a) Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.

b) Determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

(Septiembre 05)

- Solución:

a) Empezaremos por calcular el área del triángulo. Dicho área se calcula con la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

Vamos a calcular los vectores y a realizar el producto vectorial:
$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$.
Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} + \vec{j} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1,1,1)$$

En consecuencia, el área buscada es:

$$A_T = \frac{|(1,1,1)|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

b) Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden. para ello usamos la fórmula conveniente que es:

$$cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\alpha = arccos\frac{1}{2} = 60^o$$

2.2.10. Calcula el ángulo que forma el plano $x+y+z=0$ con la recta de ecuaciones $x+y=1$, $y+z=1$.

(Septiembre 06)

- Solución:

Para hallar el ángulo vamos a utilizar la fórmula:

$$cos(90^o - \alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$

donde $\vec{u}$ es el vector director de la recta y $\vec{n}$ el vector normal al plano. Vamos a calcularlos.

- Empezemos por el plano $x+y+z=0$, cuyo vector normal es $\vec{n}=(1,1,1)$.
- El vector director de la recta vamos a obtenerlo haciendo el producto vectorial de los vectores normales ($\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$) de los planos que determinan la recta. Dichos vectores normales son:

$$x+y=1 \Longrightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$$

$$y+z=1 \Longrightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$$

Por tanto el vector director será:

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}-\vec{j}\Longrightarrow \vec{u}=(1,-1,1)$$

Por tanto el coseno del ángulo buscado es:

$$cos(90^o-\alpha)=\frac{|(1,1,1)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\frac{|1-1+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

En consecuencia:

$$90^o-\alpha=arccos\frac{1}{3}\Longrightarrow 90^o-\alpha=70^o31'42''\Longrightarrow \alpha=90^o-70^o31'42''=19^o28'18''$$

2.2.11. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x+y+z=1$ con los ejes coordenados.

(Septiembre 07)

- Solución:

Vamos a calcular las coordenadas de los vértices del triángulo.

- Eje X $\Longrightarrow (y=0;z=0)\Longrightarrow x=1\longrightarrow A(1,0,0)$
- Eje Y $\Longrightarrow (x=0;z=0)\Longrightarrow y=1\longrightarrow B(0,1,0)$
- Eje Z $\Longrightarrow (x=0;y=0)\Longrightarrow z=1\longrightarrow C(0,0,1)$

Conocidos los vértices vamos a calcular el área que nos piden. Sabemos que:

$$A_T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$$

Las coordenadas de los vectores son $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$; $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$.
El producto vectorial de ambos es:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}+\vec{j}$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$$

El área buscada será:

$$A_T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

2.2.12.

a) **Compruebe que la recta** $r : \begin{cases} x = & 1 & + & \lambda \\ y = & & & \lambda \\ z = & & & \lambda \end{cases}$ **es perpendicular al plano** $\Pi : x + y + z = 1$**.**

b) **Calcule los dos puntos de la recta** r **cuya distancia al plano** Π **es igual a** $\sqrt{3}$ **unidades.**

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a responder en primer lugar al primer apartado. Para comprobar lo que nos piden tenemos que probar que el vector director de la recta tiene la misma dirección que el vector normal del plano, es decir, son proporcionales.

El vector director de r es $\vec{d} = (1,1,1)$ y el vector normal del plano Π es $\vec{n} = (1,1,1)$, luego r es perpendicular a Π.

Para resolver el segundo apartado vamos a coger un punto genérico de la recta r, que tienen la forma $P(1+\lambda, \lambda, \lambda)$.

Vamos a calcular la distancia de estos puntos al plano Π e imponer que dicha distancia valga $\sqrt{3}$.

$$d(P,\Pi) = \frac{|1+\lambda+\lambda+\lambda-1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |3\lambda| = 3$$

Por tanto tenemos que:

$$|3\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P_1(2,1,1) \\ 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P_2(0,-1,-1) \end{cases}$$

2.2.13. **Calcula el ángulo que forma el plano** $\sqrt{3}x - z = 3$ **con la recta de ecuaciones** $x + y = 1$**,** $y - x = -1$ **(Los ángulos se miden en radianes)**

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

La fórmula para calcular el ángulo pedido sería:

$$sen\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

El vector normal al plano es $\vec{n} = \left(\sqrt{3}, 0, -1\right)$.

Para hallar el vector director de la recta vamos a pasar la ecuación de la misma a paramétricas. Resolvemos el sistema haciendo $z = \lambda$. Por reducción obtenemos que:

$$2y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que $x = 1$. Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

de lo que deducimos que el vector director sería $\vec{v} = (0,0,1)$.

Ya que tenemos todos los datos vamos a calcular el ángulo:

$$sen\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 0 + 0\cdot 0 - 1\cdot 1\right|}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$\alpha = arcsen\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\ rad$$

2.2.14. Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto $P = (\lambda, 1, \mu)$ al plano determinado por los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,0)$ y $C = (0,2,1)$ sea igual a 1.

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a calcular la ecuación general del plano. Dicho plano puede venir determinado por A, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Tenemos que $A(1,1,1)$, $\overrightarrow{AB} = (0,-1,-1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$.

Por tanto la ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = y-1-(z-1)+x-1 = x+y-z-1 = 0$$

En consecuencia tenemos que el plano es $x+y-z-1=0$. La distancia del punto P al plano es:

$$d(P,\Pi) = \frac{|\lambda+1-\mu-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{3}}$$

Para que la distancia sea 1 tiene que cumplirse que:

$$\frac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{3}} \Longrightarrow |\lambda-\mu| = \sqrt{3}$$

2.2.15. Fijados los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (0,1,0)$, obtenga la relación que deben cumplir los número reales λ y μ para que el punto $P = (\lambda, \mu, 0)$ sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Vamos a construir los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$.

Tenemos que $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ y que $\overrightarrow{AP} = (\lambda-1,\mu,0)$.

El área del triángulo se calcula usando la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right|$$

Calculemos primero el producto vectorial

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -\mu\vec{k} - (\lambda-1)\vec{k} = (\lambda-\mu-1)\vec{k}$$

Por tanto

$$\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right| = \lambda-\mu-1$$

Y en consecuencia:

$$A = \frac{\lambda - \mu - 1}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda - \mu - 1 = 2 \Longrightarrow \lambda - \mu = 1$$

2.2.16. **Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (1,-1,0)$, y sea s la recta que pasa por los puntos $C = (0,1,1)$ y $D = (1,0,-1)$.**

a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

(Septiembre 11)

- Solución:

Vamos a calcular antes de nada las ecuaciones de r y s.

- r viene determinada por A y $\overrightarrow{AB}$. Es fácil ver que $\overrightarrow{AB} = (0,-1,0)$. Por tanto:

$$r : \left\{ \begin{array}{rccc} x = & 1 & & \\ y = & & - & \lambda \\ z = & 0 & & \end{array} \right.$$

- s viene determinada por C y $\overrightarrow{CD}$. Es fácil ver que $\overrightarrow{CD} = (1,-1,-2)$. Por tanto:

$$s : \left\{ \begin{array}{rccc} x = & & & \mu \\ y = & 1 & - & \mu \\ z = & 1 & - & 2\mu \end{array} \right.$$

Encontradas las ecuaciones vamos a contestar a los apartados.

a) Para construir el plano vamos a usar el punto C y el vector $\overrightarrow{CD}$ (pues $s \subset \Pi$) y el vector $\overrightarrow{AB}$ (pues $r \parallel \Pi$). En paramétricas tenemos:

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{rccccc} x = & & & & + & \mu \\ y = & 1 & - & \lambda & - & \mu \\ z = & 1 & & & - & 2\mu \end{array} \right.$$

La ecuación general será:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2x + (z-1) = 0 \Longrightarrow 2x + z = 1$$

b) Como sus vectores directores no son proporcionales las rectas r y s se cortan o se cruzan. Vamos a aplicar para calcular la distancia la fórmula de dos rectas que se cruzan, pues si se cortan la distancia dará 0.

$$d(r,s) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

Vamos calcular primero el producto mixto y el producto vectorial.

$$\left[\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{v} \right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = (2, 0, 1)$$

Luego:

$$d(r, s) = \frac{|-1|}{|(2, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2.2.17.

a) Calcule las ecuaciones implicitas de la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B(-1, 0, -1)$.

b) De todos los planos que contienen a la recta r, obtenga uno cuya distancia al punto $C = (0, -1, 0)$ sea igual a 1.

(Septiembre 11)

- Solución:

a) Vamos a usar el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$.
El vector buscado es: $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -1)$. Por comodidad vamos a usar $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$.
La recta en forma continua será:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

La ecuación implicita es:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - 1 = 2z \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - 2z = 1 \end{array}\right]$$

b) Un plano que contenga a r tiene que pasar por un punto de r y su vector normal ser ortogonal al vector director r. El plano será $\Pi \equiv ax + by + cz = d$.
Como $A \in \Pi \Longrightarrow a = d \Longrightarrow \Pi \equiv ax + by + cz = a$.
Además tenemos que:

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Longrightarrow (2, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Longrightarrow 2a + c = 0 \Longrightarrow c = -2a$$

En consecuencia nuestro plano tiene una ecuación de la forma $\Pi \equiv ax + by - 2az = a$.
Impongamos la condición de la distancia:

$$\begin{array}{rcl} d(C, \Pi) & = & \dfrac{|-b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4a^2}} = 1 \Longrightarrow \dfrac{|-b|}{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 1 \Longrightarrow \sqrt{5a^2 + b^2} = |-b| \\ & \Longrightarrow & 5a^2 + b^2 = |-b|^2 \Longrightarrow 5a^2 + b^2 = b^2 \Longrightarrow 5a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \end{array}$$

Luego el plano buscado es $by = 0 \Longrightarrow y = 0$.