Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2014-2015	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A (Junio 2015)

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos.
¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

EJERCICIO 2

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{3\ln(x)}{x^3}$, $\quad g(x) = (1 - x^2)\cdot(x^3 - 1)^2$, $\quad h(x) = 3x^2 - 7x + \dfrac{1}{3^{2x}}$

b) **(1 punto)** Halle las asíntotas de la función $p(x) = \dfrac{x}{3x - 12}$.

EJERCICIO 3

De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60% de los hombres y el 70% de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.
a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?
b) **(1 punto)** Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

EJERCICIO 4

La calificación en Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1.2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones:

3 8 6 3 9 1 7 7 5 6

a) **(1.75 puntos)** Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de significación del 5%, plantee el contraste unilateral correspondiente ($H_0 : \mu \leq 5$), determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.
b) **(0.75 puntos)** ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B (Junio 2015)

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **(1.7 puntos)** Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.
b) **(0.8 puntos)** Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:
$$A + D = C \qquad A\cdot D = C^t \qquad D\cdot A = C \qquad D\cdot A = C^t$$

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x+a}{x-1} & \text{si } \quad x > 2 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que la función sea continua.
b) **(0.75 puntos)** ¿Para $a = -10$, es creciente la función en $x = 3$?
c) **(0.75 puntos)** Halle sus asíntotas para $a = -10$.

EJERCICIO 3

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.
a) **(1.25 puntos)** Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?
b) **(1.25 puntos)** Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

EJERCICIO 4

Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores de los tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza $\sigma^2 = 0.25\ mm^2$. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.
b) **(1 punto)** Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Con motivo de su inauguración, una heladería quiere repartir dos tipos de tarrinas de helados. El primer tipo de tarrina está compuesto por 100 g de helado de chocolate, 200 g de helado de straciatella y 1 barquillo. El segundo tipo llevará 150 g de helado de chocolate, 150 g de helado de straciatella y 2 barquillos. Sólo dispone de 8 kg de helado de chocolate, 10 kg de helado de straciatella y 100 barquillos.
¿Cuántas tarrinas de cada tipo se deben preparar para repartir el máximo número posible de tarrinas?

Llevamos a una tabla los datos del problema:

Tipos de tarrinas	Nº a preparar	Chocolate (g)	Straciatella (g)	Barquillos (u)
A	x	$100x$	$200x$	x
B	y	$150y$	$150y$	$2y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$100x + 150y \leq 8000$	$200x + 150y \leq 10000$	$x + 2y \leq 100$

Hay que maximizar el número de tarrinas. Por tanto, la *función objetivo*, a maximizar, es $F(x, y) = x + y$.

En definitiva, el ejercicio consiste en:

Función objetivo: $F(x, y) = x + y$ (MAXIMIZAR)

Restricciones:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad 100x + 150y \leq 8000; \quad 200x + 150y \leq 10000; \quad x + 2y \leq 100.$$

Dibujamos la región factible. Trazamos las recta asociadas a cada inecuación y señalamos con flechitas el semiplano solución.

- $x \geq 0$: Semiplano a la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Semiplano encima del eje OX.
- $100x + 150y = 8000 \Leftrightarrow 2x + 3y = 160$

x	0	80
y	160/3	0

  Como la inecuación es: $100x + 150y \leq 8000 \Leftrightarrow y \leq \dfrac{-100x + 8000}{150}$, la región que designa es el semiplano que está por debajo de la recta (son los puntos para los que y es menor o igual al valor que, para el mismo x, toma la recta).

- $200x + 150y = 10000 \Leftrightarrow 4x + 3y = 200$

x	0	50
y	200/3	0

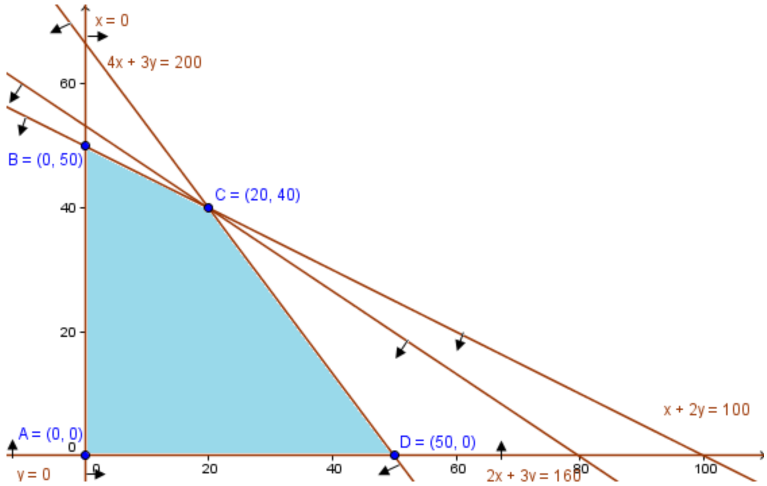
  Como la inecuación es: $200x + 150y \leq 10000 \Leftrightarrow y \leq \dfrac{-200x + 10000}{150}$, la región que designa es el semiplano que está por debajo de la recta.

- $x + 2y = 100$

x	0	100
y	50	0

  Y siendo la inecuación: $x + 2y \leq 100 \Leftrightarrow y \leq \dfrac{-x + 100}{2}$, la región buscada es la que está bajo la recta.

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).



Los vértices $\boxed{A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 50)}$ $\boxed{y\ \ D(50,\ 0)}$ los tenemos de las tablas usadas para dibujar las rectas.

El punto restante parece ser común a tres rectas. Vamos a calcularlo y comprobarlo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=160 \\ x+2y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=160 \\ -2x-4y=-200 \end{array}\right\}$$

$$-y=-40 \Rightarrow y=40$$

$\Rightarrow$ Sustituyendo en la 2ª: $x + 80 = 100 \ \Rightarrow\ x = 20$

Por tanto, $\boxed{C(20,\ 40)}$. Y este punto verifica la ec. de la otra recta: $4\cdot 20 + 3\cdot 40 = 80 + 120 = 200$. Es, en efecto, intersección de las tres.

Para calcular el óptimo de la función objetivo en el recinto, hallamos el valor de ésta en cada vértice:

$F(A) = F(0,\ 0) = 0 + 0 = 0$
$F(B) = F(0,\ 50) = 0 + 50 = 50$
$F(C) = F(20,\ 40) = 20 + 40 = 60$
$F(D) = F(50,\ 0) = 50 + 0 = 0$

En definitiva, se deben fabricar 20 tarrinas del primer tipo y 40 del segundo. El número total de tarrinas así fabricadas es de 60.

EJERCICIO 2

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{3\ln(x)}{x^3}$, $\quad g(x) = (1 - x^2)\cdot(x^3 - 1)^2$, $\quad h(x) = 3x^2 - 7x + \dfrac{1}{3^{2x}}$

Se admiten, en Selectividad, las derivadas sin simplificar, si no se han pedido en el enunciado, como es el caso. Aún así, damos, también, las respuestas simplificadas:

- $\boxed{f'(x) = \dfrac{\frac{3}{x}x^3 - 3x^2 3\ln(x)}{x^6}} = \dfrac{3x^2 - 9x^2\ln(x)}{x^6} = \dfrac{x^2(3 - 9\ln(x))}{x^6} = \boxed{\dfrac{3 - 9\ln(x)}{x^4}}$
- $\boxed{g'(x) = -2x(x^3 - 1)^2 + (1 - x^2)2(x^3 - 1)3x^2} = 2x(x^3 - 1)[-(x^3 - 1) + 3x(1 - x^2)] =$
  $= 2x(x^3 - 1)(-x^3 + 1 + 3x - 3x^3) = \boxed{2x(x^3 - 1)(-4x^3 + 3x + 1)}$
- $h(x) = 3x^2 - 7x + \dfrac{1}{3^{2x}} = 3x^2 - 7x + 3^{-2x} \ \Rightarrow \boxed{h'(x) = 6x - 7 - 2\cdot 3^{-2x}\ln(3)}$

b) **(1 punto)** Halle las asíntotas de la función $p(x) = \dfrac{x}{3x-12}$.

La única discontinuidad de esta función está en $x = 4$, que anula el denominador. Por tanto:

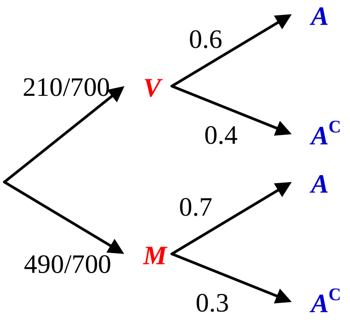
- Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{3x-12} = \left(\dfrac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{La recta } x = 4 \text{ es A.V.}}$
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{3x-12} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ $\boxed{\text{La recta } y = 1/3 \text{ es A.H.}}$
- Asíntota oblicua: Si intentásemos calcularla, obtendríamos la horizontal que ya conocemos.

EJERCICIO 3

De los 700 alumnos matriculados en una asignatura, 210 son hombres y 490 mujeres. Se sabe que el 60% de los hombres y el 70% de las mujeres aprueban dicha asignatura. Se elige una persona al azar.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura?

Podemos llevar los datos a un diagrama de árbol.



De ahí obtenemos, por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$\boxed{P(A) =} \frac{210}{700}0.6 + \frac{490}{700}0.7 = \boxed{\frac{67}{100} = 0.67}$$

b) **(1 punto)** Sabiendo que ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Por el axioma de la *probabilidad condicionada*, de donde procede el *Teorema de Bayes*:

$$\boxed{P(M/A) =} \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{490}{700}0.7}{\frac{67}{100}} = \boxed{\frac{49}{67} \approx 0.7313}$$

EJERCICIO 4

La calificación en Matemáticas de los alumnos de un centro docente es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de desviación típica 1.2. Una muestra de 10 alumnos ha dado las siguientes calificaciones:

3 8 6 3 9 1 7 7 5 6

a) **(1.75 puntos)** Se tiene la creencia de que la calificación media de los alumnos del centro en Matemáticas es a lo sumo 5 puntos. Con un nivel de significación del 5%, plantee el contraste unilateral correspondiente ($H_0 : \mu \leq 5$), determine la región crítica y razone si la creencia es fundada o no.

Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes (recordar que en la *nula* siempre tiene que haber un *igual*, estricto o con un *menor* o *mayor*:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 5 \\ H_1 : \mu > 5 \end{cases}$$

Sabemos que $n = 10$, pero como los datos proceden de una población Normal se puede realizar el contraste.

Como es unilateral, y siendo H_0: $\mu \leq 5$, la región de aceptación será $(-\infty, z_\alpha)$. Ya que $\alpha = 0.05 \Rightarrow P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$ nos lleva a que $z_\alpha = 1.645$. Por todo ello, la *región de aceptación* a este nivel de significación será $RA_{0.05} = (-\infty, 1.645)$. Pero nos piden la crítica. De modo que:

$\boxed{RC_{0.05} = (1.645, +\infty)}$.

El estadístico del contraste es: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$. Tenemos:

$\bar{x} = \dfrac{3+8+6+3+9+1+7+7+5+6}{10} = 5.5$

$\mu_0 = 5$; $\sigma = 1.2$; $n = 10$

De donde: $Z = \dfrac{5.5-5}{1.2/\sqrt{10}} = 1.318 \in RA_{0.05}$ $\Rightarrow$ Por tanto:

Aceptamos la hipótesis nula, es decir, que la calificación media es menor o igual que 5, con un nivel de significación del 5%.

b) **(0.75 puntos)** ¿Obtendría la misma respuesta si el nivel de significación fuese del 15%?

$\alpha = 0.15 \Rightarrow P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.85$ nos lleva a que $z_\alpha = 1.03$. Por ello, ahora $RA_{0.05} = (-\infty, 1.03)$. Como $Z = 1.318$ no pertenece a la región de aceptación, deberíamos rechazar la hipótesis nula, con un riesgo de error de tipo I del 15%. No se obtiene, pues, la misma respuesta.

OPCIÓN B
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **(1.7 puntos)** Calcule las matrices X e Y si $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$.

Nos plantean la resolución de un sistema de ecuaciones matriciales.

$$\left.\begin{array}{r} X + Y = 2A \\ \underline{X - 2Y = -B} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} X + Y = 2A \\ \underline{-X + 2Y = B} \end{array}\right\}$$

$$3Y = 2A + B \Rightarrow Y = \frac{1}{3}(2A + B)$$

Hemos de tener presente que no trabajamos con números reales, sino con matrices. Ello es necesario, por ejemplo, al despejar Y, porque 3 no puede pasar dividiendo, ya que *no está definida la operación "división de una matriz entre un número real"*, pero sí el *producto externo*. Lo que hemos obtenido es el producto externo de un número real (1/3) por una matriz. Calculemos la operación:

$$Y = \frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación matricial:

$$X = 2A - Y = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que la solución es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) **(0.8 puntos)** Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D:

$$A + D = C \qquad A \cdot D = C^t \qquad D \cdot A = C \qquad D \cdot A = C^t$$

- $\boxed{A + D = C\text{, no es posible}}$, pues dim($A$) = 2 x 2 $\Rightarrow$ para poderla sumar con A, D debería tener la misma dimensión. Pero el resultado C tendría es dimensión y no es así.
- $A \cdot D = C^t$ requiere que D tenga 2 filas (igual al número de columnas de A). Para que resulte C^t, como dim(C^t) = 2 x 3, debe ser $\boxed{\text{dim}(D) = 2 \times 3\text{. El producto se puede realizar}}$:
$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & D & = & C^t \\ 2 \times 2 & \cdot & 2 \times 3 & = & 2 \times 3 \end{array}$$
- $\boxed{\text{Si dim}(D) = 3 \times 2\text{, se puede realizar el producto}}$:
$$\begin{array}{ccccc} D & \cdot & A & = & C \\ 3 \times 2 & \cdot & 2 \times 2 & = & 3 \times 2 \end{array}$$
- $\boxed{D \cdot A = C^t \text{ no puede realizarse}}$, porque A debería tener 3 columnas:
$$\begin{array}{ccccc} D & \cdot & A & = & C^t \\ 2 \times 2 & \cdot & 2 \times 2 & \neq & 2 \times 3 \end{array}$$

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{8x+a}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que la función sea continua.

Es necesario comprobar no sólo $x = 2$, sino todo el dominio, porque la función podría tener alguna discontinuidad en algún otro punto y el problema, en ese caso, no tendría solución.

- En [0, 2): f es continua, porque está definida por una expresión polinómica.
- En (2, +∞): f es continua, porque está definida por una función racional, la cual es continua en su dominio, que es R –{1}, y la única discontinuidad, $x = 1$, no está en este intervalo.
- $x = 2$: 1) $\exists f(2) = 2^2 + 2 = 6$; 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2) = 6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{8x+a}{x-1} = \dfrac{16+a}{1} = 16 + a$. Para ser continua, estos tres resultados deben coincidir:

$$16 + a = 6 \Rightarrow a = -10$$

En conclusión, $\boxed{\text{la función es continua en su dominio si y sólo si } a = -10}$.

b) **(0.75 puntos)** ¿Para $a = -10$, es creciente la función en $x = 3$?

Estudiamos la monotonía en $x = 3$. En un entorno de dicho punto, f está definida por la función $g(x) = \dfrac{8x-10}{x-1}$. Nos limitamos a ella, entonces. Al derivarla:

$$g'(x) = \frac{8(x-1)-(8x-10)}{(x-1)^2} = \frac{8x-8-8x+10}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

Como $g'(3) > 0 \Rightarrow g$ es $\boxed{\text{estrictamente creciente en } x = 3}$. Por tanto, también lo es f.

c) **(0.75 puntos)** Halle sus asíntotas para $a = -10$.

En el tramo [0, 2] no tiene asíntotas, al ser continua y estar definida por una función polinómica. En (2, +∞) es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales. Sólo en este intervalo puede tender a infinito la x:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x+a}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{x} = 8$$

La recta $y = 8$ es asíntota horizontal cuando x tiende a +∞. Es la única asíntota, porque, además de lo dicho, si intentásemos calcular una oblicua obtendríamos la horizontal que ya tenemos.

EJERCICIO 3

La proporción de personas de una población que tiene una determinada enfermedad es de 1 por cada 500 personas. Se dispone de una prueba para detectar dicha enfermedad. La prueba detecta la enfermedad en el 90% de los casos en que la persona está enferma, pero también da como enfermas al 5% de las personas sanas.

a) **(1.25 puntos)** Se elige al azar una persona y se le hace la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido diagnosticada correctamente?

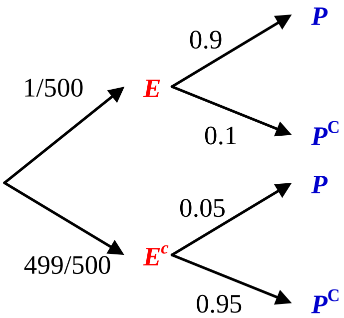
Vamos a llamar E = “la persona está enferma” y P = “La prueba da positivo”.

Podemos llevar los datos a un diagrama de árbol.

Nos piden:

$$\boxed{P(P/E \ \cup \ P^c/E^c) =}$$

que, al ser dos sucesos incompatibles (la persona no puede estar enferma y no enferma a la vez):



$$= \frac{P(P\cap E)}{P(E)} + \frac{P(P^c\cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{\frac{1}{500}0.9}{\frac{1}{500}} + \frac{\frac{499}{500}0.05}{\frac{499}{500}} =$$

$$= \boxed{0.95}$$

b) **(1.25 puntos)** Si la prueba ha diagnosticado que la persona está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté? ¿Y de que esté sana?

Por la *Fórmula de Bayes*:

$$\boxed{P(E/P) =} \frac{P(E\cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{500}0.9}{\frac{1}{500}0.9 + \frac{499}{500}0.05} = \boxed{\frac{18}{517} \approx 0.03482}$$

$$\boxed{P(E^c/P) =} 1 - P(E/P) = 1 - \frac{18}{517} = \boxed{\frac{499}{517} \approx 0.9652}$$

Resultan llamativos los resultados porque, a pesar de que la prueba es bastante eficaz, dada la baja incidencia de la enfermedad, la probabilidad de que la persona esté realmente enferma es bastante baja.

EJERCICIO 4

Un fabricante de tuberías de PVC sabe que la distribución de los diámetros interiores de los tubos de conducción de agua que produce sigue una ley Normal con varianza $\sigma^2 = 0.25\ mm^2$. Para estimar el diámetro medio de esas tuberías, toma una muestra aleatoria de 64 tubos y comprueba que el diámetro medio de esa muestra es de 20 mm.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la media de los diámetros de los tubos que fabrica.

Siendo X = "*diámetro*" $\in$ N(μ, 0.5), puesto que $\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5\ mm$, se puede construir el intervalo de confianza, por ser X Normal. Si no lo hubiese sido, también, porque $n \geq 30$ y aplicaríamos el *Teorema Central del Límite*. Tenemos:

$$n = 64; \quad \sigma = 0.5; \quad \bar{x} = 20.$$

Además: $1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.99$ lleva a que: $z_{\alpha/2} = 2.33$.

El intervalo al 98% para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(20 - 2.33\frac{0.5}{\sqrt{64}},\ 20 - 2.33\frac{0.5}{\sqrt{64}}\right) = \boxed{(19.8544,\ 20.1456)}$$

b) **(1 punto)** Halle el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa distribución para que la amplitud de un intervalo de confianza, con ese mismo nivel de confianza, sea inferior a 2 mm.

$$Amplitud = 2E = 2\ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 1 > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} > z_{\alpha/2}\sigma = 2.33\cdot 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; n > (2.33 \cdot 0.5)^2 = 1.357 \;\Rightarrow\; \boxed{n = 2}.$$