Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2012-2013	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:	**a) Duración: 1 hora y 30 minutos.** **b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.** **c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.** **d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.** **e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.**

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$,
siendo a un número real cualquiera.
a) **(1 punto)** Obtenga la matriz A^{2014}.
b) **(1.5 puntos)** Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

EJERCICIO 2

La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138, \quad x \geq 0$
a) **(1 punto)** Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.
b) **(0.5 puntos)** Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.
c) **(1 punto)** Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

EJERCICIO 3

Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, extraeremos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraeremos de la urna B.
Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) **(0.5 puntos)** "La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".
b) **(1 punto)** "El número de la bola extraída sea par".
c) **(1 punto)** "La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

EJERCICIO 4

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23€. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5€.
a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza, al 98.8%, para el precio medio de esos libros.
b) **(1 punto)** ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1€?

Instrucciones:	**a) Duración: 1 hora y 30 minutos.**
	b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
	c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
	d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
	e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(1.8 puntos)** Dadas las inecuaciones

$$y \le x + 5, \quad 2x + y \ge -4, \quad 4x \le 10 - y, \quad y \ge 0$$

represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

b) **(0.7 puntos)** Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan.

EJERCICIO 2

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

b) **(1 punto)** Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

EJERCICIO 3

Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

EJERCICIO 4

(2.5 puntos) Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, (H_0: $p = 0.7$), si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$,

siendo a un número real cualquiera.

a) **(1 punto)** Obtenga la matriz A^{2014}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+2a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, parece que la fórmula general va a ser:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El problema termina aquí, particularizando esta fórmula para $n = 2014$, porque la forma rigurosa de terminarlo es aplicar el método de *inducción completa*, que no es materia de 2º de Bachillerato. Pero como no es difícil comprenderlo, lo probaremos por *inducción*, como hemos dicho:

La fórmula es cierta para los primeros valores de n, como hemos comprobado (para $n = 1, 2, 3$), supongamos que es cierta para $n = k-1$ y vamos a probar que, entonces, es cierta para el siguiente valor de n: k. Así, partimos de que es cierto que:

$$A^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & (k-1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene, entonces, que:

$$A^k = A^{k-1}A = \begin{pmatrix} 1 & (k-1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+(k-1)a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+ka-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego es cierta para cualquier valor de k: como lo es para $n = 1$, lo es para el siguiente valor: $n = 2$. Y, entonces, lo es para el siguiente: $n = 3$. Y así hasta el infinito.

Por tanto, particularizando para $n = 2014$: $\boxed{A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2014a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

b) **(1.5 puntos)** Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

Despejamos X en la ecuación matricial, supuesto que existe $(A^3)^{-1}$:

$$A^3 \cdot X - 4B = O \Rightarrow A^3 \cdot X - 4B + 4B = O + 4B \Rightarrow A^3 \cdot X + O = 4B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^3 \cdot X = 4B \Rightarrow (A^3)^{-1} \cdot A^3 \cdot X = (A^3)^{-1} \cdot 4B \Rightarrow I \cdot X = 4(A^3)^{-1}B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{X = 4(A^3)^{-1}B}$$

Sabemos que $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^3) = \begin{vmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A^3)^{-1}$

$$(A^3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}[(A^3)^t] = \begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^3)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $X = 4\begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9a & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$

donde en el resultado final se ha particularizado para $a = 2$.

EJERCICIO 2

La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138, \quad x \geq 0$

a) **(1 punto)** Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.

Nos piden, evidentemente el máximo absoluto de la función. Al tratarse de una parábola, dicho valor coincidirá con el máximo relativo, caso de tenerlo. Calculémoslo.

$$f'(x) = -4x + 36 \qquad f''(x) = -4$$

Ya que $f''(x) < 0 \;\; \forall x$, es una parábola cóncava. Como f y f' son continuas, al ser polinómicas, el extremo relativo, que será un máximo, porque la parábola es cóncava, tiene que coincidir con el punto donde se anule la derivada primera:

$$-4x + 36 = 0 \Rightarrow 36 = 4x \Rightarrow x = 9$$

que está en el dominio, al ser mayor o igual que 0. Y como $f(9) = -2\cdot81 + 36\cdot9 + 138 = 300$, $\boxed{\text{el máximo beneficio se alcanza para } x = 9 \text{ y asciende a } 300.000\ €}$.

b) **(0.5 puntos)** Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.

Obtuvimos antes que $f'(x) = -4x + 36 \Rightarrow f'(7) = -28 + 36 = 8$. Como es positivo, cuando la inversión es de 7.000€ la función de beneficios es creciente.

c) **(1 punto)** Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

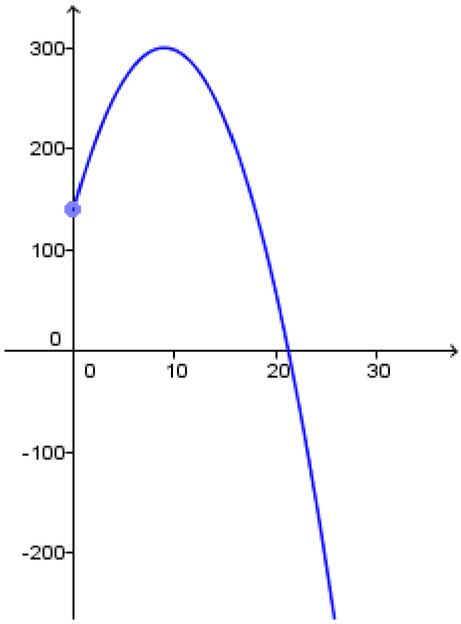
Sabemos que es una parábola cóncava. Además, $f'(x) = -4x + 36$, y ya comentamos que ni f ni f' tienen discontinuidades. Como $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$, como también vimos, se tiene:

	(0, 9)	9	(9, +∞)
f'	+	0	–
f	↗ **creciente**	**Máx**	↘ **decreciente**

con lo que el máximo está en (9, 300).

Los cortes con los ejes son:

- $x = 0 \Rightarrow y = 138$: $\boxed{(0, 138)}$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = -2x^2 + 36x + 138 \Rightarrow x^2 - 18x - 69 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{600}}{2} = \approx \left\langle \begin{matrix} \approx -3.25 \\ \approx 21.25 \end{matrix} \right.$ Es decir, aproximadamente (–3.25, 0) (que no está en el dominio) y $\boxed{(21.25, 0)}$.



Por tanto, la gráfica es la adjunta.

Cuando $y = 138$:

$$138 = -2x^2 + 36x + 138 \Rightarrow 2x^2 - 36x = 0 \Rightarrow x(2x-36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ 2x - 36 = 0 \Rightarrow x = 18 \end{cases}$$

ya que un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula. Luego los valores que logran beneficio de 138.000€ son: $x = 0$ ó $x = 18$ (dieciocho mil euros).

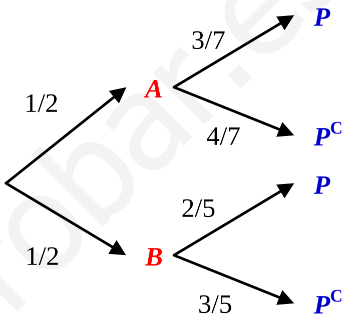
EJERCICIO 3

Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, extraeremos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraeremos de la urna B.

Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) **(0.5 puntos)** "La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".

Este problema, al tratar un experimento aleatorio en dos fases, se puede resolver mediante un diagrama en árbol. Siendo $P \equiv$ *Obtener nº par*, suponiendo que la moneda está bien construida, por lo que hay idénticas probabilidades de obtener cara o cruz, es decir, de elegir la urna A o la B, y considerando el contenido de cada una de ellas, el árbol es el adjunto.



Nos piden probabilidad de una intersección, pues deben ocurrir ambos sucesos a la vez:

$$P(A \cap P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

b) **(1 punto)** "El número de la bola extraída sea par".

Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{29}{70}}$$

c) **(1 punto)** "La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*, de donde procede la *Fórmula de Bayes*:

$$P(A / P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{3/14}{29/70} = \boxed{\frac{15}{29}}$$

EJERCICIO 4

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23€. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5€.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza, al 98.8%, para el precio medio de esos libros.

Como $1 - \alpha = 0.988 \Rightarrow \alpha = 0.012 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.994 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.51$ (buscándolo en el interior de las tablas de la N(0;1)). Por tanto, como la fórmula del intervalo de confianza para μ es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(23 - 2.51\frac{5}{\sqrt{121}},\ 23 + 2.51\frac{5}{\sqrt{121}}\right) = \boxed{(21.859,\ 24.141)}$$

Este intervalo contiene a μ con un nivel de confianza del 98.8%. Y tiene sentido construirlo porque, al proceder los datos de una distribución normal, $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) **(1 punto)** ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1€?

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 1 \Rightarrow z_{\alpha/2}\sigma \le \sqrt{n} \Rightarrow n \ge (z_{\alpha/2}\sigma)^2 = (2.51 \cdot 5)^2 = 157.50$$

Como el tamaño muestral no puede tener decimales, el primer valor válido que resuelve la desigualdad es $\boxed{n = 158}$.

OPCIÓN B
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.8 puntos)** Dadas las inecuaciones

$$y \le x + 5, \quad 2x + y \ge -4, \quad 4x \le 10 - y, \quad y \ge 0$$

represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

Representamos cada una de las rectas que resultan de cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las cuatro inecuaciones que definen el recinto.

- $y = x + 5$

x	0	–5
y	5	0

Como la inecuación es $y \le x + 5$, es decir, los puntos cuyo y sea menor o igual que el correspondiente al punto que está en la recta, el semiplano que nos interesa, de los dos en que ésta divide al plano, es el inferior a la recta.

- $2x + y = -4$

x	0	–2
y	–4	0

La inecuación es $y \ge -2x - 4 \Rightarrow$ Semiplano superior.

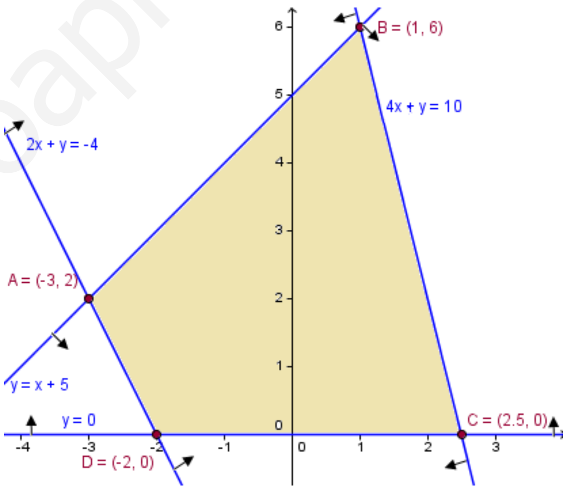
- $4x = 10 - y$

x	0	5/2
y	10	0

Inecuación: $y \le -4x + 10$: inferior

- $y \ge 0$: Semiplano superior al eje OX.

Con ello el gráfico del recinto es el adjunto.



Hay dos vértices que tenemos procedentes de las tablas de valores anteriores:

$\boxed{C(5/2, 0)}$ y $\boxed{D(-2, 0)}$.

El resto, hemos de calcularlos teniendo en cuenta que son intersecciones de rectas (el dibujo nos sirve para identificarlas):

$$A: \left.\begin{array}{r} 2x + y = -4 \\ x - y = -5 \end{array}\right\} \quad 3x = -9 \Rightarrow x = -3$$

Sustituyendo en la 2ª: $y = x + 5 = -3 + 5 = 2 \Rightarrow \boxed{A(-3, 2)}$.

$$B: \left.\begin{array}{r} -4x - y = -10 \\ -x + y = 5 \end{array}\right\} \quad -5x = -5 \Rightarrow x = 1$$

Sustituyendo en la 2ª: $y = x + 5 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow \boxed{B(1, 6)}$.

b) **(0.7 puntos)** Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan.

Sustituimos f en cada vértice:

$f(-3, 2) = -3 + \frac{1}{2}2 = -2$

$f(1, 6) = 1 + \frac{1}{2}6 = 4$

$f(5/2, 0) = 5/2 + 0 = 5/2$

$f(-2, 0) = -2 + 0 = -2$

Así, el máximo valor de f es 4 y se alcanza en (1, 6). El mínimo es –2 y se alcanza en (–3, 2), (–2, 0) y los infinitos puntos del segmento que los une.

EJERCICIO 2

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

f es continua en $(-\infty, 2)$ por tener expresión polinómica. También lo es en $(2, +\infty)$ porque coincide con la función elemental $y = 60/x$, que, por serlo, es continua en su dominio: R – {0}, y $0 \notin (2, +\infty)$. Luego para ser continua en todo R sólo requiere que lo sea en 2. Para ello:

1) $\exists f(2) = -4b - 2b + a = -6b + a$

2) $\exists \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-bx^2 - bx + a) = -6b + a$

$\exists \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{60}{x} = 30$

3) Todos los valores anteriores deben coincidir. Para ello se requiere que:

$$\boxed{-6b + a = 30} \qquad (1)$$

Supuesto que eso se verifica, f es continua, por lo que podría ser derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -2bx - b & \text{si} \quad x < 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Es decir, existe f' para todo x salvo 2 (aún no estudiado). Para que f sea derivable, tiene que serlo, entonces, en 2. Y ello requiere que:

$$f'(2^-) = f'(2^+) \iff -4b - b = -60/4 \iff 5b = 15 \iff \boxed{b = 3}.$$

Sustituyendo en (1): $-18 + a = 30 \Rightarrow a = 30 + 18 \Rightarrow \boxed{a = 48}$.

b) **(1 punto)** Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

Son los valores para los cuales f es continua y derivable. Por tanto, ni f ni f' tienen discontinuidades. Para estos valores:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x + 48 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

porque existe $f'(2)$ y su valor es coincidente tanto por la fórmula $-6x - 3$ como por $-60/x^2$, por lo que añadimos el = a cualquiera de los dos. Lo hemos hecho con la primera de las definiciones de f', por coherencia con f.

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x \le 2$: $-6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3/6 = -1/2$, que es válido, porque es menor o igual que 2.
  - Si $x > 2$: $-60/x^2 = 0$, lo que requiere que $-60 = 0$, que no se consigue para ningún valor de x.

Por tanto, el cuadro de monotonía es:

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, +\infty)$
f'	+	0	–
f	↗	Mx	↘

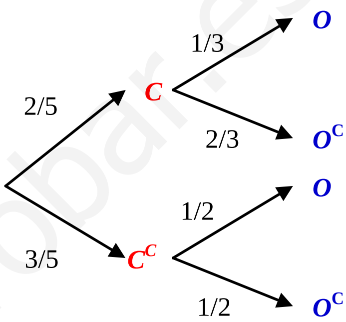
Como $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} + 48 = \dfrac{195}{4}$, tiene un $\boxed{\text{máximo relativo en } \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{195}{4}\right)}$.

EJERCICIO 3

Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

Sean los sucesos $C \equiv$ *ese día, Antonio va a comprar* y $O \equiv$ *Ese día, la fruta está de oferta*. Dado que se trata de un experimento con dos componentes aleatorias, podemos estructurarlo en un diagrama en árbol.



Nos piden $P(O)$, uno de los sucesos terminales. Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(O) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{30}}$$

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Se trata de la probabilidad de la *unión*:

$$P(C \cup O) = P(C) + P(O) - P(C \cap O) = \frac{2}{5} + \frac{13}{30} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{10}}$$

EJERCICIO 4

(2.5 puntos) Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, (H_0: $p = 0.7$), si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta.

Se trata de un contraste sobre la proporción poblacional. En este caso, es posible hacerlo porque como $n = 500$, al ser $n \geq 30$, es posible aplicar la aproximación que nos dice el *Teorema Central del Límite* y aproximar la Binomial mediante la Normal: $\hat{p} \in N\left(p; \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

El contraste, al ser bilateral, es: $\left.\begin{array}{l} H_0 : p = 0.7 \\ H_1 : p \neq 0.7 \end{array}\right\}$.

Como $\alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$, según las tablas. Por tanto:

$$RA_{0.01} = \left(p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}},\quad p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \right) =$$

$$\left(0.7 - 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}},\ 0.7 + 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}} \right) = (0.647,\ 0.753)$$

Como $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0.68 \in RA_{0.01}$, aceptamos la *hipótesis nula*, concluyendo que no hay evidencias estadísticas para rechazarla, con un nivel de confianza del 99%. En consecuencia, $\boxed{\text{admitimos que dicha afirmación es cierta}}$.