Problemas [6 PTOS.]

1. Una partícula de 600 g oscila con M.A.S. Se toma como origen de tiempos el instante en que pasa por el origen con una velocidad de -40,0 cm/s y tarda 1,25 s en alcanzar su máxima elongación. Escribe la ecuación del M.A.S.

Datos:

masa de la partícula m = 600 g = 0,600 kg

origen de tiempos cuando $t_0 = 0$ $x = 0$ y v = -40,0 cm/s = -0,400 m/s

tiempo en alcanzar la máxima elongación, t = 1,25 s

Pide:

escribir la ecuación de movimiento

Ecuaciones:

del M.A.S. $x = A \cos(\omega\, t + \varphi_0)$

Pulsación $\omega = 2\,\pi / T$

Solución:

Cuando t = 0, x = 0

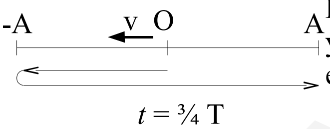
$$0 = A \cos(\omega\, 0 + \varphi_0)$$

$$\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \pi/2 \\ \varphi_0 = 3\pi/2 \end{cases}$$

Elegimos el valor correcto a partir del signo de la velocidad. Cuando t = 0, v < 0.

Probando con $\varphi_0 = \pi / 2$

$$v = -A\,\omega \operatorname{sen}(\omega\, 0 + \varphi_0) = -A\,\omega \operatorname{sen}(\pi / 2) < 0$$



El tiempo transcurrido hasta que el móvil alcanza la máxima elongación es ¾ T, ya que los movimientos OA y AO son simétricos (velocidad nula en A y máxima en el origen O, con distancias recorridas iguales)

$$3 \cdot T / 4 = 1{,}25 \text{ s}$$

$$T = 1{,}67 \text{ s}$$

$$\omega = 2\,\pi / T = 1{,}20\,\pi = 3{,}77 \text{ rad/s}$$

> También se podría haber calculado ω a partir de la ecuación de movimiento.
> Para t = 1,25 s, $x = A$
> $$A = A \cos(\omega\, 1{,}25 + \pi/2)$$
> $$\omega\, 1{,}25 + \pi/2 = \arccos 1 = 2\,\pi$$
> $$\omega = (3\,\pi / 2) / 1{,}25 = 1{,}20\,\pi = 3{,}77 \text{ rad/s}$$

La velocidad en el M.A.S. es:

$$v = dx / dt = -A\,\omega \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi_0)$$

que es máxima en el origen cuando $\operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi_0) = -1$

$$|v_{máx}| = A\,\omega$$

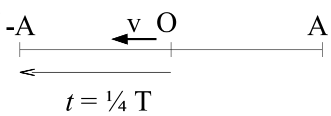
$$A = 0{,}400 / 3{,}77 = 0{,}106 \text{ m}$$

Por lo que la ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}106 \cos(3{,}77\, t + 1{,}57) \text{ [m]}$$

> Si se hubiese elegido como expresión de la ecuación de movimiento: $x = A \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi_0)$, la solución sería
> $$x = 0{,}106 \operatorname{sen}(3{,}77\, t + 3{,}14) \text{ [m]}$$

Podría haberse interpretado "máxima elongación" como "máxima compresión", o la primera vez que alcanza un extremo de la trayectoria. En ese caso:



$$T / 4 = 1{,}25 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad T = 5{,}00 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\,\pi / T = 0{,}400\,\pi = 1{,}26 \text{ rad/s}$$

$$A = 0{,}400 / 1{,}26 = 0{,}318 \text{ m}$$

$$x = 0{,}318 \cos(1{,}26\, t + 1{,}57) \text{ [m]}$$

2. Una masa de 2,00 kg se deja caer desde 5,00 m de altura sobre una plataforma sujeta a un resorte vertical de constante recuperadora $k = 2{,}00\times10^3$ N/m. Si la plataforma está al nivel del suelo, calcula a qué profundidad se hunde la plataforma. Toma $g = 10{,}0$ m/s²

Datos:

masa de la partícula	$m = 2{,}00$ kg
altura inicial:	$h = 4{,}50$ m
constante recuperadora	$k = 2{,}00\times10^3$ N/m
aceleración de la gravedad	$g = 10{,}0$ m/s²

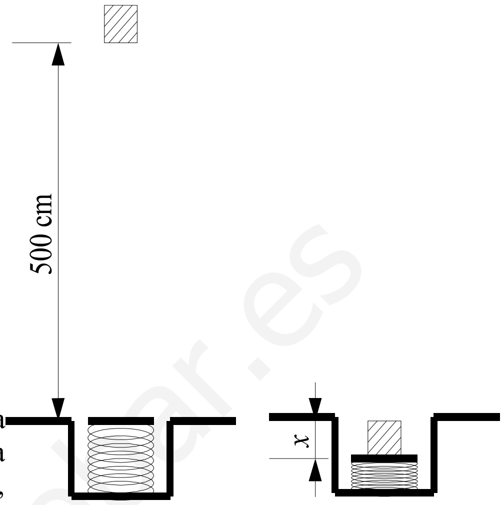
Pide:

x: profundidad al que se hunde la plataforma (máxima compresión del muelle)

Ecuaciones:

Energía potencial elástica:	$E_{px} = ½\, k\, x^2$
Energía potencial del peso:	$E_{pp} = m\, g\, h$
Energía cinética:	$E_c = ½\, m\, v^2$

Solución:



Como sólo actúan fuerzas conservativas, (el peso y la fuerza elástica) la energía mecánica se conserva entre el objeto a una altura h y el objeto sobre la plataforma hundida una profundidad x, en la que la plataforma se detiene (v = 0)

$$(½\, k\, x^2 + m\, g\, h + ½\, m\, v^2)_h = (½\, k\, x^2 + m\, g\, h + ½\, m\, v^2)_x$$

$$0 + 2{,}00 \cdot 10{,}0 \cdot 5{,}00 + 0 = ½\; 2{,}00\times10^3 \cdot x^2 + 2{,}00 \cdot 10{,}0\;(-x) + 0$$

$$100 = 1{,}00\times10^3\, x^2 - 20{,}0\, x$$

$$1{,}00\times10^3\, x^2 - 20{,}0\, x - 100 = 0$$

$x = 0{,}326$ m (se toma sólo la solución positiva porque ya se tomó como negativa la profundidad)

Laboratorio

[1 Pto.]

En la determinación de g mediante un péndulo simple, se miden tiempos de una serie de oscilaciones para péndulos de diversas longitudes. Indica qué magnitudes hay que representar *gráficamente* para obtener una recta a partir de los datos experimentales, y relaciona el valor de "g" con la pendiente de la gráfica.

Solución:

De la ecuación del período para el péndulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

se ve que la representación de los períodos "T" frente a las longitudes "l" no da una recta. Elevando al cuadrado

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\, l$$

tomando T^2 como variable dependiente y l como variable independiente, queda la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente vale

$$\text{pendiente} = \frac{\Delta T^2}{\Delta l} = \frac{4\pi^2}{g}$$

Cuestiones

[3 Ptos.]

(No hay que razonar las respuestas. Sólo una de las cuatro opciones es correcta y vale 1/3 Pto. Elegir una opción incorrecta resta 1/6 Pto. Marcar más de una opción anula la pregunta)

1. Para dos ondas de radio: una de AM de 1 080 kHz y otra de FM de 91,0 MHz, siendo λ la longitud de onda, ν la frecuencia y *c* la velocidad de propagación de las ondas. ¿Cuál es la relación correcta?
   ☒ λ(AM) > λ(FM) ❑ ν(AM) > ν(FM) ❑ *c*(AM) > *c*(FM) ❑ Todas as anteriores son ciertas.

Solución:
Las ondas de radio son ondas electromagnéticas y se propagan por el aire a la velocidad de la luz *c*. Las frecuencias son distintas, ν(AM) (= 1 080 kHz = 1,08 MHz) < ν(FM) (= 91,0 MHz).
En una onda, la frecuencia ν y la longitud de onda λ están relacionadas por la expresión: $c = \lambda\ \nu$.
Las longitudes de onda son inversamente proporcionales a las frecuencia: la onda (FM) de mayor frecuencia es la de menor longitud de onda.

2. ¿Cuál de las expresiones propuestas representa una onda transversal que se propaga en sentido positivo del eje *X* con una velocidad de 5 m·s^{-1}, tiene una amplitud de 1 m y una frecuencia de 10 Hz?
   ❑ $y = \cos 2\pi(10\ t - 5\ x)$; ❑ $y = \cos 2\pi(10\ t + 5\ x)$; ☒ $y = \cos 4\pi(5\ t - x)$; ❑ $y = \cos 2\pi(10\ t - x/5)$

Solución:
La ecuación de una onda unidimensional armónica que se desplaza en sentido positivo del eje *X* se puede escribir: $y = A \cos 2\pi(t\ /\ T - x\ /\ \lambda)$, poniendo que las partículas del medio oscilan en el eje *Y*, perpendicularmente a la dirección de propagación. (Si se desplazase en sentido negativo, el signo sería +)
A es la amplitud y vale: 1 m.
T es el período que es el inverso de la frecuencia ν: $T = 1\ /\ \nu = 1\ /\ 10 = 0{,}1$ s
λ es la longitud de onda, que está relacionada con la frecuencia por: $c = \lambda\ \nu$. $\lambda = c\ /\ \nu = 5\ /\ 10 = 1\ /\ 2$ m
Sustituyendo da:

$$y = \cos 2\pi(10\ t - 2\ x)$$

que corresponde a la tercera opción, sacando factor común 2.

3. La energía que transporta una onda es proporcional a: ❑ la frecuencia; ❑ la amplitud;
   ☒ los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud; ❑ la distancia recorrida.

Solución:
La energía que transporta una onda es la energía del oscilador que está en el foco:

$$E = ½\ m\ \text{v}^2 + ½\ k\ x^2 = ½\ k\ A^2 = ½\ m\ \text{v}^2_{\text{máx}}$$

Si derivamos la ecuación de la onda

$$y = A \cos 2\pi(t\ /\ T - x\ /\ \lambda)$$

respecto al tiempo:

$$\text{v} = dy\ /\ dt = -A\ (2\ \pi\ /\ T) \text{ sen } 2\pi(t\ /\ T - x\ /\ \lambda) = -\ 2\ \pi\ A\ \nu \text{ sen } 2\pi(t\ /\ T - x\ /\ \lambda)$$

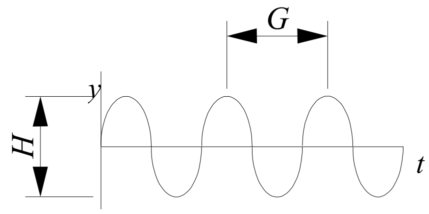
el valor máximo de v es:

$$\text{v}_{\text{máx}} = 2\ \pi\ A\ \nu$$

y la energía

$$E = ½\ m\ \text{v}^2_{\text{máx}} = ½\ m\ (2\ \pi\ A\ \nu)^2 = 2\ \pi\ m\ A^2\ \nu^2$$

4. En el diagrama *y* frente a *t* de una onda, los intervalos G y H representan:
   ❑ G: longitud de onda, H: amplitud;
   ❑ G: dos longitudes de onda, H: amplitud;
   ☒ G: período, H: el doble de la amplitud;
   ❑ G: dos períodos, H: el doble de la amplitud.

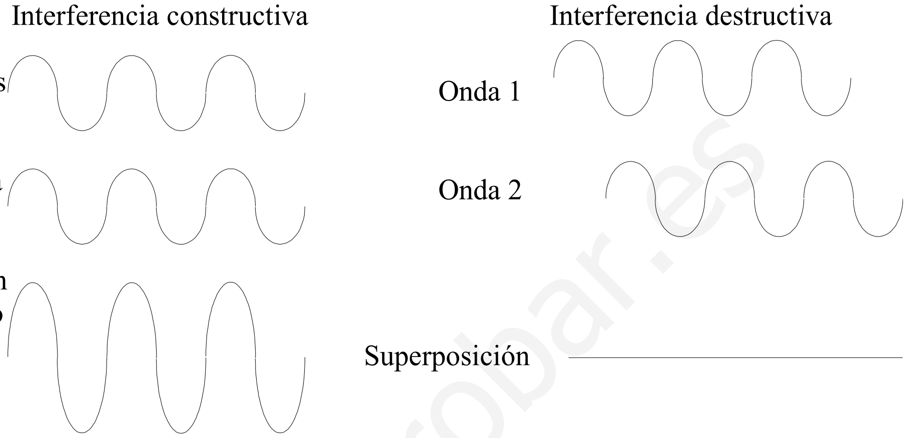


Solución:
La ecuación de una onda armónica unidimensional muestra una doble periodicidad. Cuando se representa la elongación “*y*” frente al tiempo, el intervalo *G* de tiempo entre dos puntos que están en fase es el período.
La amplitud es la elongación máxima, por lo que *H* representa el doble de la amplitud.

5. En la expresión $y = 20$ sen$(5\ t - 3\ x)$, el valor 3 es:
   ❒ el período ❒ la frecuencia ☒ el número de onda ❒ el inverso de la longitud de onda

Solución:
La ecuación de una onda unidimensional armónica se puede escribir: $y = A$ sen $(\omega t - kx)$,
en el que k es el número de onda, $k = 2\ \pi / \lambda$.

6. Dos ondas coherentes coinciden en un punto. Para que den lugar a una interferencia destructiva, la diferencia de caminos recorridos por las ondas debe ser un múltiplo:
   ❒ par de la longitud de onda ❒ impar de la longitud de onda
   ❒ par de la semilongitud de onda ☒ impar de la semilongitud de onda

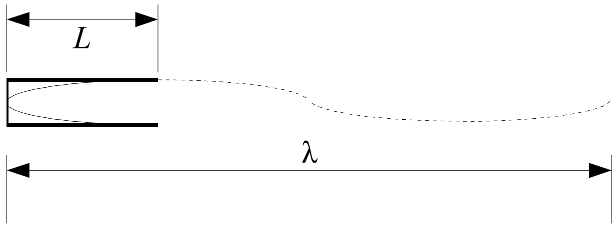


Solución:
Cuando se superponen dos ondas armónicas emitidas por focos que vibran con la misma amplitud y la misma frecuencia y cuya diferencia de fase se mantiene constante, la interferencia será destructiva cuando el desfase con que llegan las dos ondas al punto es:

$$\Delta\varphi = (2\ n + 1)\ \pi$$
$$(\omega\ t\ - k\ d_1) - (\omega\ t\ - k\ d_2) =$$
$$k\ \left| d_2 - d_1 \right| = (2\pi / \lambda) \left| d_2 - d_1 \right|$$

$$(2\ \pi / \lambda)\ \left| d_2 - d_1 \right| = (2\ n + 1)\ \pi$$
$$\left| d_2 - d_1 \right| = (2\ n + 1)\ \lambda / 2$$

7. Para un tubo de órgano de longitud L, la frecuencia fundamental es proporcional a:
   ❒ L ☒ $1 / L$ ❒ $\dfrac{1}{\sqrt{L}}$ ❒ $\sqrt{L}$



Solución:
En un tubo de órgano (onda estacionaria) si tiene un extremo abierto y otro cerrado, la nota fundamental corresponde a $L = \lambda / 4$.
La longitud de onda λ es proporcional a la longitud L del tubo. (Lo que sería cierto en el caso de que ambos extremos estuviesen abiertos, aunque la constante de proporcionalidad sería otra).
Como la frecuencia de una onda $\nu = c / \lambda$ es inversamente proporcional a la longitud de onda, también será inversamente proporcional a la longitud del tubo.

8. Una onda esférica se amortigua de forma que la amplitud A es, respecto a la distancia R al origen.
   ❒ proporcional ☒ inversamente proporcional ❒ constante ❒ $A_1 / \sqrt{R_1} = A_2 / \sqrt{R_2}$

Solución:
En una onda esférica, la energía se reparte por todos los puntos de la superficie esférica ($4\ \pi\ R^2$), por lo que la intensidad de la onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia R al foco.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

La intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud.

$$I = cte.\ A^2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{cte. \cdot A_1^2}{cte. \cdot A_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

por lo que intensidad de la onda es inversamente proporcional a la distancia R al foco.

9. La luz se puede polarizar porque es una onda:
   ☒ transversal ❒ electromagnética ❒ tridimensional ❒ armónica.

Solución:
La polarización, vibración en un solo plano, es un fenómeno exclusivo de las ondas transversales.