Problemas

1. Una partícula de 1,54 g inicia un movimiento armónico simple en el punto de máxima elongación, que se encuentra a 66,7 cm del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial hasta que alcanza el origen es de 0,225 s. Calcula la fuerza que actúa sobre la partícula, transcurrido 0,350 s desde el instante inicial. [4 PUNTOS]
   Solución

2. Una onda periódica viene dada por la ecuación $y(t,x) = 10 \text{ sen } 2\pi(50t - 0{,}20x)$ en unidades del S.I. Calcula los valores del tiempo t para los que la velocidad de una partícula en un punto que dista 50 cm del origen (foco) coincide en valor con la velocidad a la que se propaga la onda.
   Solución [4 PUNTOS]

Laboratorio

Una masa m = 50 g se cuelga de un resorte helicoidal. La elongación del resorte es de 200 mm. El sistema se pone en movimiento al tirar de la masa hacia abajo una distancia adicional de 50 mm y luego soltándola. El tiempo que tarda en dar 10 oscilaciones completas es de 9,82 s. Calcula el valor de la constante elástica del resorte por el método: (a) estático, (b) dinámico. [2 PUNTOS]
Solución

Soluciones

1. Una partícula de 1,54 g inicia un movimiento armónico simple en el punto de máxima elongación, que se encuentra a 66,7 cm del origen. El tiempo que tarda la partícula desde el instante inicial hasta que alcanza el origen es de 0,225 s. Calcula la fuerza que actúa sobre la partícula, transcurrido 0,350 s desde el instante inicial.

Examen ▲ Problema 2 ►

Solución:

Por la 2ª Ley de Newton, para un sistema de masa constante, la fuerza resultante $\mathbf{F}_{\text{RESULTANTE}}$ es directamente proporcional a la aceleración:

$$\mathbf{F}_{\text{RESULTANTE}} = m\,\mathbf{a}$$

Por definición, la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$$

y la velocidad es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt$$

En un movimiento unidimensional en el eje *X*,

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}$$

y la velocidad es

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt = dx / dt\ \mathbf{i}$$

y su componente horizontal v_x

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_x = dx / dt$$

y, análogamente, la componente X de la aceleración se obtendrá derivando la de la velocidad:

$$a = d\mathrm{v} / dt$$

Un M.A.S. es aquél en que la elongación *x* cumple que:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

donde *A* es la amplitud, *ω* la pulsación, *t* el tiempo y *φ* la fase inicial.

La amplitud es la máxima elongación $A = 66{,}7 \text{ cm} = 0{,}667 \text{ m}$;
La fase inicial se calcula en la ecuación $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ a partir de la posición inicial:
Para $t = 0$, $x = 0{,}667$ m

$$0{,}667 = 0{,}667 \operatorname{sen} \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen} 1 = \pi / 2 \text{ rad} = 1{,}57 \text{ rad}$$

Se usa el tiempo que tarda en alcanzar el origen para calcular la pulsación.
Para $t = 0{,}225$ s, $x = 0$

$$0 = 0{,}667 \operatorname{sen}(\omega\ 0{,}225 + \pi/2)$$

$$(\omega\ 0{,}225 + \pi/2) = \operatorname{arc\,sen} 0 = \pi \text{ (el valor 0 daría una pulsación negativa)}$$

$$\omega = 20\ \pi / 9 \text{ rad/s}$$

Se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos obtenidos:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0{,}667 \operatorname{sen}(20\pi\, t / 9 + \pi/2) \quad [\text{m}]$$

Se deriva para obtener la velocidad

$$\mathrm{v} = dx / dt = 0{,}667 \cdot 20\ \pi / 9 \cos(20\pi\, t / 9 + \pi/2) = 4{,}66 \cos(20\pi\, t / 9 + \pi/2) \quad [\text{m/s}]$$

Y se deriva la velocidad para obtener la aceleración

$$a = dv / dt = -4{,}66 \cdot 20\pi / 9 \text{ sen } (20\pi\, t / 9 + \pi/2) = -32{,}5 \text{ sen } (20\pi\, t / 9 + \pi/2) \quad \text{m/s}^2$$

Se calcula la aceleración en el instante pedido:

$$a(t = 0{,}350 \text{ s}) = -32{,}5 \text{ sen } (20\pi \cdot 0{,}350 / 9 + \pi/2) = 24{,}9 \text{ m/s}^2$$

Y se aplica la 2ª Ley de Newton

$$F = m\, a = 1{,}54\times10^{-3} \text{ [kg]} \cdot 24{,}9 \text{ [m/s}^2\text{]} = 0{,}0384 \text{ N} = 38{,}4 \text{ mN}$$

La partícula se encuentra en la zona en la que el muelle está comprimido (a la izquierda de la posición de equilibrio), por lo que el sentido de la fuerza es hacia la posición de equilibrio (derecha).

2. Una onda periódica viene dada por la ecuación $y(t,x) = 10 \text{ sen } 2\pi(50t - 0{,}2x)$ en unidades del S.I. Calcula los valores del tiempo t para los que la velocidad de una partícula en un punto que dista 50 cm del origen (foco) coincide en valor con la velocidad a la que se propaga la onda.

◄ Problema 1 Examen ▲ Laboratorio ►

Solución:

Datos	***Cifras significativas: 2***
ecuación de la onda	$y(t,x) = 10 \text{ sen } 2\pi(50t - 0{,}20x)$
posición del punto (distancia al foco)	$x = 50 \text{ cm} = 0{,}50 \text{ m}$
Incógnitas	
tiempo para los que v(x,t) en la posición x = 50 cm vale c	t
Otros símbolos	
período	T
velocidad de propagación de la onda	c
frecuencia	f
longitud de onda	λ
Ecuaciones	
de una onda armónica unidimensional	$y = A\, sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
frecuencia	$f = 1 / T$
relación entre la longitud de onda y la frecuencia	$c = \lambda\, f$

Cálculos:

Comparando la ecuación de una onda con la del dato (suponiendo que no hay desfase en el foco):

$$y = A\, sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y(t,x) = 10 \text{ sen } [2\pi(50t - 0{,}20x)]$$

Período: $T = 1 / 50 = 0{,}020 \text{ s}$

Longitud de onda: $\lambda = 1 / 0{,}20 \text{ [m/s]} = 5{,}0 \text{ m}$

De las relaciones entre período, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda

Frecuencia: $f = 1 / T = 1 / 0{,}020 \text{ [s]} = 50 \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz}$

Velocidad de propagación de la onda: $c = \lambda \cdot f = 5{,}0 \text{ [m]} \cdot 50 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 250 \text{ m/s}$

La velocidad de una partícula del medio es la derivada de su posición con respecto al tiempo

$$\text{v} = dy / dt = 10 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \cos[2\pi(50t - 0{,}20x)] = 1000\cdot\pi \cos[2\pi(50t - 0{,}20x)] \quad \text{[m/s]}$$

Igualando y sustituyendo $x = 0{,}50$ m

$$1000\cdot\pi \cos [2\pi(50t - 0{,}10)] = 250$$

$$2\pi(50t - 0{,}10) = \text{arc cos}(0{,}25 / \pi)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: 1,49 y 4,79 rad en el primer cuadrante, lo que da dos valores del tiempo

$$t_1 = 0{,}0087 \text{ s} \quad \text{y} \quad t_2 = 0{,}0173 \text{ s}$$

Si no tenemos en cuenta el signo de la velocidad, también valdrían las soluciones en las que:

$$2\pi(50t - 0{,}10) = \text{arc cos}(-0{,}25 / \pi)$$

con otras dos soluciones: 1,65 y 4,63 rad en el primer cuadrante, lo que da otros dos valores del tiempo

$$t_3 = 0{,}0073 \text{ s} \quad \text{y} \quad t_4 = 0{,}0167 \text{ s}$$

y a cada uno de los valores anteriores se le puede sumar 0,020 n [s], siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....), pues vuelve a alcanzar esa velocidad cada vez que transcurre un período (0,020 s)

$$t_1 = 0{,}0087 + 0{,}020\, n \text{ [s]}$$

$$t_2 = 0{,}0173 + 0{,}020\, n \text{ [s]}$$

$$t_3 = 0{,}0073 + 0{,}020\, n \text{ [s]}$$

$$t_4 = 0{,}0167 + 0{,}020\, n \text{ [s]}$$

Laboratorio

1. Una masa m = 50 g se cuelga de un resorte helicoidal. La elongación del resorte es de 200 mm. El sistema se pone en movimiento al tirar de la masa hacia abajo una distancia adicional de 50 mm y luego soltándola. El tiempo que tarda en dar 10 oscilaciones completas es de 9,82 s. Calcula el valor de la constante elástica del resorte por el método:

(a) estático,

(b) dinámico.

◄ Problema 2 Examen ▲

Solución:

El método estático consiste en colgar pesas del portapesas y medir los alargamientos del muelle. El cálculo de la constante se hace por la ley de Hooke:

$$F = -k\,x$$

En este caso, la masa m = 50 g = 0,050 kg ejerce una fuerza (peso) de

$$F = m\,g = 0{,}050 \text{ [kg]} \cdot 9{,}8 \text{ [m/s}^2\text{]} = 0{,}49 \text{ N}$$

y la constante vale

$$k = F / x = 0{,}49 \text{ [N]} / 0{,}200 \text{ [m]} = 2{,}5 \text{ N/m}$$

aunque habría que hacer más medidas con otras pesas y hallar el valor medio.

El método dinámico consiste en colgar una masa del muelle, estirar y soltar y medir el tiempo de un cierto número de oscilaciones, para luego calcular el período dividiendo ese tiempo entre el número de oscilaciones.

$$T = 9{,}82 \text{ [s]} / 10 \text{ [osc.]} = 0{,}982 \text{ s/osc.}$$

De la ecuación del período de um M.A.S.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

se despeja el valor de la constante.

$$k=\frac{4\,\pi^2\,m}{T^2}=\frac{4\,\pi^2\,0{,}050[\mathrm{kg}]}{(0{,}982[\mathrm{s}])^2}=2{,}0\ \mathrm{N/m}$$

Las constantes no dan lo mismo. Como deberían ser iguales, se toma como correcto el valor medio.

$$k_{\text{medio}} = 2{,}2\ \mathrm{N/m}$$