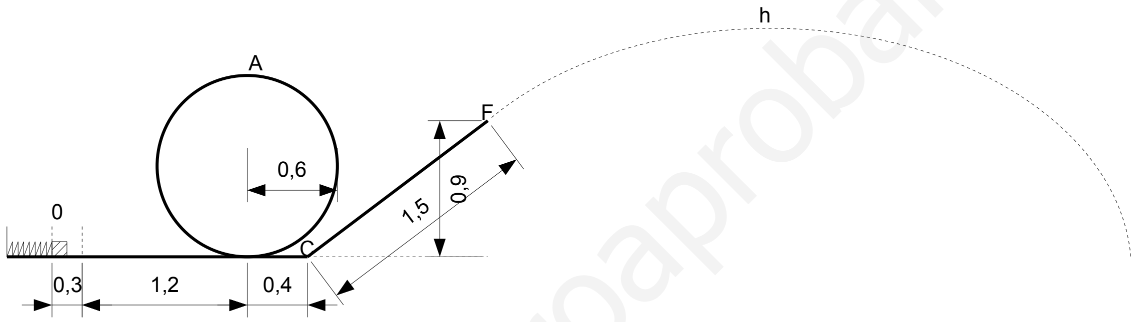
Problemas

1. Un muelle de constante $k = 2{,}00\times10^3$ N/m está apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. A 1,20 m hay un bucle vertical de 60,0 cm de radio y 40,0 cm después comienza un plano inclinado de 1,50 m de longitud y 0,900 m de altura. Se empuja un objeto de 4,00 kg comprimiendo el muelle 30,0 cm. Se suelta y el objeto inicia un recorrido horizontal, describe el bucle, avanza hasta el plano inclinado y asciende por él para salir describiendo una trayectoria parabólica. Calcula:
   a) La altura máxima que alcanzará en todo el recorrido. [2½ PUNTOS]
   b) El coeficiente del rozamiento que tendría que tener el plano inclinado para que el bloque se detuviese en lo alto. [2 PUNTOS]
   c) El vector momento de la fuerza que ejerce la pista en el punto más alto del bucle con respecto al punto donde comienza el plano inclinado. [1½ PUNTOS]

   Solución



2. Una onda unidimensional se propaga de acuerdo con la ecuación: $y = 2{,}00$ sen $(1{,}57\ t - 3{,}92\ x)$ donde las distancias «x» e «y» se miden en metros y el tiempo en segundos. Determina:
   a) Las características de la onda, incluida la velocidad de propagación. [1 PUNTO]
   b) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 2,00 m en la dirección de avance de la onda. [½ PUNTO]
   c) Los instantes en los que la velocidad de un punto en x = 40,0 cm es máxima. [1½ PUNTO]

   Solución

Laboratorio

¿Qué magnitudes se representan en la gráfica en el estudio estático del resorte para obtener una línea recta? ¿Y en el estudio dinámico? ¿Tienen ambas la misma pendiente? Razona esta última respuesta. [1 PUNTO]

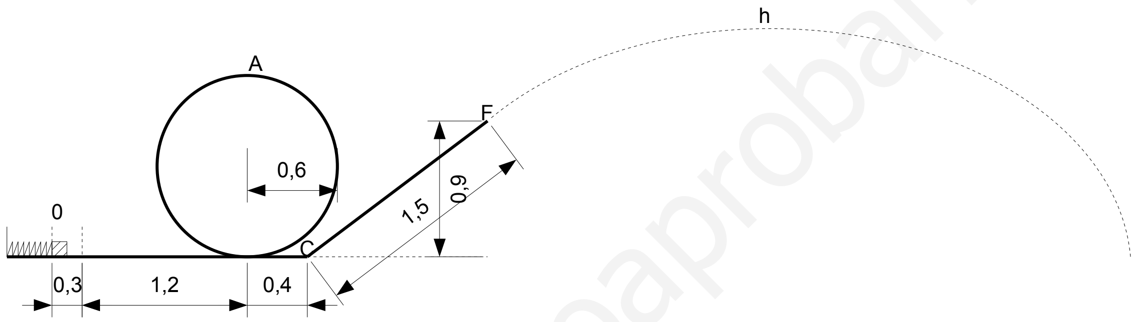
Solución

Soluciones

1. Un muelle de constante $k = 2{,}00 \times 10^3$ N/m está apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. A 1,20 m hay un bucle vertical de 60,0 cm de radio y 40,0 cm después comienza un plano inclinado de 1,50 m de longitud y 0,900 m de altura. Se empuja un objeto de 4,00 kg comprimiendo el muelle 30,0 cm. Se suelta y el objeto inicia un recorrido horizontal, describe el bucle, avanza hasta el plano inclinado y asciende por él para salir describiendo una trayectoria parabólica. Calcula:
a) La altura máxima que alcanzará en todo el recorrido.
b) El coeficiente del rozamiento que tendría que tener el plano inclinado para que el bloque se detuviese en lo alto.
c) El vector momento de la fuerza que ejerce la pista en el punto más alto del bucle con respecto al punto donde comienza el plano inclinado.
Examen ▲ Problema 2 ►

Solución:

Para el apartado a) se conserva la energía, ya que la única fuerza no conservativa, la que ejerce la pista por la que se desplaza, es perpendicular al desplazamiento en todo el recorrido, y, por tanto, no realiza trabajo.



Como la parte superior del plano inclinado (0,90 m) está cerca del punto más alto del bucle (1,20 m), el punto más alto será probablemente el de la trayectoria parabólica.
La energía potencial elástica E_{pe} viene dada por la expresión:

$$E_{pe} = ½\, k\, x^2$$

en la que k es la constante elástica del muelle y x la elongación o separación de la posición de equilibrio.
La energía potencial del peso E_{pp} de un objeto de masa m que se encuentra a una altura h respecto al punto que se toma como origen de la energía potencial viene dada por la expresión:

$$E_{pp} = m\, g\, h$$

en la que g es la aceleración de la gravedad.
La energía cinética E_c de un objeto de masa m que se mueve con una velocidad v es:

$$E_c = ½\, m\, v^2$$

Eligiendo un origen de la energía potencial en el plano horizontal, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto 0 donde el muelle comprimido empieza a empujar la masa m y el punto F más alto del plano inclinado para calcular la velocidad allí:

$$(E_c + E_{pp} + E_{pe})_0 = (E_c + E_{pp} + E_{pe})_F$$

$$E_{pe0} = ½\, k\, x^2 = (2{,}00 \times 10^3 \cdot 0{,}300^2) / 2 = 90{,}0 \text{ J}$$

$$E_{ppF} = m\, g\, h = 4{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}900 = 35{,}3 \text{ J}$$

$$0 + 0 + 90{,}0 = 2{,}00\, v_F^2 + 35{,}3 + 0$$

$$v_F = \sqrt{\frac{90{,}0 - 35{,}3}{2{,}00}} = 5{,}23 \text{ m/s}$$

En el punto h más alto de la parábola, la componente vertical de la velocidad será nula y la velocidad sólo tendrá componente horizontal. En un tiro parabólico la componente horizontal de la velocidad es constante, porque sólo actúa una fuerza vertical (el peso). La velocidad en el punto más alto de la parábola será igual a la componente horizontal de la velocidad en el momento que abandona el plano.

$$v_h = v_{0x} = v \cos \alpha$$

El ángulo de la velocidad con la horizontal es el mismo que el del plano inclinado (la velocidades es paralela al plano)

$$\alpha = \text{arc sen } (0{,}900/1{,}50) = 36{,}9^\circ$$

$$v_h = 5{,}23 \cos 36{,}9^\circ = 4{,}18 \text{ m/s}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía entre el punto inicial y el punto h de altura máxima:

$$(E_c + E_{pp} + E_{pe})_0 = (E_c + E_{pp} + E_{pe})_h$$

$$E_{ch} = ½\, m\, v_h^2 = (4{,}00 \cdot 4{,}18^2) / 2 = 35{,}0 \text{ J}$$

$$0 + 0 + 90{,}0 = 35{,}0 + 4{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot h + 0$$

$$h = \frac{90{,}0 - 35{,}0}{4{,}00 \cdot 9{,}81} = 1{,}40 \text{ m}$$

que es más alto que el punto A más alto del bucle.
Se puede calcular la altura máxima con la ecuación del tiro parabólico. Como la única fuerza que actúa sobe el objeto cuando abandone el plano inclinado es el peso, que es una fuerza constante, la aceleración a la que está sometido es también constante, y su ecuación vectorial de movimiento es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + ½\, \mathbf{a}\, t^2$$

Tomando como sistema de referencia con origen en el punto en el suelo bajo el punto F, eje X horizontal y sentido positivo hacia la derecha y eje Y vertical y sentido positivo hacia arriba, la ecuación anterior queda:

$$\mathbf{r} = 0{,}900\, \mathbf{j} + (5{,}23 \cos 36{,}9^\circ\, \mathbf{i} + 5{,}23 \text{ sen } 36{,}9^\circ\, \mathbf{j})\, t + ½\, (-9{,}81\, \mathbf{j})\, t^2 \quad [\text{m}]$$

que, operando y separando en componentes:

$$\mathbf{r} = 4{,}18\, t\, \mathbf{i} + (0{,}900 + 3{,}14 \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2)\, \mathbf{j} \;\; [\text{m}]$$

La altura es máxima cuando $v_y = 0$.
Obtenemos la expresión del vector velocidad derivando el de posición:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\left(4{,}18\, t\, \vec{\mathbf{i}} + \left(0{,}900 + 3{,}14\, t - 4{,}91\, t^2\right)\vec{\mathbf{j}}\right)}{dt} = 4{,}18\, \vec{\mathbf{i}} + (3{,}14 - 9{,}81\, t)\, \vec{\mathbf{j}}\, [\text{m/s}]$$

El tiempo de la altura máxima se obtiene igualando a cero la componente vertical de la velocidad .

$$3{,}14 - 9{,}81\, t_h = 0$$

$$t_h = 0{,}32 \text{ s}$$

y se sustituye en la ecuación de la posición:

$$\mathbf{r}_h = 1{,}34\, \mathbf{i} + 1{,}40\, \mathbf{j} \;\; [\text{m}]$$

dando la altura máxima 1,40 m igual que por el otro método.

b) Para que el bloque se detuviese en lo alto del plano inclinado, debería perder la energía por rozamiento.

$$W_{\text{FNC}} = \Delta(E_c + E_p)$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento es:

$$W_{\text{ROZ}} = F_{\text{ROZ}} \cdot \Delta s \cdot \cos 180^\circ$$

Y la fuerza de rozamiento cuando hay desplazamiento es:

$$F_{\text{ROZ}} = \mu\, N$$

En un plano inclinado, cuando sólo actúan el peso, la normal y el rozamiento, la fuerza normal equivale a la componente del peso perpendicular al plano:

$$N = p_y = m\, g \cos \alpha$$

Se calcula la fuerza normal:

$$N = 4{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 36{,}9^\circ = 31{,}4 \text{ N}$$

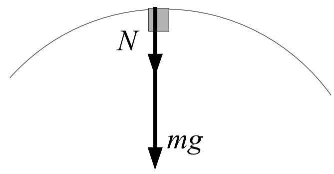
Sustituyendo los valores en la ecuación de la energía entre los puntos 0 y F (sólo hay trabajo de rozamiento a los largo del plano inclinado)

$$\mu\, N\, \Delta s \cdot \cos 180^\circ = (E_{cF} - E_{c0}) + (E_{ppF} - E_{pp0}) + (E_{peF} - E_{pe0})$$

$$\mu \cdot 31{,}4 \cdot 1{,}50 \cdot (-1) = (0 - 0) + (35{,}3 - 0) + (0 - 90{,}0)$$

$$\mu = \frac{35{,}3 - 90{,}0}{-31{,}4 \cdot 1{,}59} = 1{,}16$$

c) En el punto A más alto del bucle las fuerzas N y peso están ambas dirigidas hacia el centro de la circunferencia. Por la segunda ley de Newton:



$$N_A + m\, g = m\, a_N = m\, v_A^2 / R$$

Se calcula la velocidad en el punto más alto del bucle aplicando el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto 0 donde el muelle comprimido empieza a empujar la masa m y el punto A más alto del bucle:

$$(E_c + E_{pp} + E_{pe})_0 = (E_c + E_{pp} + E_{pe})_A$$

$$E_{ppA} = m\, g\, h = m\, g\, 2\, R = 4{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}600 = 47{,}1 \text{ J}$$

$$0 + 0 + 90{,}0 = 2{,}00\, v_A^2 + 47{,}1 + 0$$

$$v_A = \sqrt{\frac{90{,}0 - 47{,}1}{2{,}00}} = 4{,}63 \text{ m/s}$$

y con él se calcula el valor de la fuerza normal sobre la masa en el punto más alto del bucle.

$$N_A = m \frac{v_A^2}{R} - m\, g = m\left(\frac{v_A^2}{R} - g\right) = 4{,}00\left(\frac{4{,}63^2}{0{,}600} - 9{,}81\right) = 104 \text{ N}$$

En un sistema de referencia con origen en el punto C donde comienza el plano inclinado, eje X horizontal y sentido positivo hacia la derecha y eje Y vertical y sentido positivo hacia arriba, el vector **N** fuerza normal es:

$$\mathbf{N} = -104\, \mathbf{j} \text{ N}$$

El vector que va desde el punto C tomado como origen hasta el punto A es:

$$\mathbf{r} = -0{,}400\, \mathbf{i} + 1{,}20\, \mathbf{j} \text{ m}$$

Y el momento del vector fuerza normal con respecto al punto C donde comienza el plano inclinado, tomado como origen es:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\vec{\mathbf{N}}_A, \mathbf{C}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{N}} = (-0{,}400\, \vec{\mathbf{i}} + 1{,}20\, \vec{\mathbf{j}}) \times (-104\, \vec{\mathbf{j}}) = 41{,}5\, \vec{\mathbf{k}}\, [\text{N} \cdot \text{m}]$$

2. Una onda unidimensional se propaga de acuerdo con la ecuación: $y = 2{,}00 \cos (1{,}57\, t – 3{,}92\, x)$ donde las distancias «x» e «y» se miden en metros y el tiempo en segundos. Determina:
a) Las características de la onda, incluida la velocidad de propagación.
b) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 2,00 m en la dirección de avance de la onda
c) Los instantes en los que la velocidad de un punto en $x = 40{,}0$ cm es la mitad de la velocidad máxima.
◄ Problema 1 Examen ▲ Laboratorio ►

Solución:

a) Comparando la ecuación de una onda con la del dato (suponiendo que no hay desfase en el foco):

$$y = A \text{ sen}(\omega\, t – k\, x)$$

$$y = 2{,}00 \text{ sen } (1{,}57\, t – 3{,}92\, x) \quad [\text{m}]$$

Amplitud: $A = 2{,}00$ m
Pulsación (frecuencia angular): $\omega = 1{,}57$ rad/s
Número de onda: $k = 3{,}92$ rad/m
De las relaciones entre pulsación, ($\omega = 2\,\pi / T$), período, frecuencia, número de onda ($k = 2\,\pi / \lambda$) longitud de onda y velocidad de propagación de la onda
Período: $T = 2\,\pi / \omega = 2\,\pi$ [rad] / 1,57 [rad/s] = 4,00 s
Longitud de onda: $\lambda = 2\,\pi / k = 2\,\pi$ [rad] / 3,92 [rad/m] = 1,60 m
Frecuencia: $f = 1 / T = 1 / 4{,}00$ [s] = 0,250 Hz
Velocidad de propagación de la onda: $c = \lambda \cdot f = 1{,}60\ [\text{m}] \cdot 0{,}250\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}400$ m/s

b) La diferencia de fase entre dos partículas que separadas una distancia Δx es:

$$\Delta\varphi = [(\omega\, t – k\, x_1) – (\omega\, t – k\, x_2)] = k\,(x_2 - x_1) = k\,\Delta x$$

$$\Delta\varphi = 3{,}92 \cdot 2{,}00 = 7{,}84 \text{ rad}$$

c) La velocidad de oscilación de un punto es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$\text{v} = \frac{dy}{dt} = \frac{d\,2{,}00\,\text{sen}(1{,}57\,t - 3{,}92\,x)}{dt} = 2{,}00 \cdot 1{,}57(\cos(1{,}57\,t - 3{,}92\,x)) = 3{,}14\cos(1{,}57\,t - 3{,}92\,x) \quad [\text{m/s}]$$

que el máxima cuando el valor del $\cos(1{,}57\, t – 3{,}92\, x) = \pm 1$.

$$1{,}57\, t – 3{,}92\, x = \pi\, n = 3{,}14\, n$$

donde $n = 0, 1, 2, 3...$
Para $x = 40{,}0$ cm = 0,400 m

$$1{,}57\, t – 1{,}57 = 3{,}14\, n$$

$$t = 1{,}00 + 2{,}00\, n \text{ [s]}$$

A los 1,00 s y sucesivamente cada semiperíodo ($T / 2 = 2{,}00$ s) (1, 3, 5, 7... s)

Análisis: La onda tarda $t = x / \text{v} = 0{,}400/0{,}400 = 1{,}00$ s *en llegar al punto que dista* 0,400 m *del foco. Como está en la posición de equilibrio, su velocidad es máxima en ese instante y volverá a serlo cada vez que vuelva a pasar por la posición de equilibrio, o sea, cada* 2,00 s.

Laboratorio

1. ¿Qué magnitudes se representan en la gráfica en el estudio estático del resorte para obtener una línea recta? ¿Y en el estudio dinámico? ¿Tienen ambas la misma pendiente? Razona la respuesta.
◄ Probema 2 Examen ▲

Solución:

Según la ley de Hooke

$$F = -k\,x$$

Para obtener una línea recta, en el estudio estático se representan los alargamientos x del muelle frente a las fuerzas F ejercidas sobre él por las pesas: $F = m\,g$.
La pendiente de la recta:

$$\textit{pendiente estático} = \Delta x / \Delta F$$

es la inversa de la constante elástica del muelle: $k = F / x$.

De la comparación de la ley de Hooke con la fuerza resultante, que según la 2ª Ley de Newton, es

$$F = m\,a$$

y teniendo en cuenta que la aceleración de un M.A.S. se obtiene derivando dos veces la ecuación de movimiento:

$$x = A\cos(\omega\,t + \varphi_0)$$

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,(A\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \varphi_0))}{dt} = A\,\omega\cos(\omega\,t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\,(A\,\omega\cos(\omega\,t + \varphi_0))}{dt} = -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \varphi_0) = -\omega^2\,x$$

$$F = -k\,x$$

$$F = m\,a = m\,(-\omega^2\,x) = -m\,\omega^2\,x$$

$$k = m\,\omega^2$$

y escribiendo la pulsación en función del período

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

queda

$$k = m\,\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2\,m}{T^2}$$

Para que quede la ecuación de una recta:

$$y = \mathrm{a}\,x + \mathrm{b}$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$$

se representan los cuadrados de los períodos frente a las masas que oscilan, siendo la pendiente:

$$pendiente\,dinámico=\frac{4\pi^2}{k}$$

donde se ve que las pendientes son distintas