TEMA 5.- Vibraciones y ondas

CUESTIONES

41.- a) En un movimiento armónico simple, ¿cuánto vale la elongación en el instante en el que la velocidad es la mitad de su valor máximo? Exprese el resultado en función de la amplitud.
b) Sobre una partícula de 200 g de masa actúa una fuerza elástica F = - 20x, siendo x la distancia desde la posición de equilibrio. Desplazamos la partícula 10 cm de dicha posición de equilibrio y la dejamos en libertad. Escriba la ecuación de su movimiento.

a) La velocidad de un oscilador armónico en función de la elongación (o distancia a la posición de equilibrio) viene dada por:

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

de manera que su valor máximo se alcanzará en la posición de equilibrio (x = 0), y será $v_{máx} = \pm\omega\ A$ (los dos signos corresponden a los dos posibles sentidos de la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio). Si en un instante la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo, tendremos que:

$$v = \frac{v_{máx}}{2} \Rightarrow \pm\cancel{\omega} \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \frac{\cancel{\omega} A}{2}$$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos que la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo en las siguientes elongaciones:

$$\boxed{x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A}$$

b) La fuerza que actúa sobre la partícula es proporcional a la elongación y de sentido contrario a la misma (observar el signo negativo que aparece en su expresión); se trata, pues, de una fuerza restauradora o recuperadora que, aplicada sobre la partícula, provocará que ésta se mueva con movimiento armónico simple. La ecuación de dicho movimiento es la siguiente:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$$

La amplitud del movimiento de la partícula es de 10 cm = 0´1 m; para calcular la frecuencia angular o pulsación tenemos en cuenta que k = 10 N·m-1 (pues F = - kx = - 10x):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0´2}} = 7´071 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

La fase inicial o constante de fase se calcula a partir de las condiciones iniciales:

$$\text{en } t = 0,\ x = A \quad \Rightarrow \quad \cancel{A} = \cancel{A} \operatorname{sen} \varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Así pues, la ecuación del movimiento de la partícula será la siguiente:

$$\boxed{x = 0´1 \operatorname{sen} (7´071t + \pi/2) \quad \text{(S.I.)}}$$

42.- a) Si se duplica la pulsación de un movimiento armónico simple, indique cómo varían su periodo, su frecuencia, la amplitud y la fase inicial. Razone las respuestas.
b) Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud A. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio la energía cinética es 100 veces mayor que la energía potencial?

a) El periodo depende de la pulsación o frecuencia angular de la siguiente manera:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Así pues, si ω se duplica, el periodo se hará igual a la mitad (obviamente, si el objeto oscila con mayor frecuencia, menor tiempo tardará en completar una oscilación).
La frecuencia depende de la pulsación de la siguiente manera:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Lógicamente, si ω se duplica, también se duplicará la frecuencia del movimiento.
La amplitud del m.a.s. es independiente de la pulsación, por tanto, permanecerá constante (el m.a.s. es isócrono). Lo mismo sucede con la fase inicial (o constante de fase), la cual depende únicamente de las condiciones iniciales.

b) La energía cinética, en función de la elongación. de una partícula que describe un m.a.s. viene dada por:

$$E_c = ½\ k\ (A^2 - x^2)$$

y la energía potencial es:

$$E_p = ½\ kx^2$$

Si la energía cinética es 100 veces mayor que la energía potencial, tendremos:

$$E_c = 100\ E_p \quad \Rightarrow \quad \cancel{½\ k}\ (A^2 - x^2) = 100 \cdot \cancel{½\ k}x^2 \quad \Rightarrow \boxed{x = \pm\ 0´0995\ A}$$

43.- a) La expresión

$$\mathbf{x = 0´2\ sen\ \pi t \qquad (S.I.)}$$

describe el movimiento de una partícula. Represente gráficamente, en los mismos ejes, la elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo.
b) Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f. Explique cómo varían la amplitud, la frecuencia del movimiento y la energía mecánica de la partícula al duplicar el periodo de oscilación.

a) Se trata de la ecuación de una partícula que oscila (o vibra) a lo largo del eje X, a una distancia máxima de 0´2 m a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). La constante de fase es nula, lo cual significa que en el instante inicial la partícula se encuentra en el origen.
Calculamos la velocidad en cualquier instante derivando la elongación con respecto del tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0´2\pi\ \cos\ \pi t \quad (S.I.)$$

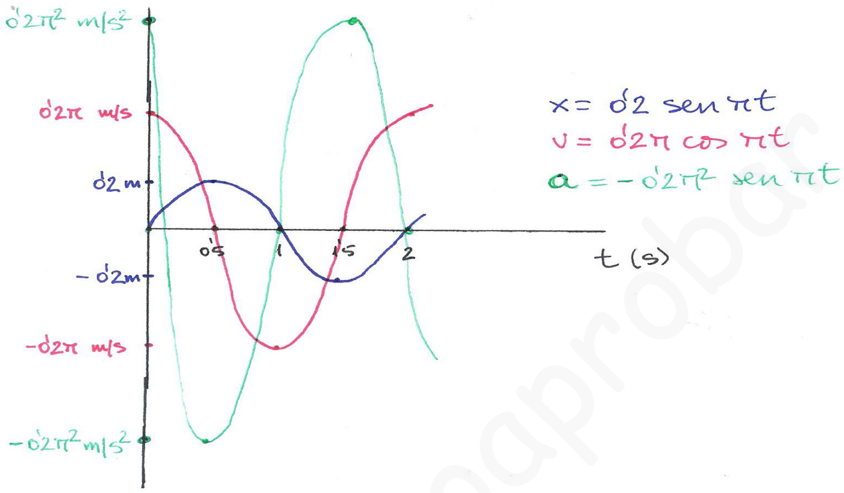
Finalmente la aceleración dependerá periódicamente del tiempo de la manera siguiente:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\,0{'}2\,\pi^2 \ \text{sen}\ \pi t \qquad (\text{S.I.})$$

Para realizar la representación gráfica de la elongación, velocidad y aceleración hallamos el periodo, para así dibujar lo que sucede en una oscilación completa:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ \text{s}$$

Las gráficas serán las siguientes:



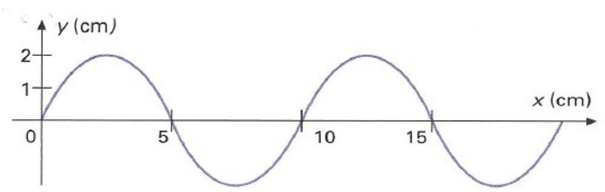
Observar que la elongación y la velocidad están desfasadas $\pi/2$ rad, y que la elongación y la aceleración están desfasadas π rad.

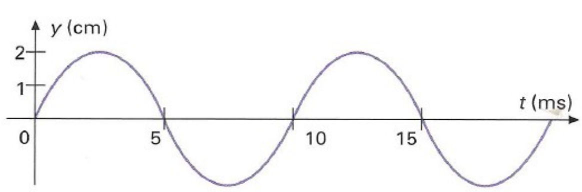
b) En el m.a.s. la amplitud es independiente de la frecuencia (es un movimiento isócrono), de manera que no variará aunque el periodo se duplique.
La frecuencia es inversamente proporcional al periodo; por tanto, si se duplica el periodo, la frecuencia se hará la mitad del valor inicial (lo cual es lógico, pues si aumenta el periodo la partícula tardará más tiempo en describir una oscilación completa).
La energía mecánica de una partícula que se mueve con m.a.s. depende de la constante elástica y del cuadrado de la amplitud:

$$E = 1/2\ kA^2$$

Ninguna de las dos magnitudes varía cuando el periodo se duplica, por lo que la energía mecánica tampoco variará.

44.- a) Una onda transversal de ecuación y (x, t) = A sen (ωt – kx) se propaga por una cuerda tensa. Deduzca los valores de A, ω y k a partir de las gráficas adjuntas, donde se representa en la figura de la izquierda la variación de la elongación de los puntos en un instante concreto (expresada en cm), y en la figura de la derecha, cómo varía su elongación a lo largo del tiempo (expresado en ms). ¿Por qué se dice que las ondas armónicas tienen una periodicidad doble?





b) Una onda cuya frecuencia es de 50 Hz se propaga por una cuerda sujeta por sus extremos a la velocidad de 50 $m \cdot s^{-1}$. ¿Cuál deberá ser la longitud de la cuerda para que se produzca una onda estacionaria en su modo fundamental de vibración?

a) Decimos que las ondas armónicas son doblemente periódicas porque las características del movimiento se repiten cada cierta distancia (longitud de onda) y cada cierto tiempo (periodo), es decir, cada longitud de onda y cada periodo las partículas de la onda vuelven a moverse de la misma manera que un periodo antes y que una longitud de onda antes.
A partir de las gráficas observamos que la amplitud de la onda será:

$$A = 2 \text{ cm} = \boxed{0'02 \text{ m}}$$

En la gráfica de la derecha observamos que el periodo de la onda es de 10 ms (= 0´01 s), por lo que la frecuencia angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0'01} = \boxed{200\pi \quad \text{rad} \cdot s^{-1}}$$

En la gráfica de la izquierda observamos que la longitud de onda es de 10 cm (= 0´1 m), por lo que el número de ondas será:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0'1} = \boxed{20\pi \quad m^{-1}}$$

Observar que la velocidad de propagación de la onda será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{200\pi}{20\pi} = 10 \quad m \cdot s^{-1}$$

b) Sabemos que la distancia entre dos nodos consecutivos de una onda estacionaria es igual a $\lambda/2$; si la longitud de la cuerda es L y está sujeta por sus dos extremos, dicha longitud deberá ser igual a un número entero, N, de semilongitudes de onda:

$$L = N \cdot \lambda/2$$

El modo fundamental de vibración se corresponde con N = 1, de manera que la longitud de la cuerda será:

$$L = \lambda/2$$

La longitud de onda de la onda estacionaria que se propaga por la cuerda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{50}{50} = 1 \quad m$$

con lo que su longitud deberá ser 0´5 m.

45.- a) Dos ondas viajeras se propagan por un mismo medio y la frecuencia de una es doble que la de la otra. Explique la relación entre las diferentes magnitudes de ambas ondas.
b) En una cuerda se ha generado una onda estacionaria. Explique por qué no se propaga energía a través de la cuerda.

a) Si las dos ondas se propagan por el mismo medio, entonces tienen la misma velocidad de propagación; si f_1 es la frecuencia de la primera onda y $f_2 = 2f_1$ la de la segunda, tendremos que:

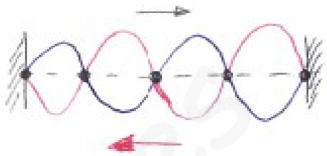
$$v = \frac{\lambda_1}{T_1} = \lambda_1 f_1 \qquad\qquad v = \frac{\lambda_2}{T_2} = \lambda_2 f_2$$

Igualando, tenemos que:

$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 \cancel{f_1} = \lambda_2 \cdot 2\cancel{f_1} \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda_1 = 2\lambda_2}$$

Finalmente, ambas ondas tendrán la misma amplitud, pues es independiente de la frecuencia.

b) Una onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos ondas – las ondas incidente y reflejada – que se propagan por un medio y que encuentran un obstáculo en su desplazamiento. Poseen unos puntos, llamados nodos, en los cuales la amplitud es nula y que se encuentran en reposo, de manera que impiden que la onda estacionaria propague energía a través del medio.



PROBLEMAS

46.- La aguja de una máquina de coser se mueve verticalmente con un movimiento que puede considerarse vibratorio armónico simple. Si el desplazamiento vertical total de la aguja es de 8 mm, y sabiendo que realiza 20 puntadas en 10 s:

a) Escriba la ecuación de movimiento de la aguja, sabiendo que en el instante inicial se encuentra en uno de los extremos de su trayectoria.

b) Calcule los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la aguja, indicando dónde se alcanzan.

a) La ecuación del movimiento de la aguja será:

$$y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

- Si el desplazamiento vertical total es de 8 mm, la amplitud será de 4 mm.
- Si realiza 20 puntadas (u oscilaciones) en 10 s, su frecuencia será de 2 Hz, de modo que la frecuencia angular o pulsación se calculará del modo siguiente:

$$\omega = 2\pi f = 4\pi \text{ rad}\cdot s^{-1}$$

- Finalmente, hallamos la fase inicial o constante de fase a partir de las condiciones iniciales (en t = 0, x = A):

$$A = A \text{ sen } \varphi \;\Rightarrow\; \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Sustituyendo los tres valores, nos queda la siguiente ecuación del movimiento:

$$\boxed{y = 0'004 \text{ sen } (4\pi t + \pi/2) \qquad (S.I.)}$$

b) La velocidad de la aguja se calcula derivando su posición (o elongación) con respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0'016\pi \cos(4\pi t + \pi/2) \quad m\cdot s^{-1}$$

Su valor máximo es $\boxed{v_{máx} = \pm\, 0'016\pi \;\; m\cdot s^{-1} = \pm\, 0'05 \;\; m\cdot s^{-1}}$, y se alcanza en la posición de equilibrio. Los dos signos se corresponden con los dos posibles sentidos de movimiento de la aguja al pasar por dicho punto.

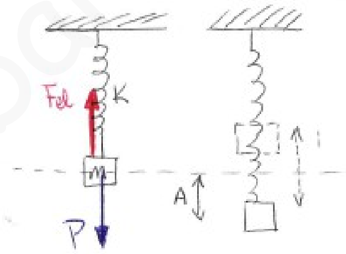
La aceleración de la aguja se calcula derivando su velocidad con respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0{'}064\,\pi^2 \text{ sen } (4\,\pi\,t + \pi/2) \quad m \cdot s^{-2}$$

Su valor máximo es $\boxed{a_{máx} = \mp 0{'}064\,\pi^2 \;\; m \cdot s^{-2} = \mp 0{'}63 \;\; m \cdot s^{-2}}$, y se alcanza en los extremos. Los signos positivo y negativo se corresponden con el acercamiento y alejamiento, respectivamente, de la aguja respecto de la posición de equilibrio.

47.- Un bloque de 1 kg se cuelga de un resorte, observándose que éste se estira 40 cm. Si desplazamos dicho bloque 10 cm hacia abajo y luego lo soltamos:
a) Escriba la ecuación del movimiento del bloque.
b) ¿En qué puntos la energía cinética tiene un valor doble que el de la energía potencial?
$g = 10\ m \cdot s^{-2}$

a) La ecuación del movimiento del bloque es la ecuación de un m.a.s.:



$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

- La distancia máxima que se separa el bloque de la posición de equilibrio es 10 cm, por lo que la amplitud del bloque es de 10 cm.
- Para calcular la pulsación o frecuencia angular tenemos en cuenta que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Calculamos la constante elástica teniendo en cuenta que, cuando el muelle se encuentra en equilibrio al colgar de él la masa, la fuerza resultante ha de ser nula, es decir:

$$\vec{F}_{el} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \;\; F_{el} = P \;\; \Rightarrow \;\; kx = mg \;\; \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{1 \cdot 10}{0{'}4} = 25 \;\; N \cdot m^{-1}$$

La frecuencia angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5 \;\; rad \cdot s^{-1}$$

- Finalmente, hallamos la fase inicial o constante de fase a partir de las condiciones iniciales (en t = 0, x = A):

$$A = A \text{ sen } \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

Sustituyendo los tres valores, nos queda la siguiente ecuación del movimiento:

$$\boxed{x = 0{'}1 \text{ sen } (5t + \pi/2) \qquad (S.I.)}$$

b) Las energías cinética y potencial dependen de la elongación de la manera siguiente:

$$E_c = ½\ k\ (A^2 - x^2) \qquad E_p = ½\ kx^2$$

Los puntos en que $E_c = 2 \cdot E_p$ serán aquellos tales que:

$$\tfrac{1}{2}\cancel{k}\,(A^2 - x^2) = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cancel{k}x^2 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}} = \boxed{\pm\, 0'058 \ \ \mathrm{m}}$$

48.- La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa viene dada por:

$y\,(x, t) = 0'04 \cos(\pi x)\, \mathrm{sen}\,(\pi t)$ (S.I.)

a) Indique de qué tipo de onda se trata, explique sus principales características y escriba las ecuaciones de las ondas cuya superposición da lugar a la indicada, calculando su velocidad de propagación.

b) Calcule razonadamente la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos de dicha onda. ¿Qué velocidad tendrá un punto de la cuerda separado 1 m del foco cuando ha transcurrido medio segundo?

a) Se trata de una onda estacionaria que se propaga a lo largo del eje X, obtenida como resultado de la interferencia o superposición de dos ondas armónicas viajeras – la incidente y la reflejada – que encuentran un obstáculo en su propagación. Posee unos puntos característicos llamados nodos, en los cuales la amplitud de la onda es nula, que se encuentran en reposo, los cuales impiden la propagación de energía de la onda por la cuerda.

Las dos ondas cuya superposición da lugar a la onda estacionaria que se propaga por la cuerda tienen la misma frecuencia y el mismo número de ondas que la onda estacionaria, aunque sus amplitudes tienen un valor igual a la mitad de la amplitud de dicha onda. Además, deben propagarse en sentido contrario, por lo que sus ecuaciones serán:

$$\boxed{y_1(x, t) = 0'02\ \mathrm{sen}\,(\pi t - \pi x)} \qquad \boxed{y_2(x, t) = 0'02\ \mathrm{sen}\,(\pi t + \pi x)}$$

La velocidad a la que se propagan ambas ondas es la misma que la velocidad a la que se propaga la onda estacionaria:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\pi}{\pi} = \boxed{1 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

b) Para hallar la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos calculamos en primer lugar la distancia entre dos nodos consecutivos, sabiendo que éstos son puntos en los que la amplitud resultante es nula:

$$A_R = 0'04\cdot\cos(\pi x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \pi x = (2n + 1)\cdot\pi/2 \quad\Rightarrow\quad x_n = n + \tfrac{1}{2}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_{n+1} - x_n = (n + 1) + \tfrac{1}{2} - (n + \tfrac{1}{2}) = 1 \text{ m}$$

Por otra parte, la posición de cada vientre se calcula teniendo en cuenta que en estos puntos la amplitud resultante es máxima:

$$A_R = 0'04\cdot\cos(\pi x) = \pm 0'04 \Rightarrow \pi x = n\pi \quad\Rightarrow\quad x_n = n$$

La distancia entre dos vientres consecutivos será:

$$x_{n+1} - x_n = (n + 1) - n = 1 \text{ m}$$

En definitiva, la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos será de 0´5 m.

La velocidad (de vibración) de los puntos de la cuerda se calcula derivando la ecuación de la posición (o elongación) de dichas partículas con respecto del tiempo:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = 0'04\pi \cos(\pi x)\cos(\pi t) \quad m \cdot s^{-1}$$

Para un punto de la cuerda situado en x = 1 m cuando ha transcurrido 1 s tendremos que:

$$v = 0'04\,\pi \cos \pi \cos \pi = \boxed{0'04\,\pi\ m \cdot s^{-1}}$$

Observar que dicho punto se mueve con el valor máximo de la velocidad (y hacia arriba).

49.- Una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda posee de ecuación:

$y(x, t) = 0'03 \text{ sen } (2t - 8x)$ (S.I.)

a) ¿Hacia dónde se propaga la onda? Determine la frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de dicho movimiento ondulatorio.

b) ¿Qué distancia hay, en un cierto instante, entre dos puntos cuya diferencia de fase es de 2 rad? Calcule la velocidad de un punto de la cuerda situado a 0´5 m del foco cuando han transcurrido 2 s.

a) La onda se propaga en el sentido positivo del eje X. La frecuencia angular vale 2 rad/s, por lo que la frecuencia será:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \boxed{0'32\ \ Hz}$$

El número de ondas vale 8 m^{-1}, por lo que la longitud de onda será:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8} = \boxed{0'79\ \ m}$$

Finalmente, la velocidad de propagación de la onda será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{2}{8} = \boxed{0'25\ \ m \cdot s^{-1}}$$

b) La fase del primer punto, situado a una distancia x_1 del foco, será:

$$2t - 8x_1$$

La fase del segundo punto, situado a una distancia x_2 del foco, será:

$$2t - 8x_2$$

La diferencia de fase entre ambos puntos será:

$$(2t - 8x_1) - (2t - 8x_2) = 8\,(x_2 - x_1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 - x_1 = 0'25\ m}$$

La velocidad (de vibración) de los puntos de la cuerda se calcula derivando la ecuación de la posición de dichas partículas con respecto del tiempo:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = 0'06 \cos(2t - 8x) \quad m \cdot s^{-1}$$

Para un punto de la cuerda situado en x = 0´5 m cuando han transcurrido 2 s tendremos que:

$$v = 0'06 \cos 0 = \boxed{0'06 \text{ m/s}}$$

Observar que dicho punto se mueve con el valor máximo de la velocidad (y hacia arriba).

50.- Se hace vibrar transversalmente un extremo de una cuerda de gran longitud con un periodo de 0,5π s y una amplitud de 0´2 cm, propagándose a través de ella una onda con una velocidad de 0´1 m/s. En el instante inicial, la elongación en el foco es nula.

a) Escriba la ecuación de la onda, indicando el razonamiento seguido.

b) Explique qué características de la onda cambian si: i) se aumenta el periodo de la vibración en el extremo de la cuerda; ii) se varía la tensión de la cuerda.

a) La ecuación de una onda (viajera) que se propaga a través de un medio se escribe de la manera siguiente:

$$y(x,t) = A \text{ sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

Conocemos la amplitud y el periodo, nos queda por calcular la longitud de onda. Para ello, partimos de la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v\,T = 0'1 \cdot 0'5\pi = 0'05\pi \text{ m}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\boxed{y(x,t)} = 0'002 \text{ sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0'5\pi} - \frac{x}{0'05\pi}\right)\right] = \boxed{0'002 \text{ sen}(4t - 40x) \quad (\text{S.I.})}$$

donde hemos tenido en cuenta que en t = 0 la elongación en el foco (x = 0) es nula (y = 0), por lo que φ = 0.

b)

i) Si aumenta el periodo, disminuyen tanto la frecuencia como la pulsación; asimismo, aumenta la longitud de onda (ya que la velocidad de propagación, al no cambiar de medio, no varía).

ii) Si varía la tensión de la cuerda, entonces varía la velocidad de propagación de la onda a través de la misma. Por consiguiente, también cambiará la longitud de onda.

En ninguno de los dos casos varía la amplitud de la cuerda, pues es independiente tanto del periodo como de la velocidad de propagación, sólo depende del medio a través del cual se propaga la onda.