VIBRACIONES Y ONDAS

◊ INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. En general:
   a) Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
   b) Se calcula cada fuerza.
   c) Se calcula la resultante por el principio de superposición.
   d) Se aplica la 2ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica): $\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$. Como la aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza resultante, se puede escribir para los módulos

$$|\Sigma \overline{\boldsymbol{F}}| = m \cdot |\overline{\boldsymbol{a}}| = m \cdot a$$

2. En los problemas de resortes:
Si el resorte se mueve en un eje vertical, el tratamiento es el mismo que si lo hiciese en una línea horizontal, teniendo en cuenta que el origen es la posición de equilibrio, el punto en el que la fuerza elástica equilibra la fuerza peso.
La ecuación de movimiento en un M.A.S. es

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

También

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi'_0)$$

x es la elongación: separación de la posición de equilibrio. También es la posición del móvil en el sistema de referencia elegido.
A es la amplitud: elongación máxima.
ω es la pulsación o frecuencia angular: número de oscilaciones del móvil en 2 π segundos. Está relacionada con el período T y con la frecuencia f por las expresiones: $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$
t es el tiempo.
φ_0 es la fase inicial. Se emplea para determinar la posición inicial x_0. Tiene distinto valor con la función seno que con la función coseno: $\varphi_0 = \varphi'_0 + \pi / 2$

Para obtener la ecuación de movimiento hay que calcular los valores de A, ω y φ_0 a partir de los datos.

Cuando se estira el resorte y se suelta, el móvil oscila a ambos lados de la posición de equilibrio. El alargamiento inicial es el alargamiento máximo. Ese dato ya es la amplitud A.
Para calcular la frecuencia angular ω, en el caso de no tener ni el período T ni la frecuencia f, se emplea el valor de la constante elástica del resorte k.
La relación matemática entre la frecuencia angular ω y la constante elástica del resorte k es

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se puede demostrar por el siguiente camino:
Se obtiene la ecuación de la velocidad derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot \operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Volviendo a derivar se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=-A\cdot\omega^2\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Si se sustituye $A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ por x queda

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación.
La fuerza resultante puede escribirse, por la 2ª ley de Newton,

$$F = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza elástica y el peso es una fuerza recuperadora que se rige por la expresión:

$$F = -k \cdot x$$

Igualando las dos expresiones queda

$$-k \cdot x = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Despejando ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para calcular la fase inicial φ_0, se sustituye en la ecuación de movimiento el valor de la posición inicial x_0 cuando el tiempo $t = 0$.

$$x_0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(x_0 / A)$$

En caso de que la posición inicial sea la del resorte totalmente estirado sería: para $t = 0$, $x_0 = A$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi/2 \text{ [rad]}$$

En este caso es más sencillo escribir la ecuación de movimiento en función del coseno porque $\varphi'_0 = 0$
La energía potencial elástica en cada punto de elongación x es:

$$E_p = ½\, k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½\, m \cdot v^2 + ½\, k \cdot x^2$$

En el punto de elongación máxima la velocidad es nula.

$$E = ½\, m \cdot 0^2 + ½\, k \cdot A^2 = ½\, k \cdot A^2$$

3. En los problemas de ondas:
La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

También

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

y es la elongación: separación de la posición de equilibrio del punto que está oscilando
A es la amplitud o elongación máxima.
ω es la pulsación o frecuencia angular: número de oscilaciones que realiza el punto en 2 π segundos.
t es el tiempo.
k es el número de onda: número de ondas que hay en una distancia de 2 π metros.
x es la posición del punto del medio referida al foco en el que se origina la onda.
φ es la fase, el argumento de la función trigonométrica: $\varphi = \omega \cdot t - k \cdot x$
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.

Un tercera forma de expresar la ecuación de onda es: $y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$

λ es la longitud de onda: distancia entre dos puntos que están en fase, o distancia que recorre la onda en un período

T es el período: tiempo de una oscilación completa.

Para encontrar la ecuación de movimiento hay que calcular los valores de ω y k a partir de los datos, normalmente usando las expresiones:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Si el dato es la velocidad de propagación de la onda, se usa para calcular la longitud de onda por la expresión:

$$v_p = \lambda \cdot f$$

Para obtener los parámetros de la onda (amplitud, longitud de onda, frecuencia, período, número de onda, velocidad de propagación) solo hay que comparar la ecuación de la onda con la ecuación general. Se obtienen directamente ω (frecuencia angular) y k (número de onda). El resto se calcula con las expresiones anteriores.

Se obtiene la ecuación de la velocidad derivando la ecuación de movimiento con respeto al tiempo

$$v = \frac{d\,y}{d\,t} = \frac{d\{A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)\}}{d\,t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Volviendo a derivar se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)\}}{d\,t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

En ambos casos, los valores máximos se obtienen cuando la función trigonométrica vale 1 ó –1.

En los ejercicios para calcular posiciones o tiempos en fase, posición de fase o separados por una fase, solo hay que restar las expresiones de la fase e igualar el resultado al desfase.

$$\Delta\varphi = (\omega \cdot t_2 - k \cdot x_2) - (\omega \cdot t_1 - k \cdot x_1)$$

● RECOMENDACIONES

1. Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.

2. Se hará otra lista con las incógnitas.

3. Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella. Se deberá incluir cada una de las fuerzas y su resultante.

4. Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.

5. En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado. En particular, comprobar que los vectores campo electrostático tienen la dirección y el sentido acorde con el croquis.

6. En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre el las cifras significativas del resultado.

● ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz: $3·10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000… m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3·10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como $c = 3·10^8$ m/s y lo reescribo como:
Cifras significativas: 3
$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ($3·10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

◊ PROBLEMAS

● M.A.S.

1. Una masa de 200 g está unida a un muelle y oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple (M.A.S). La amplitud del movimiento es A = 40 cm, y la elongación en el instante inicial es x = −40 cm. La energía total es 8 J. Calcula:
   a) La constante elástica del muelle.
   b) La ecuación del M.A.S.
   c) La velocidad y aceleración máximas, indicando los puntos de la trayectoria en los que se alcanzan dichos valores.

(P.A.U. Jun. 15)

Rta.: a) k = 100 N/kg; b) $x = 0{,}400 \text{ sen}(22{,}4\ t + 4{,}71)$ [m]; c) v_m = 8,94 m/s; a_m = 200 m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 200 g = 0,200 kg
Amplitud	A = 40,0 cm = 0,400 m
Elongación inicial	x_0 = −40,0 cm = −0,400 m
Energía mecánica	E = 8,00 J
Incógnitas	
Constante elástica del muelle	k
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	ω, φ_0
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Energía mecánica	$E = ½\ k \cdot A^2$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle a partir de la energía y de la amplitud.

$$E=½\ k \cdot A^2 \Rightarrow\ k=\frac{2 \cdot E}{A^2}=\frac{2 \cdot 8{,}00\ [\text{J}]}{(0{,}400\ [\text{m}])^2}=100\ \text{N/kg}$$

b) La ecuación de movimiento de un M.A.S. es

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico)
La amplitud es la máxima separación de la posición de equilibrio y es un dato: A = 0,400 m
La frecuencia angular se calcula a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{100\,[\mathrm{N\cdot m^{-1}}]}{0{,}200\,[\mathrm{kg}]}}=22{,}4\ \mathrm{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:

$$-0{,}400\ [\mathrm{m}] = 0{,}400\ [\mathrm{m}]\ \mathrm{sen}(22{,}4 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\mathrm{sen}(\varphi_0) = -1$$

$$\varphi_0 = \arcsin(-1) = 3\,\pi / 2\ [\mathrm{rad}] = 4{,}71\ \mathrm{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}400\ \mathrm{sen}(22{,}4\ t + 4{,}71)\ [\mathrm{m}]$$

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para t = 0, x_0 = −0,400 m).

c) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Tiene el valor máximo cuando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$$v_m = A \cdot \omega = 0{,}400\ [\mathrm{m}] \cdot 22{,}4\ [\mathrm{rad/s}] = 8{,}94\ \mathrm{m/s}$$

Esta velocidad máxima se alcanza cuando la masa pasa por el punto medio de su trayectoria (origen), porque cuando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$, entonces $\mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$ y $x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=-A\cdot\omega^2\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Tiene el valor máximo cuando $\mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -1$

$$a_m = A \cdot \omega^2 = 0{,}400\ [\mathrm{m}] \cdot (22{,}4\ [\mathrm{rad/s}])^2 = 200\ \mathrm{m/s^2}$$

Esta aceleración máxima se alcanza cuando la masa pasa por los extremos de su trayectoria ($x = \pm A$), porque la aceleración es proporcional a la elongación, $a = -\omega^2 \cdot x$. La aceleración es máxima cuando es máxima la elongación.

2. Un objeto de 100 g, unido a un muelle de k = 500 N·m⁻¹, realiza un movimiento armónico simple. La energía total es de 5 J. Calcula:
   a) La amplitud.
   b) La velocidad máxima y la frecuencia de la oscilación.
   c) Indica cualitativamente en una gráfica como varían la energía total, cinética y potencial con la elongación.

   (P.A.U. Set. 10)

   Rta.: a) A = 0,141 m; b) v_m = 10,0 m/s; f = 11,3 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 100 g = 0,100 kg
Constante elástica del muelle	k = 500 N·m⁻¹
Energía mecánica	E = 5,00 J
Incógnitas	
Amplitud (elongación máxima)	A
Velocidad máxima	v_m
Frecuencia de oscilación	f
Otros símbolos	

Incógnitas

Valor de la velocidad	v
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Elongación	x
Fuerza recuperadora elástica	F

Ecuaciones

Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\,k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\,m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = ½\,k \cdot A^2$

Solución:

a) Se calcula la amplitud partir de la energía y de la constante elástica del muelle.

$$E = ½\,k \cdot A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}00\,[\text{J}]}{500\,[\text{N·m}^{-1}]}} = 0{,}141\text{ m}$$

b) Para calcular la frecuencia de oscilación se calcula antes la frecuencia angular a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500\,[\text{N·m}^{-1}]}{0{,}100\,[\text{kg}]}} = 70{,}7\text{ rad/s}$$

La frecuencia de oscilación se obtiene de la frecuencia angular.

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{70{,}7\,[\text{rad/s}]}{2 \cdot 3{,}14\,[\text{rad}]} = 11{,}3\text{ s}^{-1}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

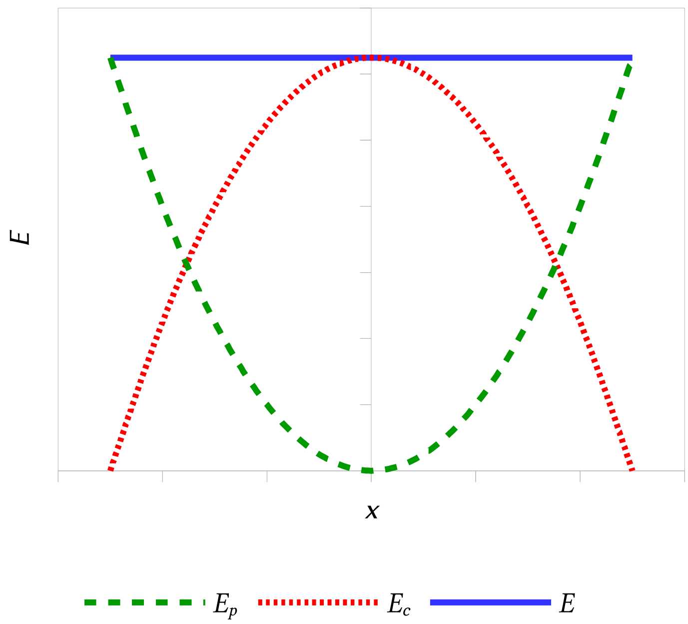
Tiene el valor máximo cuando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$v_m = A \cdot \omega = 0{,}141\,[\text{m}] \cdot 70{,}7\,[\text{rad/s}] = 10{,}0\text{ m/s}$

c) La energía mecánica $E = ½\,k \cdot A^2$ es constante y, por tanto, su representación es una línea recta horizontal.
La representación gráfica de la energía potencial es una parábola con el vértice en el origen.
La energía cinética se puede expresar como la diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial

$E_c = E - E_p = ½\,k \cdot A^2 - ½\,k \cdot x^2 = ½\,k\,(A^2 - x^2)$

Su representación gráfica también es una parábola pero invertida.



3. Un cuerpo de masa 100 gramos está unido a un resorte que oscila en uno plano horizontal. Cuando se estira 10 cm y se suelta, oscila con un período de 2 s. Calcula:
   a) La velocidad cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio.
   b) La aceleración en ese momento.

c) La energía mecánica.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) $|v|$ = 0,272 m/s; b) $|a|$ = 0,493 m/s²; c) E = 4,93·10⁻³ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que cuelga	m = 100 g = 0,100 kg
Amplitud	A = 10,0 cm = 0,100 m
Período	T = 2,00 s
Posición para calcular la velocidad y aceleración	x = 5,00 cm = 0,0500 m
Incógnitas	
Velocidad cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio	v
Aceleración en ese momento	a
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2\pi / T$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$
Relación entre la aceleración y la elongación	$a = -\omega^2 \cdot x$

Solución:

a) Se calcula la frecuencia angular a partir del período.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{s}]}=3{,}14\ \text{rad/s}$$

Se calcula la constante elástica del resorte a partir de la frecuencia angular y de la masa

$$k=m\cdot\omega^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (3{,}14\ [\text{rad/s}])^2 = 0{,}987\ \text{N / m}$$

Se calcula la velocidad aplicando el principio de conservación de la energía, porque la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\, m \cdot v_1^2 + ½\, k \cdot x_1^2 = ½\, m \cdot v_2^2 + ½\, k \cdot x_2^2$$

Se multiplica todo por 2 y se sustituyen valores

$$0{,}100\ [\text{kg}] \cdot 0^2 + 0{,}987\ [\text{N/m}]\ (0{,}100\ [\text{m}])^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot v^2 + 0{,}987\ [\text{N/m}]\ (0{,}0500\ [\text{m}])^2$$

$$|v| = 0{,}272\ \text{m/s}$$

El signo de la velocidad no puede determinarse a partir de los datos.

b) La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación:

$$a=-\omega^2\cdot x = \pm(3{,}14\ [\text{rad/s}])^2 \cdot 0{,}0500\ [\text{m}] = \pm 0{,}493\ \text{m/s}^2$$

El signo de la aceleración depende de a qué lado de la posición de equilibrio se encuentre.

c) La energía mecánica es constante y vale lo mismo que en el punto de máxima elongación, en el que la velocidad es nula:

$$E = (E_c + E_p) = 0 \cdot v^2 /2 + k \cdot A^2 / 2 = 0{,}987\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}100\ [\text{m}])^2 / 2 = 4{,}93\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

4. Una masa de 10 g está unida a un resorte y oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A = 20 cm, y la elongación en el instante inicial es x = -20 cm. Si la energía total es 0,5 J, calcula:
   a) La constante elástica del resorte.
   b) La ecuación del movimiento.

c) La energía cinética en la posición x = 15 cm.

(P.A.U. Set. 12)

Rta.: a) k = 25,0 N/m; b) $x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(50{,}0 \cdot t + 4{,}71)$ [m]; c) E_c = 0,219 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que oscila	m = 10,0 g = 0,0100 kg
Amplitud	A = 20,0 cm = 0,200 m
Posición inicial	x_0 = −20,0 cm = −0,200 m
Energía mecánica	E = 0,500 J
Posición para calcular la energía cinética	x = 15,0 cm = 0,150 m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	ω, φ_0
Energía cinética en la posición x = 15 cm	E_c
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle a partir de la energía y de la amplitud.

$$E = ½\, k \cdot A^2 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot E}{A^2} = \frac{2 \cdot 0{,}500\ [\text{J}]}{(0{,}200\ [\text{m}])^2} = 25{,}0\ \text{N/m}$$

b) La ecuación de movimiento de un M.A.S. puede escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.)
La amplitud es la máxima separación de la posición de equilibrio y es un dato: A = 0,200 m
La frecuencia angular se calcula a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25{,}0\ [\text{N/m}]}{0{,}0100\ [\text{kg}]}} = 50{,}0\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:

$$-0{,}200\ [\text{m}] = 0{,}200\ [\text{m}]\ \text{sen}(50{,}0 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = -1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(-1) = 3\ \pi / 2\ [\text{rad}] = 4{,}71\ \text{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(50{,}0 \cdot t + 4{,}71)\ [\text{m}]$$

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para t = 0, x_0 = −0,200 m).

c) Se puede calcular la energía cinética a partir de la energía potencial.

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 25{,}0\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}281\ \text{J}$$

Teniendo en cuenta que la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$E_c = E - E_p = 0{,}500\ [\text{J}] - 0{,}281\ [\text{J}] = 0{,}219\ \text{J}$$

5. La energía total de un cuerpo de masa 0,5 kg que realiza un movimiento armónico simple es $6{,}0\cdot10^{-3}$ J y la fuerza máxima que actúa sobre él es 0,3 N.
   a) Escribe la ecuación de la elongación en función del tiempo, si en el instante inicial se encuentra en el punto de máxima elongación positiva.
   b) Calcula en el instante $T/4$ la energía cinética y la energía potencial.
   c) Halla la frecuencia con la que oscilaría si se duplicase su masa.

(P.A.U. Set. 16)

Rta.: a) x = 0,0400 cos(3,87 t) (m); b) E_p = 0; E_c = $6{,}0\cdot10^{-3}$ J; c) f' = 0,436 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa	m = 0,500 kg
Fuerza recuperadora elástica máxima	F_m = 0,300 N
Energía mecánica	E = $6{,}00\cdot10^{-3}$ J
Período de oscilación	T = 4,00 s
Posición inicial	$x_0 = A$
Incógnitas	
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y amplitud)	ω, A
Energía potencial en el instante $T/4$	E_p
Energía cinética en el instante $T/4$	E_c
Frecuencia con la que oscilaría si se duplicase su masa	f'
Otros símbolos	
Amplitud	A
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Masa de la partícula	m
Elongación	x
Amplitud (elongación máxima)	A
Ecuaciones	
Ecuación del movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía mecánica	$E = ½\, k \cdot A^2$
Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2\,\pi\,/\,T$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución:

a) Se plantea un sistema de dos ecuaciones para calcular dos de las incógnitas: la amplitud y la constante elástica del muelle. La energía mecánica elástica es $E=½\,k\cdot A^2$. La fuerza es máxima cuando la elongación es igual a la amplitud.

$$\left.\begin{array}{r}E=\frac{1}{2}k\cdot A^2\\ F_m=k\cdot A\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}k\cdot A^2=6{,}00\cdot10^{-3}\ \text{J}\\ k\cdot A=0{,}300\ \text{N}\end{array}\right\}\begin{array}{l}A=0{,}040\ 0\text{m}\\ k=7{,}50\ \text{N/m}\end{array}$$

La frecuencia angular se calcula a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{7{,}50\ [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{0{,}500\ [\text{kg}]}}=3{,}87\ \text{rad/s}$$

La ecuación del M.A.S. es indistintamente $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ o $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi'_0)$ pero el valor de la fase inicial depende de la expresión. (En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.)
Para calcular la fase inicial se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:

$$0{,}0400\ [\text{m}] = 0{,}0400\ [\text{m}]\ \text{sen}(3{,}87 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(-1) = \pi / 2 \text{ [rad]} = 1{,}57 \text{ rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}0400 \text{ sen}(3{,}87 \cdot t + 1{,}57) \text{ [m]}$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$x = 0{,}0400 \cos(3{,}87 \cdot t) \text{ [m]}$$

b) Para calcular la energía potencial necesitamos conocer la posición en ese instante.
Se calcula el período T de oscilación a partir de la frecuencia angular.

$$\omega = 2\,\pi / T \Rightarrow\ T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{3{,}87 \text{ [rad/s]}} = 1{,}62 \text{ s}$$

$$t = T / 4 = 1{,}62 \text{ [s]} / 4 = 0{,}405 \text{ s}$$

$$x = 0{,}0400 \cos(3{,}87 \cdot 0{,}405) = 0$$

Energía potencial para $x = 0$ m:

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 7{,}50 \text{ [N/m]} (0 \text{ [m]})^2 / 2 = 0$$

La energía cinética se calcula a partir de la energía mecánica, ya que la fuerza es conservativa.
Energía cinética para $x = 0$ m:

$$E_c = E - E_p = 6{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ [J]} - 0 \text{ [J]} = 6{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

c) De la ecuación que relaciona la constante elástica con la frecuencia angular se puede despejar la frecuencia

$$k = m \cdot \omega^2 = m\,(2\,\pi \cdot f)^2 = 4\,\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \ \Rightarrow\ f\,' = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{3{,}87 \text{ [N/m]}}{2 \cdot 0{,}500 \text{ [kg]}}} = 0{,}436 \text{ s}^{-1}$$

La frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. Si la masa se duplica, la frecuencia disminuye en un factor $\sqrt{2}$.

6. Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm.
   a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento.
   b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza.
   c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a oscilar.
   Dato: $g = 9{,}8$ m/s² *(P.A.U. Set. 14)*
   Rta.: a) $k = 4{,}90 \cdot 10^3$ N/m; $f = 2{,}49$ Hz; b) $x = 0{,}0300 \cos(15{,}7\ t)$ [m]; $v = -0{,}470 \text{ sen}(15{,}7\ t)$ m/s]; $a = -7{,}35 \cos(15{,}7\ t)$ [m/s²]; $F = -147 \cos(15{,}7\ t)$ [N]; c) $E_c = 0{,}0270$ J; $E_p = 2{,}18$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que se cuelga del muelle	$m_0 = 10{,}0$ kg
Alargamiento	$\Delta x = 2{,}00$ cm $= 0{,}0200$ m
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 20{,}0$ kg
Posición inicial	$x_0 = 3{,}00$ cm $= 0{,}0300$ m
Amplitud (elongación máxima)	$A = x_0 = 0{,}0300$ m
Tiempo para calcular la energía	$t = 2{,}00$ s
Aceleración de la gravedad	$g = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Frecuencia del movimiento	f

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuaciones del movimiento armónico:	x, v, a, F
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Fuerza máxima	F_m
Energía cinética cuando t = 2 s	E_c
Energía potencial cuando t = 2 s	E_p
Otros símbolos	
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Peso	$P = m \cdot g$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle de la situación de equilibrio, cuando los valores del peso de la masa colgada y la fuerza elástica son iguales:

$$k \cdot \Delta x = m \cdot g$$

$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{10{,}0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]}{0{,}020\ 0\ [\text{m}]} = 4{,}90 \cdot 10^3\ \text{N/m}$$

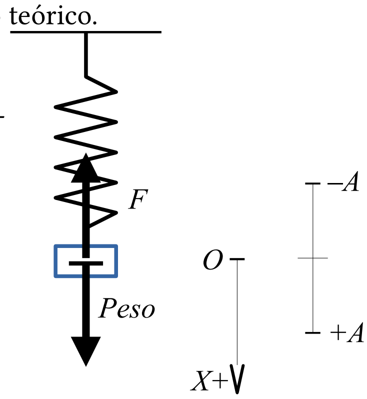
Se calcula la frecuencia a partir de la pulsación, que se obtiene de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}90 \cdot 10^3\ [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{20{,}0\ [\text{kg}]}} = 15{,}7\ \text{rad/s}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{15{,}7\ \text{rad/s}}{2 \cdot 3{,}14\ \text{rad}} = 2{,}49\ \text{s}^{-1} = 2{,}49\ \text{Hz}$$

b) En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:



$$0{,}0300\ [\text{m}] = 0{,}0300\ [\text{m}] \cdot \text{sen}(\ 15{,}7 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi\ /\ 2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t + \pi\ /2)\ [\text{m}]$$

Como sen(φ + π /2) = cos φ, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$x = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\text{m}]$$

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para t = 0, x_0 = 0,0300 m).

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}030\ 0\cos(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}t}=-15{,}7\cdot 0{,}030\ 0\,\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)=-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}t}=-0{,}470\cdot 15{,}7\cdot\cos(15{,}7\cdot t)=-7{,}35\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s^2}$$

La fuerza elástica es:

$$F = -k \cdot x$$

$$F = -4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}] \cdot 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\mathrm{m}] = -147 \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\mathrm{N}]$$

c) A los 2,00 s su posición es:

$$x = 0{,}0300\ [\mathrm{m}] \cdot \cos(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0298\ \mathrm{m}$$

Energía potencial para $x = 0{,}0298$ m:

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0298\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 2{,}18\ \mathrm{J}$$

A los 2,00 s su velocidad es:

$$v = -0{,}470\ [\mathrm{m/s}]\cdot \mathrm{sen}(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0520\ \mathrm{m/s}$$

Energía cinética para $v = 0{,}0520$ m/s

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 20{,}0\ [\mathrm{kg}] \cdot (0{,}0520\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 0{,}0270\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede calcular la energía mecánica $E=½\ k\cdot A^2$ = $k \cdot A^2 / 2 = 4{,}90\cdot 10^3$ [N/m] (0,0300 [m])² / 2 = 2,21 J y *comprobar que es igual a la suma de las energías cinética y potencial:* 2,21 J = 0,027 J + 2,18 J

7. Un resorte de masa despreciable se estira 0,1 m cuando se le aplica una fuerza de 2,45 N. Se fija en su extremo libre una masa de 0,085 kg y se estira 0,15 m a lo largo de una mesa horizontal a partir de su posición de equilibrio y se suelta dejándolo oscilar libremente sin rozamiento. Calcula:
   a) La constante elástica del resorte y el período de oscilación.
   b) La energía total de la oscilación y las energías potencial y cinética cuando $x = 0{,}075$ m.

   (P.A.U. Jun. 04)

   Rta.: a) $k = 24{,}5$ N/m; $T = 0{,}370$ s; b) $E = 0{,}276$ J; $E_p = 6{,}89\cdot 10^{-2}$ J; $E_c = 0{,}207$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}085$ kg
Fuerza aplicada	$F_a = 2{,}45$ N
Alargamiento	$\Delta x = 0{,}100$ m
Posición inicial	$x_0 = 0{,}150$ m
Amplitud (elongación máxima)	$A = x_0 = 0{,}150$ m
Posición para calcular la energía cinética y potencial	$x = 0{,}0750$ m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Período de oscilación	T
Energía mecánica	E
Energía cinética para $x = 0{,}0750$ m	E_c
Energía potencial para $x = 0{,}0750$ m	E_p
Otros símbolos	
Elongación	x
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Relación entre la frecuencia angular ω y la constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$

Ecuaciones

Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2\pi / T$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle a partir del equilibrio en el que la fuerza elástica contrarresta a la fuerza aplicada

$$F_a = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{F_a}{\Delta x} = \frac{2{,}45\ [\mathrm{N}]}{0{,}100\ [\mathrm{m}]} = 24{,}5\ \mathrm{N/m}$$

El período se calcula de la frecuencia angular que se obtiene a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24{,}5\ [\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}]}{0{,}085\ [\mathrm{kg}]}} = 17{,}0\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\pi / T \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]}{17{,}0\ [\mathrm{rad/s}]} = 0{,}370\ \mathrm{s}$$

b) Energía mecánica

$$E = ½\, k \cdot A^2 = k \cdot A^2 / 2 = 24{,}5\ [\mathrm{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 0{,}276\ \mathrm{J}$$

Energía potencial para $x = 0{,}075$ m:

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 24{,}5\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}075\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 6{,}89{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{J}$$

La energía cinética se calcula a partir de la energía mecánica, ya que la fuerza es conservativa.

$$E_c = E - E_p = 0{,}276 - 6{,}89{\cdot}10^{-2} = 0{,}207\ \mathrm{J}$$

8. Una masa de 0,01 kg realiza un movimiento armónico simple de ecuación $x = 5 \cos(2\, t + \pi/6)$. (Magnitudes en el S.I.). Calcula:
   a) Posición, velocidad y aceleración en $t = 1$ s.
   b) Energía potencial en $x = 2$ m.
   c) La energía potencial, ¿es negativa en algún instante?

   (P.A.U. Jun. 07)

   Rta.: a) $x_1 = -4{,}08$ m; $v_1 = -5{,}79$ m/s; $a_1 = 16{,}3$ m/s²; b) $E_p = 0{,}0800$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}0100$ kg
Ecuación del movimiento	$x = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot t + \pi/6)$ [m]
Incógnitas	
Posición en $t = 1{,}00$ s.	x_1
Velocidad en $t = 1{,}00$ s.	v_1
Aceleración en $t = 1{,}00$ s.	a_1
Energía potencial en $x = 2{,}00$ m	E_p
Otros símbolos	
Elongación	x
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular ω y la constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) La posición para t = 1,00 s se obtiene sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación de movimiento:

$$x_1 = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m}] = -4{,}08\ \text{m}$$

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{5{,}00\cdot\cos(2{,}00\cdot t+\pi/6)\}}{\mathrm{d}\,t}=-5{,}00\cdot 2{,}00\cdot\operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)=-10{,}0\cdot\operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)\ [\text{m/s}]$$

Sustituyendo el valor del tiempo, t = 1,00 s

$$v_1 = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m/s}] = -5{,}79\ \text{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{d\{-10{,}0\cdot\operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)\}}{\mathrm{d}\,t}=-10{,}0\cdot 2{,}00\cdot\cos(2{,}00\,t+\pi/6)=-20{,}0\cdot\cos(2{,}00\,t+\pi/6)\ [\text{m/s}^2]$$

Sustituyendo el valor del tiempo, t = 1,00 s

$$a_1 = -\ 20{,}0 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m/s}^2] = 16{,}3\ \text{m/s}^2$$

Análisis: La posición inicial era x_0 = 5,00 · cos (π/6) = 4,33 m y se movía hacia el origen, ya que la velocidad inicial era v_0 = −10,0 · sen (π/6) < 0. Como el período T = 2 π / ω = 3,14 s, para t = 1,00 s aún no ha descrito medio ciclo, por lo que tiene que encontrarse en las zonas de elongaciones negativas, por lo que la aceleración ($a = -\omega^2 \cdot x$) ha de ser positiva. Con estos sencillos cálculos no podemos determinar si su velocidad es hacia el origen (+) o en sentido contrario.

b) Para calcular la energía potencial se necesita la constante elástica del muelle que se obtiene a partir de la pulsación y de la masa oscilante: $k=m\cdot\omega^2$

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = m \cdot \omega^2 \cdot x^2 / 2 = 0{,}0100\ [\text{kg}]\ (2{,}00\ [\text{rad/s}])^2\ (2{,}00\ [\text{m}])^2 / 2 = 8{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{J} = 0{,}0800\ \text{J}$$

Análisis: La energía mecánica se conserva, porque la fuerza elástica es una fuerza conservativa. La energía potencial elástica podría calcularse restando la energía cinética de la energía mecánica: $E_p = E - E_c$.
Aunque la energía mecánica se puede calcular fácilmente sin conocer la constante elástica, ya que: $E = E_{p\,m} = E_{c\,m} = ½\ m \cdot v^2_m$, calcular la energía cinética para x = 2,00 m es más complicado y no compensa hacerlo.

c) La energía potencial, ¿es negativa en algún instante? No, ya que la constante elástica es un número positivo y la elongación, aunque puede ser positiva o negativa, está elevada al cuadrado, por lo que la energía potencial elástica es siempre positiva.

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

9. De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta. Halla:
   a) La constante del resorte.
   b) La ecuación del M.A.S. que describe el movimiento.
   c) Deduce la ecuación de la energía potencial elástica.
   Dato: g = 9,8 m·s⁻² *(P.A.U. Set. 07)*
   Rta.: a) k = 9,8 N/m; b) x = 0,060 · cos(14 · t) [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud inicial del resorte	L_0 = 40,0 cm = 0,400 m
Masa que cuelga	m = 50,0 g = 0,0500 kg
Longitud al colgarle los 50 g	L = 45,0 cm = 0,450 m
Amplitud	A = 6,00 cm = 0,0600 m
Aceleración de la gravedad	g = 9,80 m·s⁻²
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	ω, φ_0
Otros símbolos	
Elongación	x
Trabajo	W
Ecuaciones	
Peso	$P = m \cdot g$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular ω y la constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle de la situación de equilibrio, cuando los valores del peso de la masa colgada y la fuerza elástica son iguales:

$$k \cdot \Delta x = m \cdot g$$

El alargamiento vale

$$\Delta x = L - L_0 = 0{,}450\ [\text{m}] - 0{,}400\ [\text{m}] = 0{,}050\ \text{m}$$

La constante es

$$k = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{0{,}050\ 0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]}{0{,}050\ [\text{m}]} = 9{,}8\ \text{N/m}$$

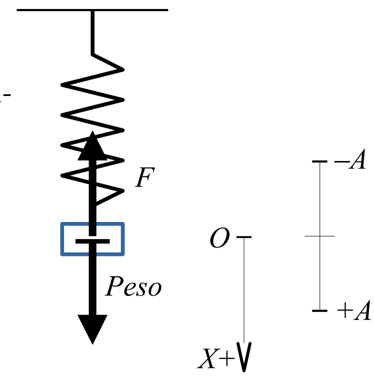
b) La ecuación de movimiento de un M.A.S. puede escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.)
La amplitud es la máxima separación de la posición de equilibrio y es un dato: $A = 0{,}0600$ m
La frecuencia angular se calcula a partir de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]}{0{,}050\ 0\ [\text{kg}]}} = 14\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:



$$0{,}0600\ [\text{m}] = 0{,}0600\ [\text{m}] \cdot \text{sen}(14 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi/2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

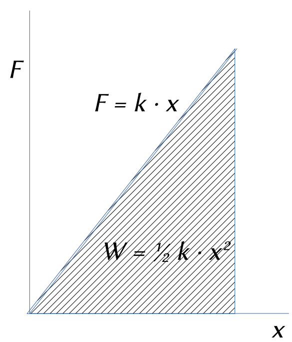
$$x = 0{,}0600 \cdot \text{sen}(14\ t + \pi/2)\ [\text{m}]$$

Como $\text{sen}(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$x = 0{,}0600 \cdot \cos(14\ t)\ [\text{m}]$$

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para $t = 0$, $x_0 = 0{,}0600$ m).

c) Para obtener la ecuación de energía potencial elástica, sin cálculo integral, se dibuja la gráfica F / x y se admite que el trabajo de la fuerza elástica entre el origen y un punto cualquiera de elongación es el área bajo la gráfica.
Para un desplazamiento elemental, d x, el trabajo de la fuerza valdría el área elemental bajo la gráfica F / x.



$$\text{d}\ W = F \cdot \text{d}\ x$$

El trabajo de la fuerza elástica cuando un objeto sometido a ella se desplaza entre el origen y un punto de coordenada x vale:

$$W = \text{Área del triángulo} = x \cdot F / 2 = x \cdot k \cdot x / 2 = ½\ k \cdot x^2$$

Como el trabajo es la variación de la energía potencial cambiada de signo

$$W = -\Delta E_p$$

Si se asigna al origen energía potencial nula, la expresión de la energía potencial es

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

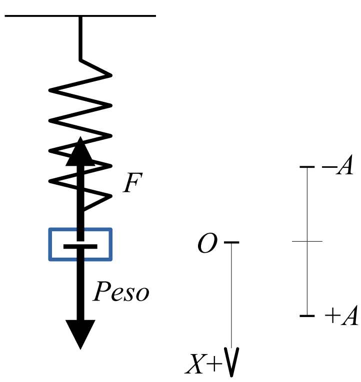
10. Una masa de 5 g realiza un movimiento armónico simple de frecuencia 1 Hz y amplitud 10 cm. Si en $t = 0$ la elongación es la mitad de la amplitud, calcula:
a) La ecuación del movimiento.
b) La energía mecánica.
c) ¿En qué puntos de la trayectoria es máxima la energía cinética y en cuáles es máxima la energía potencial?

(P.A.U. Jun. 09)

Rta.: a) $x = 0{,}100 \cdot \text{sen}(2\ \pi \cdot t + \pi / 6)$ [m] b) $E = 9{,}87 \cdot 10^{-4}$ J

Datos	**Cifras significativas: 3**
Masa que realiza el M.A.S.	m = 5,00 g = 0,00500 kg
Amplitud	A = 10,0 cm = 0,100 m
Posición inicial	$x_0 = \pm A / 2 = \pm 0{,}0500$ m
Frecuencia	f = 1,00 Hz
Incógnitas	
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	$\omega,\ \varphi_0$
Energía mecánica	E
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:



a) La ecuación de movimiento de un M.A.S. puede escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.)
La amplitud es un dato: A = 0,100 m
La frecuencia angular se calcula a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}] \cdot 1{,}00\ [\text{Hz}] = 2\ \pi\ [\text{rad/s}] = 6{,}28\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:

$$A / 2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1 / 2$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1/2)$$

Hay dos soluciones: $\varphi_{01} = \pi / 6$ y $\varphi_{02} = 5\,\pi / 6$.
Se necesitaría conocer el sentido del movimiento para poder elegir entre ellas. A falta de ese dato, se elige arbitrariamente, por ejemplo: $\varphi_{01} = \pi / 6$, que corresponde al desplazamiento en sentido positivo.
La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}100 \cdot \text{sen}(2\,\pi \cdot t + \pi / 6)\ [\text{m}]$$

(Si se hubiese elegido la ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, también habría dos soluciones para la fase inicial: $\varphi_{01} = -\pi / 3$ y $\varphi_{02} = \pi / 3$)
Análisis: Cualquiera de las ecuaciones de movimiento propuestas cumple la condición de la posición inicial (para $t = 0$, $x_0 = 0{,}0500$ m o $x_0 = -0{,}0500$ m).

b) La energía mecánica puede calcularse como la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante, la energía cinética máxima o la energía potencial máxima:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

Si se opta por la última, hay que calcular el valor de la constante elástica.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{rad/s}])^2 = 0{,}197\ \text{N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = k \cdot A^2 / 2 = 0{,}197\ [\text{N/m}]\ (0{,}0500\ [\text{m}])^2 / 2 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima. La velocidad en un instante es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Derivando la ecuación de movimiento queda:

$$v = \frac{\text{d}\,x}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{0{,}100 \cdot \text{sen}(2\,\pi \cdot t + \pi/6)\}}{\text{d}\,t} = 0{,}100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \cos(2\,\pi \cdot t + \pi/6) = 0{,}628 \cdot \cos(2\,\pi \cdot t + \pi/6)\ \text{m/s}$$

La velocidad tiene un valor máximo cuando el coseno de la fase vale 1.

$$v_m = 0{,}628\ \text{m/s}$$

$$E_{c\,m} = m \cdot v^2_m / 2 = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (0{,}628\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

c) La energía cinética es máxima cuando la energía potencial es mínima, o sea nula. Es decir en el origen o centro de la trayectoria $x = 0$.
La energía potencial es máxima cuando la elongación es máxima, o sea igual a la amplitud. Es decir

$$x = \pm A = \pm 0{,}100\ \text{m}$$

11. Una partícula de masa $m = 0{,}1$ kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud $A = 0{,}20$ m y la frecuencia $f = 5\ \text{s}^{-1}$. En el instante inicial la posición es $x = A$. Calcula para $t = T / 8$ s:
    a) La velocidad y aceleración.
    b) La energía mecánica.
    a) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.

    (P.A.U. Jun. 13)

    Rta.: a) $v = -4{,}44$ m/s; $a = -140\ \text{m/s}^2$; b) $E = 1{,}97$ J; c) $f = 3{,}54$ Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	$m = 0{,}100$ kg
Amplitud	$A = 0{,}200$ m
Frecuencia	$f = 5{,}00\ \text{s}^{-1}$
Posición inicial	$x_0 = A = 0{,}200$ m
Incógnitas	
Velocidad para $t = T / 8$	v
Aceleración para $t = T / 8$	a

Energía mecánica	E
Frecuencia si se duplica la masa	f_2
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Período	T
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

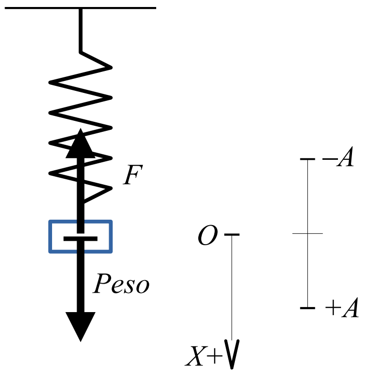
a) La ecuación de movimiento de un M.A.S. puede escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico)
La amplitud es un dato: $A = 0{,}200$ m
La frecuencia angular se calcula a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2\,\pi\ [\text{rad}] \cdot 5{,}00\ [\text{Hz}] = 10\,\pi\ [\text{rad/s}] = 31{,}4\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:



$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi / 2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(10\,\pi \cdot t + \pi / 2)\ [\text{m}]$$

Como $\text{sen}(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$x = 0{,}200 \cdot \cos(10\,\pi \cdot t)\ [\text{m}]$$

Se obtiene la expresión de la velocidad derivando la ecuación de movimiento:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}200 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -0{,}200 \cdot 31{,}4 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t) = -6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}]$$

Se necesita calcular el período:

$$T = 1 / f = 1 / (5{,}00\ [\text{s}^{-1}]) = 0{,}200\ \text{s}$$

El tiempo es

$$t = T / 8 = 0{,}200\ [\text{s}] / 8 = 0{,}0250\ \text{s}$$

Se sustituye para calcular la velocidad en ese instante:

$$v = -6{,}28 \cdot \text{sen}(10\,\pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}] = -6{,}28 \cdot \text{sen}(\pi / 4)\ [\text{m/s}] = -4{,}44\ \text{m/s}$$

Se obtiene la expresión de la aceleración derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{-6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -6{,}28 \cdot 31{,}4 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t) = -197 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}^2]$$

Sustituyendo el valor del tiempo se obtiene la aceleración para $t = T / 8$:

$$a = -197 \cdot \cos(10\ \pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}^2] = -197 \cdot \cos(\pi / 4)\ [\text{m/s}^2] = -140\ \text{m/s}^2$$

b) La energía mecánica puede calcularse como la energía potencial máxima, la energía cinética máxima o la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Si se opta por la primera, hay que calcular el valor de la constante elástica.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (31{,}4\ [\text{rad/s}])^2 = 98{,}7\ \text{N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = E_{p\ m} = k \cdot A^2 / 2 = 98{,}7\ [\text{N/m}]\ (0{,}200\ [\text{m}])^2 / 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima.
La velocidad tiene un valor máximo cuando el seno de la fase vale −1.

$$v_m = -6{,}28\ \text{sen}(10\ \pi \cdot t)\ [\text{m/s}] = 6{,}28\ \text{m/s}$$

$$E_{c\ m} = m \cdot v^2_m / 2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

También se podría haber calculado la energía mecánica como la suma de las energías cinética y potencial, pero sería un proceso más largo ya que habría que calcular el valor de la constante elástica y el de la posición. (Solo se tenía calculada la velocidad)

c) De la ecuación que relaciona la constante elástica con la frecuencia angular

$$k = m \cdot \omega^2 = m\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 4\ \pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

Se puede despejar la frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{98{,}7\ [\text{N/m}]}{0{,}2\ [\text{kg}]}} = 3{,}54\ \text{s}^{-1}$$

La frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. Si la masa se duplica, la frecuencia disminuye en un factor $\sqrt{2}$.

12. Una masa de 0,5 kg está unida al extremo de un muelle (de masa despreciable) situado sobre un plano horizontal, permaneciendo fijo el otro extremo del muelle. Para estirar el muelle una longitud de 4 cm se requiere una fuerza de 5 N. Se deja el sistema masa-muelle en libertad. Calcula:
    a) El trabajo realizado por la fuerza elástica desde la posición inicial x = 4 cm hasta su posición de equilibrio x = 0.
    b) El módulo de la velocidad de la masa cuando se encuentra a 2 cm de su posición de equilibrio.
    c) La frecuencia de oscilación del citado muelle si inicialmente se estira 6 cm.

(P.A.U. Set. 15)

Rta.: a) W = 0,100 J; b) $|v_2|$ = 0,548 m/s; f = 2,52 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa	m = 0,500 kg
Alargamiento del muelle	x = 4,00 cm = 0,0400 m
Fuerza necesaria para alargar el muelle 4 cm	F_a = 5,00 N
Amplitud	A = 4,00 cm = 0,0400 m
Posición para calcular la velocidad	x_2 = 2,00 cm = 0,0200 m
Amplitud si se estira 6 cm	A_6 = 6,00 cm = 0,0600 m
Incógnitas	
Trabajo de la fuerza elástica desde x = 4 cm hasta el origen	W
Módulo de la velocidad para x = 2 cm	$\lvert v_2 \rvert$
Frecuencia de la oscilación si A = 6 cm	f
Ecuaciones	
Trabajo de una fuerza conservativa	$W = -\Delta E_p$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$

Ecuaciones

Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$

Solución:

a) El trabajo que realiza una fuerza conservativa como la fuerza elástica es igual y de signo contrario a la variación de energía potencial. Para calcular la energía potencial elástica es necesario conocer la constante elástica del muelle.
Se calcula la constante elástica del muelle en la situación de equilibrio, cuando los valores de la fuerza aplicada y la fuerza elástica son iguales:

$$F_a = k \cdot \Delta x \Rightarrow k = \frac{F_a}{\Delta x} = \frac{5{,}00\ [\mathrm{N}]}{0{,}040\,0\ [\mathrm{m}]} = 125\ \mathrm{N/m}$$

La energía potencial en el origen es nula $E_{p0} = 0$.
La energía potencial en el punto en el que $x = 4$ cm vale:

$$E_{p4} = k \cdot x^2 / 2 = 125\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0400\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 0{,}100\ \mathrm{J}$$

El trabajo de la fuerza elástica desde $x = 4$ cm hasta el origen vale:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p0} - E_{p4}) = E_{p4} = 0{,}100\ \mathrm{J}$$

Análisis: La fuerza recuperadora elástica realiza un trabajo positivo porque tiene el mismo sentido que el desplazamiento: hacia el origen.

b) Se calcula la velocidad aplicando el principio de conservación de la energía, porque la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\ m \cdot v_1^2 + ½\ k \cdot x_1^2 = ½\ m \cdot v_2^2 + ½\ k \cdot x_2^2$$

Se multiplica todo por 2 y se sustituyen valores, tomando como punto 1 el de $x = 4$ cm y como punto 2 el de $x = 2$ cm.

$$0{,}500\ [\mathrm{kg}] \cdot 0^2 + 125\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0400\ [\mathrm{m}])^2 = 0{,}500\ [\mathrm{kg}] \cdot v_2^2 + 125\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0200\ [\mathrm{m}])^2$$

$$|v_2| = 0{,}548\ \mathrm{m/s}$$

c) La frecuencia, que se obtiene de la frecuencia angular o pulsación, es independiente de la amplitud, solo depende de la masa y de la constante elástica del muelle:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{125{,}0\ [\mathrm{N/m}]}{0{,}500\ [\mathrm{kg}]}} = 15{,}8\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\ \pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{15{,}8\ [\mathrm{rad/s}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]} = 2{,}52\ \mathrm{s}^{-1}$$

● PÉNDULO

1. Un péndulo simple de longitud L = 2,5 m, se desvía del equilibrio hasta un punto a 0,03 m de altura y se suelta. Calcula:
   a) La velocidad máxima.
   b) El período.
   c) La amplitud del movimiento armónico simple descrito por el péndulo.
   Dato $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ *(P.A.U. Jun. 11)*

Rta.: a) v_m = 0,77 m/s; b) t = 3,2 s; c) A = 0,39 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud del péndulo	L = 2,50 m
Altura inicial	h_1 = 0,0300 m
Velocidad inicial	v_1 = 0
Aceleración de la gravedad	g = 9,80 m·s⁻²
Incógnitas	
Velocidad máxima	v_m
Período	T
Amplitud del M.A.S.	A
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período de un péndulo de longitud L	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia de radio R	$s = \theta \cdot R$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial del peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Principio de conservación de la energía mecánica	$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$

Solución:

a) Como la única fuerza que realiza trabajo es el peso (el trabajo de la tensión de la cuerda es nulo porque la tensión es perpendicular al desplazamiento en todo momento), la energía mecánica se conserva:

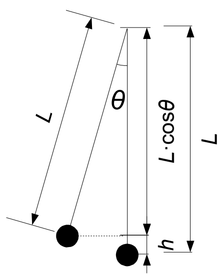
$$½\, m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = ½\, m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

$$v_2=\sqrt{2\, g \cdot h_1}=\sqrt{2\cdot 9{,}80\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot 0{,}030\,0\,[\mathrm{m}]}=0{,}767\ \mathrm{m/s}$$

b) El período vale

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ =\ 2\pi\sqrt{\frac{2{,}50\,[\mathrm{m}]}{9{,}80\,[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]}}=3{,}17\ \mathrm{s}$$

c) En la figura se ve la forma de calcular el ángulo θ correspondiente a la amplitud a partir de la altura h_1 y la longitud L:



$$L - L \cdot \cos\theta = h_1$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{L-h_1}{L}\right)=\arccos\left(1-\frac{h_1}{L}\right)=\arccos\left(1-\frac{0{,}030\,0\,[\mathrm{m}]}{2{,}50\,[\mathrm{m}]}\right)=\arccos 0{,}988=0{,}155\ \mathrm{rad}$$

$$A = L \cdot \theta = 2{,}50\ [\mathrm{m}] \cdot 0{,}155\ [\mathrm{rad}] = 0{,}388\ \mathrm{m}$$

El movimiento de péndulo es armónico simple porque θ (= 0,155) ≈ sen θ (= 0,154)

2. Una bola colgada de un hilo de 2 m de longitud se desvía de la vertical un ángulo de 4°, se suelta y se observan sus oscilaciones. Halla:
   a) La ecuación del movimiento armónico simple.
   b) La velocidad máxima de la bola cuando pasa por la posición de equilibrio.
   c) Comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior, utilizando la ecuación de la conservación de la energía mecánica.

(P.A.U. Set. 13)

Rta.: a) $s = 0,140 \text{ sen}(2,21 \cdot t + 4,71)$ [m]; b) $v_m = 0,309$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud del hilo	$L = 2,00$ m
Amplitud angular (elongación angular máxima)	$\theta_0 = 4,00° = 0,0698$ rad
Aceleración de la gravedad (no la dan pero sin ella no se puede resolver)	$g = 9,81$ m/s²
Incógnitas	
Elongación en función del tiempo	θ
Velocidad máxima de la bola	v_m
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$\theta = \theta_0 \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período del péndulo	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia de radio R	$s = \theta \cdot R$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia y el período	$\omega=2\pi\cdot f=\frac{2\pi}{T}$

Solución:

a) Tomando el movimiento de péndulo como armónico simple porque $\theta \approx \text{sen } \theta$

$$\text{sen } 0,0698 = 0,0697 \approx 0,0698$$

Se calcula el período y la frecuencia angular

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,00\ [\text{m}]}{9,81\ [\text{m/s}^2]}}=2,84\ \text{s}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2,84\ [\text{s}]}=2,21\ \text{rad/s}$$

La ecuación de movimiento queda

$$\theta = 0,0698 \cdot \text{sen}(2,21 \cdot t + \varphi_0)\ [\text{rad}]$$

Cuando $t = 0$, $\theta = 0,0698$ (está en la posición de máxima elongación),

$$0,0698 = 0,0698 \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen } \varphi_0=1 \begin{cases} \varphi_0=\frac{\pi}{2} \\ \varphi_0=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tomando como positivo el sentido en que se mueva al principio, queda

$$\theta = 0,0698 \cdot \text{sen}(2,21\ \text{t} + 4,71)\ [\text{rad}]$$

La elongación máxima o amplitud:

$$A = s_m = \theta_0 \cdot R = \theta_0 \cdot L = 0,0698\ [\text{rad}] \cdot 2,00\ [\text{m}] = 0,140\ \text{m}$$

La ecuación de movimiento quedaría

$$s = 0,140 \text{ sen}(2,21 \cdot t + 4,71)\ [\text{m}]$$

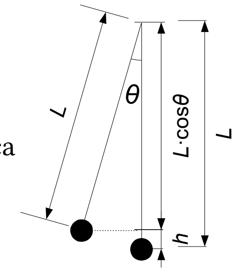
b) La velocidad máxima cuando pasa por la posición de equilibrio, se calcula derivando la ecuación de movimiento

$$v=\frac{\text{d}s}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{0,140\,\text{sen}(2,21\cdot t+4,71)\}}{\text{d}t}=0,309\cos(2,21\cdot t+4,71)\ \text{m/s}$$

Alcanza un valor máximo cuando el coseno de la fase es 1.

$$v_m = 0{,}309 \text{ m/s}$$

c) En el punto más alto, la altura vale:



$$h_m = L - L \cos \theta_0 = L\,(1 - \cos \theta_0) = 2{,}00\ [\text{m}]\ (1 - \cos 0{,}0698) = 4{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Como la única fuerza no conservativa (la tensión del hilo) no realiza trabajo (porque el desplazamiento es perpendicular siempre a la dirección de la fuerza), la energía mecánica se conserva. Entre la posición más alta (punto 1) y la más baja (punto 2)

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\ m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = ½\ m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

$$½\ \cancel{m} \cdot 0^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_1 = ½\ \cancel{m} \cdot v_2^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot 0$$

$$2\ g \cdot h_1 = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2\ g \cdot h_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot 4{,}87 \cdot 10^{-3}\ [\text{m}]} = 0{,}309 \text{ m/s}$$

● ONDAS

1. Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en $x = 0$ oscila según la ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t)$ y otro punto situado en $x = 0{,}03$ m oscila según la ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t - \pi / 4)$. Calcula:
   a) La constante de propagación, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
   b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda.

   (P.A.U. Jun. 06)

   Rta.: a) $k = 26{,}2$ rad/m; $v_p = 1{,}20$ m/s; $\lambda = 0{,}240$ m; b) $v\ -3{,}14 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)$ [m/s]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de oscilación en el origen $x = 0$	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Ecuación de oscilación en $x = 0{,}03$ m	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]
Incógnitas	
Número de onda (¿constante de propagación?)	k
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Velocidad de la partícula en un punto cualquiera de la cuerda.	v
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Frecuencia	f
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se calcula la amplitud y la frecuencia angular comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación de vibración en el origen:

Ecuación general de una onda armónica:	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Ecuación de la onda armónica en el origen ($x = 0$):	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Amplitud:	$A = 0{,}100$ m
Frecuencia angular:	$\omega = 10{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] $= 31{,}4$ rad/s

Se calcula el número de onda comparando la ecuación de la onda armónica unidimensional, en la que se han sustituido la amplitud y la frecuencia angular, con la ecuación de vibración en el punto x = 0,0300 m:

Ecuación de la onda armónica:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x)$ [m]
Ecuación de la onda armónica en el punto x = 0,0300 m:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]

$$k \cdot x = \pi / 4{,}00 \Rightarrow k = \frac{\pi}{4{,}00 \cdot x} = \frac{3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot 0{,}0300\ [\text{m}]} = 26{,}2\ \text{rad/m}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{26{,}2\ [\text{rad/m}]} = 0{,}240\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10{,}0 \cdot \pi}{2\pi} = 5{,}00\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}240\ [\text{m}] \cdot 5{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}20\ \text{m/s}$$

b) La ecuación de movimiento queda:

$$y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m}]$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}100 \cdot 31{,}4 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

2. La función de onda que describe la propagación de un sonido es $y(x) = 6 \cdot 10^{-2} \cos(628\ t - 1{,}90\ x)$ (magnitudes en el sistema internacional). Calcula:
   a) La frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.
   b) La velocidad y la aceleración máximas de un punto cualquier del medio en el que se propaga la onda.

   (P.A.U. Set. 04)

   Rta.: a) f = 100 Hz; λ = 3,31 m; v_p = 331 m/s; b) v_m = 37,7 m/s; a_m = 2,37·10⁴ m/s²

Datos	**_Cifras significativas: 3_**
Ecuación de la onda	$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 628 \text{ rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 1{,}90 \text{ rad·m}^{-1}$
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628\,[\text{rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\,[\text{rad}]} = 100 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\,\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\,[\text{rad}]}{1{,}90\,[\text{rad·m}^{-1}]} = 3{,}31 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}31\,[\text{m}] \cdot 100\,[\text{s}^{-1}] = 331 \text{ m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\text{d}t} = -6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot 628 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -37{,}7 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando sen(φ) = −1

$$v_m = 37{,}7 \text{ m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{-37{,}7 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\text{d}t} = -37{,}7 \cdot 628 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -2{,}37 \cdot 10^4 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

La aceleración es máxima cuando cos(φ) = −1

$$a_m = 2{,}37 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$$

3. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje X: $y(x, t) = 0{,}5 \text{ sen } (4\,x - 6\,t)$ (S.I.). Calcula:
   a) La longitud de onda, la frecuencia con la que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.
   b) La velocidad de un punto situado en $x = 1$ m en el instante $t = 2$ s
   c) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración.

   (P.A.U. Set. 08)

   Rta.: a) $\lambda = 1{,}57$ m; $f = 0{,}955$ Hz; $v_p = 1{,}50$ m/s; b) $v_1 = 0{,}437$ m/s; c) $v_m = 3{,}00$ m/s; $a_m = 18{,}0$ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Longitud de onda	λ
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de un punto situado en $x = 1$ m en el instante $t = 2$ s	v_1
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Otros símbolos	

Incógnitas

Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A

Ecuaciones

Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi\,/\,\lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 6{,}00\ \text{rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 4{,}00\ \text{rad·m}^{-1}$
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\,\pi\,/\,\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 1{,}57\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6{,}00\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}955\ \text{s}^{-1} = 0{,}955\ \text{Hz}$$

La frecuencia con la que vibran las partículas del medio es la misma que la de la onda.
Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}57\ [\text{m}] \cdot 0{,}955\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}50\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\}}{\text{d}t} = 0{,}500 \cdot (-6{,}00) \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

Sustituyendo los valores de $x = 1{,}00$ m y $t = 2{,}00$ s

$$v_1 = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot 2{,}00 + 4{,}00 \cdot 1{,}00) = 0{,}437\ \text{m/s}$$

c) La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}00\ \text{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{-3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\}}{\text{d}t} = -3{,}00 \cdot (-6{,}00) \cdot [-\text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)]\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -18{,}0\ \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando $\text{sen}(\varphi) = -1$

$$a_m = 18{,}0\ \text{m/s}^2$$

4. La ecuación de una onda sonora que se propaga en la dirección del eje X es:
$y = 4\ \text{sen}\ 2\pi\ (330\ t - x)$ (S.I.). Halla:
a) La velocidad de propagación.

b) La velocidad máxima de vibración de un punto del medio en el que se transmite la onda.
c) Define la energía de una onda armónica.

(P.A.U. Set. 07)

Rta.: a) $v_p = 330\ m·s^{-1}$; b) $v_m = 8{,}29·10^3\ m/s$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 4{,}00 · \text{sen}[2\ \pi(330 · t - x)]$ [m]
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima de vibración de un punto del medio	v_m
Otros símbolos	
Amplitud	A
Frecuencia	f
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A · \text{sen}(\omega · t \pm k · x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi · f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda · f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A · \text{sen}(\omega · t \pm k · x)$$

$$y = 4{,}00 · \text{sen}[2\ \pi(330 · t - x)] = 4{,}00 · \text{sen}(660 · \pi · t - 2{,}00 · \pi · x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 660 · \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 2{,}07·10^3\ \text{rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 2{,}00 · \pi\ [\text{rad·m}^{-1}] = 6{,}28\ \text{rad·m}^{-1}$
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\ \pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2{,}00 · \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 1{,}00\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\ \pi · f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{660 · \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 330\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda · f = 1{,}00\ [\text{m}] · 330\ [\text{s}^{-1}] = 330\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{4{,}00 · \text{sen}[2\pi(330 · t - x)]\}}{\text{d}t} = 4{,}00 · 2 · 3{,}14 · 330 · \cos[2\pi(330 · t - x)]\ [\text{m/s}]$$

$$v = 8{,}29·10^3 · \cos[2\ \pi(330 · t - x)]\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 8{,}29·10^3\ \text{m/s}$$

c) La energía que transmite una onda armónica produce un movimiento armónico simple de las partículas del medio. La energía de un M.A.S. es

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m · v^2 + ½\ k · x^2 = ½\ m · v^2_m = ½\ k · A^2$$

La velocidad máxima de un movimiento armónico simple es:

$$v_m = \omega \cdot A = 2\,\pi \cdot f \cdot A$$

La energía que transporta una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

$$E = ½\ m \cdot v^2_m = 2\,\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

5. Una onda cuya amplitud es 0,3 m recorre 300 m en 20 s. Calcula:
   a) La máxima velocidad de un punto que vibra con la onda si la frecuencia es 2 Hz.
   b) La longitud de onda.
   c) Construye la ecuación de onda, teniendo en cuenta que su avance es en el sentido negativo del eje *X*.

(P.A.U. Jun. 16)

Rta.: a) v_m = 3,77 m/s; b) λ = 7,50 m; c) $y(x, t)$ = 0,300 · sen(12,6 · t + 0,838 · x) [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	A = 0,0300 m
Distancia recorrida por la onda en 20 s	Δx = 300 m
Tiempo que tarda en recorrer 300 m	Δt = 20,0 s
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s⁻¹
Velocidad de propagación	v_p = 20,0 m/s
Incógnitas	
Máxima velocidad de un punto que vibra con la onda	v_m
Longitud de onda	λ
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	ω, k
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$
Velocidad de propagación	$v_p = \Delta x / \Delta t$

Solución:

b) Se calcula la velocidad de propagación a partir de la distancia recorrida y el tiempo empleado;

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300\ [\text{m}]}{20{,}0\ [\text{s}]} = 15{,}0\ \text{m/s}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow\ \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{15{,}0\ [\text{m/s}]}{2{,}00\ [\text{s}^{-1}]} = 7{,}50\ \text{m}$$

c) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido negativo del eje *X*:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 12{,}6\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{7{,}50\ [\text{m}]} = 0{,}838\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x) \text{ [m]}$$

a) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x)\}}{\mathrm{d}\, t} = 0{,}300 \cdot 12{,}6 \cos(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

$$v = 3{,}77 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = 1$

$$v_m = 3{,}77 \text{ m/s}$$

6. Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal con amplitud 5 cm, frecuencia 50 Hz y velocidad de propagación 20 m/s. Calcula:
   a) La ecuación de onda $y(x, t)$
   b) Los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 1$ m

(P.A.U. Jun. 04)

Rta.: a) $y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $t = 0{,}0550 + 0{,}0100 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	A = 5,00 cm = 0,0500 m
Frecuencia	f = 50,0 Hz = 50,0 s⁻¹
Velocidad de propagación	v_p = 20,0 m/s
Posición para calcular los valores del tiempo en los que y es máxima	x = 1,00 m
Incógnitas	
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	ω, k
Tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición x = 1 m	t
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \text{ [s}^{-1}] = 100 \cdot \pi \text{ [rad·s}^{-1}] = 314 \text{ rad·s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{20{,}0 \text{ [m/s]}}{50{,}0 \text{ [s}^{-1}]} = 0{,}400 \text{ m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{0{,}400 \text{ [m]}} = 5{,}00 \cdot \pi \text{ [rad/m]} = 15{,}7 \text{ rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]} = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(314 \cdot t - 15{,}7 \cdot x) \text{ [m]}$$

b) y es máxima cuando sen(φ) = 1, lo que corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi /2$ [rad] en la primera circunferencia. Si suponemos que se refiere a una y máxima en valor absoluto, $\varphi = \pm \pi / 2$ [rad], y, en general

$$\varphi = \pi /2 + n \cdot \pi \text{ [rad]}$$

Siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 1,00 m

$$100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi = \pi / 2 + n \cdot \pi$$

$$t = 0{,}0550 + 0{,}0100 \cdot n \text{ [s]}$$

Análisis: La primera vez que la elongación es máxima para x = 1,00 m *es* (n = 0) *cuando* t_1 = 0,0550 s. *Como el período es* $T = 1 / f = 1 / (50{,}0\ s^{-1})$ = 0,0200 s*, volverá a ser máxima cada* 0,0200 s*, y máxima en valor absoluto cada medio ciclo, o sea cada* 0,0100 s

7. Una onda periódica viene dada por la ecuación $y(t, x) = 10$ sen $2\pi(50\ t - 0{,}2\ x)$ en unidades del S.I. Calcula:
   a) Frecuencia, velocidad de fase y longitud de onda.
   b) La velocidad máxima de una partícula del medio y los valores del tiempo t para los que esa velocidad es máxima (en un punto que dista 50 cm del origen)

(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) f = 50,0 Hz; λ = 5,00 m; v_p = 250 m/s; b) v_m = 3,14 km/s; t = 0,00200 + 0,0100 · n [s], (n = 0, 1 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda (S.I.)	$y = 10{,}0$ sen$[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]$ [m]
Posición del punto (distancia al foco)	x = 50,0 cm = 0,500 m
Incógnitas	
Frecuencia	f
Velocidad de fase	v_p
Longitud de onda	λ
Tiempo para los que $y(t, x)$ es máxima en la posición x = 50 cm	t
Otros símbolos	
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2 \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 10{,}0 \cdot \text{sen}[2\ \pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)] = 4{,}00 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}400 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 314\ \text{rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}] = 1{,}26\ \text{rad·m}^{-1}$
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f \Rightarrow\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\ \pi\ [\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\ \pi / \lambda \Rightarrow\ \lambda = \frac{2\ \pi}{k} = \frac{2\ \pi\ [\text{rad}]}{0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 5{,}00\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 5{,}00\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 250\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}\,y}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{10{,}0 \cdot \text{sen}[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\}}{\text{d}\,t} = 10{,}0 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \cdot \cos[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

$$v = 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot \cos[2\,\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}14 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

Este valor del coseno corresponde a un ángulo de $\varphi = 0$ o π [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n \cdot \pi\ [\text{rad}]$$

Siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 0,500 m

$$2\,\pi\,(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot 0{,}500) = n \cdot \pi$$

$$t = 0{,}00200 + 0{,}0100 \cdot n\ [\text{s}],\ (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 0,500 m *es* (n = 0) *es* t_1 = 0,00200 s. *Como el período es* T = 1 / 50,0 [s⁻¹] = 0,0200 s, *volverá a ser máxima cada vez que pase por el origen, o sea, cada medio período, o sea cada* 0,00100 s.

8. Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x con velocidad v = 20 m·s⁻¹. La amplitud de la onda es A = 0,10 m y su frecuencia es f = 50 Hz.
   a) Escribe la ecuación de la onda.
   b) Calcula la elongación y la aceleración del punto situado en x = 2 m en el instante t = 0,1 s.
   c) ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase?

   (P.A.U. Set. 11)

   Rta.: a) $y = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $y(2, 0{,}1) = 0$; $a(2, 0{,}1) = 0$; c) $\Delta x = 0{,}200$ m
   a′) $y = 0{,}100 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b′) $y(2, 0{,}1) = 0{,}100$ m; $a(2, 0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3$ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	A = 0,100 m
Frecuencia	f = 50,0 Hz = 50,0 s⁻¹
Velocidad de propagación	v_p = 20,0 m/s
Para el cálculo de la elongación y aceleración: Posición	x = 2,00 m
Tiempo	t = 0,100 s
Incógnitas	
Ecuación de la onda	ω, k
Elongación del punto situado en x = 2 m en el instante t = 0,1 s.	$y(2, 0{,}1)$
Aceleración del punto situado en x = 2 m en el instante t = 0,1 s.	$a(2, 0{,}1)$
Distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase	Δx
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 314\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{20{,}0\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}400\ \text{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}400\ [\text{m}]} = 5{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad/m}] = 15{,}7\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}] = 0{,}100 \cdot \text{sen}(314 \cdot t - 15{,}7 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) Para $x = 2{,}00$ m y $t = 0{,}100$ s, la elongación es:

$$y(2, 0{,}1) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(0) = 0\ \text{m}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}\,y}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\text{d}\,t} = 0{,}100 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}\,v}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\text{d}\,t} = -31{,}4 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -9{,}87 \cdot 10^3\ \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

Para $x = 2{,}00$ m y $t = 0{,}100$ s, la aceleración es:

$$a(2, 0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3\ \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = -9{,}87 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(0) = 0\ \text{m/s}^2$$

(Si la ecuación de onda se escribe en función del coseno, en vez del seno, las respuestas serían:
$y(2, 0{,}1) = 0{,}100$ m y $a(2, 0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3$ m/s²)
Análisis: La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación. Si la elongación es nula también lo es la aceleración.

c) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_2)] - [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_1)] = 5{,}00 \cdot \pi\,(x_1 - x_2) = 5{,}00 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Como están en oposición de fase, la diferencia de fase es π [rad]

$$5{,}00\ [\text{rad/m}] \cdot \pi \cdot \Delta x = \pi\ [\text{rad}]$$

$$\Delta x = 1\ [\text{rad}] / (5{,}00\ [\text{rad/m}]) = 0{,}200\ \text{m}$$

Análisis: La longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos que están en fase. La distancia mínima entre dos puntos que están en oposición es fase es: $\Delta x = \lambda / 2 = 0{,}200$ m, *que coincide con lo calculado.*

9. Una onda plana se propaga en la dirección X positiva con velocidad $v = 340$ m/s, amplitud $A = 5$ cm y frecuencia $f = 100$ Hz (fase inicial $\varphi_0 = 0$)
   a) Escribe la ecuación de la onda.
   b) Calcula la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 π/3.

(P.A.U. Jun. 05)

Rta.: a) $y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)$ [m]; b) $\Delta x = 1{,}13$ m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	A = 5,00 cm = 0,0500 m
Frecuencia	f = 100 Hz = 100 s⁻¹
Velocidad de propagación de la onda por el medio	v_p = 340 m/s
Incógnitas	
Ecuación de onda	ω, k
Distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es 2 π/3	Δx
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100\ [\text{s}^{-1}] = 200 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 628\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340\ [\text{m/s}]}{100\ [\text{s}^{-1}]} = 3{,}40\ \text{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{3{,}40\ [\text{m}]} = 1{,}85\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_2) - (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_1) = 1{,}85 \cdot \Delta x$$

Si la diferencia de fase es 2 π/3 = 2,09 rad

$$1{,}85\ [\text{rad/m}] \cdot \Delta x = 2{,}09\ \text{rad}$$

$$\Delta x = \frac{2{,}09\ [\text{rad}]}{1{,}85\ [\text{rad/m}]} = 1{,}13\ \text{m}$$

Análisis: Si la diferencia de fase hubiese sido de 2 π rad, *la distancia entre los puntos habría sido una longitud de onda λ. A una diferencia de fase de* 2 π/3 rad *le corresponde una distancia de* λ / 3 = 3,40 [m] / 3 = 1,13 m.

10. La ecuación de una onda es $y(x, t) = 2 \cos 4\pi\,(5\,t - x)$ (S.I.). Calcula:
    a) La velocidad de propagación.
    b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm.
    c) En la propagación de una onda ¿qué se transporta materia o energía? Justifícalo con un ejemplo.
    (P.A.U. Jun. 09)

    Rta.: a) v_p = 5,00 m/s; b) $\Delta\varphi$ = π rad

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x)$ [m]
Distancia entre los puntos	$\Delta x = 25{,}0$ cm $= 0{,}250$ m
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm	$\Delta\varphi$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x) = 2{,}00 \cdot \cos(20{,}0 \cdot \pi \cdot t - 4{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 20{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] $= 62{,}8$ rad/s

Número de onda: $k = 4{,}00 \cdot \pi$ [rad/m] $= 12{,}6$ rad/m

Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20{,}0 \cdot \pi\ [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]}{2\,\pi\ [\text{rad}]} = 10{,}0\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\,\pi / \lambda \Rightarrow\ \lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}]} = 0{,}500\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}500\ [\text{m}] \cdot 10{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 5{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_2)] - [4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_1)] = 4\,\pi\,(x_1 - x_2) = 4\,\pi\,\Delta x = 4\,\pi \cdot 0{,}250 = \pi\ \text{rad}$$

Análisis: La distancia entre los puntos es 0,250 m *que es la mitad de la longitud de onda. Como los puntos que están en fase o cuya diferencia de fase es múltiplo de* $2\,\pi$ *se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, una distancia de media longitud de onda corresponde a una diferencia de fase de la mitad de* $2\,\pi$*, o sea,* π rad

c) Una onda es un mecanismo de transporte de energía sin desplazamiento neto de materia. En una onda longitudinal de una cuerda vibrante, las partículas del medio vuelven a su posición inicial mientras la perturbación que provoca la elevación y depresión se desplaza a lo largo de la cuerda.

11. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje X y viene dada por la siguiente expresión (en unidades del sistema internacional): $y(x,t) = 0{,}45 \cos(2\,x - 3\,t)$. Determinar:
 a) La velocidad de propagación.
 b) La velocidad y aceleración máximas de vibración de las partículas.
 c) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de

tiempo transcurrido es de 2 s.

(P.A.U. Jun. 15)

Rta.: a) v_p = 1,50 m/s; b) $|v_m|$ = 1,35 m/s; $|a_m|$ = 4,05 m/s²; c) $\Delta\varphi$ = 6,0 rad

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}450 \cdot \cos(2{,}00 \cdot x - 3{,}00 \cdot t)$ [m]
Intervalo de tiempo transcurrido	$\Delta t = 2{,}00$ s
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima de vibración	v_m
Aceleración máxima de vibración	a_m
Diferencia de fase entre dos estados separados por Δt= 2 s	$\Delta\varphi$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 3{,}00$ rad/s

Número de onda: $k = 2{,}00$ rad/m

Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}00 \text{ [rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}} = 0{,}477 \text{ s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{2{,}00 \text{ [rad·m}^{-1}]} = 3{,}14 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14 \text{ [m]} \cdot 0{,}477 \text{ [s}^{-1}] = 1{,}50 \text{ m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 0{,}450 \cdot (-3{,}00) \cdot (-\text{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)) \text{ [m/s]}$$

$$v = 1{,}35 \cdot \text{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando sen(φ) = 1

$$v_m = 1{,}35 \text{ m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{1{,}35 \cdot \text{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 1{,}35 \cdot (-3{,}00) \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m/s}^2]$$

$$a = -4{,}05 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$a_\text{m} = 4{,}05\ \text{m/s}^2$$

c) En un punto x, la diferencia de fase entre dos instantes t_1 y t_2 es:

$$\Delta\varphi = [-3{,}00 \cdot t_2 + 2{,}00 \cdot x] - [-3{,}00 \cdot t_1 + 2{,}00 \cdot x)] = -3{,}00 \cdot (t_2 - t_1) = -3{,}00 \cdot \Delta t = -3{,}00 \cdot 2{,}00 = 6{,}00\ \text{rad}$$

Análisis: Como los instantes que están en fase o cuya diferencia de fase es múltiplo de 2 π se encuentran a una distancia temporal que es múltiplo del período, un intervalo de tiempo de 2,00 s, *que es algo inferior al período, corresponde a una diferencia de fase algo inferior a* 2 π = 6,3 rad. *El resultado de* 6,0 rad *es aceptable.*

12. La ecuación de una onda transversal es $y(t, x) = 0{,}05 \cos(5\ t - 2\ x)$ (magnitudes en el S.I.). Calcula:
    a) Los valores de t para los que un punto situado en x = 10 m tiene velocidad máxima.
    b) ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ?
    c) ¿Esta onda es estacionaria?

(P.A.U. Jun. 07)

Rta.: a) $t_1 = 4{,}3 + 0{,}63\ n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...); b) t_2 = 3,8 s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}0500 \cdot \cos(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)$ [m]
Posición del punto (distancia al foco)	x = 10,0 m
Incógnitas	
Tiempos para los que un punto en x = 10 m tiene velocidad máxima	t_1
Tiempo para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ	t_2
Otros símbolos	
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_\text{p} = \lambda \cdot f$

Solución:

a) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}050\ 0 \cos(5{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}050\ 0\,5{,}00 \cdot \operatorname{sen}(5{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -0{,}250 \cdot \operatorname{sen}(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\operatorname{sen}(\varphi) = -1$

$$v_\text{m} = 0{,}250\ \text{m/s}$$

Este valor del seno corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ o $3\pi/2$ [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n \cdot \pi + \pi / 2\ [\text{rad}]$$

Siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando y sustituyendo x = 10,0 m

$$(5{,}00\ t - 2{,}00 \cdot 10{,}0) = n \cdot \pi + \pi / 2$$

$$t_1 = 4{,}00 + 0{,}100 \cdot \pi + 0{,}200 \cdot n \cdot \pi = 4{,}31 + 0{,}628 \cdot n\ [\text{s}]$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 10 m *es* (n = 0) *para* t = 4,31 s. *El período puede calcularse a partir de la frecuencia en el apartado b:* $T = 1 / f = 1 / (0{,}796\ \text{s}^{-1}) = 1{,}26$ s. *El tiempo volverá a ser máximo cada vez que pase por el punto de equilibrio, o sea, cada medio período:* 0,628 s.

b) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y(t, x) = 0{,}0500 \cdot \cos(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)$$

Frecuencia angular: $\omega = 5{,}00$ rad/s
Número de onda: $k = 2{,}00$ rad/m
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5{,}00\ [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}796\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\,\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}]} = 3{,}14\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14\ [\text{m}] \cdot 0{,}796\ [\text{s}^{-1}] = 2{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Se calcula el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a $\Delta x = 3 \cdot \lambda = 3 \cdot 3{,}14$ [m] = 9,42 m a partir de la velocidad de propagación constante de la onda

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow t_2 = \frac{\Delta x}{v_p} = \frac{9{,}42\ [\text{m}]}{2{,}50\ [\text{m/s}]} = 3{,}77\ \text{s}$$

Análisis: Se puede definir el período como el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda. Por tanto el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a $3 \cdot \lambda$*, será el triple del período:* $t_2 = 3 \cdot T = 3 \cdot 1{,}26$ [s] = 3,77 s.

c) Las ondas estacionarias no se propagan y no hay una transmisión neta de energía.
En las ondas estacionarias existen unos puntos, llamados nodos, que no oscilan. Su elongación es nula en todo instante.
La onda del enunciado no es una onda estacionaria ya que la ecuación de la onda no coincide con la de las ondas estacionarias y no existe ningún punto de la onda que sea un nodo, que tenga una elongación nula en cualquier instante.

13. La ecuación de una onda es $y(t, x) = 0{,}2$ sen π (100 t – 0,1 x). Calcula:
   a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
   b) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en x = 10 m?
   c) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para t = 1 s?

(P.A.U. Jun. 10)

Rta.: a) f = 50,0 Hz; k = 0,314 rad/m; $v = 1{,}00\cdot10^3$ m/s; λ = 20,0 m ; b) $x = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n$ [m]
c) $t = 1{,}00 + 0{,}0200 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}200 \cdot$ sen $\pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x)$ [m]
Posición del punto	$x_2 = 10{,}0$ m
Tiempo de referencia	$t_1 = 1{,}00$ s
Incógnitas	
Frecuencia	f
Número de ondas	k

Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Puntos de la onda que están en fase con el punto que se encuentra en x = 10 m	x'
Tiempos en los que la vibración está en fase con la vibración para t = 1 s	t'
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}200 \cdot \text{sen}\ \pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x) = 0{,}200 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}100 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi\ [\text{rad/s}] = 314\ \text{rad/s}$
Número de onda: $k = 0{,}100 \cdot \pi\ [\text{rad/m}] = 0{,}314\ \text{rad/m}$
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\,\pi\ [\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\,\pi / \lambda \Rightarrow\ \lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi\ [\text{rad}]}{0{,}100 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 20{,}0\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 20{,}0\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_2)] - [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_1)] = 0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dos puntos se encuentran en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de 2 π:

$$\Delta\varphi = 2\,\pi \cdot n\ (\text{siendo } n = 0, 1, 2\ldots)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\,\pi \cdot n$$

Se sustituye el valor del punto x_2 = 10,0 m y se despeja x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Como la elección de cuál es el punto 1 y cuál el punto 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Análisis: Los puntos que están en fase se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 20{,}0 \cdot n$ [m]

c) En un punto x, la diferencia de fase entre dos instantes t_1 y t_2 es

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t_2 - 0{,}100 \cdot x)] - [\pi\ (100 \cdot t_1 - 0{,}100 \cdot x)] = 100\ \pi\ (t_2 - t_1)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$100 \cdot \pi\,(t_2 - t_1) = 2\,\pi \cdot n$$

Se sustituye el valor del instante t_1 = 1,00 s y se despeja t_2.

$$t_2 = 0{,}0200 \cdot n + t_1 = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n \text{ [s]}$$

Como la elección de cuál es el instante 1 y cuál el instante 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$t' = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n \text{ [s]}$$

Análisis: El período puede calcularse a partir de la frecuencia: $T = 1 / f = 1 / (50{,}0 \text{ s}^{-1}) = 0{,}0200$ s. *Los instantes en que están en fase son múltiplos del período.* $\Delta t = n \cdot T = 0{,}0200 \cdot n$ [s]

14. Una onda armónica se propaga en dirección x con velocidad v = 10 m/s, amplitud A = 3 cm y frecuencia f = 50 s⁻¹. Calcula:
    a) La ecuación de la onda.
    b) La velocidad y aceleración máxima de un punto de la trayectoria.
    c) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto x = 10 m?

(P.A.U. Set. 10)

Rta.: a) $y = 0{,}0300 \text{ sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) v_m = 9,42 m/s; a_m = 2,96·10³ m/s²
c) $x' = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad de propagación	v_p = 10,0 m/s
Amplitud	A = 3,00 cm = 0,0300 m
Frecuencia	$f = 50{,}0 \text{ s}^{-1}$
Posición del punto	x_2 = 10,0 m
Incógnitas	
Ecuación da onda	ω, k
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Puntos de la onda que están en fase con el punto en x = 10 m	x'
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 100 \cdot \pi \text{ [rad·s}^{-1}\text{]} = 314 \text{ rad·s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{10{,}0\,[\text{m/s}]}{50{,}0\,[\text{s}^{-1}]} = 0{,}200 \text{ m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\,[\text{rad}]}{0{,}200\,[\text{m}]} = 10{,}0 \cdot \pi\,[\text{rad/m}] = 31{,}4 \text{ rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}030\ 0\,\text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}\,t} = 0{,}030\ 0\,100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = 1$

$$v_{\text{m}} = 9{,}42\ \text{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}\,t} = -9{,}42 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -2{,}96 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando $\text{sen}(\varphi) = -1$

$$a_{\text{m}} = 2{,}96 \cdot 10^3\ \text{m/s}^2$$

c) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_2) - (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_1) = 10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dos puntos se encuentran en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de 2 π:

$$\Delta\varphi = 2\ \pi \cdot n \text{ (siendo } n = 0, 1, 2\ldots)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi \cdot n$$

$$x_1 - x_2 = 0{,}200 \cdot n\ [\text{m}]$$

Se sustituye el valor del punto $x_2 = 10{,}0$ m y se despeja x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n\ [\text{m}]$$

Como la elección de cuál es el punto 1 y cuál el punto 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 0{,}200 \cdot n\ [\text{m}]$$

Análisis: Los puntos que están en fase se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 0{,}200 \cdot n$ [m]

◊ CUESTIONES

● M.A.S..

1. Un objeto realiza un M.A.S., ¿cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales entre sí?:
   A) La elongación y la velocidad.
   B) La fuerza recuperadora y la velocidad.
   C) La aceleración y la elongación.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: C

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Volviendo a derivar

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}t}=-A\cdot\omega^2\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

2. En un oscilador armónico se cumple que:
   A) La velocidad v y la elongación x son máximas simultáneamente.
   B) El período de oscilación T depende de la amplitud A.
   C) La energía total E se cuadriplica cuando se duplica la frecuencia.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: C

La fuerza recuperadora es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

Para el punto de equilibrio:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2_m + ½\ k \cdot 0^2 = ½\ m \cdot v^2_m$$

$$E = ½\ m \cdot v^2_m$$

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

La velocidad es máxima cuando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$$v_m = A \cdot \omega$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con la frecuencia f por la expresión

$$\omega = 2\ \pi \cdot f$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía total

$$E = ½\ m \cdot v^2_m = m \cdot (A \cdot 2\ \pi\ f)^2 / 2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

Es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Si la frecuencia se hace el doble, la energía total se cuadriplica.

Las otras opciones:
A: Falsa. Como se ha dicho antes, la velocidad es máxima cuando el coseno de la fase es 1 ($\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$).
La expresión de la elongación muestra que es máxima cuando el seno de la fase es 1 ($\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = 3\ \pi/2$)

B: Falsa. La fuerza recuperadora elástica es:

$$F = -k \cdot x$$

Si solo actúa esta fuerza elástica, por la 2ª ley de Newton:

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Para obtener la expresión de la aceleración se deriva la expresión de la velocidad:

$$a=\frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t}=\frac{\mathrm{d}\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\, t}=-A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t+\varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

Queda

$$k = m \cdot \omega^2$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con el período T por la expresión

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo queda

$$k=m \cdot \omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Despejando el período:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El período depende de la masa y de la constante elástica del resorte, pero no de la amplitud.

3. Un punto material describe un movimiento armónico simple de amplitud A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:
   A) La energía cinética es máxima cuando la elongación es nula.
   B) La energía potencial es constante.
   C) La energía total depende de la elongación x.

(P.A.U. Set. 12)

Solución: A

La ecuación de un movimiento armónico simple es:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Donde x es la elongación (separación de la posición de equilibrio), A es la amplitud (máxima elongación), ω es la constante armónica, t es el tiempo y φ_0 es la fase inicial.
Derivando se obtiene la expresión de la velocidad:

$$v=\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t}=\frac{\mathrm{d}\{A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\, t}=A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t+\varphi_0)$$

La velocidad es máxima cuando el $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$.
La energía cinética también será máxima en ese caso.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Cuando el coseno de un ángulo es 1, el seno de ese ángulo vale 0.
Si el seno del ángulo vale 0, la elongación también vale 0. Por tanto la energía cinética es máxima cuando la elongación x es nula

Las otras opciones:
B: Falsa. La fuerza que produce un movimiento armónico simple es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x que depende del valor de la elongación:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

C: Falsa. Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica vale lo mismo en cualquier elongación: es constante.

4. La energía mecánica de un oscilador armónico simple es función de:
   A) La velocidad.
   B) La aceleración.
   C) Es constante.

(P.A.U. Jun. 08)

Solución: C

Un oscilador armónico es aquél cuya posición cumple la ecuación:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

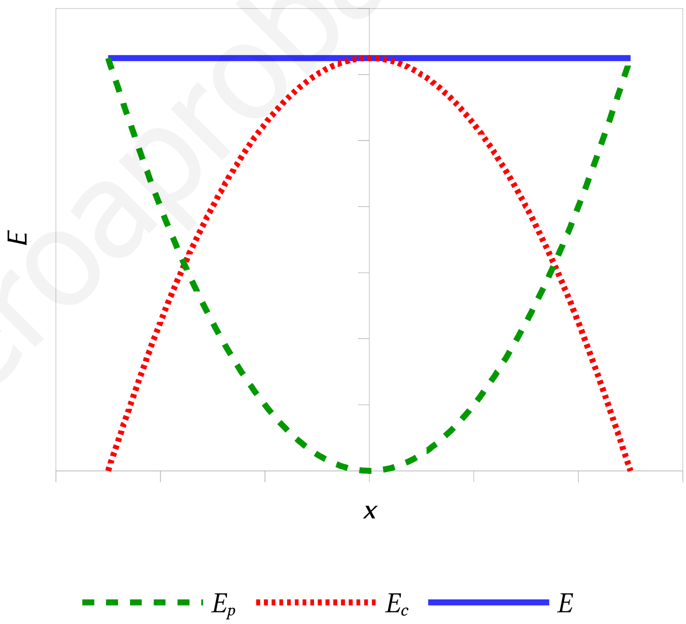
Esto es equivalente a decir que está sometido a una fuerza recuperadora proporcional y de sentido contrario a la separación de la posición de equilibrio.

$$F = -k \cdot x$$

Donde k es la constante elástica del oscilador. Esta es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.



$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Para la elongación máxima o amplitud:

$$E = ½\ m \cdot 0^2 + ½\ k \cdot A^2 = ½\ k \cdot A^2$$

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

5. Si un oscilador armónico se encuentra en un instante dado en una posición x que es igual a la mitad de su amplitud ($x = A/2$), la relación entre la energía cinética y la potencial es:
   A) $E_c = 3\ E_p$
   B) $E_c = 2\ E_p$
   C) $E_c = E_p /2$

(P.A.U. Jun. 14, Set. 04)

Solución: A

La energía potencial de un oscilador armónico cuando la elongación vale x es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Donde k es la constante elástica del oscilador.
Como la energía cinética es:

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía mecánica del oscilador vale:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Para la elongación máxima o amplitud:

$$E = ½\ m \cdot 0^2 + ½\ k \cdot A^2 = ½\ k \cdot A^2$$

Como la fuerza elástica es una fuerza conservativa, la energía mecánica es una constante y valdrá lo mismo para cualquier elongación. Por lo tanto:

$$E = ½\ k \cdot A^2$$

Para el caso en el que $x = A / 2$,

$$E_p = ½\ k \cdot x^2 = ½\ k\ (A / 2)^2 = (½\ k \cdot A^2) / 4 = E / 4$$

$$E_c = E - E_p = E - E / 4 = 3\ E / 4$$

$$E_c = 3\ E_p$$

6. Una masa de 600 g oscila en el extremo de un resorte vertical con frecuencia 1 Hz y amplitud 5 cm. Si añadimos una masa de 300 g sin variar la amplitud, la nueva frecuencia será:
A) 0,82 Hz.
B) 1,00 Hz.
C) 1,63 Hz.

(P.A.U. Jun. 16)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia inicial	$f_0 = 1{,}00$ Hz $= 1{,}00$ s^{-1}
Masa inicial que cuelga	$m_0 = 600$ g $= 0{,}600$ kg
Amplitud	$A = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m
Masa añadida	$\Delta m = 300$ g $= 0{,}300$ kg
Incógnitas	
Nueva frecuencia	f'
Ecuaciones	
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución: A

La frecuencia angular se calcula a partir de la frecuencia.

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}] \cdot 1\ [\text{s}^{-1}] = 6{,}28\ \text{rad/s}$$

La constante elástica del muelle se calcula a partir de la frecuencia angular y de la masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}600\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{rad/s}])^2 = 23{,}7\ \text{N/m}$$

Para calcular la nueva frecuencia, despejamos primero la nueva frecuencia angular con la nueva masa:

$$m' = m + \Delta m = 0{,}600\ [\text{kg}] + 0{,}300\ [\text{kg}] = 0{,}900\ \text{kg}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{23{,}7\ [\text{N·m}^{-1}]}{0{,}900\ [\text{kg}]}} = 5{,}13\ \text{rad/s}$$

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{5{,}13\ [\text{rad/s}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}817\ \text{s}^{-1}$$

● ONDAS.

1. Cuando un movimiento ondulatorio se refleja, su velocidad de propagación:
   A) Aumenta.
   B) Depende de la superficie de reflexión.
   C) No varía.

(P.A.U. Set. 15)

Solución: C

La velocidad de propagación de una onda depende de algunas características del medio (temperatura y masa molar en los gases, densidad lineal en las cuerdas…). Cuando una onda se refleja, se mantiene en el medio del que procedía después de rebotar. Por tanto, como el medio no varía, la velocidad de propagación se mantiene.

2. Si la ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio es $y(x, t) = 2 \cdot \text{sen}(8 \pi \cdot t - 4 \pi \cdot x)$ (S.I.); su velocidad de propagación es:
   A) 2 m/s
   B) 32 m/s
   C) 0,5 m/s

(P.A.U. Jun. 08)

Solución: A

Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2 \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 8 \cdot \pi$ [rad·s⁻¹]
Número de onda: $k = 4 \cdot \pi$ [rad·m⁻¹]
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2 \pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\text{ [rad]}}{4\cdot\pi\text{ [rad·m}^{-1}]} = 0{,}5 \text{ m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2 \pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8\cdot\pi\text{ [rad·s}^{-1}]}{2\pi\text{ [rad]}} = 4 \text{ s}^{-1}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}5 \text{ [m]} \cdot 4 \text{ [s}^{-1}] = 2 \text{ m·s}^{-1}$$

3. La ecuación de una onda transversal de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 20 m·s⁻¹ es:
   A) $y(x, t) = 4\cdot10^{-2} \cos \pi (40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]
   B) $y(x, t) = 4\cdot10^{-2} \cos \pi (40 \cdot t - 2 \cdot x)$ [m]
   C) $y(x, t) = 4\cdot10^{-2} \cos 2 \pi (40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]

(P.A.U. Set. 13)

Solución: A

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
Como dice que se propaga en sentido negativo del eje X podemos descartar la opción B.
La frecuencia angular ω de la ecuación de la opción A es $\omega_1 = \pi \cdot 40$ [rad/s], que corresponde a una frecuencia de 20 Hz.

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 20\ \text{s}^{-1}$$

4. La ecuación de una onda es $y = 0{,}02 \cdot \operatorname{sen}(50 \cdot t - 3 \cdot x)$; esto significa que:
   A) $\omega = 50\ \text{rad·s}^{-1}$ y $\lambda = 3$ m.
   B) La velocidad de propagación $u = 16{,}67\ \text{m·s}^{-1}$ y la frecuencia $f = 7{,}96\ \text{s}^{-1}$.
   C) $t = 50$ s y el número de onda $k = 3\ \text{m}^{-1}$.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
La velocidad u de propagación de una onda es $u = \lambda \cdot f$
Comparando la ecuación general con la del problema obtenemos:
$A = 0{,}02$ m
$\omega = 50$ rad/s
$k = 3$ rad/m

Para elegir la opción correcta calculamos algunos de los parámetros de la ecuación (usando 2 cifras significativas)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\,[\text{rad}]}{3{,}0\,[\text{rad/m}]} = 2{,}1\ \text{m}$$

Eso nos permite descartar la opción A.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 8{,}0\ \text{s}^{-1} = 8{,}0\ \text{Hz}$$

$$u = \lambda \cdot f = 2{,}1\ [\text{m}] \cdot 8{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 17\ \text{m/s}$$

Coincide con la opción B (si redondeamos los valores que aparecen en dicha opción a las cifras significativas que hay que usar)
La opción C no es correcta porque la frecuencia es la inversa del período:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{8{,}0\ [\mathrm{s}^{-1}]}=0{,}13\ \mathrm{s}$$

5. Cuando una onda armónica plana se propaga en el espacio, su energía es proporcional:
A) A $1/f$ (f es la frecuencia)
B) Al cuadrado de la amplitud A^2.
C) A $1/r$ (r es la distancia al foco emisor)

(P.A.U. Set. 09)

Solución: B

La energía que transporta una onda material armónica unidimensional es la suma de la cinética y de potencial:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

La ecuación de la onda armónica unidimensional es: $y = A \cdot \cos (\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Derivando con respecto al tiempo: $v = \mathrm{d}\ y / \mathrm{d}\ t = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Es máxima cuando $-\mathrm{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x) = 1$, $v_m = A \cdot \omega$
Sustituyendo en la ecuación de la energía: $E = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2$
Como la pulsación ω o frecuencia angular es proporcional a la frecuencia f: $\omega = 2\ \pi \cdot f$

$$E = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = ½\ m \cdot A^2\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

La energía que transporta una onda es proporcional a los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud.

6. Razona cuál de las siguientes afirmaciones referidas a la energía de un movimiento ondulatorio es correcta:
A) Es proporcional a la distancia al foco emisor de ondas.
B) Es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda.
C) Es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

(P.A.U. Set. 11)

Solución: C. Véase una cuestión parecida en la prueba de setiembre de 2009

7. La intensidad en un punto de una onda esférica que se propaga en un medio homogéneo e isótropo:
A) Es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor.
B) Es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor.
C) No varía con la distancia al foco emisor.

(P.A.U. Set. 16)

Solución: A

La intensidad de una onda es la energía en la unidad de tiempo por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

$$I=\frac{E}{S \cdot t}$$

Si la onda es esférica, la superficie es: $S = 4\ \pi\ r^2$, en la que r es la distancia al foco.

$$I=\frac{E}{4 \pi r^2 \cdot t}$$

8. En la polarización lineal de la luz:
   A) Se modifica la frecuencia de la onda.
   B) El campo eléctrico oscila siempre en un mismo plano.
   C) No se transporta energía.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: B

La luz emitida por un foco (una bombilla, el Sol…) es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, solo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.

Las otras opciones:
A. Falsa. La frecuencia de una onda electromagnética es una característica de la misma y no depende del medio que atraviesa.
B. Las ondas, excepto las estacionarias, transmiten energía sin trasporte neto de materia.

9. Una onda luminosa:
   A) No se puede polarizar.
   B) Su velocidad de propagación es inversamente proporcional al índice de refracción del medio.
   C) Puede no ser electromagnética.

(P.A.U. Jun. 09)

Solución: B

Se define índice de refracción n de un medio con respecto al vacío como el cociente entre la velocidad c de la luz en el vacío y la velocidad v de la luz en dicho medio.

$$n=\frac{c}{v}$$

Como la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, la velocidad de propagación de la luz en un medio es inversamente proporcional a su índice de refracción.

Las otras opciones:
A. Falsa. La luz es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, solo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.
C. Falsa. Maxwell demostró que la luz es una perturbación eléctrica armónica que genera una campo magnético armónico perpendicular al eléctrico y perpendiculares ambos a la dirección de propagación.

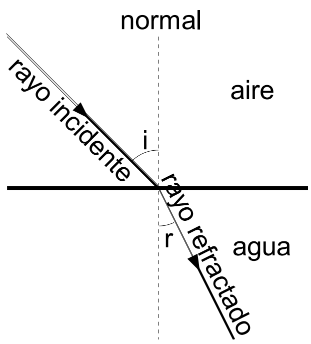
10. Cuando la luz atraviesa la zona de separación de dos medios, experimenta:
   A) Difracción.
   B) Refracción.
   C) Polarización.

(P.A.U. Jun. 06)

Solución: B

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda cuando pasa de un medio a otro en el que se transmite a distinta velocidad.
Una medida de la densidad óptica de un medio es su índice de refracción n, el cociente entre la velocidad c de la luz en el vacío y la velocidad v de la luz en el medio.

$$n=\frac{c}{v}$$



El índice de refracción n es siempre mayor que la unidad, porque la velocidad de la luz en el vacío es el límite de cualquier velocidad, según la teoría de la relatividad restringida.
Cuando un rayo de luz pasa de un medio óptico menos «denso» (aire) a otro más «denso» (agua), el rayo se desvía acercándose a la normal.
Leyes de la refracción:
1ª.- El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de separación están en el mismo plano.
2ª.- Los senos de los ángulos i (el que forma el rayo incidente con la normal a la superficie de separación) y r (el que forma el rayo refractado con esa misma normal) son directamente proporcionales a las velocidades de la luz en cada medio, e inversamente proporcionales a sus índices de refracción.

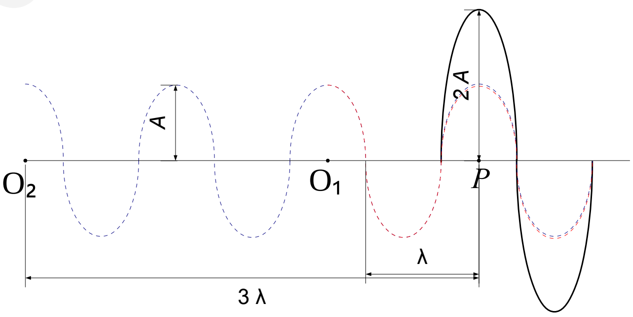
$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{r}}}=\frac{n_{\mathrm{r}}}{n_{\mathrm{i}}}$$

11. Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (A), frecuencia (f) y longitud de onda (λ) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m de O_1 y 3 λ m de O_2. La amplitud resultante en P será:
A) Nula.
B) A.
C) 2 A.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: C

Representamos dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos O_1 y O_2 de forma que el punto P se encuentre a una distancia λ de O_1 y a una distancia 3 λ de O_2.
Como la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.
Como la frecuencia, la fase y amplitud son la misma, la onda resultante será:



$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

$$y=2\,A \cdot \operatorname{sen}\left(\omega \cdot t-k\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)\cos\left(k\frac{(x_1-x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\,\lambda$ y $k = 2\,\pi / \lambda$, queda una onda de la misma frecuencia, en fase con las iniciales y cuya amplitud es el doble:

$$y = 2\,A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - 4\,\pi) \cdot \cos(2\,\pi) = 2\,A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$

12. El sonido de una guitarra se propaga como:
A) Una onda mecánica transversal.
B) Una onda electromagnética.
C) Una onda mecánica longitudinal.

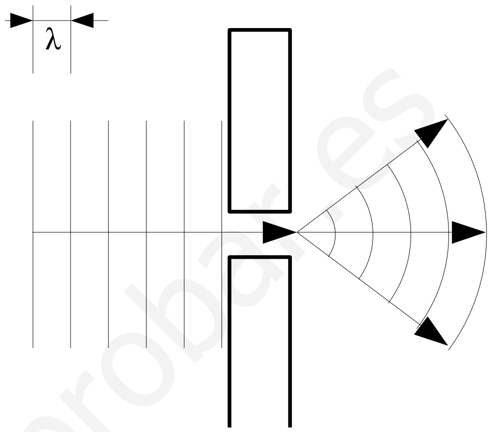
(P.A.U. Set. 05)

Solución: C

El sonido es una onda mecánica, ya que necesita un medio, (aire, agua, una pared) para propagarse. Es una onda longitudinal porque las partículas del medio vibran en la misma dirección en la que se propaga el sonido.

13. Si una onda atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda:
    A) Se refracta.
    B) Se polariza.
    C) Se difracta.
    (Dibuja la marcha de los rayos) *(P.A.U. Jun. 14, Set. 09)*

Solución: C

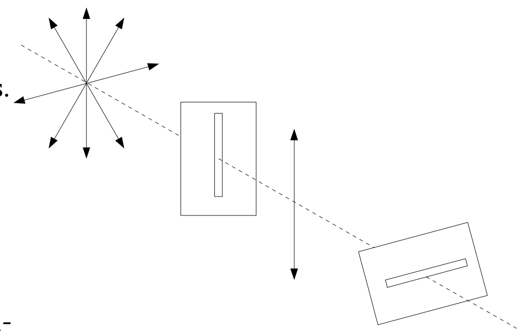


Se produce difracción cuando una onda «se abre» cuando atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas.
Puede representarse tal como en la figura para una onda plana.

14. Una onda de luz es polarizada por un polarizador A y atraviesa un segundo polarizador B colocado después de A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respeto a la luz después de B?
    A) No hay luz si A y B son paralelos entre sí.
    B) No hay luz si A y B son perpendiculares entre sí.
    C) Hay luz independientemente de la orientación relativa de A y B.

(P.A.U. Jun. 11)

Solución: B



El fenómeno de polarización solo ocurre en las ondas transversales.
La luz es un conjunto de oscilaciones de campo eléctrico y campo magnético que vibran en planos perpendiculares que se cortan en la línea de avance la rayo de luz. La luz del Sol o de una lámpara eléctrica vibra en una multitud de planos.
El primero polarizador solo permite pasar la luz que vibra en un determinado plano. Si el segundo polarizador está colocado en dirección perpendicular al primero, la luz que llega a él no tiene componentes en la dirección de esta segunda polarización por lo que no pasará ninguna luz.

15. Una onda electromagnética que se encuentra con un obstáculo de tamaño semejante a su longitud de onda:
    A) Forma en una pantalla, colocada detrás del obstáculo, zonas claras y oscuras.
    B) Se polariza y su campo eléctrico oscila siempre en el mismo plano.
    C) Se refleja en el obstáculo.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: A

Difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda mecánica o electromagnética «rodea» un obstáculo de dimensiones parecidas a la longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas. Esto producirá un patrón de interferencias que, en el caso de la luz, dará lugar a una sucesión de zonas claras y oscuras en una pantalla.

16. Si un haz de luz láser incide sobre un objeto de pequeño tamaño (del orden de su longitud de onda),
    A) Detrás del objeto hay siempre oscuridad.

B) Hay zonas de luz detrás del objeto.
C) Se refleja hacia el medio de incidencia.

(P.A.U. Set. 07)

Solución: B

Se llama difracción al fenómeno por el cual una onda «rodea» obstáculos de tamaño similar a se longitud de onda. Se producen interferencias constructivas y destructivas detrás del obstáculo, por lo que existirán zonas «iluminadas» y zonas oscuras.

17. Una onda armónica estacionaria se caracteriza por:
A) Tener frecuencia variable.
B) Transportar energía.
C) Formar nodos y vientres.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: C

Una onda estacionaria es generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento. En ella existen puntos que no vibran y se llamen nodos. Un ejemplo sería la onda estacionaria anclada a la cuerda de un instrumento musical como una guitarra o violín. Los extremos de la cuerda están fijos (son los nodos) y la amplitud de la vibración es máxima en el punto central. En esta onda la longitud de la cuerda sería la mitad de la longitud de onda y la situación correspondería al modo fundamental de vibración.

18. En una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas, se cumple:
A) La amplitud es constante.
B) La onda transporta energía.
C) La frecuencia es la misma que la de las ondas que interfieren.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: C

Una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento.
La ecuación de la onda incidente, suponiendo que viaja hacia la derecha, es

$$y_1 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

La onda incidente al reflejarse en el extremo fijo, sufre un cambio de fase de π rad y la onda reflejada que viaja hacia la derecha tiene por ecuación:

$$y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi) = -A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Cuando las ondas interfieren, la onda resultante tiene por ecuación

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) - A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Usando

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Queda

$$y = 2\,A \cdot \cos\,(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}\,(k \cdot x)$$

Es la ecuación de una onda que tiene una frecuencia angular ω igual.

$$y = A_x \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Las otras opciones:

A. La amplitud depende del punto x: $A_x = 2 \cdot A \text{ sen}(k \cdot x)$
B. Una onda estacionaria no transporta energía.

◊ LABORATORIO

● MUELLE

1. Haz una descripción del material y del desarrollo experimental en la determinación de la constante elástica de un resorte por el método dinámico.

(P.A.U. Jun. 13, Set. 09)

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se tira hacia abajo de una masa de valor conocido que cuelga de un resorte y se deja oscilar, midiendo el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo). Se calcula el período dividiendo el tiempo entre el número de oscilaciones.
Se repite el procedimiento para otras masas conocidas.
La ecuación del período del resorte,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Puede escribirse como:

$$T^2=\frac{4\pi^2\cdot m}{k}$$

A partir de ella se determina el valor de constante.
En el método gráfico se representan los cuadrados de los períodos en el eje de ordenadas frente a las masas en el de abscisas. La gráfica debería dar una línea recta de pendiente:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_\text{d} = \frac{\Delta T^2}{\Delta m}=\frac{4\pi^2}{k}$$

Determinando la pendiente, se puede calcular el valor de constante:

$$k=\frac{4\pi^2}{p_\text{d}}$$

En el método analítico se calcula la constante del resorte k para cada masa y se halla el valor medio. Este método tiene el problema de que si la masa del resorte no es despreciable frente a la masa colgada, los resultados llevan un error sistemático.

2. En la práctica para medir la constante elástica k por el método dinámico, se obtiene la siguiente tabla. Calcula la constante del resorte.

M (g)	5	10	15	20	25
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44

(P.A.U. Jun. 11)

Solución:

La fuerza recuperadora es:

$$F = -k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Por tanto

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Se calcula el valor de la constante para cada una de las experiencias

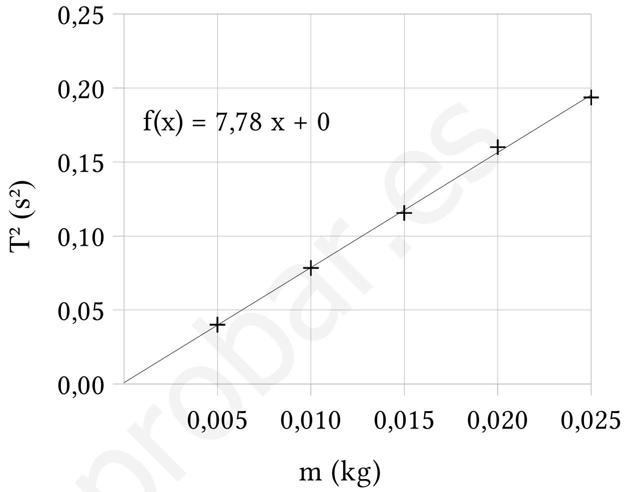
M (kg)	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44
k (N/m)	4,9	5,0	5,1	4,9	5,1

El valor medio es:

k_m = 5,0 N/m

En caso de tener papel milimetrado, o mejor aún una hoja de cálculo, se podrían representar los cuadrados de los períodos frente a las masas, obteniéndose una recta.

M (kg)	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$
T^2(s²)	0,04	0,08	0,12	0,16	0,19



De la pendiente (7,78 s²/kg) de la recta se calcularía la constante del muelle.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$$

$$k = \frac{4\pi^2}{7{,}78\ \text{s}^2/\text{kg}} = 5{,}1\ \text{kg/s}^2 = 5{,}1\ \text{N/m}$$

Este es un valor algo más exacto que el obtenido como valor medio.

3. Se emplea un resorte para medir su constante elástica por el método estático y por el dinámico, aplicando la ley de Hooke y el período en función de la masa, respectivamente. Se observa una cierta diferencia entre los resultados obtenidos por uno y otro método. ¿A qué puede ser debido?

(P.A.U. Jun. 11)

Solución:

El método estático consiste en medir los alargamientos producidos en un muelle al colgar de él pesas de valor conocido y aplicar la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

La constante k de fuerza del muelle se calcula a partir de la pendiente de la recta obtenida al representar los alargamientos Δx frente a las fuerzas F peso de las pesas colgadas.
El método dinámico consiste en hacer oscilar masas conocidas colgadas del muelle y determinar el período de oscilación midiendo el tiempo de un número determinado de oscilaciones.
Aunque en la oscilación vertical actúa la fuerza peso, además de la fuerza recuperadora elástica, la fuerza resultante que actúa sobre la masa oscilante da lugar a un movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio en la que las fuerzas elástica y peso se anulan
Combinando la ecuación de Hooke con la 2ª ley de Newton

$$F = -k \cdot x$$

$$F = m \cdot a$$

Teniendo en cuenta que en el M.A.S., la aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación,

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Queda

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

La constante k de fuerza del muelle se calcula a partir de la pendiente de la recta obtenida al representar los cuadrados T^2 de los períodos frente a las masas m de las pesas colgadas.
En la gráfica $T^2 - m$, si los valores de m son los de las masas de las pesas, la recta obtenida no pasa por el origen de coordenadas sino que aparece desplazada hacia la izquierda. Aunque la constante de fuerza del muelle es la misma en ambas expresiones, la masa m oscilante es mayor que la masa que cuelga e incluye parte de la masa del muelle.
Si el cálculo de la constante en el método dinámico se realiza a partir de la pendiente, la masa no debe afectar al valor de la constante obtenida. Pero si se calcula la constante con la ecuación anterior, el resultado puede ser diferente si la masa del muelle no es despreciable frente a las masas colgadas.

4. En el estudio estático de un resorte se representan variaciones de longitud (Δl_i) frente a las fuerzas aplicadas (f_i), obteniéndose una línea recta. En el estudio dinámico del mismo resorte se representan las masas (m_i) frente a los cuadrados de los períodos (T_i^2), obteniéndose también una recta. ¿Tienen las dos la misma pendiente? Razona la respuesta.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

F es la fuerza peso y x el alargamiento producido.
Si x se representa en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será igual al inverso de la constante elástica del resorte:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta x / \Delta F = 1 / k$$

En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω^2

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \frac{\Delta m}{\Delta T^2}=\frac{k}{4\pi^2}$$

Por lo tanto la pendiente de la representación derivada del estudio dinámico debería ser distinta a la obtenida por el método estático:

$$p_d=\frac{k}{4\pi^2}=\frac{1}{4\pi^2\cdot p_e}$$

5. En la determinación de la constante elástica de un resorte podemos utilizar dos tipos de procedimientos. En ambos casos, se obtiene una recta a partir de la cual se calcula la constante elástica. Explica cómo se determina el valor de la constante a partir de dicha gráfica para cada uno de los dos procedimientos, indicando qué tipo de magnitudes hay que representar en los ejes de abscisas y de ordenadas.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

En la que F es la fuerza peso, y x el alargamiento producido.
Si x se representa en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será igual al inverso de la constante elástica del resorte:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta x / \Delta F = 1 / k$$

El valor de la constante será el inverso de la pendiente del estudio estático.

En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω^2

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \frac{\Delta m}{\Delta T^2} = \frac{k}{4\pi^2}$$

El valor de la constante será $4\pi^2$ veces la pendiente del estudio dinámico.

$$k = 4\pi^2 p_d$$

6. En la práctica para la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico,
   a) ¿Qué precauciones debes tomar con respecto el número y amplitud de las oscilaciones?
   b) ¿Cómo varía la frecuencia de oscilación si se duplica la masa oscilante?

(P.A.U. Jun. 06)

Solución:

a) El número de oscilaciones debe ser del orden de 10 o 20. Aunque la precisión del cálculo del período aumenta con el número de oscilaciones ($T = t / N$), un número mayor aumenta la probabilidad de equivocarse al contar. La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña (si la amplitud es muy grande, las pesas «saltan» fuera del portapesas), pero no tanto que sea difícil contarlas. Debe comprobarse que la oscilación es vertical.
b) En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = -k \cdot y$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m(-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Si $m_2 = 2\, m_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2 / 2\pi}{\omega_1 / 2\pi} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k / m_2}{k / m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{2\, m_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}}$$

La frecuencia será $\sqrt{2} = 1{,}4$ veces menor.

7. En la determinación de la constante elástica de un resorte por el método dinámico, ¿el período de oscilación es independiente de la amplitud? ¿Depende de la longitud y de la masa del resorte? ¿Qué gráfica se construye a partir de las magnitudes medidas?

(P.A.U. Set. 11)

Solución:

El período del resorte solo depende de la masa que oscila y de la constante elástica.
En la expresión del período de un M.A.S.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esta ecuación puede demostrarse así.
Un movimiento armónico simple cumple que la fuerza elástica es proporcional a la elongación.

$$F = -k \cdot x$$

Pero también cumple que la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación x

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Por la segunda ley de Newton

$$\Sigma F = m \cdot a$$

Si la fuerza resultante es la elástica

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Como la pulsación es

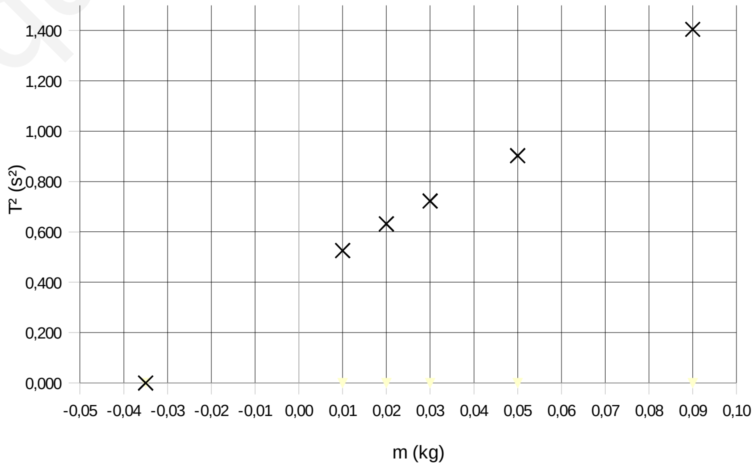
$$\omega = 2\,\pi\ /\ T$$

$$T = 2\,\pi\ /\ \omega$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En la ecuación se observa que la amplitud no interviene, aunque si se alarga el muelle de forma exagerada las masas colgantes salen disparadas.

El período de oscilación no depende de la longitud, pero sí de la masa del resorte. La dependencia con la masa del resorte no es sencilla, ya que no todo el resorte oscila del mismo modo. Se puede demostrar que el resorte contribuye a la masa oscilante en un sumando que vale la tercera parte de la masa del resorte.
m(oscilante) = m(colgada) + m(resorte) / 3
Al hacer una representación gráfica de los cuadrados de los períodos frente a la masa colgada, la recta no pasa por el origen. La contribución de la masa del resorte es la abscisa en el origen de la gráfica. (En la gráfica que aparece a continuación, la contribución de la masa del resorte sería de 0,035 kg)



La gráfica que se construye es la de los cuadrados de los períodos frente a la masa colgada, ya que, al elevar al cuadrado la expresión del período queda

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

Es la ecuación de una recta que pasa por el origen y tiene una pendiente = $4\,\pi^2\ /\ k$

8. En la determinación de la constante elástica de un resorte de longitud inicial 21,3 cm, por el método estático, se obtuvieron los siguientes valores: (g = 9,8 m/s²)

masa (g)	20,2	30,2	40,3	50,3	60,4	70,5
longitud (cm)	27,6	30,9	34,0	37,2	40,5	43,6

Calcula la constante elástica con su incertidumbre en unidades del sistema internacional.

(P.A.U. Jun. 15)

Solución:

El método estático, se basa en la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta x$$

Se calculan
- los alargamientos $\Delta x = L - L_0$ restando las longitudes de la longitud inicial (L_0 = 21,3 cm), y se pasan los resultados a metros
- los pesos, de la expresión $P = m \cdot g$, usando los valores de las masas en kg
- los valores de la constante del muelle de la expresión de la ley de Hooke, $k = P / \Delta x$

Masa	(g)	m	20,2	30,2	40,3	50,3	60,4	70,5
Longitud	(cm)	L	27,6	30,9	34	37,2	40,5	43,6
Alargamiento	(cm)	$\Delta x = L - L_0$	6,3	9,6	12,7	15,9	19,2	22,3
Masa	(kg)	m	0,0202	0,0302	0,0403	0,0503	0,0604	0,0705
Peso	(N)	$P = m \cdot g$	0,198	0,296	0,395	0,493	0,592	0,691
Alargamiento	(m)	Δx	0,063	0,096	0,127	0,159	0,192	0,223
Constante	(N/m)	$k = P / \Delta x$	3,1422	3,0829	3,1098	3,1003	3,0829	3,0982

El valor medio de la constante es:

$$k = (3{,}14 + 3{,}08 + 3{,}11 + 3{,}10 + 3{,}08 + 3{,}10) / 6 = 3{,}10 \text{ N/m}$$

El cálculo de incertidumbres se limita al uso apropiado de las cifras significativas.
El valor de la constante, teniendo en cuenta que el valor de g y algunos valores de alargamientos sólo tiene dos cifras significativas, es:

$$k = (3{,}1 \pm 0{,}1) \text{ N/m}$$

9. Si tenemos un resorte de constante elástica conocida, ¿cómo podemos saber el valor de una masa desconocida? Describe las experiencias que debemos realizar para lograrlo.

(P.A.U. Jun. 16)

Solución:

Se colgaría el resorte con un platillo de balanza y se anotaría la posición del platillo, medida con una regla vertical: y_1
Sin mover la regla, se colocaría la masa en el platillo y se mediría y anotaría la nueva posición del platillo: y_2
Se calcularía el alargamiento $\Delta y = y_2 - y_1$.
Conocido el valor de la constante podría calcularse la fuerza de recuperación elástica por la ecuación de Hooke

$$F = - k \cdot \Delta y$$

Como en el equilibrio estático entre la fuerza elástica y el peso del objeto son iguales:

$$k \cdot \Delta y = m \cdot g$$

La masa se calcula despejándola en la ecuación anterior.

$$m = \frac{k \cdot \Delta y}{g}$$

10. Una vez realizada la experiencia del resorte para determinar la constante elástica, ¿como indagarías el valor de una masa desconocida (método estático y dinámico)?

(P.A.U. Set. 13)

Solución:

Método estático.
Ver solución al ejercicio de junio de 2016

Método dinámico.
Se cuelga el objeto del resorte, se tira hacia abajo un poco y se suelta. Comprobado que el resorte solo se mueve en el eje vertical, se mide el tiempo de diez oscilaciones completas t.
Se calcula el período $T = t / 10$.
Habiendo calculado la constante elástica del resorte k, la masa del objeto se calcula de la ecuación del período:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m=\frac{k\,T^2}{4\pi^2}$$

11. La constante elástica de un resorte medida por el método estático:
 a) ¿Depende del tipo de material?
 b) ¿Varía con el período de oscilación?
 c) ¿Depende de la masa y longitud del resorte?

(P.A.U. Set. 05)

Solución:

a) En el guión de la práctica de laboratorio, no se hacen pruebas de si existe una dependencia entre el material del muelle y su constante elástica. Se puede decir que dos muelles del mismo material pueden tener distinta constante elástica.

b) El método estático consiste en medir el alargamiento que sufre un muelle cuando cuelga de él un objeto de masa conocida. No se hace oscilar, por lo que no se mide la relación entre el período de oscilación y la constante elástica. (En el método dinámico el cálculo de la constante elástica del muelle da un resultado que se puede considerar constante)

c) Tampoco se comprueba en el laboratorio la dependencia entre la constante de un muelle y su masa ni su longitud. Damos por supuesto que se mantiene constante al variar la longitud, ya que el muelle se alarga al colgarle un peso.

12. En la medida de la constante elástica por el método dinámico:
 a) ¿Influye la longitud del muelle?
 b) ¿Le afecta el número de oscilaciones y su amplitud?
 c) ¿Varía la frecuencia de oscilación al colgarle diferentes masas?

(P.A.U. Set. 06)

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se mide el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo) para cada una de varias masas colgadas del muelle. De la ecuación del período del muelle, se determina el valor de constante.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En la ecuación anterior se ve que el período de oscilación de una masa no depende ni de la longitud del muelle, ni del número de oscilaciones ni de la amplitud, solo de la masa que oscila.
Como la frecuencia es la inversa del período, también la frecuencia depende de la masa que oscila.

13. Explica, brevemente, las diferencias en el procedimiento para calcular la constante elástica de un resorte (k) por el método estático y por el método dinámico.

(P.A.U. Set. 12, Jun. 08)

Solución:

En el método estático se cuelgan varias masas m conocidas, por ejemplo pesas de una balanza, de un muelle y se miden los alargamientos Δy producidos.
La constante se determina a partir la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta y$$

$$k = m \cdot g / \Delta y$$

Se calcula numéricamente el valor medio.

En el método dinámico se aparta una masa que cuelga de un muelle de la posición de equilibrio y se deja oscilar, midiendo el tiempo de 10 oscilaciones, calculando el período de oscilación, T, la constante armónica $\omega^2 = 4 \pi^2 / T^2$, y la constante del muelle k, de la ecuación que relaciona la constante del muelle k con la la constante armónica ω^2:

$$k = m \cdot \omega^2$$

Se repite con varias masas conocidas y se halla el valor medio.

14. Describe brevemente el procedimiento empleado en el laboratorio para medir la constante elástica de un muelle por el método estático.

(P.A.U. Jun. 14, Jun. 10)

Solución:

El método estático, se basa en la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta y$$

Se cuelgan pesas de masa conocida de un muelle y se miden los alargamientos producidos. La constante se determina:

- numéricamente de la media de los cocientes $k = m \cdot g / \Delta y$
- gráficamente representando los alargamientos producidos frente a las masas colgadas. El valor de la constante se obtiene de la pendiente de la recta de la gráfica por la relación.

$$\text{pendiente} = p_e = \frac{\Delta y}{\Delta m} = \frac{g \Delta y}{\Delta m g} = g \frac{\Delta y}{\Delta F} = \frac{g}{k}$$

● PÉNDULO SIMPLE

1. En la determinación de g con un péndulo simple, describe brevemente el procedimiento y el material empleado.

(P.A.U. Jun. 06)

Solución:

Se cuelga una esfera maciza de un hilo de unos 2,00 m, haciendo pasar el otro extremo por una pinza en el extremo de un vástago horizontal, sujeto a varilla vertical encajada en una base plana.

Se ajusta la longitud del hilo a uno 60 cm y se mide su longitud desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera. Se aparta ligeramente de la posición de equilibrio y se suelta. Se comprueba que oscila en un plano y a partir de la 2ª o 3ª oscilación se mide el tiempo de 10 oscilaciones. Se calcula el período dividiendo el tiempo entre 10. Se repite la experiencia para comprobar que el tiempo es prácticamente el mismo. Se halla el valor medio del período.
Se ajusta sucesivamente la longitud a 80, 100, 120, 150, 180 y 200 cm y se repite la experiencia para cada una de ellas.
Una vez obtenidos los valores de los períodos T para cada longitud L del péndulo, se puede usar la ecuación del período del péndulo simple para calcular g, la aceleración de la gravedad.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

De los valores obtenidos (que deben ser muy parecidos) se halla el valor medio.

2. ¿Qué influencia tienen en la medida experimental de g con un péndulo simple, las siguientes variables?
   a) La masa.
   b) El número de oscilaciones.
   c) La amplitud de las oscilaciones.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

La medida experimental de g se basa en la medida de tiempos de un número de oscilaciones para calcular el período del péndulo, y, a partir de la ecuación, calcular el valor de g.

a) Ninguna. La expresión del período T de un péndulo de longitud L es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.
La masa no aparece en la expresión y no afecta al valor del período.

b) Ninguna. Es conveniente que el número de oscilaciones sea del orden de 10 o 20 para aumentar la precisión de la medida.

c) Ninguna. Se considera que el comportamiento se puede tomar como armónico para ángulos menores de 15°. Siempre que las amplitudes sean pequeñas no influirán en la medida de g.

3. Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Longitud del péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tiempo de 10 oscilaciones (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

(P.A.U. Set. 14)

Solución:

La ecuación del período de un péndulo es:

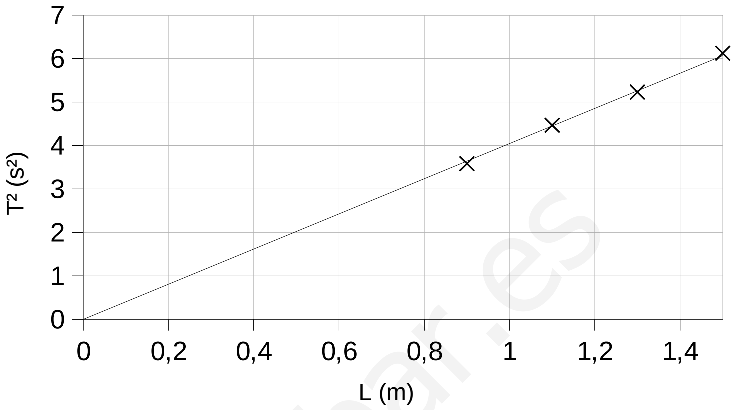
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Al representar los cuadrados de los períodos T^2 frente a las longitudes L se obtiene una recta.
Se construye una tabla para calcular los valores de T^2 y g ($g = 4\ \pi^2\ L\ /\ T^2$)

L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s^2)	g ($m·s^{-2}$)
0,90	18,93	1,893	3,59	9,92
1,10	21,14	2,114	4,47	9,72
1,30	22,87	2,287	5,23	9,81
1,50	24,75	2,475	6,13	9,67

El valor medio de g calculado de los valores de la tabla es:

$$g_m = 9{,}78 \text{ m·s}^{-2}$$



La pendiente de la recta obtenida mediante un ajuste por mínimos cuadrados vale:

$$p = 4{,}05 \text{ s}^2/\text{m}$$

De la ecuación del período, la relación de la pendiente con el valor de la aceleración de la gravedad es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow p=\frac{\Delta T^2}{\Delta L}=\frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow$$

$$g=\frac{4\pi^2}{p}$$

$$g = 9{,}75 \text{ m·s}^{-2}$$

Es un resultado similar al del valor medio de g.

4. Se quiere obtener la aceleración de la gravedad mediante un péndulo simple obteniéndose los siguientes valores:

Longitud del péndulo (cm)	60	70	80	90
Tiempo en realizar 10 oscilaciones (s)	15,5	16,8	17,9	19,0

Representa. de forma aproximada, T^2 frente a L y calcula, a partir de dicha gráfica, la aceleración de la gravedad.

(P.A.U. Set. 16)

Solución:

La ecuación del período de un péndulo es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Al representar los cuadrados de los períodos T^2 frente a las longitudes L se obtiene una recta.
Se construye una tabla para calcular los valores de T^2 y g ($g = 4\pi^2 L / T^2$)

L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s^2)	g ($m·s^{-2}$)
0,60	15,5	1,55	2,40	9,86
0,70	16,8	1,68	2,82	9,79
0,80	17,9	1,79	3,20	9,86
0,90	19,0	1,90	3,61	9,84

El valor medio de g calculado de los valores de la tabla es:

g_m = 9,84 m·s⁻²

La pendiente de la recta obtenida mediante un ajuste por mínimos cuadrados vale:

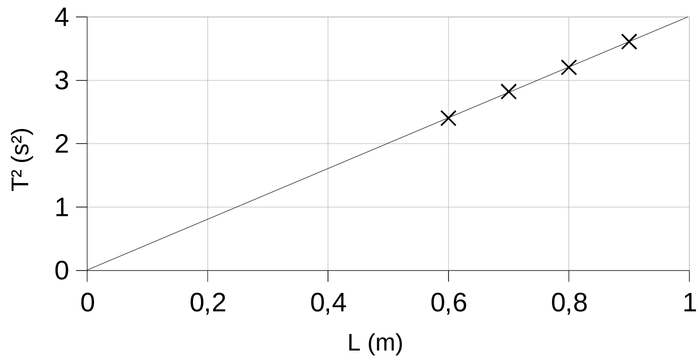
p = 4,00 s²/m

De la ecuación del período, la relación de la pendiente con el valor de la aceleración de la gravedad es:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow p=\frac{\Delta T^2}{\Delta L}=\frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g=\frac{4\pi^2}{p}$$

g = 9,87 m·s⁻²

Es un resultado similar al del valor medio de g.



5. Se hacen 5 experiencias con un péndulo simple. En cada una se realizan 50 oscilaciones de pequeña amplitud y se mide con un cronómetro el tiempo empleado. La longitud del péndulo es L = 1 m. Con estos datos calcula la aceleración de la gravedad.

Experiencia	1	2	3	4	5
Tiempo(s) empleado en 50 oscilaciones	101	100	99	98	102

(P.A.U. Jun. 09)

Solución:

Como solo hay datos para una longitud de péndulo solo se puede calcular el valor medio del período y aplicar la ecuación del período del péndulo:

Experiencia	1	2	3	4	5
Tiempo(s) empleado en 50 oscilaciones	101	100	99	98	102
Período	2,02	2,00	1,98	1,96	2,04

El valor medio del período es:

$$T=\frac{\sum T_i}{N}=\frac{10,00\ [\text{s}]}{5}=2,00\ \text{s}$$

El valor de la aceleración g de la gravedad calculado con la ecuación del período del péndulo es bastante aproximado al valor real.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}=4\pi^2\frac{1,00\ [\text{m}]}{(2,00\ [\text{s}])^2}=\pi^2\ \text{m/s}^2=9,87\ \text{m/s}^2$$

6. Se dispone de un péndulo simple de 1,5 m de longitud. Se mide en el laboratorio el tiempo de 3 series de 10 oscilaciones obteniendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. ¿cuál es el valor de g con su incertidumbre?

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

Como solo hay datos para una longitud de péndulo solo se puede calcular el valor medio del período y aplicar la ecuación del período del péndulo:

Experiencia	1	2	3
Tiempo(s) empleado en 10 oscilaciones	24,56	24,58	24,55

Período	2,456	2,458	2,455

El valor medio del período es:

$$T=\frac{\sum T_i}{N}=\frac{7{,}369\ [\mathrm{s}]}{3}=2{,}456\ \mathrm{s}$$

El valor de la aceleración g de la gravedad calculado de la ecuación del período del péndulo:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}=4\pi^2\frac{1{,}5\ [\mathrm{m}]}{(2{,}456\ [\mathrm{s}])^2}=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

El cálculo de incertidumbres se limita al uso apropiado de las cifras significativas. Como la longitud del péndulo sólo tiene 2 cifras:

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m/s^2}$$

Análisis: No es muy coherente dar la medida de los tiempos con 4 *cifras significativas y la longitud de péndulo con solo* 2.

7. Determina la aceleración de la gravedad con su incertidumbre a partir de los siguientes datos experimentales:

Longitud del péndulo (m)	0,60	0,82	0,90	1,05	1,33
Tiempo de 20 oscilaciones (s)	31,25	36,44	38,23	41,06	46,41

(P.A.U. Set. 15)

Solución:

Se calculan los valores de
- los períodos dividiendo los tiempos de 20 oscilaciones entre 20.
- la aceleración de la gravedad despejados de la ecuación del período del péndulo: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Longitud del péndulo	(m)	L		0,60	0,82	0,90	1,05	1,33
Tiempo de 20 oscilaciones	(s)	t_{20}		31,25	36,44	38,23	41,06	46,41
Período	(s)	T	$= t_{20} / 20$	1,563	1,822	1,912	2,053	2,321
Aceleración de la gravedad	($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)	g	$= \frac{4\pi^2 L}{T^2}$	9,702	9,752	9,724	9,835	9,751

El valor medio de la aceleración de la gravedad es:

$$\bar{g} = (9{,}702 + 9{,}752 + 9{,}724 + 9{,}835 + 9{,}751) / 5 = 9{,}753\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

El cálculo de incertidumbre se limita al uso apropiado de las cifras significativas.
La aceleración de la gravedad es:

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

8. En la práctica de medida de g con un péndulo, ¿como conseguirías (sin variar el valor de g) que el péndulo duplique el número de oscilaciones por segundo?

(P.A.U. Set. 12, Set. 11, Jun. 04)

Solución:

Para conseguir duplicar la frecuencia, o lo que es lo mismo, disminuir a la mitad el período, habría que hacer la longitud del péndulo 4 veces menor, ya que el período de un péndulo ideal viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si $L' = L / 4$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L/4}{g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

9. Cuando en el laboratorio mides g con un péndulo simple:
   a) ¿Cuantas oscilaciones conviene medir?
   b) ¿Qué precauciones se deben tomar con la amplitud de las oscilaciones?
   c) ¿Influye la masa del péndulo en la medida de g?

(P.A.U. Jun. 05)

Solución:

a) Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, ya que éste se calcula dividiendo el tiempo de N oscilaciones entre el número de ellas

$$T = t / N$$

Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

b) La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15°. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

c) No influye. La ecuación del período T del péndulo es independiente de la masa:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Solo depende de la longitud L del péndulo. Esto se comprueba en el laboratorio sustituyendo la masa y volviendo a medir el período (o midiendo los períodos de distintos péndulos de la misma longitud pero de los que cuelgan distintas masas)

10. Comenta brevemente la influencia que tienen en la medida de g con un péndulo: la amplitud de oscilaciones, el número de medidas, la masa del péndulo.

(P.A.U. Set. 10)

Solución:

El péndulo describe un movimiento oscilatorio circular alrededor de la posición de equilibrio. Cuando el ángulo es muy pequeño y sea aplicable a aproximación sen $\varphi = \varphi$, el movimiento será armónico simple con un período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Donde L es la longitud del péndulo.
En el laboratorio se mide la longitud de un péndulo y se hace oscilar con una amplitud pequeña. Se mide el tiempo de diez oscilaciones, se calcula el período y a partir de él, el valor de la aceleración de la gravedad despejada de la ecuación anterior:

$$g=\frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

En esa ecuación puede verse que el valor de g no depende ni de la amplitud de la oscilación ni de la masa del péndulo. Pero si la amplitud de las oscilaciones no es pequeña, el movimiento ya no es armónico simple y la ecuación anterior deja de ser válida.
En cuanto al número de medidas, cuanto mayor sea, menor será el error del valor medio y más exacto el resultado.

11. En la medida experimental de la aceleración de la gravedad g con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

(P.A.U. Jun. 13)

Solución:

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15°. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

12. Explica cómo se puede determinar la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo simple, e indica el tipo de precauciones que debes tomar a la hora de realizar la experiencia.

(P.A.U. Jun. 16, Jun. 15)

Solución:

Se cuelga una esfera maciza de un hilo de unos 2,00 m, haciendo pasar el otro extremo por una pinza en el extremo de un vástago horizontal, sujeto a una varilla vertical encajada en una base plana.
Se ajusta la longitud del hilo a uno 60 cm y se mide su longitud desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera. Se aparta ligeramente de la posición de equilibrio y se suelta. Se comprueba que oscila en un plano y a partir de la 2ª o 3ª oscilación se mide el tiempo de 10 oscilaciones. Se calcula el período dividiendo el tiempo entre 10. Se repite la experiencia para comprobar que el tiempo es prácticamente el mismo. Se halla el valor medio del período.
Se ajusta sucesivamente la longitud a 80, 100, 120, 150, 180 y 200 cm y se repite la experiencia para cada una de ellas.
Una vez obtenidos los valores de los períodos T para cada longitud L del péndulo, se puede usar la ecuación del período del péndulo simple para calcular g, la aceleración de la gravedad.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

De los valores obtenidos (que deben ser muy parecidos) se halla el valor medio.

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15º. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.
Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Sumario

Índice de exámenes P.A.U.