5 El movimiento oscilatorio

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Explica por qué no es correcto decir que el período es el tiempo entre dos posiciones idénticas del móvil.

Porque el móvil, excepto en los extremos de la trayectoria para x = A, pasa dos veces por la misma posición en cada ciclo.

5.2 Razona si una pelota que rebota en el suelo de manera ideal tiene un movimiento vibratorio armónico simple.

No lo tiene. Es un movimiento alternativo y periódico, pero, mientras que en un extremo la velocidad es cero, en el otro la velocidad es máxima.

Además, la aceleración de la pelota es constante e igual a *g*, mientras que en un *mvas* la velocidad es proporcional, y de signo contrario a la elongación.

5.3 Escribe una ecuación de un *mvas* cuya posición inicial sea la mitad de su elongación máxima positiva.

La expresión general del movimiento es:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Para cumplir las condiciones del problema el, hay que hacer que $x_0 = 0{,}5\,A \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0{,}5$, por lo que $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$; luego la ecuación será:

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

5.4 Establece la ecuación del movimiento del ejercicio resuelto anterior en la forma seno. Comprueba que el valor de la velocidad para t = 0 es el mismo en ambas formas.

Para determinar φ_0 hay que tener en cuenta las condiciones iniciales:

$$-0{,}002 = 0{,}005\ \text{sen}\,(10\cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_0 = \frac{-0{,}002}{0{,}005} = -0{,}4 \Rightarrow \varphi_0 = \text{arcsen}\,(-0{,}4)$$

Valor que se satisface para $\varphi_0 = -0{,}4115$ rad y para $\varphi_0 = \pi + 0{,}4115$ rad.

Para saber cuál de los dos desfases es el adecuado, hay que tener en cuenta el signo de la velocidad inicial, que es positiva por viajar hacia la derecha, así que $\cos\varphi_0$ ha de ser positivo.

Por tanto, $\varphi_0 = -0{,}4115$ rad.

Luego la ecuación del movimiento es:

$$x = 0{,}005\ \text{sen}\,(10\pi t - 0{,}4115)$$

La velocidad en t = 0 será:

$$v_0 = 0{,}05\pi\cos(\omega t + \varphi) = 0{,}05\pi\cos(-0{,}4115) = 0{,}144\ \text{m s}^{-1}$$

5.5 Analiza la gráfica x-t para describir cómo la velocidad tiene sus máximos para x = 0 y es nula cuando *x* es máxima o mínima.

La gráfica que da la posición en función del tiempo para la forma seno, por ejemplo, es la de la figura adjunta. Al derivar la función seno, se obtiene la función coseno.

Se observa cómo para la *x* de t = 0, t = T/2 y t = T la pendiente de la función seno es máxima y se corresponde con valores máximos de la función coseno, por el contrario en los puntos de t = T/4 y t = 3T/4 la pendiente de la función seno es cero y la gráfica coseno corta al eje de ordenadas en ese punto.

Entre t_0 = y t = T/4, la *x* ha ido creciendo, pero cada vez más despacio, y la velocidad (función coseno) es positiva, pero cada vez menor. Para valores de *x* comprendidos entre t = T/4 y t = T/2, la elongación está disminuyendo y cada vez más deprisa, así que la función coseno debe ir aumentando su valor absoluto, pero es negativa. Así se puede seguir el ciclo completo.

5.6 Una cuerda de piano vibra 440 veces por segundo cuando da la nota *la*. Si la porción central se desplaza 0,5 cm a ambos lados de la posición de equilibrio, calcula la aceleración máxima a la que está sometida y compárala con la de la aceleración terrestre g_0.

La pulsación del movimiento es:

$$\omega = 2\pi \cdot 440 = 880\pi \ \text{s}^{-1}$$

La ecuación de movimiento de la posición central de la cuerda es $x = 0{,}005\cos(880\pi t + \varphi_0)$ y la aceleración será $a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$.

La aceleración máxima es:

$$a_{máx} = A\omega^2$$

Sustituyendo los datos del problema, se tiene:

$$a = 0{,}005 \cdot (880\pi)^2 = 38215 \ \text{m s}^{-2} = 3900 \ g_0$$

5.7 Demuestra que la proyección de la aceleración centrípeta de un *mcu* es igual a la aceleración de la proyección del movimiento.

En un *mcu* la ecuación de movimiento es:

$$\vec{r} = R\cos\omega t\ \vec{i} + R\,\text{sen}\,\omega t\ \vec{j}$$

La velocidad y la aceleración son:

$$\vec{v} = -\omega R\,\text{sen}\,\omega t\ \vec{i} + \omega R\cos\omega t\ \vec{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\omega t\ \vec{i} - \omega^2 R\,\text{sen}\,\omega t\ \vec{j}$$

La proyección de esta aceleración sobre un eje es igual al valor de dicha componente:

$$a_x = -\omega^2 R\cos\omega t$$

Por otra parte, la proyección del movimiento sobre el eje *x* es:

$$x = R\cos\omega t$$

Su velocidad y aceleración son:

$$v = -R\omega\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow a = -R\omega^2\cos\omega t$$

Con lo que se comprueba la relación del enunciado.

5.8 En un *mvas*, la amplitud, la velocidad máxima y la aceleración máxima tienen el mismo valor numérico. ¿Cuál es su período?

Si $A = v_{máx} = a_{máx}$ es porque $\omega = 1\ \text{s}^{-1}$ y como $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi$ s

5.9 Un oscilador armónico constituido por un muelle de constante k = 2000 N m^{-1} lleva asociada una masa de 0,4 kg. Se encuentra en reposo cuando recibe un impulso, de manera que se separa 3 cm de la posición de equilibrio. Establece la ecuación de su movimiento.

En un primer lugar se calcula la pulsación del *mvas*:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{0{,}4}} = 70{,}71\ s^{-1}$$

Si está en reposo, se tiene que x = 0,03 para t = 0; utilizando la fórmula del coseno, se tiene:

$$x = 0{,}03 \cos 70{,}71\ t$$

5.10 De un muelle de masa despreciable cuelga el platillo de una balanza vacío. Con un pequeño impulso el sistema oscila verticalmente con un período de 0,50 s. Si se añade una masa de 12 g en el platillo, el sistema oscila con período de 0,56 s. Calcula la constante elástica del muelle y la masa del platillo.

Teniendo en cuenta que el período de un sistema masa-muelle es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{tenemos:} \quad \begin{cases} 0{,}50 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ 0{,}56 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+0{,}012}{k}} \end{cases}$$

Dividiendo entre sí las dos igualdades, se tiene:

$$\frac{0{,}50}{0{,}56} = \sqrt{\frac{m}{m+0{,}012}} \Rightarrow \left(\frac{0{,}50}{0{,}56}\right)^2 = \frac{m}{m+0{,}012}$$

Resolviendo, se tiene que m = 47 g.

La constante del muelle puede obtenerse de la expresión del período:

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 7{,}42\ N\ m^{-1}$$

5.11 En una montaña sobre la superficie de la Tierra, un péndulo de 150 cm de longitud tiene un período de 2,47 s. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en dicho lugar.

De la aplicación de la expresión del péndulo matemático se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = 4\pi^2 \frac{1{,}50}{2{,}47^2} = 9{,}71\ m\ s^{-2}$$

5.12 Calcula el valor de la aceleración del péndulo del ejercicio anterior cuando la masa se encuentra en la vertical con la máxima velocidad.

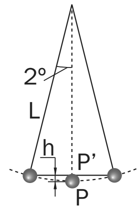
Cuando el péndulo está situado de tal manera que el peso y la tensión de la cuerda tienen la misma dirección y sentido contrario, la aceleración del mismo es cero, como corresponde a la situación de x = 0 y velocidad máxima.

5.13 En el ejercicio resuelto anterior, comprueba que la energía mecánica en el punto más bajo de la trayectoria es igual a mgh, siendo *h* la altura que ha ascendido la masa en su desplazamiento.

De la figura, se observa cómo: h = L – L cos 2º = L (1 – cos 2º) = 1,46 · 10^{-3} m

La energía cinética de masa será equivalente a:

E_c = mgh = 0,8 · 9,81 · 1,46 · 10^{-3} = 1,15 · 10^{-2} J



El principio de conservación de la energía mecánica se cumple de tal manera que la velocidad de la masa en el punto inferior es equivalente a la que tendría si se hubiera caído desde el punto *P'* recorriendo la distancia *h*.

5.14 Comprueba que la velocidad de paso de la masa del problema resuelto anterior por el punto más bajo es igual a $A\omega = \sqrt{2gh}$, teniendo en cuenta que para ángulos pequeños $\text{sen}^2\ \theta = 2\ (1 - \cos\theta)$.

Al pasar por el punto más bajo de la trayectoria, toda la energía mecánica del péndulo es energía cinética. La energía potencial inicial es: $E_p = mgh = mgL\ (1 - \cos\theta)$

Para ángulos pequeños, se puede hacer la aproximación de que: $\text{sen}^2\ \theta = 2\ (1 - \cos\theta)$

De igual manera, se tiene la relación: A = L sen θ y que $\omega^2 = \frac{g}{L}$

Sustituyendo: $E_p = \frac{1}{2} m\, g\, L\ \ \text{sen}^2\ \theta = \frac{1}{2} m \frac{g}{L} L^2\ \text{sen}^2\ \theta = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2$

Dado que toda la energía potencial se convierte en cinética, se tiene: $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 \Rightarrow v = A\omega$

5.15 El amortiguador de un coche permite que la amplitud de la vibración provocada por un bache en la carretera se reduzca en un 99% en tres oscilaciones amortiguadas. Calcula la constante de amortiguamiento del sistema en relación con la pulsación ω de la oscilación.

Si después de las oscilaciones la amplitud se ha reducido en un 99%, se tendrá una amplitud 0,01 A. Sustituyendo: $0{,}01\,A = A\ e^{-\gamma \cdot 3T}$, siendo *T* el período de las oscilaciones.

Simplificando *A* y tomando logaritmos, se tiene: $0{,}01 = e^{-\gamma \cdot 3T}$; $\ln 0{,}01 = -3\gamma T$

Despejando: $\gamma = \frac{-\ln 0{,}01}{3T} = \frac{-\ln 0{,}01}{3} \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}244\omega$

5.16 Calcula el porcentaje de energía que se pierde en cada oscilación del problema anterior, suponiendo que se hubiera mantenido constante.

Como la energía de una oscilación es proporcional al cuadrado de la amplitud, al cabo de tres oscilaciones la energía del sistema es:

$$E_S = \frac{1}{2} k\ (0{,}01\ A)^2 = E_{inicial} \cdot 10^{-4}$$

Si *x* es la fracción de la energía inicial que queda tras una oscilación, se tiene: $x^3 = 10^{-4} \Rightarrow x = 0{,}0464$

Por lo tanto, en cada oscilación la energía mantenida es el 4,64%, perdiéndose el 95,36%.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CARACTERIZACIÓN DEL *MVAS*

5.17 Un chico juega con una honda de 50 cm de longitud moviéndola con *mcu* en un plano vertical a razón de 3 vueltas por segundo. Determina la ecuación del movimiento de la sombra de la piedra si en el momento inicial, para t = 0, esta estaba justo en el punto más alto de su trayectoria.

La sombra tendrá una amplitud igual a la de la circunferencia descrita por la honda: A = 0,5 m

La pulsación será también la misma: $\omega = 2\pi\nu = 6\pi\ s^{-1}$

Dado que en el instante inicial la sombra se encuentra en el punto central, se tiene: $x(t) = 0{,}5 \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

5.18 Escribe la ecuación de la trayectoria de un móvil que oscila con *mvas* de manera que en el instante inicial estaba en el punto más alejado del centro, a 0,004 m a la izquierda del mismo, y volvió a pasar por ese mismo punto, por primera vez, a los 0,8 milisegundos.

La amplitud del movimiento es: A = 0,004 m.

El período será: T = 0,8 ms = $8 \cdot 10^{-4}$ s; la frecuencia será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-4}} = 2500\pi$

Las condiciones iniciales son tales que el móvil inicia su trayectoria en x = –A, por lo que:

$$x(t) = 0{,}004 \cos(2500\pi t + \pi)$$

5.19 Un *mvas* está dado por la ecuación: x = 0,04 cos (24t + 0,07) con todas las unidades en el SI. Calcula el período y la frecuencia de ese movimiento y establece la ecuación en la forma seno.

El período se obtiene teniendo en cuenta que: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 24\ s^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{24} = 0{,}262\ s$

La frecuencia será: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{24}{2\pi} = 3{,}82\ s^{-1}$

Dado que $\cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, la ecuación sería $x = 0{,}04\,\text{sen}\left(24t + 0{,}07 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}04\,\text{sen}\,(24t + 1{,}64)$

5.20 La ecuación de la posición de un cuerpo que se mueve es: $x = 0{,}075 + 0{,}04\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{150}t$. ¿Se trata de un *mvas*? ¿Qué significado tiene el término 0,075?

Sí, es un *mvas* con A = 0,04 m y T = 150 s. El término 0,075 indica que la oscilación se produce de forma simétrica a ambos lados de ese punto.

5.21 Un *mvas* viene caracterizado por los siguientes datos: amplitud A = 0,003 m; período T = 0,05 s. En el instante inicial se encuentra en x = 0,003 m. Establece su ecuación en la forma seno y en la forma coseno.

Sustituyendo los valores proporcionados, y teniendo en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}05} = 40\pi\ s^{-1}$ y que la amplitud es máxima en el instante inicial, se tiene la siguiente forma coseno: x(t) = 0,003 cos (40πt)

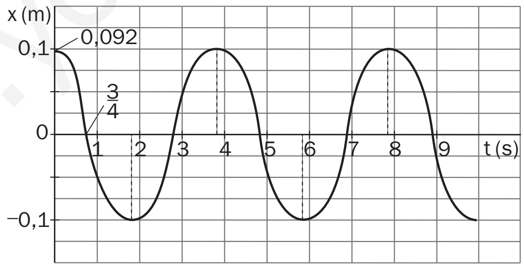
La forma de tipo seno será: $x(t) = 0{,}003\ \text{sen}\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

5.22 Una partícula tiene un movimiento definido por la ecuación: x = – 0,007 cos 10πt. ¿Se trata de un *mvas*? ¿Qué significado tiene el signo (–)? Escribe la ecuación equivalente del movimiento sin dicho signo.

Sí, se trata de un *mvas* puesto que cumple la siguiente condición necesaria y suficiente: $a = -\omega^2 x$
El signo (–) indica que para t = 0; x = –0,007 m, es decir, el móvil está en el extremo izquierdo de la oscilación.
Se puede obtener una ecuación equivalente sin el signo añadiendo un desfase inicial de π rad:

x = 0,007 cos (10πt + π)

5.23 La siguiente gráfica representa la elongación de un *mvas* con respecto al tiempo. Establece la ecuación que lo rige.



La ecuación es: x(t) = 0,1 sen (0,5πt + π/8)

CINEMÁTICA DEL *MVAS*

5.24 El extremo del ala de un avión oscila por las turbulencias con *mvas* de amplitud de 15 cm a razón de 2 veces por segundo. Establece la ecuación de su movimiento y calcula la velocidad máxima.

En la ecuación del movimiento del ala se tiene en cuenta que: A = 0,15 m; ω = 2π rad; $\nu = 4\pi\ s^{-1}$

La ecuación es: x(t) = 0,15 sen 4π t

La velocidad es: v(t) = 0,6π cos 4π t

La velocidad máxima será: $v_{máx} = 0{,}6\pi = 1{,}9\ m\ s^{-1}$

5.25 **Un *mvas* tiene una elongación de 5 cm y su velocidad máxima es 25 m s^{-1}. Escribe la ecuación del movimiento sabiendo que en el instante inicial t = 0, x = A.**

La velocidad máxima es: $v_{máx} = \omega A \Rightarrow \omega = \frac{v_{máx}}{A} = \frac{25}{0{,}05} = 500\ s^{-1}$

Para que la amplitud sea máxima en el instante inicial se puede emplear la forma del coseno:

$$x(t) = 0{,}05 \cos 500t$$

5.26 **Un móvil está animado de *mvas* partiendo de x = 0 para t = 0. ¿Qué fracción del período emplea en alcanzar una elongación x = A/2? ¿Qué fracción emplea en volver a pasar por el mismo punto por primera vez?**

Según las condiciones iniciales se puede emplear más fácilmente la ecuación de tipo seno: $x = A \operatorname{sen} \omega t$

Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, se tiene: $\frac{A}{2} = A \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow \operatorname{sen} \omega t = 0{,}5 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6}$

Dado que $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} T = \frac{T}{12}$

volverá a pasar por ese punto cuando falte un tiempo equivalente para el semiperíodo, es decir:

$$0{,}5\ T - \frac{T}{12} = \frac{5T}{12}$$

5.27 **El período de un *mvas* es 50 ms, la amplitud es 0,1 m y el desfase inicial es cero. Calcula la velocidad en el punto de elongación x = 0,02 m.**

El problema se puede resolver utilizando la ecuación: $v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

En este caso A = 0,1 m y $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}050} = 40\pi\ s^{-1}$

Sustituyendo: $v = 40\pi \sqrt{0{,}1^2 - 0{,}02^2} = 12{,}31\ m\ s^{-1}$

5.28 **Un cuerpo animado de un *mvas* de ecuación: x = 0,001 cos 34 π t pasa por primera vez por el punto de elongación x = –0,0005 m dirigiéndose hacia la izquierda. ¿Cuánto tardará en volver a pasar por dicho punto?**

Sustituyendo el valor en la ecuación, podemos calcular el instante en el que pasó por primera vez:

$$-0{,}0005 = 0{,}001 \cos 34\pi t;\ \cos 34\pi t = -0{,}5;\ 34\pi t = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow t = 0{,}0196\ s$$

Si sigue aumentando el valor de *t* en la ecuación, el siguiente valor de cos 34 π t = –0,5 se tendrá cuando se cumpla que:

$$34\pi t = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t = 0{,}0392\ s$$

El tiempo que habrá transcurrido será: 0,0392 – 0,0196 = 0,0196 s

5.29 **Calcula el período de un *mvas* que tiene una aceleración de 25 m s^{-2} en el punto de elongación x = 0,005 m.**

La aceleración de un *mvas* es: $a = \omega^2 x$

Por tanto:

$$\omega^2 = \frac{a}{x} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 x}{a}}$$

Sustituyendo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 0{,}005}{25}} = 0{,}089\ s$$

5.30 La elongación de un *mvas* viene dada por la expresión: $y = 0{,}04\cos\left(25\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

Deduce las expresiones de la velocidad y la aceleración, y calcula:

a) La velocidad y aceleración máximas.

b) La velocidad y aceleración iniciales.

c) La velocidad y aceleración para t = 0,2 s.

Las ecuaciones de la velocidad y la aceleración serán:

$$v = \frac{dy}{dt} = -\pi\ \text{sen}\left(25\pi t + \frac{\pi}{4}\right);\ a = \frac{dy}{dt} = -25\pi^2\cos\left(25\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) La velocidad y la aceleración máximas serán: $v_{máx}$ = 3,14 m s^{-1} y $a_{máx}$ = 246,7 m s^{-2}

b) La velocidad y la aceleración iniciales serán:

$$v_0 = -\pi\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = -2{,}22\ \text{m s}^{-1}\ \text{ y }\ a_0 = -25\pi^2\cos\frac{\pi}{4} = -174{,}5\ \text{m s}^{-2}$$

c) La velocidad y la aceleración para t = 0,2 s serán:

$$v_{t=0{,}2\ s} = -\pi\ \text{sen}\left(25\pi\cdot 0{,}2 + \frac{\pi}{4}\right) = 2{,}22\ \text{m s}^{-1};\ a_{t=0{,}2\ s} = -25\pi^2\cos\left(25\pi\cdot 0{,}2 + \frac{\pi}{4}\right) = 174{,}5\ \text{m s}^{-2}$$

5.31 El período de un *mvas* es de 0,025 s y su amplitud es de 0,07 m. En el instante inicial pasa por el origen desplazándose hacia la izquierda. Establece:

a) La ecuación de la trayectoria.

b) La velocidad y la aceleración que tiene a los 2,5 s.

c) La velocidad y aceleración máximas.

a) La pulsación del movimiento es: $\omega = \frac{2\pi}{0{,}025} = 80\pi\ \text{s}^{-1}$

Para establecer el desfase inicial, se tiene en cuenta que con t = 0, x = 0 y la velocidad es negativa.

Así: $x = 0{,}07\,\text{sen}(80\pi t + \pi)$

Su velocidad sería: $v = 80\pi\cdot 0{,}07\cos(80\pi t + \pi) \Rightarrow v = +17{,}6\cos(80\pi t + \pi)$

que cumple las condiciones iniciales.

b) La aceleración se determina derivando la velocidad: $a = -4422\,\text{sen}(80\pi t + \pi)$

Sustituyendo el valor, se tiene:

$$v = 17{,}6\cos(80\pi\cdot 0{,}25 + \pi) = 17{,}6\,\text{m s}^{-1};\ a = -4422\,\text{sen}(80\pi\cdot 0{,}25 + \pi) = 0\ \text{m s}^{-2}$$

c) Los valores máximos serán: $v_{máx}$ = 17,6 m s^{-1} y $a_{máx}$ = 4422 m s^{-2}

5.32 Una varilla de acero tiene un extremo empotrado en un bloque de hormigón. Al golpear el extremo libre, vibra con un *mvas* de 5 mm de amplitud y 400 Hz de frecuencia. Calcula la velocidad y la aceleración máximas de ese punto.

La velocidad máxima será:

$v_{máx} = A\,\omega = 0{,}005\cdot 2\pi\cdot 400 = 12{,}57\ \text{m s}^{-1}$

La aceleración máxima será:

$a_{máx} = A\,\omega^2 = 0{,}005\cdot(2\pi\cdot 400)^2 = 31\,583\ \text{m s}^{-2}$

DINÁMICA DEL *MVAS* OSCILADOR ARMÓNICO

5.33 Un muelle, colgado de un extremo, se alarga 2,5 cm cuando en el otro extremo se coloca una masa de 10 kg. Determina la constante del muelle y el período de oscilación que tendrá si, una vez cargado, se le hace oscilar.

Del alargamiento del muelle podemos sacar la constante elástica teniendo en cuenta que F = k Δx:

$$k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{98,1}{0,025} = 3924 \text{ N m}^{-1}$$

El periodo de oscilación es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{3924}} = 0,32 \text{ s}$

5.34 Cuando se carga un muelle de masa despreciable con una masa adicional de 50 gramos, oscila libremente con un período de 0,5 s. Calcula el período de oscilación del muelle si se carga con 60 gramos.

De la expresión del período de oscilación se tiene: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

Dado que la constante del muelle no varía con la carga, se puede realizar la siguiente equivalencia:

$$\frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2} \Rightarrow T_2 = T_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow T_2 = 0,5\sqrt{\frac{0,06}{0,05}} = 0,55 \text{ s}$$

5.35 Un oscilador armónico consta de un muelle cuya constante vale k = 200 N m^{-1} y una masa de 500 g que resbala sin rozamiento sobre una mesa horizontal. Se saca la masa de la posición de equilibrio desplazándola 10 cm en sentido positivo. Establece la ecuación del *mvas* que sigue.

En el caso de los muelles, la pulsación que se tiene es: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Sustituyendo, se tiene: $\omega = \sqrt{\frac{200}{0,5}} = 20 \text{ s}^{-1}$

Dado que la amplitud es de 0,1 m, la ecuación será: x = 0,1 cos 20 t

5.36 Calcula la velocidad con que saldrá despedida una bola de 25 g de masa cuando se la deja en libertad después de haber comprimido con ella un muelle, de constante k = 900 N m^{-1} y una longitud de 5 cm.

El sistema se comporta como un oscilador armónico desde el momento en que se deja libre el muelle hasta el momento en que la bola adquiere la máxima velocidad, dado que luego la velocidad del muelle será inferior a la de la bola y dejará de acelerarla.
Durante ese primer intervalo, el movimiento es como el de un oscilador armónico de amplitud 0,05 m y pulsación: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{900}{0,025}} = 189,7 \text{ s}^{-1}$

La velocidad máxima será: $v_{máx}$ = A ω = 0,05 · 189,7 = 9,49 m s^{-1}

5.37 Una masa de 0,8 kg se encuentra unida a un muelle de constante 1200 N m^{-1} y se separa 25 cm de la posición de equilibrio. Establece la ecuación del movimiento que la anima cuando se deje en libertad, calculando la velocidad y la aceleración máximas que adquiere.

La pulsación del *mvas* que se establece es: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{0,8}} = 38,73 \text{ s}^{-1}$

La amplitud del movimiento es de 0,25 m y las condiciones iniciales son que x = A; t = 0, indicando que se trata de una ecuación de forma coseno con desfase nulo: x = 0,25 cos 38,73 t
La velocidad máxima será: $v_{máx}$ = ω A = 38,73 · 0,25 = 9,7 m s^{-1}

La aceleración máxima será: $a_{máx}$ = ω^2 A = 38,73^2 · 0,25 = 375 m s^{-2}

5.38 En una fábrica de amortiguadores quieren determinar la masa equivalente de un muelle. Esta es la masa que aporta el muelle en los estudios dinámicos al oscilador armónico y no coincide con la masa inercial, ya que cada fracción del muelle oscila con una amplitud distinta. En un ensayo cargan un muelle con 10 kg y lo hace con una frecuencia de 1,93 Hz. Si se añaden otros 10 kg, lo hace con una frecuencia de 1,37 Hz. Calcula la constante y la masa equivalente del muelle.

Teniendo en cuenta que la constante del muelle no depende más que de las características elásticas, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 4\pi^2 m \nu^2$$

Se tiene: $4\pi^2 m_1 \nu_1{}^2 = 4\pi^2 m_2 \nu_2{}^2 \Rightarrow m_1 \nu_1{}^2 = m_2 \nu_2{}^2$

Si definimos *m* como la masa del muelle: $(10 + m)\,1{,}93^2 = (20 + m)\,1{,}37^2 \Rightarrow m = 0{,}156$ kg

La constante del muelle será: $k = 4\pi^2 m \nu^2 = 4\pi^2 \cdot 10{,}156 \cdot 1{,}93^2 = 1493\ \text{N m}^{-1}$

5.39 En un centro de homologación de materiales para la industria ferroviaria se está estudiando la idoneidad del adhesivo con que se sujetan los sensores térmicos de los ejes de las ruedas. Para ello, se coloca la pieza, de 50 g de masa, con su soporte en un vibrador, y se somete a un *mvas* de 1 mm de amplitud y frecuencia creciente. La pieza se despega del soporte cuando la frecuencia de ensayo es de 1200 Hz. Calcula la fuerza de adhesión del pegamento estudiado.

La fuerza de adhesión es igual al producto de la masa aplicada por la aceleración máxima de la masa. Por tanto:

$$F_{adh} = m\, a_{máx} = m\, A\, \omega^2 = m\, A\, 4\pi^2\, \nu^2$$

Sustituyendo, se tiene:

$$F_{adh} = 0{,}05 \cdot 0{,}001 \cdot 4\pi^2 \cdot 1200^2 = 2842\ \text{N}$$

DINÁMICA DEL PÉNDULO SIMPLE

5.40 Un columpio se puede equiparar a un péndulo de 3 m de longitud. Escribe la ecuación de su movimiento cuando un niño de 45 kg de masa se mueve 50 cm a cada lado de la posición de equilibrio.

El columpio se comporta como un péndulo ideal si consideramos que la amplitud es pequeña en comparación con su longitud.

En este caso, el período será: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{3}} = 1{,}808\ \text{s}^{-1}$

La ecuación del movimiento será: $x = 0{,}5 \cos 1{,}808\, t$

5.41 El péndulo de Foucault de un museo de las ciencias, que se emplea para demostrar el giro de la Tierra, oscila entre 240 pivotes dispuestos en un círculo de 3 m de diámetro derribándolos todos en 24 horas. Un estudiante cuenta 28 oscilaciones entre dos derribos sucesivos. Calcula la longitud del hilo del péndulo.

El péndulo tiene que derribar 10 pivotes por hora, lo que implica derribar uno cada 6 minutos. Dado que ha realizado 28 oscilaciones, el período es: $\frac{6\ \text{min utos}}{28} = 0{,}214\ \text{min utos} = 12{,}86$ s

Utilizando la ecuación del péndulo para oscilaciones pequeñas, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{12{,}86^2 \cdot 9{,}81}{4\pi^2} = 41\ \text{m}$$

5.42 Un reloj de péndulo tiene un período de 2 s sobre la superficie terrestre. ¿Cuál será su período en la Luna?

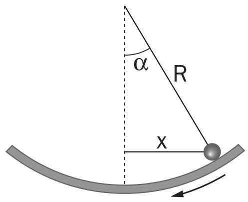
Dato. $g_{0Tierrs} = 6\, g_{0Luna}$

El período del péndulo es: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T_T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}}$ y $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}}$

Dividiendo entre sí y sustituyendo: $\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \Rightarrow T_L = T_T\sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 2\sqrt{6} = 4{,}9$ s

5.43 Una pequeña canica rueda por el fondo de un depósito esférico de gran diámetro (en comparación con la amplitud de la oscilación) con un movimiento que podemos considerar como armónico simple. Si la frecuencia del movimiento es de 0,22 Hz, calcula el radio del depósito.

El movimiento de la canica se asemeja al de un péndulo de longitud igual al radio de la esfera.



La canica rueda bajo la acción de la componente tangencial del peso, que es:

$$mg\ \text{sen}\ \alpha = mg\frac{x}{R}$$

La aceleración es: $a = -g\dfrac{x}{R}$

Esta aceleración se asemeja a un *mvas* de pulsación $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\dfrac{g}{R}} \Rightarrow R = \dfrac{g}{4\pi^2\nu^2}$

Sustituyendo: $R = \dfrac{9{,}81}{4\pi^2 \cdot 0{,}22^2} = 5{,}1\ \text{m}$

ENERGÍA LIGADA AL *MVAS*

5.44 Un oscilador armónico está formado por un muelle de k = 14 000 N m^{-1} y una masa de 5 kg. Calcula:

a) El trabajo necesario para comprimir el muelle 5 cm.

b) La energía potencial que tiene entonces el sistema.

c) La velocidad máxima que lleva la masa en el punto central de la trayectoria.

d) La energía mecánica en cualquier punto de la trayectoria.

a) Se trata de una fuerza conservativa, de manera que el trabajo se puede calcular estableciendo el concepto de energía potencial: $W = \int_0^A \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_0^A k\ x\ dx = k\int_0^A x\ dx = k\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^A = \dfrac{1}{2}kx^2$

Luego el trabajo será: $W = \dfrac{1}{2}14\ 000 \cdot 0{,}05^2 = 17{,}5\ \text{J}$

b) La energía potencial es igual al trabajo realizado: E_p = 17,5 J

c) La velocidad máxima se obtiene cuando toda la energía potencial se convierte en cinética:

$$\frac{1}{2}mv_{máx}{}^2 = E_p \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{2\,E_p}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 17{,}5}{5}} = 2{,}65\ \text{m s}^{-1}$$

d) La energía mecánica se conserva en todo momento: $E_{mecánica}$ = 17,5 J

5.45 Un cuerpo de 2 kg de masa que se dirige con una velocidad de 2 m s^{-1} es frenado por un muelle que se comprime 10 cm. Calcula la constante elástica del muelle y el tiempo que tarda en detenerse.

La energía cinética se convierte totalmente en energía potencial. Por tanto, se puede establecer la relación:

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow k = \frac{mv_0^2}{A^2} = \frac{2 \cdot 2^2}{0{,}1^2} = 800\ \text{N m}^{-1}$$

El movimiento será como el de un oscilador, así que el tiempo que tarda en detenerse es un cuarto del período:

$$t_f = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{800}} = 0{,}079\ \text{s}$$

5.46 La energía mecánica de un oscilador armónico es de 0,02 J y la fuerza máxima que actúa es de 3 N. Escribe la ecuación del movimiento sabiendo que el período de vibración es de 0,5 s.

La energía mecánica es igual a la energía potencial máxima: $E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

La fuerza máxima sería: $F_{máx} = m\,a_{máx} = m\omega^2A$

Dividiendo entre sí las anteriores ecuaciones: $\frac{E_m}{F_{máx}} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2A^2}{m\omega^2A} = \frac{1}{2}A \Rightarrow A = 2\frac{E_m}{F_{máx}} = 2\frac{0,02}{3} = 0,013\text{ m}$

La pulsación será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi\text{ s}^{-1}$

La ecuación será: $x = 0,013\cos(4\pi t + \varphi_0)$

5.47 Una partícula de 1 g de masa realiza un *mvas* cuyo período es de 0,02 segundos y en el instante T/6 la velocidad de la partícula es 31,4 m s^{-1}. Determina:

a) La ecuación del movimiento.

b) La energía mecánica.

c) La fuerza recuperadora.

a) Suponiendo que en el instante inicial se encuentra en el origen, moviéndose en el sentido positivo del eje x, se tiene: $x = A\text{ sen }\omega t$; $v = \omega A\cos\omega t$

De los datos del enunciado se tiene que: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi\text{ s}^{-1}$

En el instante $t = \frac{T}{6} \Rightarrow t = \frac{0,02}{6} = 0,0033\text{ s}$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad, se tiene: $31,4 = 314\,A\cos 100\pi\,0,0033$

Despejando, se tiene que A = 0,20 m y la ecuación del movimiento será: $x = 0,20\text{ sen }100\pi t$

b) La energía mecánica es: $E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}0,001\cdot 100^2\pi^2\cdot 0,2^2 = 1,97\text{ J}$

c) La fuerza recuperadora es: $F = -m\omega^2A\text{ sen }\omega t = -0,001\cdot 100^2\pi^2\cdot 0,20\text{ sen }100\pi t = -19,74\text{ sen }100\pi t$

5.48 Calcula para qué velocidad, con relación a la velocidad máxima, un oscilador armónico tiene la mitad de su energía mecánica como energía cinética.

Si la energía cinética es la mitad de la energía mecánica, la energía cinética será, también, la mitad de la máxima.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mv_{máx}{}^2 \Rightarrow v = \frac{v_{máx}}{\sqrt{2}}$$

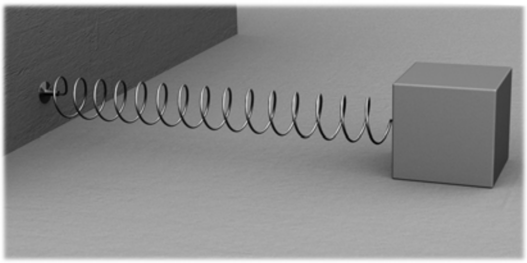
5.49 ¿Qué relación habrá entonces entre la elongación de la oscilación y la amplitud inicial *A*?

En este caso, la energía potencial elástica será también la mitad: $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}}$

5.50 El sistema masa muelle de la figura recibe un martillazo que le comunica una energía de 250 J. Si la masa es de 2 kg y se comprime 4 cm, calcula:

a) El período con que vibrará el sistema.

b) La ecuación del movimiento.



a) $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2\cdot 250}{0,04^2} = 3,12\cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,016\text{ s}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3,12\cdot 10^5}{2}} = 395\text{ s}^{-1}$

Sustituyendo: $x = 0,04\text{ sen }395\,t$

5.51 Calcula la energía asociada a la lámina de un xilófono que tiene una masa de 50 g y está vibrando a 494 Hz con una amplitud de 0,1 mm mientras que emite la nota si.

La energía asociada a un *mvas* es:

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m4\pi^2\nu^2A^2$$

Sustituyendo:

$$E_m = \frac{1}{2}0{,}050 \cdot 4\pi^2 \cdot 494^2 \cdot \left(10^{-4}\right)^2 = 2{,}41 \cdot 10^{-3}\,J$$

5.52 Calcula la energía cinética máxima de una partícula de 5 g de masa animada de *mvas* con amplitud A = 3 cm y período T = 0,333 s.

La energía cinética máxima es igual a la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\frac{4\pi^2}{T^2}A^2$$

Sustituyendo:

$$E_m = \frac{1}{2}0{,}005\frac{4\pi^2}{0{,}333^2}0{,}03^2 = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\,J$$

5.53 Calcula la energía mecánica asociada a un columpio de 4 m de longitud en el que un niño de 45 kg se mece con amplitud de 0,5 m.

La energía potencial máxima es igual a la energía mecánica, y, considerando que se trata de un péndulo simple, se tiene:

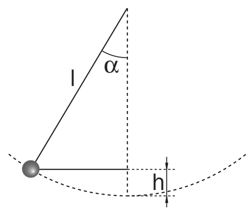
$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}mA^2\frac{g}{L}$$

Sustituyendo:

$$E_m = \frac{1}{2}45 \cdot 0{,}5^2\frac{9{,}81}{4} = 13{,}8\,J$$

5.54 Calcula, por medios trigonométricos y energéticos, la altura por encima del punto más bajo a la que sube el columpio del ejercicio anterior.

Por métodos energéticos, se tiene que: $E_{p\,máx}$ = mgh; $h = \frac{E_{p\,máx}}{mg} = \frac{13{,}8}{45 \cdot 9{,}81} = 0{,}03\,m$



Por métodos trigonométricos, se puede ver en la figura que: $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{0{,}5}{4} \Rightarrow \alpha = 7{,}18º$

$$h = l\,(1 - \cos\alpha) = 4\,(1 - \cos 7{,}18º) = 0{,}03\,m$$

5.55 Calcula el porcentaje de energía mecánica perdida por rozamiento cuando la velocidad máxima de un oscilador armónico es igual a la mitad de la velocidad máxima inicial.

Si la velocidad es la mitad de la inicial, la energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{4}E_{c0}$$

Por tanto, el 25% de la energía cinética inicial se mantiene, y se ha perdido el 75%.

PÉNDULO FÍSICO

5.56 La barra de la figura, de 0,8 m de longitud, puede oscilar sobre uno de sus extremos con pequeños desplazamientos. Calcula la longitud equivalente y el período de oscilación sabiendo que: $I_G = \frac{mL^2}{12}$

La barra constituye un péndulo físico cuyo período es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgr}}$$

donde I_0 es el momento de inercia de la barra con respecto al eje por el que pasa el punto de giro. Aplicando el teorema de Steiner, se tiene que:

$$I_0 = I_G + mr^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Sustituyendo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8}{3\cdot 9{,}81}} = 1{,}46\ \text{s}$

La longitud equivalente se hace asimilándolo a un péndulo simple:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} \Rightarrow L_0 = g\frac{T^2}{4\pi^2} = 9{,}81\frac{1{,}46^2}{4\pi^2} = 0{,}53\ \text{m}$$

5.57 La figura muestra una esfera de radio r = 3 cm y masa *m* hecha de un metal desconocido. Puede oscilar alrededor de un pequeño anillo que lleva en la parte superior. El período de oscilación es de 0,45 s. ¿Cómo es la esfera, pesada y hueca o ligera y maciza?

El período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgr}} \Rightarrow I_0 = mgr\,\frac{T^2}{4\pi^2}$$

Sustituyendo, se tiene que: $I_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m

Por otra parte, se tiene que los momentos de inercia de los casos posibles son:

Esfera maciza:

$$I_0 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 = 1{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Esfera hueca:

$$I_0 = \frac{2}{3}mr^2 + mr^2 = \frac{5}{3}mr^2 = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Comparando, se observa que el valor más aproximado es el de la esfera hueca.

PROBLEMA DE SÍNTESIS

5.58 En estudios de balística se puede utilizar, para calcular la velocidad de salida de un proyectil, un oscilador armónico que consiste en un bloque de madera de 2,500 kg unido a un muelle de masa despreciable y k = 2463 N m^{-1}. El bloque se mueve sobre un colchón de aire para minimizar el rozamiento y arrastra un cursor que indica el desplazamiento máximo del conjunto.

En estas condiciones, el bloque de madera recibe un proyectil de 50 g de masa y velocidad desconocida que se aloja dentro de él en un choque totalmente inelástico, desplazándolo 287 mm. Si, para detener el sistema, se suprime el colchón de aire, el conjunto queda con una oscilación de amplitud A = 0,01 A_0 después de 20 oscilaciones.

Calcula:

a) La energía del conjunto inmediatamente después de recibir el impacto.

b) La velocidad del bloque en ese momento.

c) El período de oscilación.

d) La ecuación del movimiento del conjunto mientras se mueve sin rozamiento.

e) La aceleración máxima del bloque de madera.

f) El coeficiente de amortiguación cuando se suprime el colchón de aire.

g) La velocidad del proyectil antes del choque.

h) La energía perdida en el choque.

a) La energía después de realizar el impacto es la máxima energía potencial del sistema, que se tiene con el muelle en su máximo valor de amplitud: $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}2463 \cdot (0{,}287)^2 = 101\ \text{J}$

b) La velocidad del bloque se puede calcular haciendo uso de la energía mecánica, que será igual a la cinética en el instante inicial: $E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 101}{2{,}550}} = 8{,}90\ \text{m s}^{-1}$

c) El período de oscilación se puede obtener de la siguiente ecuación: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}55}{2463}} = 0{,}20\ \text{s}$

d) Para la ecuación de movimiento se necesita conocer la pulsación: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2463}{2{,}55}} = 31\ \text{s}$

La ecuación del movimiento será: x = 0,287 sen 31 t

e) La aceleración del bloque será: a = –0,287 · 31^2 sen 31 t = –276 sen 31 t

Por tanto, la aceleración máxima será: 276 m s^{-2}

f) La pérdida de energía se puede describir con la siguiente ecuación: $A = A_0\, e^{-\gamma t}$

Sustituyendo, se tiene: $0{,}01\ A_0 = A_0\, e^{-\gamma\, 20 \cdot 0{,}2}$

Aplicando logaritmos a la igualdad, se tiene: Ln 0,01 = –4 γ; $\Rightarrow \gamma = \frac{-\text{Ln}\ 0{,}01}{4} = 1{,}15\ \text{s}^{-1}$

g) Para calcular la velocidad del proyectil, se puede emplear la conservación del momento lineal:

$$m_p v_p + m_b v_b = (m_p + m_b)\, v_f \Rightarrow v_p = \frac{(m_p + m_b)\, v_f - m_b v_b}{m_p} = \frac{2{,}550 \cdot 8{,}90 - 2{,}500 \cdot 0}{0{,}050} = 454\ \text{m s}^{-1}$$

h) La energía inicial del proyectil es: $E = E_p + E_b = \frac{1}{2}mv_p^{\ 2} + \frac{1}{2}mv_b^{\ 2} = \frac{1}{2}0{,}050 \cdot 454^2 + \frac{1}{2}2{,}500 \cdot 0^2 = 5153\ \text{J}$

Dado que la energía inicial del oscilador era 101 J, la pérdida de energía es de: 5153 – 101 = 5052 J