

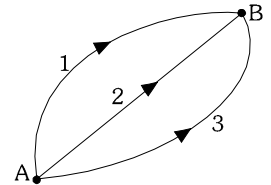
ALGUNAS CUESTIONES TEÓRICAS SOBRE LOS TEMAS 1 Y 2.

1. Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

- El trabajo que realiza una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos, es menor si se realiza a lo largo de la línea recta que uno ambos puntos
- El signo negativo que aparece en todas las expresiones que definen al campo gravitatorio se debe a que la interacción gravitatoria siempre es atractiva.

a) En primer lugar, recordemos qué se entiende por fuerza conservativa:

- Es conservativa toda aquella fuerza para la cual el trabajo realizado en un desplazamiento a lo largo de un camino cerrado es nulo. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- Otra definición, equivalente a la anterior, nos dice que fuerza conservativa es aquella para la cual, el trabajo realizado en un desplazamiento entre dos puntos, es independiente del camino escogido, sólo depende de los puntos inicial y final.



Según la segunda definición, vemos claramente que el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos puntos va a ser el mismo sea cual sea el camino escogido, no siendo menor por un camino en concreto, aunque sea más corto. La afirmación es, por consiguiente, falsa.

b) La cuestión se refiere al signo negativo que aparece en la mayoría de las expresiones de campo gravitatorio creado por masas puntuales, esferas... Analicemos las principales expresiones.

La fuerza gravitatoria entre dos masas viene dada por la ley de gravitación universal de Newton, cuya expresión vectorial es

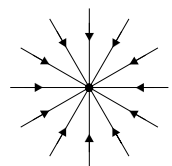
$$\vec{F}_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

En ella, el signo negativo marca precisamente el carácter atractivo de la interacción, siempre teniendo en cuenta que, en dicha expresión, el sistema de referencia está colocado en una de las dos masas.

El campo gravitatorio (fuerza gravitatoria ejercida por unidad de masa)

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{-G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2 \cdot \cancel{m}} \cdot \vec{u}_r = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Vemos que el significado del signo negativo es el mismo que en la fuerza. Las líneas de campo, radiales, “entran” en la masa M que crea el campo.



Energía potencial: En la expresión $Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$, el signo proviene, en parte, del signo

correspondiente a la fuerza gravitatoria. Pero no olvidemos que esa fórmula lleva asociado un origen de potencial, un punto de referencia en el que consideramos que la energía potencial es nula. Y en esa expresión el origen está situado en el infinito, y eso hace que la energía potencial almacenada por un cuerpo en cualquier punto del espacio sea negativa. Si colocáramos el origen en otro punto, como la superficie terrestre, como ocurre en la expresión $Ep_g = m \cdot g \cdot h$, válida para alturas mucho menores que el radio del planeta, el signo negativo desaparece, ya que la energía potencial gravitatoria aumenta con la distancia a la masa que crea el campo.

Para el caso del potencial V, el razonamiento es el mismo que para la energía potencial. $V = \frac{Ep_g}{m}$

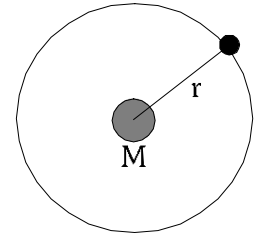
Como conclusión, podemos decir que el enunciado es cierto, pero con la matización de que no es el único factor que influye en dicho signo. También influyen el sistema de referencia escogido y el origen de potencial.

2. Dos satélites idénticos A y B, describen órbitas circulares de diferentes radios, $r_A > r_B$, alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:
- ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética?
 - Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita $r_A = r_B$ y tuviesen distinta masa $m_A < m_B$, ¿Cuál de los dos tendría más energía cinética?

La energía cinética de un cuerpo en movimiento viene dada por $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Para el caso de un satélite que describe una órbita circular de radio r alrededor de un planeta, la velocidad se denomina *velocidad orbital*. Su expresión se obtiene a partir de la 2ª ley

de Newton $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F_g = m \cdot a_n \rightarrow \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$



De este modo, la energía cinética del satélite queda

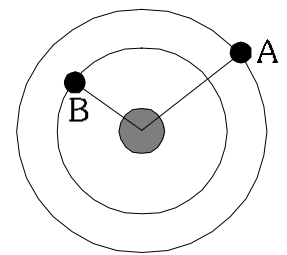
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2}m \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r}$$

donde m es la masa del satélite, y M la del planeta.

Visto esto, podemos responder fácilmente a las cuestiones planteadas.

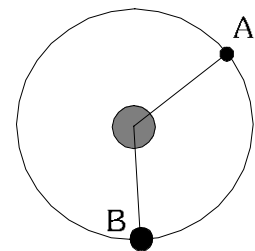
- a) Las energías cinéticas correspondientes a ambos satélites serán

$$E_{c_A} = \frac{G \cdot M \cdot m_A}{2 \cdot r_A} \quad ; \quad E_{c_B} = \frac{G \cdot M \cdot m_B}{2 \cdot r_B}$$



Como ambas masas son idénticas, la energía cinética va a depender exclusivamente de la distancia. Vemos que el satélite A, que está a mayor distancia, tendrá menor energía cinética. Por tanto, el satélite con mayor E_c será el B, que se encuentra más cerca.

- b) Ahora ambos satélites se encuentran en órbitas de igual radio, pero las masas son diferentes. Aplicando las mismas expresiones del apartado a), vemos que el satélite de mayor masa tendrá mayor energía cinética. En este caso, será el B.



3. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.

b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

La velocidad de escape para un planeta se define como *la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente.*

En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos:

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta
m: masa del proyectil

2  $v \rightarrow 0$
 $r \rightarrow \infty$

Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta. El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la E_{p_g} será

$$E_{p_g} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

1  $v = v_e$
 $r = R$

Consideraremos dos situaciones:

Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e .

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} m v_e^2 \quad E_{p_{g1}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = E_c + E_{p_g} = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la E_c) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de E_p está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r \rightarrow \infty} E_M = \lim_{r \rightarrow \infty} (E_c + E_{p_g}) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M2} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Puesto en función de la gravedad en superficie $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión)

También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura h sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de R pondremos R+h.

b) En la realidad la situación física difiere de lo explicado anteriormente. La presencia de la atmósfera terrestre introduce una fuerza no conservativa, la fuerza de rozamiento, que no puede ser despreciada. De hecho, a las elevadas velocidades de las que estamos hablando, tendrá un valor muy grande.

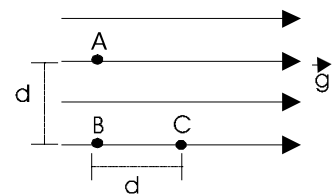
El efecto que produce este rozamiento es una disminución de la velocidad (de la E_c) y una disipación de energía en forma de calor, por lo que la energía mecánica del cohete no se mantendrá constante y disminuirá conforme se eleva según la expresión $\Delta E_M = W_{FRoz}$

De este modo, al salir de la atmósfera no tendrá energía suficiente como para alejarse indefinidamente, y llegará un momento, a una cierta altura, en que el cohete se pare y vuelva a caer hacia la Tierra.

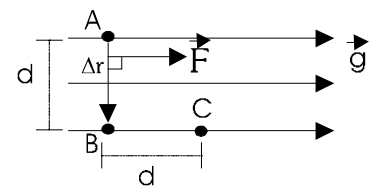
4. En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g , representado en la figura por sus líneas de campo.

a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.

b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



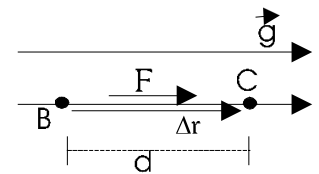
a) Nos encontramos ante un campo gravitatorio de intensidad constante \vec{g} . La fuerza gravitatoria que ejercerá este campo sobre una partícula de masa m colocada en su interior vendrá dada por $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$, y también será constante. El trabajo que realiza esta fuerza en un desplazamiento, que en general se calcula con la integral $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, podrá hacerse



en este caso, al ser la fuerza constante, con la expresión $W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha$.

Así, en el desplazamiento de A a B, el trabajo será $W_{AB} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0$ J, ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

En el desplazamiento de B a C, el trabajo será $W_{BC} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot \cos 0^\circ = m \cdot g \cdot d$. Obtenemos un trabajo positivo, ya que la fuerza favorece el desplazamiento. En este caso, ya que nos dicen que la unidad de masa, el trabajo será $W_{BC} = g \cdot d$



b) El campo gravitatorio descrito es similar al campo gravitatorio terrestre al nivel de la superficie, considerando la aproximación de que los desplazamientos efectuados son muy pequeños en comparación con el radio terrestre ($R_T \approx 6400$ km). En ese caso \vec{g} terrestre puede considerarse un campo constante y uniforme con todas las características del campo de esta cuestión. La única diferencia está en su orientación. La dirección y sentido del campo terrestre es la vertical y su sentido hacia abajo, aunque esto último puede ser también una cuestión de punto de vista, del sistema de referencia escogido.

5. a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?

b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

a) Para responder a esta cuestión debemos remontarnos al concepto de energía potencial y al origen de su expresión.

Energía almacenada por una partícula de masa m colocada a una cierta distancia de M , debido a la acción de la fuerza gravitatoria.

Partimos de la expresión general $\Delta Ep_g = -W_{F_g}$ Así tendremos:

$$\begin{aligned} \Delta Ep_g &= -\int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{-G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot dr \cdot \vec{u}_r = G \cdot M \cdot m \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \\ &= \frac{-G \cdot M \cdot m}{r_B} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} = Ep_B - Ep_A \end{aligned}$$

Debemos escoger ahora el origen de potencial. Nos dicen que para $r_A = R_T$, $Ep_A = 0$. Sustituimos estos valores en el resultado anterior

Y la expresión quedará $Ep_g = \frac{-G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T}$

Haciendo ahora el límite para $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Ep_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{-G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} \right) = \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} \quad \text{Este es el resultado buscado}$$

b) El trabajo que realiza una fuerza, en general, viene dado por la expresión $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, y el signo resultante de la operación será:

Positivo si la fuerza (o alguna de sus componentes) va a favor del desplazamiento.
Negativo si la fuerza (o alguna de sus componentes) se opone al desplazamiento.

La fuerza gravitatoria, como cualquier fuerza, puede realizar trabajo oponiéndose al desplazamiento de una partícula. Por ejemplo, si lanzamos un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad inicial, durante el movimiento de subida la fuerza gravitatoria se opondrá al desplazamiento y realizará un trabajo negativo, que restará energía cinética al cuerpo.

La energía potencial gravitatoria será positiva o negativa dependiendo del sistema de referencia escogido.

Escogiendo el origen de energía potencial a una distancia infinita de la masa M que crea el campo, la energía potencial almacenada por una partícula que esté a una distancia r , será $Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$.

Como vemos, será siempre negativa en ese caso. Esto es debido a que el origen de E_p lo hemos colocado en el punto en el que mayor E_p puede almacenarse, ya que esta magnitud aumenta con la distancia.

Si colocáramos el origen en otro punto, como la superficie terrestre, como ocurre en la expresión $E_{p_g} = m \cdot g \cdot h$, válida para alturas mucho menores que el radio del planeta, el signo negativo desaparece, ya que la energía potencial gravitatoria aumenta con la distancia a la masa que crea el campo. La energía sería positiva para alturas positivas, por encima de la superficie, y negativa para alturas por debajo de la superficie.

Como conclusión, la energía potencial gravitatoria sí puede ser negativa, dependiendo del origen de potencial escogido.