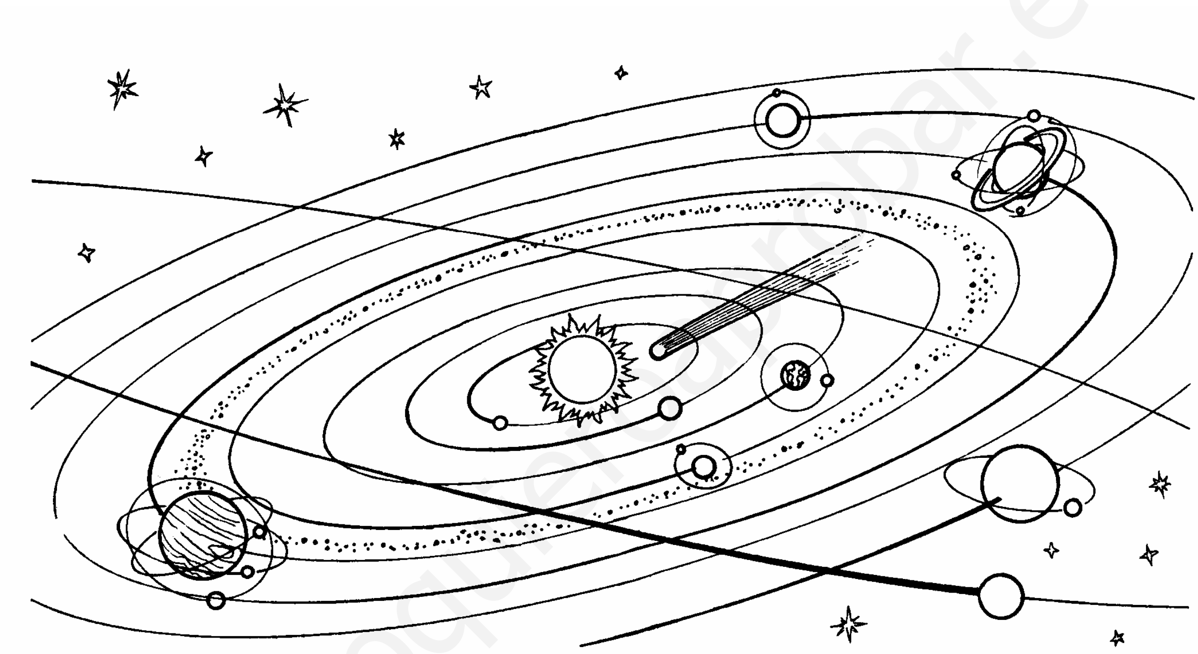
Unidad didáctica 8



Gravitación

1.- Introducción.

Desde los tiempos más remotos, el ser humano ha intentado dar una explicación del Universo que le rodeaba: el día y la noche, las estaciones del año, el movimiento de las estrellas…

Las primeras teorías eran **geocéntricas** y proponían que la Tierra era el centro del Universo.

Aristóteles (384-322 a. C.) propuso que el universo estaba constituido por 27 esfera concéntricas que giraban en torno a la Tierra, que no se movía. En la exterior, a la que llamó bóveda celeste, estaban las estrellas en posiciones fijas, esta bóveda daba una vuelta al día. Su modelo tuvo una gran influencia y se mantuvo, con pequeñas variaciones, hasta el siglo XVI.

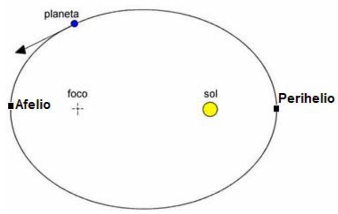
Aristarco de Samos (310-230 a.C.) fue uno de los pocos astrónomos de la antigüedad que propuso una **teoría heliocéntrica** en la que el Sol era el centro del Universo y la Tierra, la Luna los otros cinco planetas conocidos en su época giraban en torno a él. Además la Tierra también giraba alrededor de sí misma. Este modelo no fue aceptado, en parte por falta de medidas precisas y en parte porque rompía con la idea de que el hombre ocupa el centro del Universo.

En el siglo XVI, Nicolás Copérnico (1473-1543) retoma la teoría heliocéntrica y propone un modelo matemático que, de forma sencilla, permitía explicar los datos astronómicos que se conocían en su época.

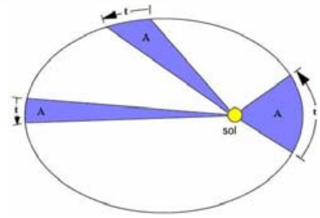
Astrónomos como Tycho Brahe, Galileo, Kepler o Newton publicaron sus observaciones, experiencias y conclusiones que sirvieron de base a las actuales teorías y leyes sobre el funcionamiento del universo.

2.- Leyes de Kepler.

Basándose en los registros astronómicos de Tycho Brahe (de quien fue alumno) y en sus propias observaciones, Johannes Kepler, al intentar calcular la ecuación de la órbita del planeta Marte, descubrió que su órbita era elíptica. Resumió, matemáticamente, sus ideas en tres leyes:



a) **Ley de las órbitas**: *Todos los planetas se mueven, alrededor del Sol, en órbitas elípticas, en uno de cuyos focos está el Sol. El punto de la órbita más cercano al Sol se llama* ***perihelio*** *y el más lejano,* ***afelio***.



b) **Ley de las áreas**: *Toda línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales, A, en tiempos iguales, t*. Es decir, *la velocidad aerolar es constante*, (velocidad aerolar es igual a la superficie, A, barrida por la línea en la unidad de tiempo, t).

$$\frac{dA}{dt} = cte$$

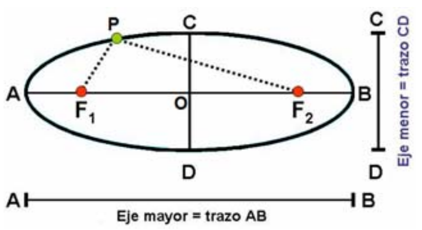
Esto implica que el movimiento de los planetas no es uniforme. Cuanto más cerca del Sol está el planeta, en su órbita, más rápido se mueve. Hasta Kepler, siempre se había creído que la velocidad de los planetas en torno al Sol era constante.

c) **Ley de los periodos**: *el cuadrado de los periodos de los movimientos de los planetas alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media entre ambos*:

$$\frac{T^2_{planeta1}}{r^3_{planeta1}} = \frac{T^2_{planeta2}}{r^3_{planeta2}} = ... = k$$

También se puede expresar: $T^2 = k \cdot r^3$. El valor de k es diferente para cada sistema planetario.

¿Qué es una elipse?
Una elipse es una curva cerrada cuyos puntos cumplen con la condición de que la suma de las distancias a dos puntos, F_1 y F_2, llamados **focos**, es constante: $PF_1 + PF_2 = cte$



Los parámetros que caracterizan a una elipse son:
Semieje mayor (OA) o (OB), **Semieje menor** (OC) o (OD), **Semidistancia focal** (OF_1) o (OF_2).

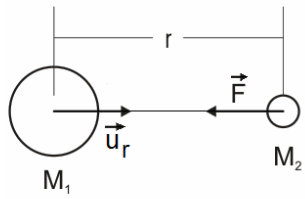
El "achatamiento" de la elipse se mide por la **excentricidad**: $e = \dfrac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje mayor}}$

La excentricidad puede variar de 0 a 1. Si e = 0 se trata de una circunferencia. Si e = 1 se tiene un segmento de línea recta.

3.- Ley de la Gravitación Universal.

Dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia r se atraen con una fuerza cuyo módulo es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que las separa:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



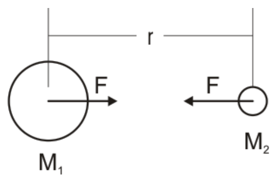
Donde **r** es la distancia entre los centros de gravedad de las masas consideradas y **G** es la constante de gravitación universal que tiene un valor de **$6'67 \cdot 10^{-11}$ N·m/kg^2**.

Como la constante G es muy pequeña la fuerza de atracción gravitatoria entre cuerpos pequeños apenas se pueden observar, pero sí resulta evidente cuando se trata de cuerpos grandes como un planeta.

Expresión vectorial de la fuerza gravitatoria: $\vec{F} = -G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$

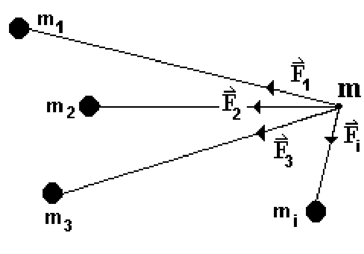
$\vec{u}_r$ es un vector unitario que tiene la dirección de la recta que une los dos cuerpos y el sentido va del cuerpo que ejerce la fuerza al cuerpo que la recibe.

La fuerza con que m_1 atrae a m_2 es igual (en módulo y dirección) a la fuerza con que m_2 atrae a m_1 pero tienen sentido contrario, es decir si la fuerza de atracción que ejerce m_1 sobre m_2 es F, la que ejerce m_2 sobre m_1 será –F.



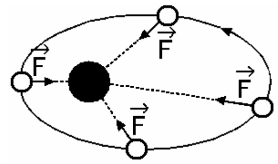
3.1.- Principio de superposición.

Cuando interaccionan más de dos masas (m_1, m_2,…, m_n), la fuerza total que actúa sobre una de ellas se calcula sumando **vectorialmente** la fuerza que cada una de las masas ejerce de forma individual (como si las demás no existiesen).



$$\vec{F}_{Total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ,..., \vec{F}_n$$

4.- Fuerza centrales.



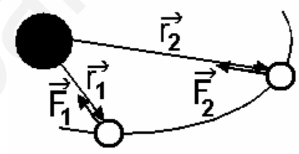
Fuerza central *es aquella fuerza que está dirigida siempre hacia un mismo punto y cuyo módulo depende exclusivamente de la distancia del cuerpo a dicho punto.*

La fuerza gravitatoria es una fuerza central ya que, según la ley de la gravitación universal, la fuerza con que un planeta es atraído por otro es: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Como m_1, m_2 y G son constantes: $F = \frac{k}{r^2}$, depende de la distancia que separa los dos planetas.

4.1.- Momento de la fuerza gravitatoria.

El momento de cualquier fuerza se calcula con: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ y su módulo: $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$



La fuerza gravitatoria es una fuerza central, así que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ forman un ángulo de 180º y el sen 180º = 0. Por tanto, *en el movimiento planetario, el momento de la fuerza gravitatoria respecto al centro de fuerzas es cero.*

4.2.- Conservación del momento angular.

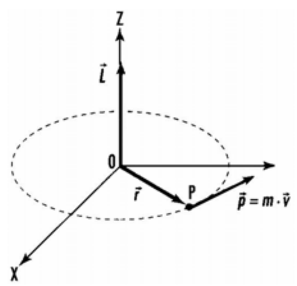
El momento angular de un cuerpo de masa **m** respecto de un punto fijo es: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$

Sabemos que la variación del momento angular de un cuerpo en movimiento coincide con el momento de la fuerza que actúa sobre él: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Pero en el caso de las fuerzas centrales, $\vec{M} = 0$, esto implica que: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ y, por tanto, $\vec{L} = cte$

El momento angular de un cuerpo que se mueve bajo la acción de una fuerza central se mantiene constante en módulo, dirección y sentido.

4.3.- Aplicación al movimiento planetario.



- **Las órbitas de los planetas son planas**, ya que el momento angular es constante, en cualquier punto de una órbita elíptica o circular, y su dirección tiene que ser perpendicular al plano que contiene los vectores de posición y velocidad.

- **Si la órbita es circular, el módulo de la velocidad del planeta es constante**.
  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$ y el módulo: $|\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

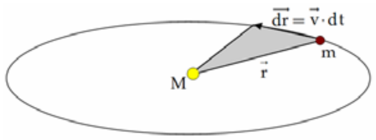
  El ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ es de 90º y el sen 90º = 1. Por lo que: $|\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}|$

  Despejando: $|\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{m \cdot |\vec{r}|}$

  Como el momento angular es constante y el módulo del vector de posición también (ya que la órbita es circular), el módulo del vector velocidad es constante.

- **Para órbitas elípticas, la velocidad aerolar del planeta permanece constante, pero su velocidad lineal varía continuamente**, confirmación de la segunda ley de Kepler.

  La figura (gris) representa el área **dA** que barre el planeta de masa **m**, en un tiempo **dt**, que es el que tarda en desplazarse una distancia **d**$\vec{r}$. El área barrida por el planeta:



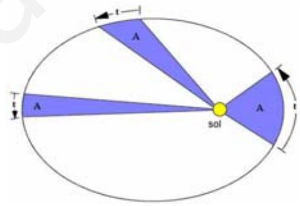
$$dA = \tfrac{1}{2} \cdot \left|\vec{r} \times d\vec{r}\right| = \tfrac{1}{2} \cdot \left|\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt\right|$$

  Si se divide y multiplica por la masa del planeta: $dA = \dfrac{\left|\vec{r} \times m \cdot \vec{v}\right|}{2 \cdot m} \cdot dt = \dfrac{\left|\vec{L}\right|}{2 \cdot m} \cdot dt$

  La velocidad aerolar será: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\left|\vec{L}\right|}{2 \cdot m}$

  Como $\vec{L}$ es constante, la expresión anterior indica que la velocidad areolar es constante, es decir, el área barrida por el vector $\vec{r}$ en un intervalo de tiempo, **dt**, tiene siempre el mismo valor.

  Pero, como se puede apreciar en el dibujo, para un mismo **dt** el desplazamiento **d**$\vec{r}$, varía según el área considerada, por tanto la velocidad del planeta no permanece constante. Y la relación es:



  Ya que $\vec{L}$ y m son constantes: $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow m \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) = m \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) \Rightarrow (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) = (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$

$$|\vec{r}_1| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 = |\vec{r}_2| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \operatorname{sen}\alpha_2$$

- **Velocidad orbital.**

  Si un objeto, de masa m_1, describe una órbita circular alrededor de otro, de masa m_2, la fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza de atracción entre los dos cuerpos: $F_c = F_g$

  $\dfrac{m_1 \cdot v^2}{r} = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$, despejando v: $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_2}{r}}$ (velocidad orbital del planeta)

  Esta expresión indica que la velocidad orbital del objeto no depende de su masa. A partir de esta expresión se puede calcular también:

  - *El periodo de rotación de un planeta, T.* La longitud de una órbita circular es 2 . π . r, el tiempo empleado en recorrerla será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = 2 \cdot \pi \cdot r \sqrt{\frac{r}{G \cdot m_2}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_2}}$$

  - *La masa del planeta alrededor del cual gira*: $m_2 = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$

- **Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies planetarias.**

  Para un cuerpo de masa $\mathbf{m_1}$, a una altura **h** sobre la superficie de un planeta de masa $\mathbf{m_2}$ y radio $\mathbf{r_2}$:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r_2 + h)^2}$$

  Como F = m · a, entonces:

$$G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r_2 + h)^2} = m_1 \cdot a$$

  y por tanto: $a = \dfrac{G \cdot m_2}{(r_2 + h)^2} = g$

  La aceleración de caída libre de un objeto situado cerca de la superficie de un planeta depende de la masa del planeta y no de la del objeto. Por tanto una piedra de 100 g cae con la misma aceleración que una de 10 kg.

  La aceleración varía de manera inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Si h es muy pequeña en comparación al r_T, se puede escribir:

$$a = \frac{G \cdot m_T}{(r_T)^2}$$

- **Significado del peso.**

  La fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m, situado en un punto cercano a su superficie:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_T}{(r_T + h)^2}$$

  Y como $g = G \cdot \dfrac{m_T}{(r_T + h)^2}$

  F = m . g o, lo que es lo mismo: p = m . g.

  Que es la expresión que se ha utilizado hasta ahora para calcular el **peso, P**, que es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que la intensidad de campo gravitatorio $\vec{g}$ **.**

- **Significado de la constante de la tercera ley de Kepler: $\mathbf{T^2 = k\, r^3}$**

  Elevando al cuadrado la expresión del periodo de rotación: $T^2 = (2 \cdot \pi)^2 \cdot \dfrac{r^3}{G \cdot m_2}$

  El valor de la constante, k, que aparece en la tercera ley de Kepler: $k = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_2}$

  k es diferente para cada sistema planetario ya que la masa del cuerpo central alrededor del cual giran los planetas es diferente.

Resumen de fórmulas de Gravitación

Física clásica	
Ley de las áreas o 2ª ley de Kepler	$\frac{dA}{dt} = cte$ (A = velocidad aerolar)
Ley de los periodos o 3ª ley de Kepler	$\frac{T^2_{planeta1}}{r^3_{planeta1}} = \frac{T^2_{planeta2}}{r^3_{planeta2}} = ... = k$ o también: $T^2 = k \cdot r^3$
Constante de la 3ª ley de Kepler	$k = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_2}$ (m_2 masa que produce el campo)
Ley de Gravitación Universal	Vect.: $\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$, Mód.: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
Principio de superposición	$\vec{F}_{Total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 +,...,\vec{F}_n$
Momento de la fuerza gravitatoria	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$
Conservación del momento angular	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = cte$ ó $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$
Velocidad orbital de un planeta	$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_2}{r}}$
Periodo de rotación de un planeta	$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_2}}$
Masa del planeta alrededor del cual gira un cuerpo	$m_2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$
Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies planetarias	$a = \frac{G \cdot m_2}{(r_2 + h)^2} = g$, si h es muy pequeña: $a = \frac{G \cdot m_2}{(r_2)^2}$

Problemas de Gravitación

1.- Europa es un satélite de Júpiter que tarda 3'55 días en recorrer su órbita, de $6'71 \cdot 10^8$ m de radio medio, en torno a dicho planeta. Otro satélite de Júpiter, Ganímedes tiene un periodo orbital de 7'15 días. Calcula el radio medio de la órbita.

2.- El radio medio de la órbita de Júpiter es 5'203 veces el terrestre. Calcula la duración del año en Júpiter.

3.- Calcula el periodo de revolución de Marte sabiendo que la distancia media de Marte al Sol es de 228 millones de km, la distancia media de la Tierra al Sol de 149'6 millones de km y el periodo de revolución de la Tierra de 365'26 días.

4.- El periodo de traslación de un planeta es 12 veces mayor que el periodo de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Halla la distancia del Sol a ese planeta si la distancia Tierra –Sol es de 149.500.000 km.

5.- En el exterior del Sistema Solar se detecta un nuevo planeta enano cuya distancia al Sol es el doble del radio de la orbita de Neptuno. Suponiendo que recorre una órbita circular, ¿cuánto tiempo tardará en dar una vuelta al Sol? Dato: $T_{Neptuno} = 5'2 \cdot 10^9$ s.

6.- Si el radio de la orbita circular de un planeta A es cuatro veces mayor que el de otro B ¿En qué relación están su periodos y sus velocidades medias?

7.- Si la distancia de Mercurio al Sol en el perihelio es de $46'0 \cdot 10^6$ km y en el afelio de $69'8 \cdot 10^6$ km: a) Determina la longitud del semieje mayor de la órbita de Mercurio.
b) Calcula la velocidad en el afelio si en el perihelio es de 59 km/s.

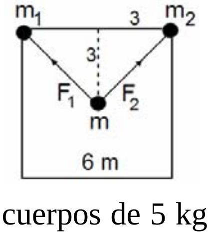
8. Si $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, la $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y el $r_T = 6370$ km, determina: a) Magnitud con que la Tierra atrae a una piedra de 100 g. b) Magnitud con la que la piedra atrae a la Tierra. c) El valor de la aceleración que adquiere la piedra. d) Aceleración de la Tierra. e) Fuerza con la que la Tierra atraerá a otra piedra de m = 10 kg y aceleración que adquiere.

9.- Dibuja un esquema de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcula el valor de la fuerza resultante. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es $3'84 \cdot 10^8$ m, la masa de la Tierra es $5'98 \cdot 10^{24}$ kg y la de la Luna es $7'35 \cdot 10^{22}$ kg

10.- Determina la masa de Marte sabiendo que uno de sus dos satélites, Fobos, describe una orbita circular de $9'27 \cdot 10^6$ m de radio alrededor del planeta de 7'5 horas.

11.- Tenemos cuatro partículas iguales de 2 kg de masa en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determina el módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta debido a la presencia de las otras tres.

12.- Calcula la fuerza gravitatoria que las masas m_1 y m_2 ejercen sobre la masa m si están situadas en un cuadrado de 6 m de lado como el de la figura. Datos: $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 8$ kg, $m = 2$ kg



13.- En dos de los vértices de de un triángulo equilátero de 6 m de lado existen cuerpos de 5 kg de masa. Calcula la fuerza que ambos cuerpos ejercen sobre otro cuerpo de 10 kg de masa que se encuentra en el tercer vértice?

14.- Una persona pesa en la Tierra 500 N. ¿Cuál será su peso a una distancia de dos radios terrestres por encima de la superficie de la Tierra?

15.- El satélite Meteosat gira alrededor de la Tierra en una órbita circular a una altura de 800 km. Calcula la velocidad a la que orbita y el periodo.
Datos: m_T = 5'98.10^{24} kg, r_T = 6400 km.

16.- Dos satélites de igual masa orbitan en torno a un planeta de masa mucho mayor siguiendo órbitas circulares coplanarias de radio R y 3 · R y recorriendo ambos las órbitas en sentido contrario. Deduce y calcula: a) La relación entre sus periodos. b) La relación entre sus momentos angulares (módulo dirección y sentido).

17.- Calcula la aceleración de caída libre de un cuerpo en la superficie de la Tierra.
Datos: G = 6'67 · 10^{-11}N·m^2/kg^2; m_T = 6 · 10^{24} kg , r_T = 6370 km

18.- Calcula el valor de la constante que aparece en la tercera ley de Kepler para el sistema Solar y para el sistema Tierra-Luna.
Datos: G = 6'67 · 10^{-11}N·m^2/kg^2; m_T= 5'98 · 10^{24} kg, m_S= 1'99 · 10^{30} kg

19.- a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media? b) ¿Cuál será el periodo de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?
Datos: R_T = 6370 km. g_T = 9'8 ms^{-2}

Problemas de Selectividad

1.- (Junio 2005) a) Razone cuáles son la masa y el peso en la Luna de una persona de 70 kg. b) Calcule la altura que recorre en 3 s una partícula que se abandona, sin velocidad inicial, en un punto próximo a la superficie de la Luna y explique las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica en ese desplazamiento.
Datos: G = 6'67 ·$10^{–11}$ $Nm^2kg^{–2}$; M_L = 7'2 ·10^{22} kg; R_L = 1'7 ·10^6 m

2.- (Junio 2007) Suponga que la masa de la Tierra se duplicara.
a) Calcule razonadamente el nuevo periodo orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permanece constante.
b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?
G = 6'67 ·$10^{–11}$ $Nm^2kg^{–2}$; M_T = 6 ·10^{24} kg; R_T = 6370 km, R_L = 1'74 ·10^6 m

3.- (Junio 2008) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una, órbita circular de radio $3R_T$.
a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria. G = 6'67 ·$10^{–11}$ $Nm^2kg^{–2}$; M_T = 6 ·10^{24} kg; R_T = 6400 km

4.- (Junio 2013) a) Explique qué es la velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describa una órbita circular alrededor de la Tierra.
b) Dos satélites A y B de distinta masa ($m_A > m_B$) describen órbitas circulares de idéntico radio alrededor de la Tierra. Razone la relación que guardan sus respectivas velocidades y sus energías potenciales.