Solucionario

Este solucionario permite al profesor/a la corrección de los ejercicios y problemas propuestos en el libro del alumno.

Es recomendable que los alumnos y alumnas lo utilicen como método de autoevaluación de los ejercicios y problemas que se plantean a lo largo del libro.

Para favorecer la autoevaluación, el profesor/a puede fotocopiar las páginas correspondientes del solucionario y proporcionarlas a los alumnos y alumnas.

1. Dinámica de traslación y de rotación

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 23)

- Las magnitudes vectoriales se diferencian de las escalares por tener una dirección y un sentido. Una magnitud escalar queda totalmente determinada si sabemos su valor numérico y las unidades, mientras que una magnitud vectorial, además de valor numérico y unidades, tiene una dirección y un sentido característicos, que la diferencian de otra magnitud vectorial con las mismas unidades y valor numérico pero con distinta dirección y/o sentido.

  Magnitudes escalares: temperatura, energía, potencia, masa, volumen.

  Magnitudes vectoriales: fuerza, campo eléctrico, campo magnético, peso, velocidad.

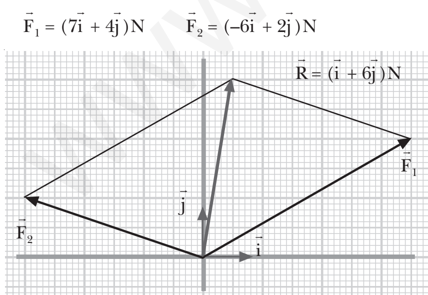
- *a)* $\dfrac{d(5t)}{dt} = 5$ *b)* $\dfrac{d(3t^2)}{dt} = 6t$ *c)* $\dfrac{d(2t^3)}{dt} = 6t^2$

  d) $\dfrac{d(3t^2 - 4t + 1)}{dt} = 6t - 4$ *e)* $\dfrac{d(t^3 + 8t^2 - 3)}{dt} = 3t^2 + 16t$

- Los sólidos rígidos pueden tener dos tipos de movimientos: de *traslación* y de *rotación* alrededor de un eje.

  En un movimiento de traslación todas las partículas del sólido efectúan el mismo desplazamiento.

  En un movimiento de rotación todas las partículas del sólido describen trayectorias circulares alrededor de un eje, excepto las situadas sobre el propio eje, que permanecen inmóviles.

- 

- Datos: R = 40 cm = 0,4 m; $\phi = 2\,t + 0{,}5\,t^2$ (SI)

  a) La velocidad angular corresponde a la derivada del ángulo respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 2 + t \quad \text{(SI)}$$

  La aceleración angular corresponde a la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

  b) La velocidad lineal se obtiene al multiplicar la velocidad angular por el radio:

$$v = \omega \cdot R = (2 + t) \cdot 0{,}4 = 0{,}8 + 0{,}4t \quad \text{(SI)}$$

  De la misma manera, obtenemos la aceleración tangencial como el producto del radio por la aceleración angular:

$$a_t = \alpha \cdot R = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}4\text{ m} = 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

  c) La aceleración normal será:

$$a_n = \omega^2\,R = (2 + t)^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4\,t^2 + 1{,}6\,t + 1{,}6 \quad \text{(SI)}$$

  Para t = 5 s, cada una de las componentes de la aceleración será:

$$a_t = 0{,}4\text{ m/s}^2$$
$$a_n = 0{,}4 \cdot 5^2 + 1{,}6 \cdot 5 + 1{,}6 = 19{,}6\text{ m/s}^2$$

  La aceleración total será la suma vectorial:

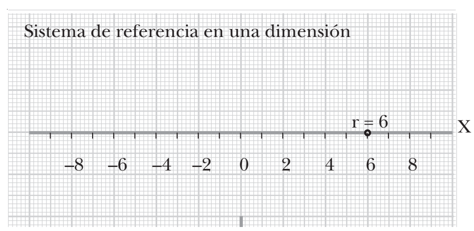
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$
$$\vec{a} = 0{,}4\,\vec{u}_t + 19{,}6\,\vec{u}_n \quad \text{(SI)}$$

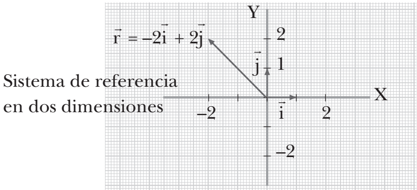
  Su módulo es:

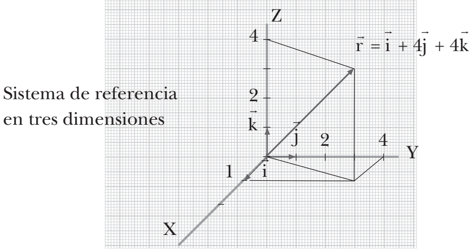
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} =$$
$$= \sqrt{(0{,}4\text{ m/s}^2)^2 + (19{,}6\text{ m/s}^2)^2} = 19{,}6\text{ m/s}^2$$

1. DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO
(págs. 25, 27, 29, 31 y 33)

1.







2. Datos: $\vec{r}(t) = (4t + 2)\ \vec{i} + (t^2 - 2t)\ \vec{j}$ (SI)

a) Obtendremos los vectores de posición sustituyendo el valor correspondiente del tiempo t en la expresión de $\vec{r}$ (t):

$$\vec{r}(1\,s) = (4 \cdot 1 + 2)\ \vec{i} + (1^2 - 2 \cdot 1)\ \vec{j} = (6\ \vec{i} - \vec{j})\ m$$

$$\vec{r}(3\,s) = (4 \cdot 3 + 2)\ \vec{i} + (3^2 - 2 \cdot 3)\ \vec{j}$$

$$\vec{r}(3\,s) = (14\ \vec{i} + 3\ \vec{j})\ m$$

b) Para encontrar el vector desplazamiento entre los dos instantes restamos los vectores de posición correspondientes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(3\,s) - \vec{r}(1\,s)$$

$$\Delta\vec{r} = (14\,\vec{i} + 3\vec{j})\,m - (6\,\vec{i} - \vec{j})\,m = (8\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m$$

El módulo del vector desplazamiento será:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(8\,m)^2 + (4\,m^2)} = 8{,}9\ m$$

c) Para encontrar la ecuación de la trayectoria, escribimos primero las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

Despejando *t* en la primera ecuación e introduciendo su expresión en la segunda ecuación paramétrica, obtendremos la ecuación de la trayectoria:

$$t = \frac{x-2}{4}$$

$$y = \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{x-2}{4}\right)$$

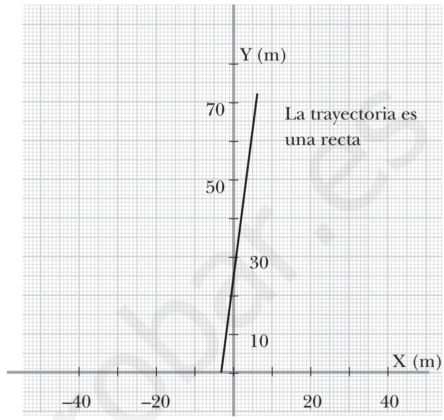
$$y = \frac{(x^2 - 12x + 20)}{16}$$

La trayectoria es una parábola.

3. Datos: $\vec{r}(t) = (t - 3)\ \vec{i} + 8t\ \vec{j}$, en unidades SI

a) Obtenemos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 8t \end{cases} \qquad \begin{aligned} &t = x + 3 \\ &y = 8\ (x + 3) = 8x + 24 \end{aligned}$$



b) Determinamos los vectores de posición en los instantes t = 2 s y t = 5 s sustituyendo estos valores del tiempo en la expresión de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(2\,s) = (2 - 3)\ \vec{i} + 8 \cdot 2\ \vec{j} = (-\ \vec{i} + 16\ \vec{j})\ m$$

$$\vec{r}(5\,s) = (5 - 3)\ \vec{i} + 8 \cdot 5\ \vec{j} = (2\ \vec{i} + 40\ \vec{j})\ m$$

c) Calculamos el vector desplazamiento entre los dos instantes restando los vectores de posición correspondientes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(5\,s) - \vec{r}(2\,s)$$

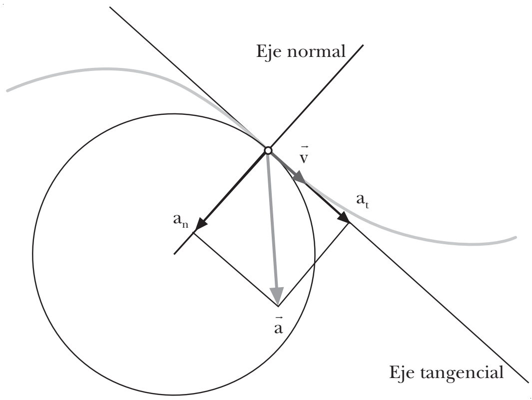
$$\Delta\vec{r} = (2\,\vec{i} + 40\,\vec{j})m - (-\,\vec{i} + 16\,\vec{j})m = (3\,\vec{i} + 24\,\vec{j})m$$

d) La distancia recorrida por el móvil coincidirá con el módulo del vector desplazamiento porque se trata de una trayectoria rectilínea.

$$\Delta s = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(3\,m)^2 + (24\,m)^2} = 24{,}2\ m$$

4. La celeridad es el módulo del vector velocidad. A diferencia de la velocidad, que es un vector, la celeridad es un escalar. Por lo tanto, la celeridad carece de dirección y sentido.

5. El vector velocidad no se puede descomponer en una componente tangencial y otra componente normal como la aceleración. El eje tangencial está sobre la recta tangente a la trayectoria, mientras que el eje normal se define como el eje perpendicular a la trayectoria en cada punto. La velocidad es siempre tangente a la trayectoria, de forma que su componente normal será siempre nula. En cambio, la componente tangencial coincide con el módulo del vector velocidad.



6. Datos: $\vec{r}(t) = 2t^3\ \vec{i} + t^2\ \vec{j}$, en unidades SI

   a) Obtendremos la velocidad media calculando el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo. Encontraremos el vector desplazamiento entre los dos instantes restando los vectores de posición correspondientes:

$$\vec{r}(0\ s) = 2 \cdot 0^3\ \vec{i} + 0^2\ \vec{j} = 0\ m$$
$$\vec{r}(3\ s) = 2 \cdot 3^3\ \vec{i} + 3^2\ \vec{j} = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ m$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}\ (3\ s) - \vec{r}\ (0\ s)$$
$$\Delta\vec{r} = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ m - 0\ m = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ m$$

   Aplicando la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\vec{r}(3\ s) - \vec{r}(0\ s)}{3\ s - 0\ s} = (18\ \vec{i} + 3\ \vec{j})\ \ (SI)$$

   b) Obtenemos la velocidad instantánea derivando el vector de posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\ \vec{r}\ (t)}{dt} = (6\ t^2\ \vec{i} + 2t\ \vec{j}\ )\ \ (SI)$$

   c) Hallamos la aceleración media calculando el cociente entre la diferencia de los vectores velocidad, en los dos instantes, y el intervalo de tiempo. Los vectores velocidad en los instantes t = 3 s y t = 0 s se obtienen sustituyendo el tiempo t correspondiente en la expresión de la velocidad instantánea obtenida en el apartado anterior:

$$\vec{v}(0\ s) = 6 \cdot 0^2\ \vec{i} + 2 \cdot 0\ \vec{j} = 0\ m/s$$
$$\vec{v}(3\ s) = 6 \cdot 3^2\ \vec{i} + 2 \cdot 3\ \vec{j} = (54\ \vec{i} + 6\ \vec{j})\ m/s$$

   Aplicando la definición de aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\vec{v}(3\ s) - \vec{v}(0\ s)}{3\ s - 0\ s} = (18\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \frac{m}{s^2}$$

   d) La aceleración instantánea se obtiene derivando el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a}\ (t) = \frac{d\vec{v}\ (t)}{dt} = (12\ t\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \ (SI)$$

   e) Hallamos la velocidad y la aceleración en el instante t = 1 s sustituyendo este valor del tiempo en las expresiones de la velocidad y la aceleración instantáneas:

$$\vec{v}(1\ s) = 6 \cdot 1^2\ \vec{i} + 2 \cdot 1\ \vec{j} = \ (6\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ m/s$$
$$\vec{a}(1\ s) = 12 \cdot 1\ \vec{i} + 2\ \vec{j} = (12\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ m/s^2$$

7. Datos: $\vec{v}(t) = 3t\ \vec{i} + t\ \vec{j}$, en unidades SI

   a) La aceleración instantánea se obtiene derivando el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (3\ \vec{i} + \vec{j})\ \frac{m}{s^2}$$

   El vector aceleración instantánea no depende del tiempo, es constante. Por tanto, en el instante t = 2 s la aceleración será la misma que en cualquier otro instante:

$$\vec{a}(2\ s) = (3\ \vec{i} + \vec{j})\ m/s^2$$

   Su módulo también será constante:

$$|\vec{a}\ (2\ s)| = |\vec{a}| = \sqrt{(3\ m/s^2)^2 + (1\ m/s^2)^2} = \sqrt{10}\ m/s^2$$

   b) La componente tangencial de la aceleración es la derivada del módulo de la velocidad. El módulo de la velocidad en un instante t será:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(3\ t)^2 + t^2} = \sqrt{10}\ t$$

   y su derivada:

$$\vec{a}\ (t) = \frac{d\,|\vec{v}(t)|}{dt} = \sqrt{10}\ \frac{m}{s^2}$$

   La aceleración tangencial no depende del tiempo en este caso. Por tanto, en t = 2 s su valor será $\sqrt{10}\ m/s^2$.

   Además, coincide con el módulo de la aceleración total, de donde se deduce que la componente normal es nula.

   Otra forma de ver que la componente normal es cero consiste en obtener la ecuación de la posición integrando la ecuación de la velocidad:

$$\vec{r}\ (t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\ dt$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (3t\ \vec{i} + t\ \vec{j})\ dt = \frac{3}{2}t^2\ \vec{i} + \frac{1}{2}t^2\ \vec{j}$$

   Entonces se puede obtener la ecuación de la trayectoria:

$$\begin{cases} x - x_0 = \dfrac{3}{2}t^2 \\ y - y_0 = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad t^2 = \frac{2}{3}\left(x - x_0\right); \quad y - y_0 = \frac{x - x_0}{3}$$

   La trayectoria es una recta. Por lo tanto, la aceleración normal será cero.

8. Datos: $\vec{a} = 3t\ \vec{i}\ \ (SI);\ \ \vec{v}_0 = 0{,}5\ \vec{i}\ m/s\ ;\ \vec{r}_0 = 4\ \vec{i}\ m$

La ecuación de la velocidad se obtiene integrando la ecuación de la aceleración. En este caso, sólo hay una componente:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v}(t) = 0{,}5\vec{i} + \int_0^t 3t\,\vec{i}\,dt = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} \ \text{(SI)}$$

La ecuación de la posición se obtiene integrando la ecuación de la velocidad anterior:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t v\,(t)\,dt = 4\vec{i} + \int_0^t \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i}\,dt$$

$$\vec{r}(t) = \left(4 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^3\right)\vec{i} \ \text{(SI)}$$

Las ecuaciones de la velocidad y de la posición en función del tiempo son:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right)\vec{i} \ \text{(SI)}$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t + 4\right)\vec{i} \ \text{(SI)}$$

9. Datos: $a = 3\ m/s^2$; $t_1 = 25\ s$; $t_2 - t_1 = 1\ min = 60\ s$;

$x_0 = 0\ m$; $v_0 = 0\ m/s$; $t_0 = 0\ s$

Primera etapa: MRUA. Calculamos la posición y la velocidad al final de esta etapa:

$$x_1 = x_0 + v_0\,(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t_1 - t_0)^2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\,3\,\frac{m}{s^2}\,(25\ s)^2 = 937{,}5\ m$$

$$v_1 = v_0 + a\,(t_1 - t_0) = 3\ m{\cdot}s^{-2} \cdot 25\ s = 75\ m/s$$

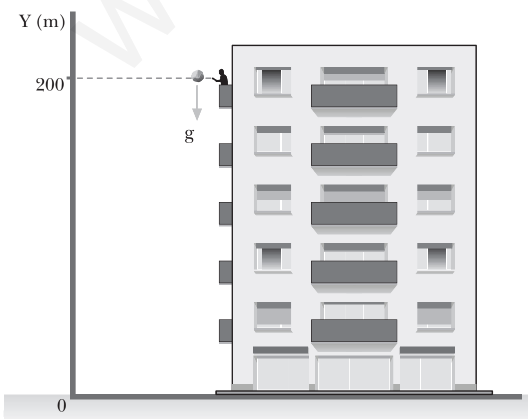
Segunda etapa: MRU. Calculamos la posición final de la moto, que coincide con la distancia total recorrida, ya que la posición inicial era $x_0 = 0$:

$$x_2 = x_1 + v_1\,(t_2 - t_1) = 937{,}5\ m + 75\ m{\cdot}s^{-1} \cdot (60\ s)$$

$$x_2 = 5\ 437{,}5\ m$$

La distancia total recorrida es de 5 437,5 m.

10. Datos:



Las ecuaciones del movimiento de la bola son:

$$y = y_0 + v_0\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g\,(t - t_0)^2$$

$$y = 200\ m - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$v = v_0 - g\,(t - t_0);\ v = -\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t$$

a) La bola llegará al suelo cuando la altura y sea cero. Encontraremos el tiempo de vuelo de la bola imponiendo esta condición en su ecuación de la posición:

$$0 = 200\ m - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

La solución positiva de esta ecuación da un tiempo de $t = 6{,}4\ s$.

b) La velocidad con la que llega la bola al suelo se obtiene sustituyendo el tiempo de vuelo que acabamos de encontrar en la ecuación de la velocidad:

$$v(6{,}4\ s) = -\,9{,}8\ m{\cdot}s^{-2} \cdot 6{,}4\ s = -\,62{,}7\ m/s$$

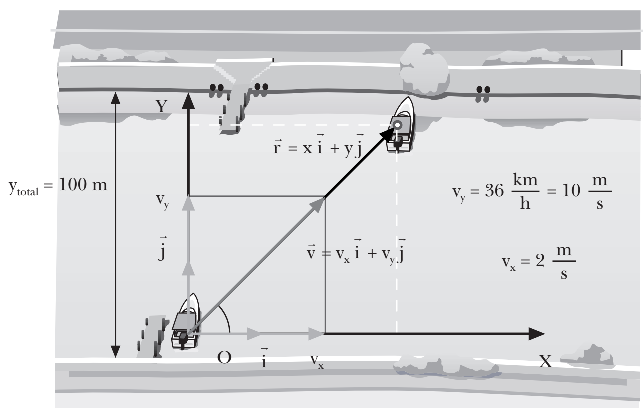
La bola llega al suelo con una velocidad de 62,7 m/s. El signo negativo indica que la bola se mueve hacia abajo.

c) A los dos segundos de dejar caer la bola, su velocidad viene dada por la misma ecuación con $t = 2\ s$:

$$v(2\ s) = -\,9{,}8\ m{\cdot}s^{-2} \cdot 2\ s = -\,19{,}6\ m/s$$

La bola se mueve con una velocidad de 19,6 m/s dirigida hacia abajo.

11. Datos:



Tomamos $x = 0$ e $y = 0$ en el punto de partida de la barca. Teniendo en cuenta que:

$$36\,\frac{km}{h} = 36\,\frac{km}{h} \cdot \frac{1\ h}{3\ 600\ s} \cdot \frac{1\ 000\ m}{1\ km} = 10\,\frac{m}{s}$$

las ecuaciones de movimiento de la barca serán:

$$x = x_0 + v_x\,(t - t_0) = v_x\,t = 2\,\frac{m}{s}\,t$$

$$y = y_0 + v_y\ (t - t_0) = v_y\ t = 10\ \frac{m}{s}\ t$$

a) La barca habrá cruzado el río cuando llegue a la otra orilla. En esa posición, $y = y_{total} = 100$ m. Hallamos el tiempo empleado en cruzar el río imponiendo esta condición en la ecuación de y:

$$y = v_y\ t;\ t = \frac{y}{v_y} = \frac{100\ m}{10\ m/s} = 10\ s$$

b) La componente y del desplazamiento es la anchura del río, y = 100 m. Calculamos la componente x:

$$x = v_x\ t = 2\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 10\ s = 20\ m$$

Por tanto, la distancia recorrida será:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20\ m)^2 + (100\ m)^2} = 102{,}0\ m$$

c) Para determinar la ecuación de la trayectoria, despejamos el tiempo de la coordenada x y lo sustituimos en la ecuación de la coordenada y:

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = 10\,t \end{cases} \qquad t = \frac{x}{2}\,; \qquad y = 10\ \frac{x}{2} = 5x$$

12. Datos: $y_0 = 200$ m; $v_0 = 50$ m/s; $\alpha = 45°$

Calculamos las componentes de la velocidad inicial:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 50\ \frac{m}{s} \cos 45° = 35{,}4\ \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0\ \text{sen}\ \alpha = 50\ \frac{m}{s}\ \text{sen}\ 45° = 35{,}4\ \frac{m}{s}$$

Las ecuaciones del movimiento del proyectil, escritas por componentes, serán:

$$x = x_0 + v_{0x}\ (t) = 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t;\ y = y_0 + v_{0y}\ (t) - \frac{1}{2}\ g\ (t)^2$$

$$x = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t - \frac{1}{2}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

$$v_x = v_{0x} = 35{,}4\ m{\cdot}s^{-1}$$

$$v_y = v_{0y} - g\ (t);\ v_y = 35{,}4\ \frac{m}{s} - 9{,}8\ \frac{m}{s}\ t$$

a) El proyectil alcanza la altura máxima en el punto donde $v_y = 0$. Buscamos el instante en que esto se produce:

$$v_y = v_{0y} - g\ t$$

$$t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{35{,}4\ m/s - 0\ m/s}{9{,}8\ m/s^2} = 3{,}6\ s$$

La altura en este instante es:

$$y = y_0 + v_{0y}\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$y = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s} \cdot 3{,}6\ s - \frac{1}{2}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \cdot (3{,}6\ s)^2$$

$$y = 263{,}8\ m$$

b) La velocidad en este punto sólo tiene componente horizontal, v_x, porque $v_y = 0$. Entonces:

$$v = v_x = 35{,}4\ m/s$$

c) Para hallar el alcance necesitamos determinar el instante en que el proyectil llega al suelo. Lo obtenemos imponiendo y = 0:

$$0 = y_0 + v_{0y}\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$0 = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t - \frac{1}{2}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

$$4{,}9\ t^2 - 35{,}4\ t - 200 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación de segundo grado es t = 10,9 s.

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de la coordenada x, hallamos el alcance:

$$x = v_{0x}\ t = 35{,}4\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 10{,}9\ s = 387{,}2\ m$$

13. Datos: R = 30 cm = 0,3 m; ω = 10 rpm ;

t = 2 min = 120 s

a) Expresamos la velocidad angular de 10 rpm en rad/s:

$$10\ \text{rpm} = 10\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\,\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = \frac{\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Los puntos de la periferia se encuentran a una distancia del centro igual al radio de la rueda. Su velocidad lineal será:

$$v = \omega\ R = \frac{1}{3}\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}3\ m = 0{,}1\ \pi\ \frac{m}{s} = 0{,}31\ \frac{m}{s}$$

Los puntos situados a 10 cm del eje giran con un radio R = 10 cm = 0,1 m. Por tanto:

$$v = \omega\ R = \frac{1}{3}\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}1\ m = 0{,}03\ \pi\ \frac{m}{s} = 0{,}10\ \frac{m}{s}$$

c) Calculamos el ángulo descrito en 2 min:

$$\varphi = \omega\ t = \frac{1}{3}\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 120\ s = 40\ \pi\ rad$$

Pasamos este ángulo de radianes a revoluciones (o vueltas):

$$40\ \pi\ \text{rad}\ \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{rad}} = 20\ \text{vueltas}$$

d) La componente tangencial de la aceleración es nula, ya que se trata de un MCU.

La aceleración normal de los puntos de la periferia es:

$$a_n = \omega^2\ R = \left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0{,}3\ m = 0{,}33\ \frac{m}{s^2}$$

14. Datos: R = 25 cm = 0,25 m; ω_o = 0,5 rev/s; t = 40 s

a) Expresamos la velocidad angular inicial en rad/s:

$$\omega_0 = 0{,}5\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} = 0{,}5\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Calculamos la aceleración angular a partir de la ecuación de la velocidad angular y sabiendo que será cero en t = 40 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\ t\ ;\ 0\ \pi\ \text{rad/s} + \alpha \cdot 40\ \text{s}$$

$$\alpha = -\frac{\pi\ \text{rad/s}}{40\,\text{s}} = -\frac{\pi}{40}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Utilizamos la ecuación del movimiento para determinar el ángulo girado en 40 s:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_o\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ \alpha\ (t - t_0)^2$$

$$\varphi = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 40\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{40}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (40\ \text{s})^2 = 20\ \pi\ \text{rad}$$

Pasamos este ángulo de radianes a revoluciones (o vueltas):

$$20\ \pi\ \text{rad}\ \frac{1\,\text{vuelta}}{2\,\pi\ \text{rad}} = 10\ \text{vueltas}$$

c) Cuando la rueda comienza a frenar, la velocidad angular es la inicial, ω_0. La componente normal de la aceleración para un punto de la periferia será:

$$a_n = \omega_0^2\ R = (\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot 0{,}25\ \text{m} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

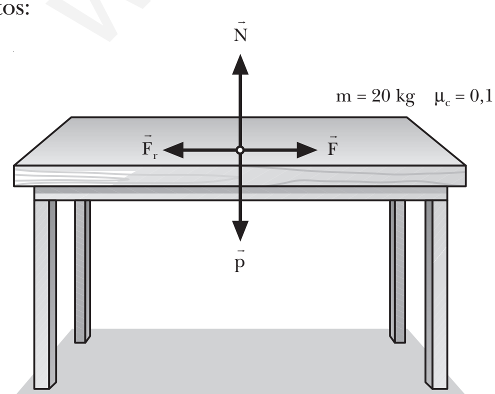
La aceleración tangencial será:

$$a_t = \alpha\ R = -\frac{\pi}{40}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}25\ \text{m} = -\ 0{,}02\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2. CAUSAS DEL MOVIMIENTO (págs. 35, 37 y 39)

15. Si dejamos caer una piedra desde cierta altura, la Tierra ejerce sobre ella una fuerza: la fuerza de la gravedad. Como esta fuerza no se ve compensada, la fuerza resultante sobre la piedra no es nula. Como resultado, y tal como indica la segunda ley de Newton, la piedra adquiere una aceleración proporcional a la fuerza que actúa sobre ella.

16. Datos:



Para que se mueva con velocidad constante, es necesario que la fuerza resultante sea cero:

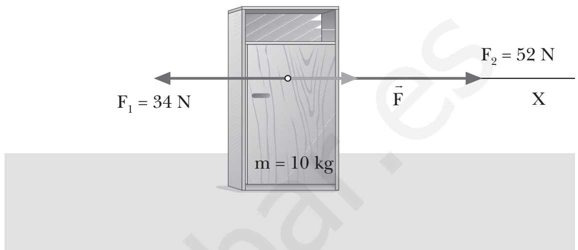
$$R = F - F_r = 0 \Rightarrow F = F_r$$

La fuerza que debemos aplicar será igual a la fuerza de rozamiento:

$$F = F_r = \mu_c\ N = \mu_c\ p = \mu_c\ m\ g$$

$$F = 0{,}1 \cdot 20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 19{,}6\ \text{N}$$

17. Datos:



Calculamos la fuerza resultante:

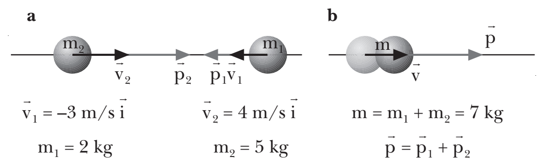
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\ 34\ \text{N}\ \vec{i} + 52\ \text{N}\ \vec{i}$$

$$F = 52\ \text{N} - 34\ \text{N} = 18\ \text{N}$$

Hallamos la aceleración que adquiere el cuerpo con esta fuerza resultante:

$$F = m\ a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{18\ \text{N}}{10\ \text{kg}} = 1{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

18. Datos:



La fuerza resultante sobre el sistema es nula. Por tanto, se conservará la cantidad de movimiento. Calculamos primero la cantidad de movimiento inicial del sistema:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_1 = m_1\ \vec{v}_1 = 2\ \text{kg} \cdot (-3)\ \text{m/s}\ \vec{i} = -\ 6\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\ \vec{v}_2 = 5\ \text{kg} \cdot 4\ \text{m/s}\ \vec{i} = 20\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -\ 6\ \text{kg·m/s}\ \vec{i} + 20\ \text{kg·m/s}\ \vec{i} = 14\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

Si cuando las dos bolas chocan quedan unidas, su masa final será:

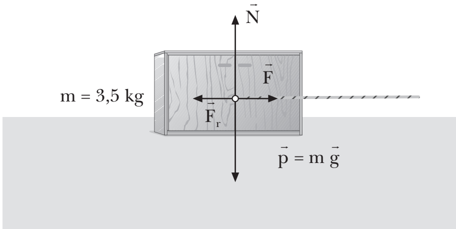
$$m = m_1 + m_2 = 2\ \text{kg} + 5\ \text{kg} = 7\ \text{kg}$$

Por tanto, la velocidad del sistema después del choque será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{14\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}}{7\ \text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ \vec{i}$$

19. Datos: m = 3,5 kg; T = 6 N

a)



b) Para que la velocidad sea constante, es necesario que la fuerza resultante sea nula:

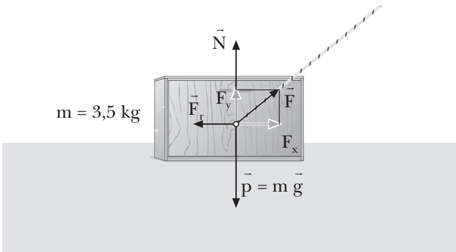
$$R = F - F_r = 0 \Rightarrow F_r = F = 6\text{ N}$$

A partir de la fuerza de rozamiento, calculamos el coeficiente cinético de rozamiento:

$$F_r = \mu_c\, N = \mu_c\, p = \mu_c\, m\, g$$

$$\mu_c = \frac{F_r}{m\, g} = \frac{6\text{ N}}{3{,}5\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m}{\cdot}\text{s}^2} = 0{,}17$$

c)



Si la cuerda se inclina 45°, la fuerza se podrá descomponer en dos componentes y aparecerá una nueva componente vertical que antes no existía:

— Componente horizontal: $F_x = F \cos 45^o = 4{,}2$ N

— Componente vertical: $F_y = F \text{ sen } 45^o = 4{,}4$ N

Como la componente vertical es menor que el peso, el bloque sólo puede moverse horizontalmente:

$$p = m\,g = 3{,}5\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 34{,}3\text{ N} > F_y = 4{,}2\text{ N}$$

Pero a causa de esta nueva componente vertical, la fuerza normal es menor que en el caso anterior. Teniendo en cuenta que el bloque no se mueve verticalmente y que, por tanto, la resultante en el eje vertical es cero:

$$R_y = N + F_y - p = 0 \Rightarrow N = p - F_y = 30{,}1\text{ N}$$

Entonces, la fuerza de rozamiento será más pequeña que con la cuerda horizontal:

$$F_r = \mu_c\, N = 0{,}17 \cdot 30{,}1\text{ N} = 5{,}1\text{ N} < 6\text{ N}$$

Pero ahora la componente horizontal de la fuerza ejercida por la cuerda, F_x, también es menor que en los apartados anteriores. Además, F_x es más pequeña que la fuerza de rozamiento:

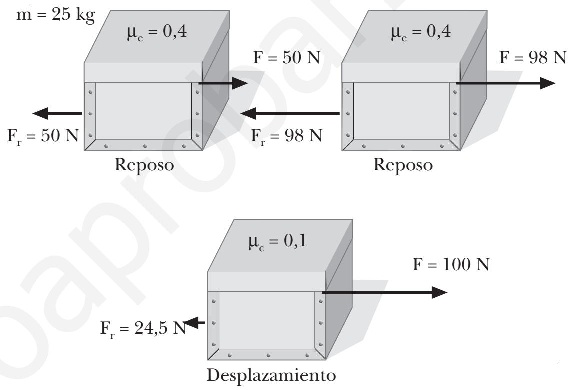
$$F_x = 4{,}2\text{ N} < 5{,}1\text{ N} = F_r$$

Por lo tanto, si el bloque parte del reposo, no se moverá. Si, en cambio, inclinamos la cuerda cuando el bloque ya se estaba moviendo, éste se moverá con movimiento rectilíneo desacelerado, con aceleración:

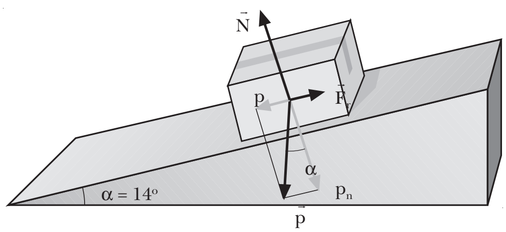
$$a = \frac{R}{m} = \frac{F_x - F_r}{m} = \frac{4{,}2\text{ N} - 5{,}1\text{ N}}{3{,}5\text{ kg}} = -0{,}26\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

20. No, no siempre es cierto. El valor μ_e N indica la fuerza de rozamiento estática máxima entre un cuerpo y una superficie. Superado este valor, el cuerpo comienza a deslizarse, pero mientras el cuerpo está en reposo la fuerza de rozamiento no tiene por qué alcanzar este valor máximo. En general, su módulo tiene exactamente el mismo valor que la compomente tangencial de la fuerza aplicada.

Ejemplo:



21. Si la caja baja a velocidad constante, la aceleración es nula y sabemos que la fuerza resultante es cero.



Eje tangencial: $p_t - F_r = m\,a = 0 \Rightarrow p_t = F_r$
$m\,g \text{ sen } \alpha = \mu_c\, N$

Eje normal: $N - p_n = 0 \Rightarrow N = p_n = p \cos \alpha$

$N = m\,g \cos \alpha$

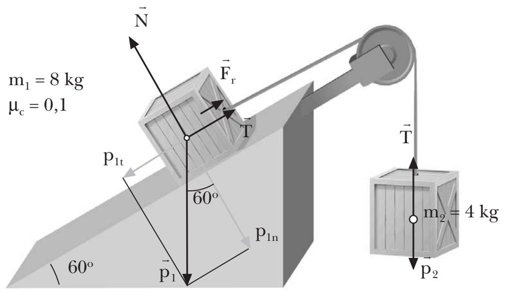
Sustituyendo esta expresión de N en la ecuación del eje tangencial:

$$m\,g \text{ sen } \alpha = \mu_c\, m\,g \cos \alpha$$

$$\mu_c = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha = 0{,}25$$

22. Supondremos que el sistema se mueve hacia la izquierda. Es decir, que el cuerpo 1 desciende por el plano, mientras el cuerpo 2 asciende. Si la aceleración resultante fuera negativa, deberíamos repetir el problema cambiando el sentido del movimiento.

Representamos todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo y calculamos la aceleración:



Cuerpo 1: $p_{1t} - F_r - T = m_1\, a$

Cuerpo 2: $T - p_2 = m_2\, a$

Sumando las dos ecuaciones:

$$p_{1t} - F_r - p_2 = (m_1 + m_2)\, a$$

$$a = \frac{p_{1t} - F_r - p_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\, g \operatorname{sen}\alpha - \mu_c\, m_1\, g \cos\alpha - m_2\, g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{8 \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 60° - 0{,}1 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 60° - 4 \cdot 9{,}8}{8 + 4}$$

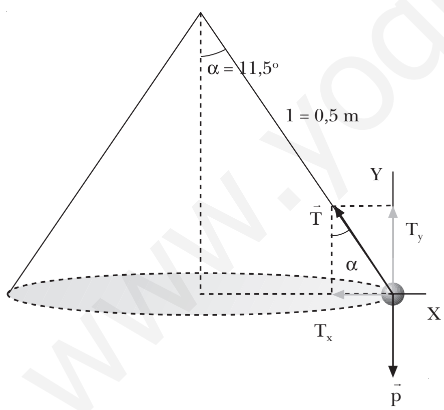
$$a = 2{,}1 \text{ m/s}^2$$

Despejamos la tensión de la ecuación del cuerpo 2:

$$T = m_2 a + p_2 = m_2\, a + m_2\, g = m_2\, (a + g)$$

$$T = 4 \text{ kg} \cdot (2{,}1 \text{ m/s}^2 + 9{,}8 \text{ m/s}^2) = 47{,}6 \text{ N}$$

23. Datos:



Aplicamos la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta que la fuerza resultante en la dirección radial tiene que ser la fuerza centrípeta:

Eje X: $T_x = F_c\,;\ \ T \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{m\, v^2}{R}$

Eje Y: $T_y = p\,;\ \ T \cos\alpha = m\, g$

Despejamos la tensión de la segunda ecuación:

$$T = \frac{m\, g}{\cos\alpha}$$

y la sustituimos en la primera:

$$\frac{m\, g}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha = \frac{m\, v^2}{R}$$

$$m\, g\, \operatorname{tg}\alpha = m\, \frac{v^2}{R}$$

Despejamos la velocidad:

$$v = \sqrt{g\, R\, \operatorname{tg}\alpha}$$

Teniendo en cuenta que $R = l \operatorname{sen}\alpha$:

$$v = \sqrt{g\, R\, \operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{g\, l \operatorname{sen}\alpha\, \operatorname{tg}\alpha}$$

Sustituyendo los valores del problema,

$$v = \sqrt{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}5 \text{ m} \cdot \operatorname{sen} 11{,}5° \cdot \operatorname{tg} 11{,}5°} = 0{,}45 \text{ m/s}$$

24. Una bola que gira verticalmente atada a una cuerda no cae en el punto más alto porque la fuerza del peso se emplea en cambiar la dirección del movimiento de la bola y no en hacerla caer al suelo. Si no actuara sobre la bola ninguna fuerza, ésta no seguiría una trayectoria circular, sino recta. La fuerza del peso de la bola contribuye, junto con la tensión de la cuerda, a aportar la fuerza centrípeta necesaria para que la bola lleve a cabo un movimiento circular.

25. Datos: m = 150 g = 0,15 kg; R = 80 cm = 0,8 m; $T_{max} = 10$ N

a) La cuerda se romperá en el punto inferior de la trayectoria. En este punto la fuerza centrípeta es igual a la tensión de la cuerda menos el peso de la piedra.

$$T_{max} - p = \frac{m\, v^2}{R};\ \ v = \sqrt{\frac{R\left(T_{max} - m\, g\right)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}8 \text{ m}\left(10 \text{ N} - 0{,}15 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2\right)}{0{,}15 \text{ kg}}} = 6{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La cuerda se romperá donde la tensión es máxima. Esto sucede en el punto inferior de la trayectoria, donde la fuerza del peso actúa en sentido contrario a la tensión.

3. MOVIMIENTO DE ROTACIÓN (págs. 40, 42, 44 y 46)

26. Un cuerpo sometido a una fuerza resultante nula y a un momento no nulo tendrá un movimiento de rotación debido al momento. Si inicialmente estaba en reposo, no se trasladará. Si, en cambio, inicialmente estaba en traslación, seguirá moviéndose con velocidad constante y en trayectoria rectilínea.

Si está sometido a una fuerza resultante no nula, tendrá un movimiento de traslación acelerado. Además, si el momento no es nulo, tendrá un movimiento de rotación.

27. Datos: $\vec{F} = (3, 5, 1)$ N; $\vec{r} = (1, 2, 1)$ m

Calculamos el momento de la fuerza como el producto vectorial de $\vec{r}$ con la fuerza $\vec{F}$:

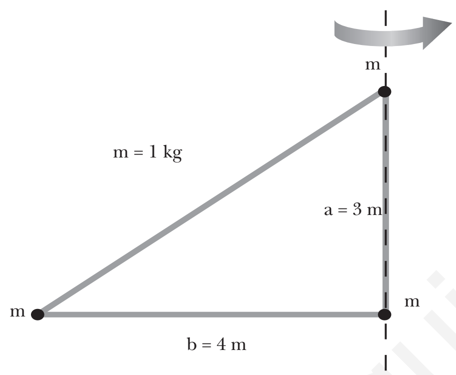
$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} = \left(1,2,1\right) \text{m x} \left(3,5,1\right) \text{N}$$

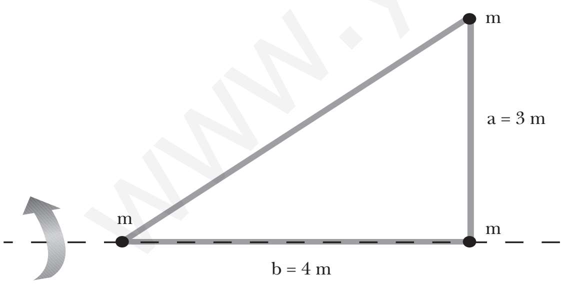
$$\vec{M} = \left[\left(\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}\right) \text{x} \left(3\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + \vec{k}\right)\right] \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M} = \left(-3\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}\right) \text{N} \cdot \text{m}$$

28. El momento de inercia I_i de una partícula, definido como $I_i = m_i\, r_i^2$, depende del eje respecto al cual lo calculemos, ya que variará la distancia r_i de la partícula al eje. Del mismo modo, el momento de inercia de un sistema discreto de partículas depende del eje que escojamos, pues cambiarán las distancias r_i de todas las partículas.

29. Datos: $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1$ kg; a = 3 m; b = 4 m





Calculamos el momento de inercia a partir de su definición. Teniendo en cuenta que dos de las masas están sobre el eje de rotación, sólo contribuirá al momento de inercia la tercera masa.

— Si gira en torno al primer cateto (a): $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = b = 4$ m

$$I_a = \sum_i m_i\, r_i^2 = mb^2 = 1\,\text{kg} \cdot (4\,\text{m})^2 = 16\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

— Si gira en torno al segundo cateto (b):

$r_1 = a = 3$ m, $r_2 = r_3 = 0$

$$I_b = \sum_i m_i\, r_i^2 = ma^2 = 1\,\text{kg} \cdot (3\,\text{m})^2 = 9\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

30. Datos: m = 1kg; R = 0,25 m

Cilindro. Utilizaremos la expresión del momento de inercia para un cilindro macizo que aparece en la página 53 del libro del alumno:

$$I = \frac{1}{2} m\, R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{kg} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 0{,}031\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Esfera. Aplicamos la fórmula correspondiente a la esfera maciza que aparece en la página 53 del libro del alumno.

$$I = \frac{2}{5} m\, R^2 = \frac{2}{5} \cdot 1\,\text{kg} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 0{,}025\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

31. Para comprobar que al dividir las unidades del momento de la fuerza entre las del momento de inercia se obtienen las de la aceleración angular, es necesario tener presente que las unidades de fuerza, los newton (N), son equivalentes a kg·m·s^{-2}. Entonces:

$$\frac{\left[\vec{M}\right]}{\left[I\right]} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \text{s}^{-2} = \left[\alpha\right]$$

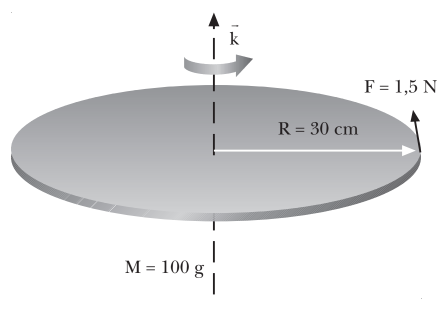
32. La aceleración angular se relaciona con el momento resultante sobre el cuerpo mediante la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

Por su definición, el momento de inercia es siempre positivo. Por tanto, la aceleración angular tendrá siempre la misma dirección y sentido que el momento resultante.

Nota para el profesor/a: en la página 44 del libro del alumno se aclara que esta ecuación sólo es realmente válida si el eje de rotación es un eje de simetría del cuerpo que permanece fijo o siempre paralelo a sí mismo.

33. Datos:



Calculamos primero el momento de inercia y el momento de la fuerza, para aplicar después la ecuación fundamental de la dinámica de traslación.

Aplicamos la fórmula de la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \text{ kg} \cdot (0{,}3 \text{ m})^2 = 0{,}0045 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular el momento de la fuerza, tenemos en cuenta que $\vec{F}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left|\vec{M}\right| = F \cdot R = 1{,}5 \text{ N} \cdot 0{,}3 \text{ m}$$

$$\left|\vec{M}\right| = 0{,}45 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \vec{M} = 0{,}45\, \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

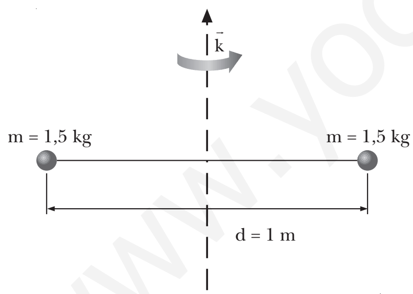
Aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}, \; \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{0{,}45\,\vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}}{0{,}0045 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 100\,\vec{k} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

34. Si el eje de rotación es fijo, todas las partículas del sólido rígido giran con velocidad angular de la misma dirección y sentido. Lo que variará entre una partícula y otra será el momento de inercia. Pero como éste es un escalar, el momento angular y la velocidad angular de cada partícula son paralelos y del mismo sentido. Si todas las partículas tienen velocidades angulares de la misma dirección y sentido, todos los momentos angulares serán paralelos.

35. Datos: $m_1 = m_2 = 1{,}5$ kg; d = 1m; ω = 4 rev/s



Escribimos primero la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 4 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculamos el momento de inercia del sistema. La distancia de cada masa al eje de giro será $r = \dfrac{d}{2} = 0{,}5$ m. Por tanto:

$$I = \sum m_i \, r_i^2 = 2 \cdot 1{,}5 \text{ kg} \cdot (0{,}5 \text{ m})^2 = 0{,}75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Entonces, el momento angular será:

$$L = I\,\omega = 0{,}75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 8\pi \text{ rad/s} = 6\pi \text{ kg}{\cdot}\text{m}^2/\text{s}$$

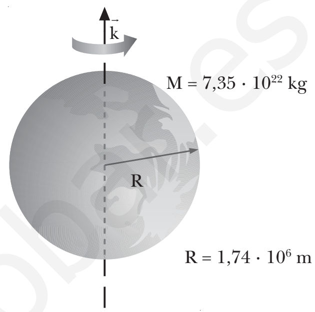
Tenemos en cuenta la orientación de los ejes para escribir el vector:

$$\vec{L} = 6\pi\,\vec{k} \text{ kg}{\cdot}\text{m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

36. Datos: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

ω = 1 rev cada 28 días.



Expresamos la velocidad angular en el SI:

$$\omega = \frac{1 \text{ vuelta}}{28 \text{ d}} \cdot \frac{1 \text{ d}}{24 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 2{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hallamos el momento de inercia a partir de la expresión para una esfera maciza de la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot (1{,}74 \cdot 10^6 \text{ m})^2$$

$$I = 8{,}9 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Calculamos el momento angular:

$$L = I\omega = 8{,}9 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

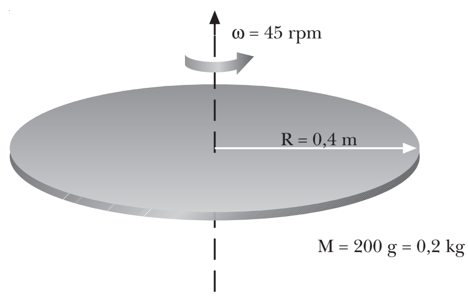
$$L = 2{,}31 \cdot 10^{29} \text{ kg}{\cdot}\text{m}^2/\text{s}$$

Tenemos en cuenta la orientación de los ejes y que gira hacia el Este:

$$\vec{L} = 2{,}31 \cdot 10^{29}\,\vec{k} \text{ kg}{\cdot}\text{m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

37. Datos:



Expresamos primero la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 45\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = 1{,}5\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Aplicamos la fórmula de la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2\ \text{kg}\ (0{,}4\ \text{m})^2 = 0{,}016\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Calculamos el momento angular:

$$L = I\omega = 0{,}016\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 1{,}5\pi\ \text{rad/s} = 0{,}024\pi\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Teniendo en cuenta la orientación de los ejes y el sentido de giro indicado en la figura, escribimos el momento angular en forma vectorial:

$$L = 0{,}024\pi \vec{k}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

38. Si una persona situada sobre una plataforma circular en rotación se desplaza hacia su centro, la distancia de la persona al eje disminuirá. Por tanto, su momento de inercia también será menor. Por la conservación del momento angular, la velocidad angular de la plataforma aumentará y girará más rápido.

39. Datos: R_1 = 30 cm = 0,3 m; M_1 = 0,4 kg; ω_0 = 3 rev/s; R_2 = 20 cm = 0,2 m; M_2 = 0,2 kg

Aplicamos la expresión que aparece en la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo.

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1\ R_1{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4\ \text{kg} \cdot (0{,}3\ \text{m})^2 = 0{,}018\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_2\ R_2{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2\ \text{kg} \cdot (0{,}2\ \text{m})^2 = 0{,}004\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Expresamos la velocidad angular inicial del primer disco en unidades del SI:

$$\omega_0 = 3\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = 6\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Inicialmente, todo el momento angular del sistema es debido al primer disco:

$$L_0 = L_1 = I_1\ \omega_0$$
$$L_0 = 0{,}018\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 6\pi\ \text{rad/s} = 0{,}108\pi\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Al final, cuando los dos discos giran unidos, el momento de inercia será la suma de los dos, y por tanto, su momento angular:

$$L = (I_1 + I_2)\ \omega$$

Aplicamos ahora la conservación del momento angular para hallar la velocidad angular final:

$$L = L_0; \quad \omega = \frac{L_0}{I_1 + I_2}$$

$$\omega = \frac{0{,}108\pi\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{0{,}018\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}004\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 4{,}9\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 15{,}4\ \text{rad/s}$$

$$\omega = 15{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{rad}} = 2{,}45\ \frac{\text{vueltas}}{\text{s}}$$

40. Datos: ω_0 = 30 rpm; r_0 = 70 cm = 0,7 m;

m = 350 g = 0,35 kg; I_{plat} = 120 kg/m²;

r = 53 cm = 0,35 m

Aplicamos el principio de conservación del momento angular, teniendo en cuenta que los momentos de inercia de la niña en la plataforma y de las masas que sostiene con sus manos se suman:

$$L_0 = L; \quad I_0\ \omega_0 = I\omega$$

$$\left(I_{plat} + 2\ mr_0^2\right) \omega_0 = \left(I_{plat} + 2\ mr^2\right) \omega$$

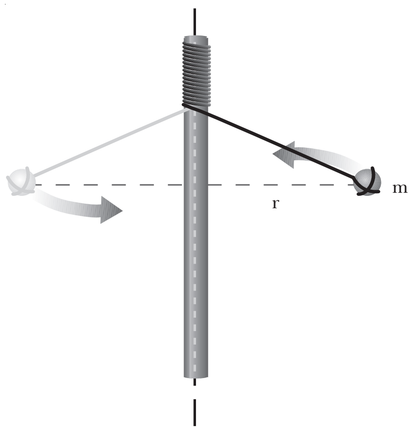
$$\omega = \frac{\left(I_{plat} + 2\ mr_0^2\right) \omega_0}{I_{plat} + 2\ mr^2}$$

$$\omega = \frac{\left(120\ \text{kg/m}^2 + 2 \cdot 0{,}35\ \text{kg} \cdot (0{,}7\ \text{m})^2\right) 30\ \text{rpm}}{120\ \text{kg/m}^2 + 2 \cdot 0{,}35\ \text{kg} \cdot (0{,}35\ \text{m})^2}$$

$$\omega = 30{,}06\ \text{rpm}$$

$$\omega = 30{,}06\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = 3{,}15\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

41. Una experiencia sencilla para observar la conservación del momento angular es la siguiente:



— Montamos un dispositivo como el de la figura: en una barra vertical (puede servir, por ejemplo, la pata de una mesa) atamos una cuerda con una bola o cualquier objeto un poco pesado en el extremo.

— Damos impulso a la bola y la hacemos girar alrededor de la barra. Al irse enroscando la cuerda en la barra, la distancia de la bola a la barra (eje de rotación) irá disminuyendo. Por tanto, disminuirá su momento de inercia. Como consecuencia de la conservación del momento angular, observaremos que la bola gira cada vez con mayor velocidad.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 47)

a) Se trata de un movimiento vertical:

$$y = y_0 + v_0\ (t - t_0) - \frac{1}{2}\, g\ (t - t_0)^2\ ;\ v = v_0 - g\ (t - t_0)$$

El cuerpo llega al suelo cuando y = 0. Si la velocidad inicial es cero y $t_0 = 0$:

$$y = 0 = y_0 - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

La velocidad en este instante será, en módulo:

$$|v| = gt = \sqrt{2y_0\ g}$$

Calculamos la velocidad del impacto:

— Desde la estatua de la Libertad (y_0 = 92 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\ g} = \sqrt{2 \cdot 92\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = 42{,}5\ \text{m/s}$$

$$|v| = 42{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 153\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

— Del Taj Majal (y_0 = 95 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\ g} = \sqrt{2 \cdot 95\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}$$

$$|v| = 43{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 155{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

— Del segundo piso de la torre Eiffel (y_0 = 116 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\ g} = \sqrt{2 \cdot 116\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}$$

$$|v| = 47{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\text{h}} = 171{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) Respuesta sugerida:

Los excesos de velocidad causan alrededor del 30% de los accidentes en carretera y además agravan las consecuencias de otros percances en los que no son la causa directa del accidente.

Fuente: Dirección General de Tráfico

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 49)

42. Datos: M = 5 kg; R = 0,75 m; F = 20 N;

t = 3 min = 180 s

a) Calculamos el momento de la fuerza, sabiendo que actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$|\vec{M}| = F \cdot R = 20\ \text{N} \cdot 0{,}75\ \text{m} = 15\ \text{N} \cdot \text{m}$$

b) Hallamos primero el momento de inercia del cilindro, utilizando la expresión correspondiente de la página 42 del libro del alumno. A continuación, aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación para calcular la aceleración angular:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{kg} \cdot (0{,}75\ \text{m})^2 = 1{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$|\vec{M}| = I\,|\vec{\alpha}|;\quad |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{M}|}{I} = \frac{15\ \text{N} \cdot \text{m}}{1{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m}} = 10{,}67\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

c) Aplicamos la ecuación del MCUA:

$$\omega = \alpha t = 10{,}67\ \text{rad/s}^2 \cdot 180\ \text{s} = 1\,921\ \text{rad/s}$$

43. Datos: M_p = 1 kg; R = 25 cm = 0,25 m; m_c = 2 kg

Se trata de una combinación del movimiento de rotación de la polea con el de traslación del cuerpo colgado.

Planteamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de traslación y de rotación, y las relaciones entre aceleración angular y tangencial.

a) La tensión de la cuerda valdrá lo mismo sobre el cuerpo que sobre la polea, y ejercerá un momento sobre ésta. Como actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$M = R\,T$$

Este momento provoca una aceleración angular de la polea. Hallamos el momento de inercia de ésta a partir de la fórmula de la página 42 del libro del alumno y aplicamos la ley fundamental de la dinámica de rotación:

$$I_{polea} = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\ \text{kg}\ (0{,}25\ \text{m})^2 = 0{,}031\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M = I\alpha$$

Por otro lado, la aceleración lineal del cuerpo colgado se relaciona con la aceleración angular de la polea:

$$a = a_t = \alpha R$$

b) Aplicamos la ley fundamental de la dinámica de traslación al cuerpo:

$$F = p - T = m_c\ a$$

Con las cuatro ecuaciones anteriores, tenemos un sistema que resolvemos:

$$\left.\begin{matrix} M = RT \\ M = I\alpha \end{matrix}\right\} RT = I\alpha;\quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

$$a = \alpha R;\quad p - T = m_c\ a$$

$$p = m_c\ g = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 19{,}6\ \text{N}$$

$$p - \frac{I\alpha}{R} = m_c\ R;\quad \alpha = \frac{pR}{m_c R^2 + I}$$

$$\alpha = \frac{19{,}6\ \text{N} \cdot 0{,}25\ \text{m}}{2\ \text{kg} \cdot (0{,}25\ \text{m})^2 + 0{,}031\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 31{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$a = \alpha R = 31{,}4\ \text{rad/s}^2 \cdot 0{,}25\ \text{m} = 7{,}8\ \text{m/s}^2$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{0{,}031\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 31{,}4\ \text{rad/s}^2}{0{,}25\ \text{m}} = 3{,}9\ \text{N}$$

c) Aplicamos la ecuación del MRUA para hallar la velocidad del cuerpo a los 20 s de dejarlo libre:

$$v = v_0 + at; \quad v = at = 7{,}8\ m/s^2 \cdot 20\ s = 157\ m/s$$

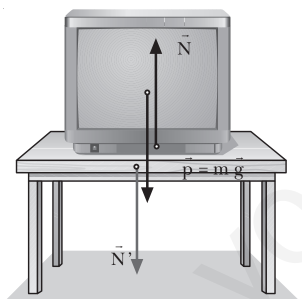
EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 50 y 51)

44. El vector desplazamiento es la diferencia entre el vector de posición final y el vector de posición inicial, por tanto es una magnitud vectorial. Su módulo representa la distancia (en línea recta) entre la posición inicial y la posición final. En cambio, la distancia recorrida es una magnitud escalar y se mide sobre la trayectoria, desde la posición inicial hasta la posición final.

— El módulo del vector desplazamiento y la distancia recorrida sólo coinciden en caso de que la trayectoria sea una recta y no exista inversión del movimiento.

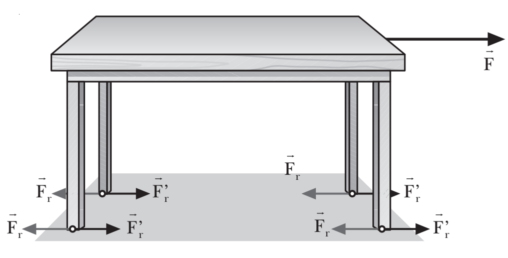
45. Si la aceleración es constante en módulo y perpendicular a la trayectoria en todo momento, se trata de un movimiento circular uniforme. La aceleración sólo tiene componente normal, siendo nula la componente tangencial. Además, la componente normal es constante, por lo que el módulo de la velocidad lineal es constante, y también es constante la velocidad angular.

46. *a)* Representamos la normal y su reacción en el caso de un cuerpo, como un televisor, apoyado sobre una mesa.



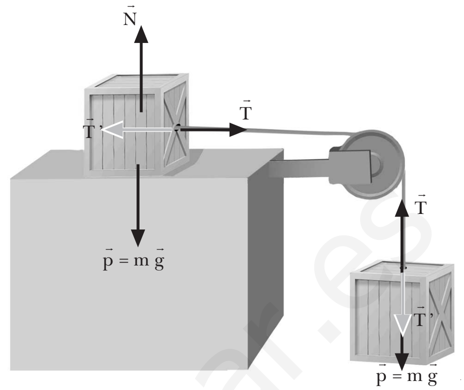
La normal es la fuerza de contacto que ejerce la mesa sobre el televisor. Es la reacción de otra fuerza de contacto que ejerce el televisor sobre la mesa, N'. La normal no es la reacción del peso. El peso es ejercido por la Tierra sobre el televisor, y su reacción es ejercida por el televisor sobre la Tierra. La reacción del peso se aplica, por tanto, en el centro de la Tierra. La normal, en cambio, se aplica en la superficie de contacto entre el televisor y la mesa.

b)



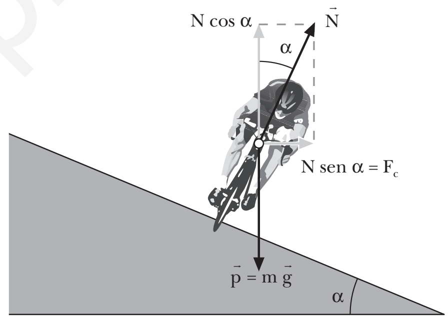
El rozamiento, F_r, que se opone al desplazamiento de una mesa es ejercido por el suelo sobre ésta. Se aplica en la superficie de contacto entre la mesa y el suelo. Su reacción es la fuerza F'_r, aplicada sobre el suelo.

c)



La tensión que ejerce la cuerda sobre el bloque, T, se aplica sobre el bloque, y su reacción, T', la ejerce el bloque sobre la cuerda.

47.



El ciclista no cae porque la componente vertical de la normal equilibra el peso, y la componente horizontal de la normal se emplea en hacerlo girar. La componente horizontal de la normal coincide con la fuerza centrípeta.

48. *a)* Si la cantidad de movimiento de una masa puntual que describe una trayectoria circular se reduce a la mitad, se reduce también a la mitad su velocidad angular. Por tanto, su nuevo momento angular será también la mitad.

b) Si el radio del círculo se triplica manteniendo constante la velocidad lineal, el momento de inercia aumentará, y también lo hará el momento angular. Concretamente, podemos relacionar el momento angular y la velocidad lineal, teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} L = I\omega \\ \omega = \dfrac{v}{r} \end{array}\right\} L = I\,\frac{v}{r} = mr^2\,\frac{v}{r} = mvr$$

Por tanto, si el radio se triplica, el momento angular se triplica.

49. Datos: $\vec{r}(t) = (t^2 - 3t)\,\vec{i} + (2t^2 + 4)\,\vec{j}$, en unidades SI

a) Para hallar la velocidad media, primero calculamos los vectores de posición en los instantes inicial y final y el vector desplazamiento:

$$\vec{r}(1\,s) = (1^2 - 3\cdot 1)\,\vec{i} + (2\cdot 1^2 + 4)\,\vec{j} = (-2\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\,m$$

$$\vec{r}(2\,s) = (2^2 - 3\cdot 2)\,\vec{i} + (2\cdot 2^2 + 4)\,\vec{j} = (-2\,\vec{i} + 12\,\vec{j})\,m$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2\,s) - \vec{r}(1\,s) = (-2\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\,m - (-2\,\vec{i} + 12\,\vec{j})\,m$$

$$\Delta\vec{r} = (6\,\vec{j})\,m$$

Aplicamos la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2\,s) - \vec{r}(1\,s)}{2\,s - 1\,s} = \frac{(6\,\vec{j})\,m}{1\,s} = (6\,\vec{j})\,\frac{m}{s}$$

b) La velocidad instantánea para cualquier instante de tiempo t se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación del movimiento:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2\,t - 3)\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}\text{ , en unidades SI}$$

c) Para hallar la aceleración media, primero calculamos la velocidad en los instantes t = 1 s y t = 2 s:

$$\vec{v}(1\,s) = (2\cdot 1 - 3)\,\vec{i} + 4\cdot 1\,\vec{j} = (-\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s$$

$$\vec{v}(2\,s) = (2\cdot 2 - 3)\,\vec{i} + 4\cdot 2\,\vec{j} = (\vec{i} + 8\,\vec{j})\,m/s$$

Aplicamos la definición de aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(2\,s) - \vec{v}(1\,s)}{2\,s - 1\,s} = \frac{(2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s}{1\,s}$$

$$\vec{a}_m = (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s^2$$

d) La aceleración instantánea para cualquier instante de tiempo t se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la velocidad:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,\frac{m}{s^2}$$

50. Datos: $\vec{a} = 6\,t\,\vec{i}$, $\vec{v}_0 = -8\,\vec{i}\,m/s$; $\vec{r}_0 = 9\,\vec{i}\,m$

Obtendremos el vector velocidad integrando la aceleración:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt = -8\,\vec{i} + \int_0^t 6t\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{v}(t) = \left(-8\,\vec{i} + \frac{6t^2}{2}\,\vec{i}\right)\text{ (SI)} = (3\,t^2 - 8)\,\vec{i}\text{ (SI)}$$

El vector de posición se halla integrando el vector velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt = 9\,\vec{i} + \int_0^t (3\,t^2 - 8)\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 8\,t + 9)\,\vec{i}\text{ (SI)}$$

51. Datos: y_{10} = 0 m; v_{20} = 0 m/s; v_{10} = 30 m/s; y_{20} = 20 m

Escribimos primero las ecuaciones de la posición de cada piedra:

$$y_1 = y_{10} + v_{10}\,t - \frac{1}{2}gt^2;\quad y_1 = 30\,\frac{m}{s}\,t - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$y_2 = y_{20} + v_{20}\,t - \frac{1}{2}\,gt^2\,;\quad y_2 = 20\,m - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

Las dos piedras se encontrarán cuando $y_1 = y_2$. Igualando las dos posiciones, obtenemos el momento en que se encuentran:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 30\,t - 4{,}9\,t^2 = 20 - 4{,}9\,t^2$$

$$30\,t = 20$$

$$t = \frac{20}{30}\,s = 0{,}67\,s$$

Sustituyendo este valor del tiempo en la ecuación de la posición de la primera piedra obtenemos la altura a que se encuentran:

$$y = 30\,\frac{m}{s}\cdot 0{,}67\,s - 4{,}9\,\frac{m}{s^2}\,(0{,}67\,s)^2 = 17{,}8\,m$$

52 Datos: v_y = 810 km/h; v_x = 144 km/h

Expresamos las velocidades en unidades del SI:

$$v_x = 144\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1h}{3\,600\,s}\cdot\frac{1\,000\,m}{1\,km} = 40\,\frac{m}{s}$$

$$v_y = 810\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1\,h}{3\,600\,s}\cdot\frac{1\,000\,m}{1\,km} = 225\,\frac{m}{s}$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento en cada eje:

$$x = x_o + v_x\,t\,;\quad x = 40\,\frac{m}{s}\,t$$

$$y = y_o + v_y\,t;\quad y = 224\,\frac{m}{s}\,t$$

a) Para obtener el tiempo que tarda el avión en avanzar 1 km en dirección Norte, imponemos y = 1 km = 1 000 m:

$$y = 1\,000\,m = 225\,\frac{m}{s}\,t$$

$$t = \frac{1\,000\,m}{225\,m/s} = 4{,}4\,s$$

b) En la dirección Norte avanza 1 km. Calculamos cuánto avanza en la dirección Este:

$$x = 40\,\frac{m}{s}\,t = 40\,\frac{m}{s}\cdot 4{,}4\,s = 176\,m$$

La distancia recorrida sobre la Tierra será la composición de los dos desplazamientos:

$$|\Delta r| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(176\,m)^2 + (1\,000\,m)^2} = 1\,015{,}4\,m$$

c) Hallamos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 40\,t \\ y = 225\,t \end{cases};\ t = \frac{x}{40}\,;\ y = 225\cdot\frac{x}{40} = \frac{45\,x}{8}$$

La trayectoria es una recta.

53. Datos: $y_0 = 20$ m ; v = 10 m/s; $\alpha = 45°$

Ecuaciones del movimiento:

$$x = x_0 + v_{0x}t;\ \ x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 10\ \frac{m}{s} \cos 45°\ t$$

$$y = y_0 + v_{0y}\ t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 20\ m + 10\ \frac{m}{s}\ \text{sen}\ 45°\ t - \frac{1}{2}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

a) La pelota llegará al suelo cuando y = 0:

$$y = 0 = 20 + 10\ \text{sen}\ 45°\ t - 4{,}9 t^2$$

$$4{,}9 t^2 - 7{,}1 t - 20 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es:

$$t = 2{,}9\ s$$

b) Hallamos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 10 \cos 45° t \\ y = 20 + 10\ \text{sen}\ 45°\ t - 4{,}9 t^2 \end{cases} \qquad t = \frac{x}{10 \cos 45°};$$

$$y = 20 + 10\ \frac{x\ \text{sen}\ 45°}{10 \cos 45°} - 4{,}9\ \frac{x^2}{10^2 \cos^2 45°}$$

$$y = 20 + x - 0{,}1 x^2$$

La trayectoria es una parábola.

c) Calculamos, a partir de la ecuación de la trayectoria, la altura de la pelota cuando llega a la pared (x = 20 m):

$$y = 20 + x - 0{,}1 x^2 = 20 + 20 - 0{,}1\ (20)^2$$

$$y = 0\ m$$

La pelota caerá al suelo justo en la base de la pared y no llegará a chocar.

54. Datos: R = 20 cm = 0,2 m; ω = 20 rpm

a) Expresamos la velocidad angular en rad/s:

$$\omega = 20\ \text{rpm} = 20\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ s} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = \frac{2\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{s}$$

b) La velocidad de los puntos de la periferia (R = 0,2 m) será:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0{,}2\ m = 0{,}42\ \frac{m}{s}$$

Para los puntos situados a 5 cm del centro, R = 5 cm = = 0,05 m. Por tanto:

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0{,}05\ m = 0{,}10\ \frac{m}{s}$$

c) Calculamos el ángulo descrito en 10 s utilizando la ecuación del MCU:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{3}\ \frac{\text{rad}}{s} \cdot 10\ s = \frac{20\pi}{3}\ \text{rad}$$

El número de revoluciones (o vueltas) será:

$$\frac{20\pi}{3}\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{20\pi\ \text{rad}} = 3{,}3\ \text{vueltas}$$

55. Datos: M = 2 kg; m = 10 g = 0,01 kg; $\vec{v}_b = 150\vec{i}$ m/s

Si no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema, el momento lineal o cantidad de movimiento se conserva.

Inicialmente el sistema está en reposo, de forma que la cantidad de movimiento es nula. Cuando se dispara la bala, la cantidad de movimiento total tiene que ser la misma. Por tanto:

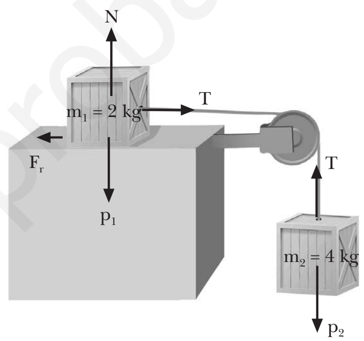
$$\vec{p} - 0 = m\,\vec{v}_b + M\,\vec{v}_e$$

Despejando la velocidad de la escopeta:

$$\vec{v}_e = -\frac{m\,\vec{v}_b}{M} = -\frac{0{,}01\ \text{kg} \cdot 150\ \vec{i}\ \text{m/s}}{2\ \text{kg}} = -0{,}75\ \vec{i}\ \frac{m}{s}$$

$$|v_e| = 0{,}75\ \text{m/s}$$

56. Datos:



El sistema se moverá hacia la derecha. Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo:

Cuerpo 1: $T - F_r = m_1\ a;\quad T - \mu_c\ N = m_1\ a$

$$T - \mu_c\ m_1\ g = m_1\ a$$

Cuerpo 2: $p_2 - T = m_2\ a;\quad m_2\ g - T = m_2\ a$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$m_2\ g - \mu_c\ m_1\ g = (m_1 + m_2)\ a$$

Despejamos la aceleración:

$$a = \frac{m_2\ g - \mu_c\ m_1\ g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{4\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 0{,}2 \cdot 2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{2\ \text{kg} + 4\ \text{kg}} = 5{,}9\ \frac{m}{s^2}$$

Sustituimos la aceleración en la ecuación del cuerpo 2 para obtener la tensión:

$$m_2\ g - T = m_2\ a \Rightarrow T = m_2\ (g - a)$$

$$T = 4\ \text{kg} \cdot (9{,}8\ \text{m/s}^2 - 5{,}9\ \text{m/s}^2)$$

$$T = 15{,}6\ N$$

57. Datos: M = 60 g = 0,06 kg; R = 8 cm = 0,08 m

Calculamos el momento de inercia a partir de la expresión que aparece en la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{2}{3} MR^2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}06 \text{ kg} \cdot (0{,}08 \text{ m})^2 = 2{,}56 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

58. Datos: m = 150 g = 0,15 kg; ω = 3 rev/s;

r_0 = 20 cm = 0,2 m; r = 5 cm = 0,05 m

Aplicamos la conservación del momento angular:

$$L_0 = L; \quad I_0\omega_0 = I\omega; \quad \omega = \frac{I_0\omega_0}{I}$$

$$\omega = \frac{m r_0{}^2 \cdot 3 \text{ vueltas/s}}{m r^2} = \frac{(0{,}2 \text{ m})^2 \; 3 \text{ vueltas/s}}{(0{,}05 \text{ m})^2}$$

$$\omega = 48 \frac{\text{vueltas}}{\text{s}} = 96\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

59. Datos: d = 2 km = 2 000 m; a_A = 2 m/s², v_{0A} = 0;

a_B = 0, v_B = – 72 km/h

Expresamos la velocidad del segundo automóvil en m/s:

$$v_B = -72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tomamos como origen de la posición y del tiempo la salida de A. Entonces, las ecuaciones del movimiento de cada automóvil son:

$$\text{A: } x_A = x_{0A} + v_{0A} t + \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$\text{B: } x_B = x_{0B} + v_B t$$

$$x_B = d + v_B \, t = 2\,000 \text{ m} - 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t$$

Se encontrarán cuando coincidan sus posiciones. Igualando $x_A = x_B$ obtenemos el tiempo que tardan en encontrarse desde la partida de A:

$$x_A = x_B \,;\; 1 \cdot t^2 = 2\,000 - 20t$$

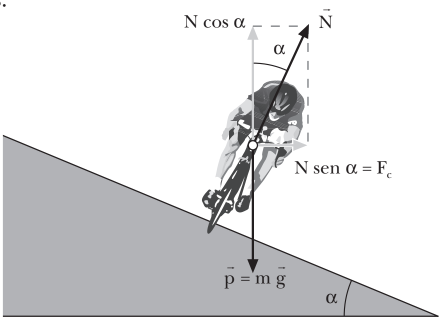
$$t^2 + 20\,t - 2\,000 = 0$$

$$t = 36{,}3 \text{ s}$$

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de A, hallamos la posición en que se encuentran, medida desde A:

$$x_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (36{,}3 \text{ s})^2 = 1\,314{,}8 \text{ m}$$

60. Datos:



a) Cuando no existe rozamiento, la fuerza centrípeta es igual a la componente horizontal de la normal. Aplicamos la segunda ley de Newton en cada eje:

Eje X: $N \text{ sen } \alpha = F_c$

Eje Y: $N \cos \alpha - m\,g = 0; \quad N \cos \alpha = m\,g$

Dividimos las dos ecuaciones entre sí:

$$\frac{N \text{ sen } \alpha}{N \cos \alpha} = \frac{F_c}{m\,g}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{F_c}{m\,g}$$

Sustituimos la expresión de la fuerza centrípeta y despejamos la velocidad:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m \frac{v^2}{R}}{m\,g} = \frac{v^2}{gR}$$

$$v = \sqrt{gR \text{ tg } \alpha} = \sqrt{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m} \cdot \text{tg } 30°} = 16{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Convertimos la velocidad a unidades del SI:

$$v_{max} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 22{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos el ángulo de peralte a partir de la expresión de tg α encontrada en el apartado anterior:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{gR}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{(22{,}2 \text{ m/s})^2}{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}} = 1$$

$$\alpha = 45°$$

61. Datos: M = 0,5 kg; R = 0,4 m; ω_0 = 30 rpm

Expresamos la velocidad angular inicial y el número de vueltas en el SI :

$$\omega_0 = 30 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\phi = 15 \text{ vueltas} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 30\pi \text{ rad}$$

Calculamos el momento de inercia del disco a partir de la expresión de la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

a) Determinamos la energía cinética y el momento angular iniciales:

$$Ec = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2} 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \left(\pi \text{ rad/s}\right)^2 = 0{,}2 \text{ J}$$

$$L = I\omega_0 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \pi \text{ rad/s} = 0{,}04\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

b) Aplicamos las ecuaciones del MCUA para encontrar la aceleración angular de frenado y el tiempo que tarda en pararse:

$$\left.\begin{array}{l} \phi - \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{array}\right\} \quad 2\alpha\phi = \omega^2 - \omega_0{}^2$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\phi} = \frac{-(\pi \text{ rad/s})^2}{2 \cdot 30\pi \text{ rad}}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

c) El tiempo que tarda es:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{-\pi \text{rad/s}}{-\frac{\pi}{60} \text{rad/s}} = 60 \text{ s}$$

d) Determinamos el momento de la fuerza aplicada a partir de la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$|\vec{M}| = I\,|\vec{\alpha}|; \quad M = I\alpha = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)$$

$$|\vec{M}| = -2{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) Como la fuerza es tangencial a la periferia:

$$|\vec{M}| = F \cdot R; \quad F = \frac{|\vec{M}|}{R} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}}{0{,}8 \text{ m}} = 5{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

62. Datos: M = 1 kg; m = 2 kg; R = 0,4 m; y = 980 m

Se trata de una combinación del movimiento de rotación de la polea con el de traslación del cuerpo colgado.

Planteamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de traslación y de rotación, y las relaciones entre aceleración angular y tangencial.

— La tensión de la cuerda valdrá lo mismo sobre el cuerpo que sobre la polea y ejercerá un momento sobre ésta. Como actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$M = RT$$

Este momento provoca una aceleración angular de la polea. Hallamos el momento de inercia de ésta a partir de la fórmula de la página 42 del libro del alumno y aplicamos la ley fundamental de la dinámica de rotación:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 = 0{,}08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M = I\alpha$$

— Por otro lado, la aceleración lineal del cuerpo colgado se relaciona con la aceleración angular de la polea:

$$a = at = \alpha R$$

— Aplicamos la ley fundamental de la dinámica de traslación al cuerpo:

$$F = p - T = m\,a$$

Con las anteriores ecuaciones, tenemos un sistema que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} M = RT \\ M = I\alpha \end{array}\right\} RT = I\alpha; \quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

$$a = \alpha R$$

$$p - T = m\,a; \quad p = \frac{I\alpha}{R} = m\alpha R; \quad \alpha = \frac{PR}{mR^2 + I}$$

$$p = m\,g = 2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg} = 19{,}6 \text{ N}$$

$$\alpha = \frac{19{,}6 \text{ N} \cdot 0{,}4 \text{ m}}{2 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 + 0{,}08 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 19{,}6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$a = \alpha R = 19{,}6 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}4 \text{ m} = 7{,}84 \text{ m/s}^2$$

Aplicamos la ecuación del MRUA para hallar la velocidad del cuerpo cuando ha bajado 980 m:

$$2ay = v^2 - v_0{}^2; \quad v_0 = 0$$

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{2 \cdot 7{,}84 \text{ m/s}^2 \cdot 980 \text{ m}} = 124 \text{ m/s}$$

Relacionamos la velocidad lineal del cuerpo con la velocidad angular de la polea:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{124 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m}} = 310 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 51)

1. Datos: $\vec{a} = (12t^2 - 6t)\,\vec{i}$; $\vec{v}_0 = 5\,\vec{i}$ m/s ; $\vec{r}_0 = -5\,\vec{i}$ m

Integrando la aceleración, se halla la velocidad en función del tiempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = 5\,\vec{i} + \int_0^t (12t^2 - 6t)\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{v} = 5\,\vec{i} + (4t^3 - 3t^2)\,\vec{i}$$

$$\vec{v} = (4t^3 - 3t^2 - 5)\,\vec{i} \text{ (unidades SI)}$$

Para hallar la ecuación de la posición integramos la ecuación de la velocidad que acabamos de obtener:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt = -5\,\vec{i} + \int_0^t (4t^3 - 3t^2 + 5)\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{r} = -5\,\vec{i} + (t^4 - t^3 + 5t)\,\vec{i}$$

$$\vec{r} = (t^4 - t^3 + 5t - 5)\,\vec{i} \text{ (unidades SI)}$$

2. Datos: y_0 = 10 m; v_0 = 360 km/h; α = 40°

Expresamos la velocidad en m/s:

$$v_0 = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = x_0 + v_{0x}t; \quad x = v_0 \cos\alpha t = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40° \cdot t$$

$$v_x + v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_x = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40°$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \operatorname{sen} 40° t - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt; \quad v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$$

$$v_y = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \operatorname{sen} 40° - 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

a) La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical de la velocidad es nula. Imponiendo $v_y = 0$ obtenemos el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima:

$$v_y = 0; \quad v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt = 0$$

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{100 \text{ m/s} \operatorname{sen} 40°}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 6{,}5 \text{ s}$$

Sustituimos este tiempo en la ecuación de la posición vertical para hallar la altura máxima:

$$y = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \operatorname{sen} 40° \cdot 6{,}5 \text{ s} - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6{,}5 \text{ s})^2$$

$$y = 220{,}9 \text{ m}$$

b) Calculamos la posición 3 s después del lanzamiento sustituyendo t = 3 s en las ecuaciones de cada componente de la posición:

$$x(3 \text{ s}) = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40° \cdot 3 \text{ s} = 229{,}8 \text{ m}$$

$$y(3 \text{ s}) = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \operatorname{sen} 40° \cdot 3 \text{ s} - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3 \text{ s})^2$$

$$y(3 \text{ s}) = 158{,}8 \text{ m}$$

$$\vec{r}(3 \text{ s}) = (229{,}8, 158{,}8) \text{ m}$$

c) El momento en que el proyectil llega al suelo se obtiene imponiendo que la coordenada y sea cero.

$$y = 0 = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \operatorname{sen} 40° \, t - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$4{,}9t^2 - 64{,}3t - 10 = 0$$

La solución positiva de la ecuación es:

$$t = 13{,}3 \text{ s}$$

Introduciendo este tiempo en la ecuación de x hallamos el alcance:

$$x = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40° \cdot 13{,}3 \text{ s}$$

$$x = 1\,017{,}2 \text{ m}$$

3. Datos: ω_0 = 60 rev/min; $\alpha = -2$ rad/s²

La velocidad angular en rad/s es:

$$\omega_o = 60 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La ecuación de la velocidad angular para MCUA es:

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

Imponemos $\omega = 0$ para hallar el tiempo que tarda el disco en parar:

$$\omega = 0 = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = -\frac{2\pi \text{ rad/s}}{-2 \text{ rad/s}^2} = 3{,}14 \text{ s}$$

4. Las fuerzas de acción y reacción aparecen siempre por parejas. Si un cuerpo 1 ejerce una fuerza sobre un cuerpo 2 (acción), este cuerpo 2 ejercerá otra fuerza sobre el cuerpo 1 (reacción). Las fuerzas de acción y reacción tienen el mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos.

5. Datos: M = 45 kg; m = 300 g = 0,3 kg; $v_d = 12\,\vec{i}$ m/s

Aplicamos el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento. Inicialmente, el patinador y el disco están en reposo. Por lo tanto, la cantidad de movimiento total es cero.

Entonces:

$$\vec{p} = 0; \; M\vec{v}_p + m\vec{v}_d = 0$$

$$\vec{v}_p = -\frac{m\vec{v}_d}{M} = -\frac{0{,}3 \text{ kg}}{75 \text{ kg}} 12\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

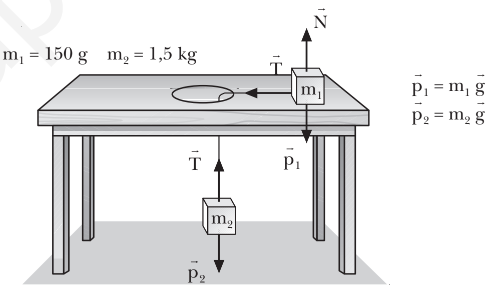
$$\vec{v}_p = -0{,}048\,\vec{i} \text{ m/s} = -4{,}8 \cdot 10^{-2}\,\vec{i} \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad del patinador es:

$$v_p = -4{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

6. Datos: m_1 = 150 g = 0,15 kg; R = 20 cm = 0,2 m; m_2 = 1,5 kg

a)



b) Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo:

Cuerpo 1: $T = F_c; \quad T = m_1 \dfrac{v^2}{R}$

Cuerpo 2: $T - m_2 g = 0$

Hallamos la tensión de la cuerda a partir de la ecuación del cuerpo 2:

$$T = m_2 g$$

Sustituimos la tensión en la ecuación del cuerpo 1 y despejamos la velocidad lineal:

$$m_2 g = m_1 \frac{v^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} Rg}$$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}5 \text{ kg}}{0{,}15 \text{ kg}} \cdot 0{,}2 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 4{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente tangencial de la aceleración es nula por ser un MCU. La componente normal es debida a la tensión. Calculamos la componente normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(4{,}4 \text{ m/s})^2}{0{,}2 \text{ m}} = 96{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7. Un buen ejemplo de conservación angular es un patinador dando vueltas, realizando una pirueta. Inicialmente, el patinador extiende los brazos y a veces la pierna, y gira con cierta velocidad angular. Como sobre él no actúa ningún momento, al bajar la pierna y acercar los brazos al eje de rotación, por ejemplo, estirándolos hacia arriba, su velocidad angular aumenta. Por eso a menudo vemos a los patinadores acabar sus piruetas girando a gran velocidad, sin que ello les suponga un esfuerzo adicional.

8. Datos: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

   Determinamos el momento de inercia a partir de su definición:

$$I = MR^2 = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2$$

$$I = 1{,}35 \cdot 10^{47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

9. Datos: $R = 0{,}5$ m; $I = 1$ kg·m^2; $F = 2$ N

   a) Calculamos el momento de la fuerza y aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de traslación:

$$\left|\vec{M}\right| = F \cdot R = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\left|\vec{M}\right| = I\left|\vec{\alpha}\right|;\quad \left|\vec{\alpha}\right| = \frac{\left|\vec{M}\right|}{I} = \frac{1\ \text{N} \cdot \text{m}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

   b) Determinamos el ángulo descrito por el disco a partir de la ecuación del MCUA y de aquí la longitud de la cuerda desenrollada:

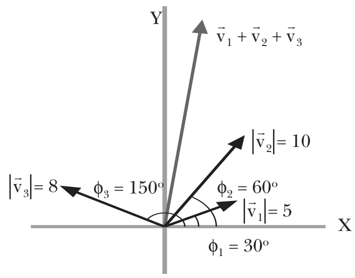
$$\phi = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 = \frac{1}{2} 1\ \text{rad}/\text{s}^2 \cdot (10\ \text{s})^2 = 50\ \text{rad}$$

$$l = R \cdot \phi = 0{,}5\ \text{m} \cdot 50\ \text{rad} = 25\ \text{m}$$

2. Campo gravitatorio

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 53)

- Datos:



Hallamos primero las componentes de cada uno de los vectores para realizar después la suma vectorial:

$$\vec{v}_1 = |\vec{v}_1|\,(\cos\phi_1\ \vec{i} + \text{sen}\ \phi_1\ \vec{j}) = 4{,}3\ \vec{i} + 2{,}5\ \vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = |\vec{v}_2|\,(\cos\phi_2\ \vec{i} + \text{sen}\ \phi_2\ \vec{j}) = 5\ \vec{i} + 8{,}7\ \vec{j}$$

$$\vec{v}_3 = |\vec{v}_3|\,(\cos\phi_3\ \vec{i} + \text{sen}\ \phi_3\ \vec{j}) = -6{,}9\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (4{,}3\ \vec{i} + 2{,}5\ \vec{j}) + (5\ \vec{i} + 8{,}7\ \vec{j}) + (-6{,}9\ \vec{i} + 4\ \vec{j})$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (4{,}3 + 5 - 6{,}9)\ \vec{i} + (2{,}5 + 8{,}7 + 4)\ \vec{j}$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 2{,}4\ \vec{i} + 15{,}2\ \vec{j}$$

- El vector que tiene la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{v} = 3\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$ tendrá las mismas componentes pero con signo contrario:

$$\vec{v}' = -3\ \vec{i} - 4\ \vec{j}$$

Para obtener un vector unitario, calculamos el módulo de $\vec{v}'$, y dividimos sus componentes por el módulo:

$$|\vec{v}'| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|} = -\frac{3}{5}\ \vec{i} - \frac{4}{5}\ \vec{j} = -0{,}6\ \vec{i} - 0{,}8\ \vec{j}$$

- Datos: $|\vec{v}_1| = 10$; $|\vec{v}_2| = 20$; $= 45°$

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\phi = 10 \cdot 20 \cdot \cos 45° = 141{,}4$$

- Datos: M = 850 kg; v = 80 km/h

Pasamos primero la velocidad a unidades del SI:

$$v = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 22{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la energía cinética:

$$Ec = \frac{1}{2} M\ v^2 = \frac{1}{2} \cdot 850\ \text{kg} \cdot \left(22{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$Ec = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{J} = 210\ \text{kJ}$$

- Datos: M = 10 kg; h = 40 m

Determinamos la energía potencial gravitatoria:

$$Ep = M\ g\ h = 10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \cdot 40\ \text{m} = 3\,920\ \text{J}$$

- Datos: Dx = 10 m; F = 40 N; = 30°

Como la fuerza es constante, podemos determinar el trabajo como el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento:

$$W = \vec{F}\ \Delta\vec{r} = F\ \Delta x \cos\phi = 40\ \text{N} \cdot 10\ \text{m} \cdot \cos 30°$$

$$W = 346{,}4\ \text{J}$$

- Datos: v_0 = 24,5 km/h; W= 1 738 J; M = 100 kg

Si suponemos despreciable el rozamiento, todo el trabajo efectuado por el ciclista será empleado en incrementar su energía cinética.

Determinamos la energía cinética inicial y le sumamos el trabajo para determinar la energía cinética final y hallar la velocidad:

$$v_0 = 24{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 6{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Ec_0 = \frac{1}{2} M\ v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 100\ \text{kg} \cdot (6{,}8\ \text{m/s})^2 = 2\,315{,}8\ \text{J}$$

$$W = Ec_0 - Ec; \quad Ec = W + Ec_0$$

$$Ec = 1\,738\ \text{J} + 2\,315{,}8\ \text{J} = 4\,053{,}8\ \text{J}$$

$$Ec = \frac{1}{2} M\ v^2; \quad v = \sqrt{\frac{2Ec}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\,053{,}8\ \text{J}}{100\text{kg}}} = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 32{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1. FUERZAS GRAVITATORIAS (págs. 55, 57)

1. Según la escuela aristotélica, los cuerpos celestes giraban alrededor de la Tierra, que ocupaba el centro del universo. Los cuerpos celestes describían movimientos circulares uniformes, la forma de movimiento considerada perfecta en la Antigüedad.

2. El modelo de universo de Ptolomeo se diferencia del de Copérnico en que el primero es geocéntrico. Supone que todos los cuerpos celestes giran alrededor de la Tierra; en cambio, el segundo sitúa el Sol en el centro, y la Tierra, junto con los otros planetas, en órbita circular en torno a él. Actualmente se acepta el modelo heliocentrista o copernicano, si bien se han sustituido las órbitas circulares de Copérnico por órbitas elípticas.

3. Identificamos las etapas del método científico en la evolución de los modelos de universo:

— *Observación de la realidad:* observación del firmamento.

— *Formulación de hipótesis:* aparecen en este caso distintas hipótesis:

• Modelo de universo geocéntrico de Aristóteles y de Ptolomeo.

• Modelo heliocéntrico de Copérnico, propuesto anteriormente por Aristarco de Samos.

— *Experimentación:* en el caso de la astronomía, deberíamos hablar más bien de observaciones rigurosas y toma de datos:

• Primeras observaciones con telescopio de Galileo.

• Catálogo de Tycho Brahe y observaciones de J. Kepler.

— *Organización de los datos experimentales:* elaboración de un catálogo estelar por Tycho Brahe y estudios de J. Kepler sobre las observaciones anteriores.

— *Extracción de conclusiones y formulación de leyes:* las tres leyes del movimiento de los planetas de Kepler.

— *Elaboración de una teoría:* teoría de la gravitación de Isaac Newton.

4. Para determinar las unidades de G, despejamos la constante de la ley de la gravitación universal:

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2};\quad G = \frac{F\,r^2}{m_1\,m_2};\quad [G] = \frac{[F]\cdot[L]^2}{[M]^2} = \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

El valor de G es $6{,}67\cdot 10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$. Este valor es tan pequeño que, a menos que alguna de las masas sea muy grande, la fuerza de atracción es inapreciable y por tanto, predominan fácilmente otras fuerzas por encima de la gravitatoria.

5. Datos: m = 250 g = 0,25 kg; r = 10 cm = 0,1 m

Aplicamos la ley de la gravitación universal:

$$F = G\,\frac{m^2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{(0{,}25\ kg)^2}{(0{,}1\ m)^2}$$

$$F = 4{,}2\cdot 10^{-10}\ N$$

6. Datos: $F = 10^{-10}$ N; r = 0,5 m

Despejamos la masa de la ley de la gravitación universal, teniendo en cuenta que los dos objetos son iguales:

$$F = G\,\frac{m^2}{r^2};\quad m = \sqrt{\frac{F\,r^2}{G}} = \sqrt{\frac{10^{-10}\ N\cdot(0{,}5\ m)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}}} = 0{,}6\ kg$$

7. Datos: m = 2 kg; $F = 10^{-7}$ N

Despejamos la distancia de la ley de la gravitación universal:

$$F = G\,\frac{m^2}{r^2};\quad r = \sqrt{\frac{G\,m^2}{F}}$$

$$F = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\,(2\ kg)^2}{10^{-7}\ N}} = 5{,}2\cdot 10^{-2}\ m$$

8. Datos: m_1 = 3 kg; $\vec{r}_1 = (-2, 4)$ m; m_2 = 1,5 kg; $\vec{r}_2 = (5, -1)$ m

Determinamos en primer lugar el módulo y la direción del vector que une las dos masas:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left[(5-(-2))\,\vec{i} + (-1-4)\,\vec{j}\right]m$$

$$\vec{r}_{12} = (7\,\vec{i} - 5\,\vec{j})\ m$$

$$r = \left|\vec{r}_{12}\right| = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = 8{,}6\ m$$

El vector unitario en la dirección de la recta que une la masa 1 con la masa 2 y sentido de m_1 a m_2 será:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_{12}}{r} = \frac{(7\,\vec{i} - 5\,\vec{j})\ m}{8{,}6\ m} = 0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{j}$$

El vector unitario con sentido de m_2 a m_1 será opuesto a $\vec{u}_1$

$$u_2 = -\vec{u}_1 = -0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{j}$$

a) Calculamos la fuerza $\vec{F}_{12}$ con que m_1 atrae a m_2:

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{F}_{12} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\ \frac{3\ kg\cdot 1{,}5\ kg}{(8{,}6\ m)^2}\,(0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{j})$$

$$\vec{F}_{12} = (-0{,}33\,\vec{i} + 0{,}23\,\vec{j})\cdot 10^{-11}\ N$$

b) Calculamos la fuerza $\vec{F}_{21}$ con que m_2 atrae a m_1:

$$\vec{F}_{21} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\vec{u}_2$$

$$F_{21} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{1{,}5\ kg\cdot 3\ kg}{(8{,}6\ m)^2}\,(-0{,}8\,\vec{i} - 0{,}6\,\vec{j})$$

$$\vec{F}_{21} = (-0{,}33\,\vec{i} - 0{,}23\,\vec{j})\cdot 10^{-11}\ N$$

c) El módulo de las dos fuerzas será igual debido a que son fuerzas de acción y reacción:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|$$

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = \sqrt{(-0{,}33)^2 + (0{,}23)^2}\cdot 10^{-11}\ N$$

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = 4\cdot 10^{-12}\ N$$

2. CONCEPTO DE CAMPO (pág. 59)

9. Decimos que existe un campo en cierta región cuando en ella hay una perturbación, real o ficticia, caracterizada por el valor de una magnitud en cada punto. Un ejemplo de campo escalar es la densidad de un contaminante vertido en un lago. Un campo vectorial es el campo de velocidades de las partículas de un fluido en movimiento.

10. En un campo uniforme, la magnitud característica del campo (puede ser la fuerza) es constante en todos los puntos del espacio. En cambio, en un campo central, la magnitud característica depende únicamente de la distancia al centro del campo y todos los vectores fuerza convergen en un punto llamado centro del campo. Ejemplos:

Campo uniforme: campo eléctrico entre las dos placas de un condensador plano.

Campo central: campo gravitatorio de un objeto puntual.

11. Los campos conservativos se caracterizan por que el trabajo que realizan las fuerzas del campo no depende del camino seguido, sino sólo del punto inicial y final. Como consecuencia, el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es nulo.

— A los campos conservativos se asocia una magnitud llamada energía potencial. El trabajo realizado por las fuerzas conservativas es igual al incremento de energía potencial.

— Ejemplos de campos conservativos: campo gravitatorio, campo eléctrico.

3. ESTUDIO DEL CAMPO GRAVITATORIO
(págs. 61, 64, 65 y 67)

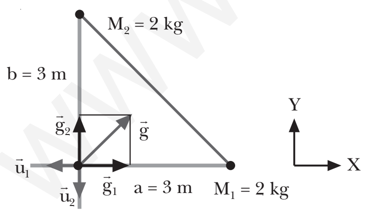
12. La intensidad del campo gravitatorio disminuye a medida que nos alejamos de la masa que lo crea. En concreto, de la ley de la gravitación universal se deriva que el campo creado por una masa puntual disminuye con el cuadrado de la distancia.

13. Datos: M = 3 kg; r = 5 m

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = G\,\frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N{\cdot}m^2}}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{3\ \mathrm{kg}}{(5\ \mathrm{m})^2} = 8 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

14. Datos:



a) Calculamos el campo gravitatorio debido a cada masa. Como las dos masas son iguales y están a la misma distancia del punto donde calculamos el campo, los módulos de los campos debidos a cada masa serán iguales:

$$|\vec{g}_1| = G\,\frac{M_1}{r_1^2} = G\,\frac{M}{a^2}$$

$$|\vec{g}_1| = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N{\cdot}m^2}}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{2\ \mathrm{kg}}{(3\ \mathrm{m})^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

$$|\vec{g}_2| = G\,\frac{M_2}{r_2^2} = G\,\frac{M}{b^2}$$

$$|\vec{g}_2| = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg}^2}\,\frac{2\ \mathrm{kg}}{(3\ \mathrm{m})^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

De donde $\vec{g}_1 = -1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \vec{u}_1$ N/kg;

$\vec{g}_2 = -1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \vec{u}_2$ N/kg

Sumamos vectorialmente los dos campos, teniendo en cuenta la elección de los ejes:

$$\vec{u}_1 = -\vec{i};\quad \vec{u}_2 = -\vec{j}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} + 1{,}5 \cdot 10^{-11}\ \vec{j})\ \mathrm{N/kg}$$

El módulo del campo es:

$$g = \sqrt{(15)^2 + (1{,}5)^2} \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N/kg} = 2{,}1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N/kg}$$

b) Hallamos la fuerza sobre la masa: m = 10 g = 0,01 kg.

$$F = m\,g = 0{,}01\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N/kg} = 2{,}1 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

15. Al acercar dos masas, su energía potencial gravitatoria disminuye. El desplazamiento tiene lugar en el mismo sentido en que actúa la fuerza gravitatoria. El trabajo realizado por el campo es, entonces, positivo.

— Cuando alejamos dos masas, en cambio, la energía potencial aumenta. Estamos realizando un trabajo contra la fuerza gravitatoria. Por tanto, el trabajo realizado por el campo es negativo.

16. Si la única fuerza que actúa es la gravitatoria, la masa se moverá hacia potenciales menores. Esto corresponde a un trabajo positivo y una disminución de la energía potencial.

— La masa perderá energía potencial gravitatoria.

17. Datos: Ep_A = 100 J; Ep_B = –500 J

Relacionamos el trabajo con la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = -(-500\ \mathrm{J} - 100\ \mathrm{J}) = 600\ \mathrm{J}$$

La respuesta correcta es la *b.*

18. Para que en un punto del espacio exista un potencial gravitatorio diferente de cero no es necesario que exista una masa en ese punto. Habrá un potencial distinto de cero si en una zona cercana al punto hay alguna masa, siempre que no tomemos ese preciso lugar como origen de la energía potencial.

19. Datos: $M_1 = 3{,}6 \cdot 10^9$ kg; $M_2 = 9{,}8 \cdot 10^9$ kg;

OP_1 = (–3, –4) m; OP_2 = (8, –4) m

a) Determinamos el potencial gravitatorio creado por M_1 en P (–1, 5) m:

$$\overrightarrow{OP} = (-1, 5)\ \mathrm{m}$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP}_1 = (-1, 5)\ \mathrm{m} - (-3, -4)\ \mathrm{m} = (2, 9)\ \mathrm{m}$$

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 9^2} = 9{,}2\ \mathrm{m}$$

$$V_1 = -G\,\frac{M_1}{r_1} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{3{,}6\cdot 10^9\ kg}{9{,}2\ m}$$

$$V_1 = -2{,}6\cdot 10^{-2}\ J/kg$$

Determinamos el potencial gravitatorio debido a M_2 en P:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_2} = (-1, 5)\ m - (8, -4)\ m = (-9, 9)\ m$$

$$r_2 = \sqrt{9^2 + 9^2} = 12{,}7\ m$$

$$V_2 = -G\,\frac{M_2}{r_2} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\,\frac{9{,}8\cdot 10^9\ kg}{12{,}7\ m}$$

$$V_2 = -5{,}1\cdot 10^{-2}\ J/kg$$

El potencial total será la suma algebraica de V_1 y V_2:

$$V = V_1 + V_2 = -2{,}6\cdot 10^{-2}\ J/kg - 5{,}1\cdot 10^{-2}\ J/kg$$

$$V = -7{,}7\cdot 10^{-2}\ J/kg$$

b) Determinamos la energía potencial de una masa de 140 g situada en el punto P:

$$Ep = m\,V = 0{,}14\ kg\cdot(-7{,}7\cdot 10^{-2}\ J/kg) = -1{,}1\cdot 10^{-2}\ J$$

20. Datos: $M = 1{,}2\cdot 10^{12}$ kg; $r_1 = 10$ km $= 1\cdot 10^4$ m;

$r_2 = 24$ km $= 2{,}4\cdot 10^4$ m

a) Hallamos el potencial gravitatorio creado por M_1 en cada punto:

$$V_1 = -G\,\frac{M}{r_1} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{1{,}2\cdot 10^{12}\ kg}{1\cdot 10^4\ m}$$

$$V_1 = -8\cdot 10^{-3}\ J/kg$$

$$V_2 = -G\,\frac{M}{r_2} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{1{,}2\cdot 10^{12}\ kg}{2{,}4\cdot 10^4\ m}$$

$$V_2 = -3{,}3\cdot 10^{-3}\ J/kg$$

b) Determinamos el trabajo realizado por el campo para llevar una masa m = 2,5 kg desde el primer punto hasta el segundo como la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 = m\,V_1 - m\,V_2$$

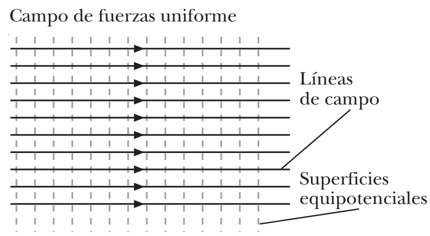
$$W = m\,(V_1 - V_2) = 2{,}5\ kg\cdot(-8-(-3{,}3))\cdot 10^{-3}\ J/kg$$

$$W = -1{,}2\cdot 10^{-2}\ J$$

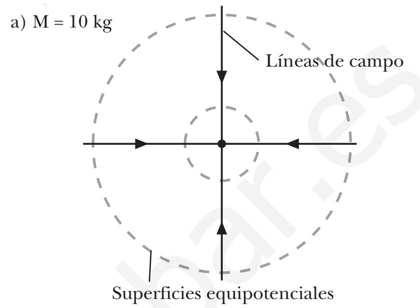
21. Las líneas de campo y las superficies equipotenciales representan de forma gráfica el campo gravitatorio. Las líneas de campo nos indican la dirección, el sentido y la intensidad relativa del campo en cada punto. Por otra parte, las superficies equipotenciales nos muestran las regiones del espacio con el mismo potencial. Si una masa se mueve manteniéndose por la misma superficie, mantendrá constante su energía potencial. Por tanto, el campo gravitatorio no realiza trabajo sobre ella.

22. Cerca de las masas dibujaremos más juntas las líneas de campo, ya que en esta zona es más intenso el campo gravitatorio.

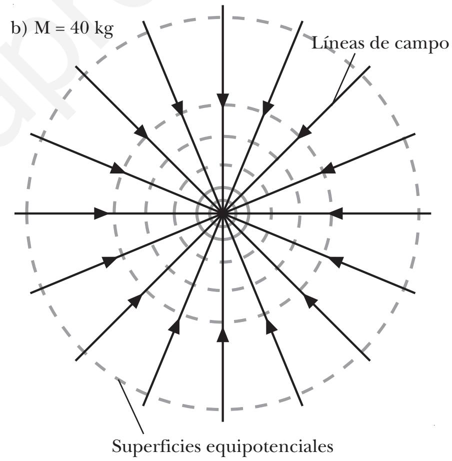
23.



24.



Superficies equipotenciales



25. El flujo de un campo uniforme a través de una superficie cerrada es nulo. Los vectores intensidad de un campo uniforme son paralelos y del mismo sentido en todos los puntos del espacio. Entonces, el número de líneas de campo que entran en una superficie cerrada es igual al número de líneas de campo que salen de ella, y el flujo total es cero.

26. El flujo gravitatorio a través de una superficie esférica que encierra masa es siempre negativo. El vector superficie $d\vec{S}$ apunta, por convenio, hacia el exterior de la superficie cerrada. En cambio, el vector intensidad de campo gravitatorio apunta hacia la masa que lo crea, es decir, hacia el interior de S. Como el flujo a través de una superficie dS es el producto escalar de $\vec{g}$ por $d\vec{S}$,

$$\vec{g}\cdot d\vec{S} = g\ dS\cos 180° = -g\ dS\ ,$$

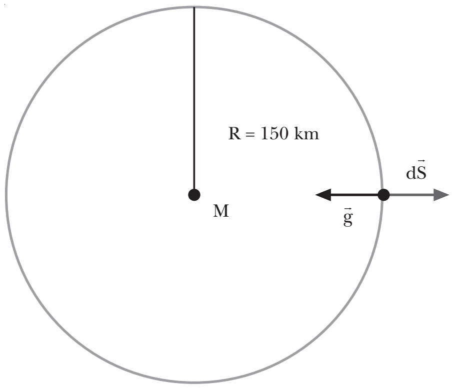
el flujo es siempre negativo.

27. El teorema de Gauss es útil para calcular la intensidad del campo gravitatorio en distribuciones de masa con

una geometría sencilla. En los casos donde el módulo de $\vec{g}$ es constante para toda la superficie S, y su dirección es perpendicular a dicha superficie en cada punto:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S -g \, dS = -g \int_S dS = -g \, S$$

28. Datos: M = 4,5 · 10^8 kg; R = 150 km



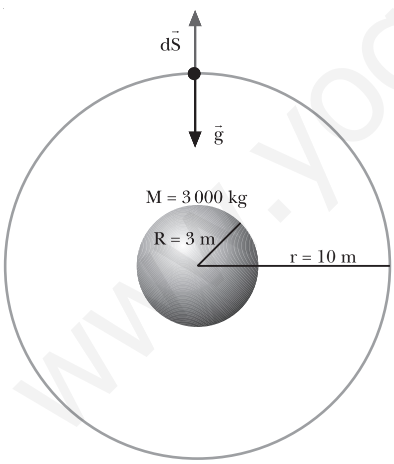
Aplicamos el teorema de Gauss para hallar el flujo, teniendo en cuenta que la distancia a la masa central es constante en toda la superficie esférica:

$$\Phi = -4\pi \, GM$$

$$\Phi = -4\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 4{,}5 \cdot 10^8 \, kg$$

$$\Phi = -0{,}38 \, N{\cdot}m^2/kg$$

29. Datos: M = 3 000 kg; R = 3 m; r = 10 m



Escogemos como superficie gaussiana S una esfera concéntrica a la esfera y de radio r = 10 m.

Calculamos el flujo a través de la superficie, teniendo en cuenta que $\vec{g}$ será constante en toda la superficie, y que $\vec{g}$ y $d\vec{S}$ son paralelos y de sentido opuesto en cada punto de la superficie:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_s g \, dS \cos 180° = -g \int_S dS = -g \; 4\pi r^2$$

Aplicamos el teorema de Gauss y despejamos el campo gravitatorio:

$$\Phi = 4\pi \, GM; \quad -g \; 4\pi r^2 = -4\pi \, GM; \quad g = G \, \frac{M}{r^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{3\,000 \, kg}{(10 \, m)^2} = 2 \cdot 10^{-9} \, \frac{N}{kg}$$

Calculamos el potencial a partir del campo:

$$V = \int_r^\infty \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -G \, \frac{M}{r^2} \, \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -G \, \frac{M}{r^2} \, dr$$

$$V = -G \, \frac{M}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{3\,000 \, kg}{10 \, m}$$

$$V = -2 \cdot 10^{-8} \; J/kg$$

En este caso, como nos interesamos en un punto situado en el exterior de la distribución de masa, el campo y el potencial son los mismos que crearía una masa puntual situada en el centro de la esfera.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 68)

a) Respuesta sugerida

Avión

Inventor: El alemán Otto Lilienthal creó el primer planeador en 1891 y efectuó con él más de 2 000 vuelos. Sin embargo, el primer vuelo controlado con motor lo llevan a cabo los hermanos Wright en 1903, en un aeroplano (el *Flyer*) que ellos mismos diseñaron y construyeron.

Modelos: Algunos de los modelos más representativos en la historia de la aviación han sido los siguientes:

Boeing B-247. 1933. Fue el primer avión de transporte totalmente metálico.

Boeing B-747 (Jumbo). 1970. Avión de pasajeros de gran capacidad (490 pasajeros) ampliamente utilizado.

Douglas DC-10. 1971. Avión de pasajeros de gran capacidad (375 personas).

Concorde. 1976. Primer avión de pasajeros supersónico.

Usos industriales o sociales: Actualmente el avión es el medio de transporte de pasajeros y mercancías más rápido y más utilizado en largos recorridos. También se emplea habitualmente en labores humanitarias, como la distribución de medicinas y alimentos.

Cohete

Inventor: Las bases teóricas del vuelo de los cohetes fueron establecidas por el ruso K. E. Tsiolkovski en 1903.

Modelos

Sputnik 1. 1957. Fue el primer satélite lanzado al espacio.

Vostok 1. 1961. Esta cápsula lanzó el primer ser humano al espacio, el cosmonauta ruso Yuri Gagarin (1934-1968).

Titán II. 1966. Un lanzador de dos etapas que permitió acoplar por primera vez dos naves espaciales.

Saturno V. 1969. El cohete que transportó el primer hombre a la Luna, durante la misión *Apollo 11.*

Viking I y II. 1976. Sondas que llegaron a Marte.

Pioneer 11. 1973. Sonda que llegó a Júpiter y Saturno.

Voyager 1 y 2. 1977. Sonda destinada a recoger datos sobre los cuerpos exteriores del Sistema Solar.

Challenger. 1984. Transbordador espacial que lleva a cabo el primer paseo espacial autónomo.

Ariane. 1979. Un cohete europeo, usado para la puesta en órbita de satélites.

Mars Pathfinder. 1997. Nave espacial no tripulada que se posó en Marte.

Prospector. 1998. Sonda lunar que halló indicios de la existencia de agua en la Luna.

Usos industriales o sociales: Permite propulsar vehículos aereos espaciales; tripulados o no. Gracias a los cohetes, el ser humano ha conseguido viajar más allá de su planeta natural, la Tierra.

Helicóptero

Inventor: Leonardo da Vinci diseñó el primer vehículo de hélices giratorias movidas por un mecanismo de relojería. El primer helicóptero fue construido en 1784 por los franceses Launoy y Bienvenu. El español Juan de la Cierva solucionó el problema de la estabilidad y construyó el autogiro, un vehículo controlable.

Modelos: VS 300. 1940. Desarrollado por I. Sikorskij, fue el primer helicóptero capaz de transportar una carga útil con total maniobrabilidad.

Sea King. Helicóptero británico utilizado actualmente en misiones de rescate.

MI-26. Helicóptero ruso actual.

Sikorsky S-64. Helicóptero pesado norteamericano capaz de transportar grandes pesos, como camiones.

Boeing CH-47. Helicóptero pesado norteamericano.

Usos industriales o sociales: La gran maniobrabilidad del helicóptero lo hace especialmente útil en actividades que el avión no puede desempeñar, como vuelos rasantes sobre el mar o misiones de rescate.

Globo aerostático

Inventor: El jesuita italiano Francisco de Lana propuso en 1670 una nave que se sustentara mediante esferas en las que se había aspirado el aire. El sacerdote brasileño Bartolomeu de Gusmão demostró, en presencia del rey Juan V de Portugal, el primer modelo de globo de aire caliente. En 1783 se eleva en París el primer globo con pasajeros. Fue construido por los hermanos Montgolfier y transportaba a Pilâstre de Rozier y el marqués de Arlandes.

Usos industriales o sociales: El globo fue el primer sistema utilizado para elevarse en el aire. Hoy, debido a las mayores prestaciones del avión, ha quedado en desuso y se utiliza casi exclusivamente en actividades deportivas, de recreo o aventura.

Modelos: *Double Eagle II.* Con este globo se llevó a cabo con éxito la primera travesía del Atlántico Norte en 1978.

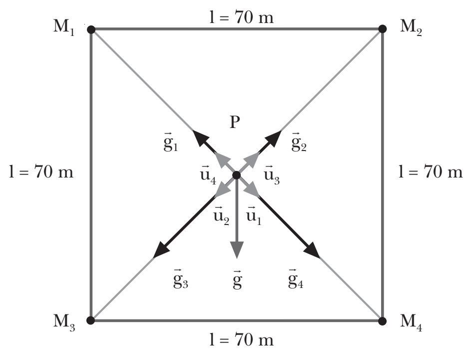
b) Se recomienda que previamente a la organización del coloquio, los alumnos estudien los contenidos desarrollados en esta página y completen su información con una labor de investigación bibliográfica.

A continuación se determinarán los encargados de las diferentes funciones: moderador, participantes y público.

El moderador presentará a los participantes, introducirá el tema citando los principales medios de transporte aéreo en la sociedad y las principales aplicaciones de cada uno, y formulará la primera pregunta a alguno de los participantes. Al final del coloquio, el público podrá exponer sus opiniones acerca de la importancia de los medios de transporte aéreo en la sociedad y formular preguntas a los diferentes participantes.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 70 y 71)

30. Datos:



Hallamos primero la distancia de cada masa al punto P, que será la misma para las cuatro masas:

$$r = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{70\ \text{m}}{\sqrt{2}} = 49{,}5\ \text{m}$$

Determinamos los vectores unitarios de las direcciones de cada masa:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} - \vec{j}) \quad \vec{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$$

a) Determinamos el campo creado en P por cada una de las cuatro masas:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{M_1}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\,000\ \text{kg}}{(49{,}5\ \text{m})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{g}_1 = 1{,}9 \cdot 10^{-11}\ (-\vec{i} + \vec{j})\ \text{N kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\,\frac{M_2}{r^2}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\,000\ \text{kg}}{(49{,}5\ \text{m})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{g}_2 = 1{,}9 \cdot 10^{-11}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\text{N / kg}$$

$$\vec{g}_3 = -G\,\frac{M_3}{r^2}\,\vec{u}_3$$

$$\vec{g}_3 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2\,000\ \text{kg}}{(49{,}5\ \text{m})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{g}_3 = 3{,}8 \cdot 10^{-11}\ (-\vec{i} - \vec{j})\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_4 = -G\,\frac{M_4}{r^2}\,\vec{u}_4$$

$$\vec{g}_4 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2\,000\ \text{kg}}{(49{,}5\ \text{m})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{g}_4 = 3{,}8 \cdot 10^{-11}\ (\vec{i} - \vec{j})\ \text{N kg}$$

El campo gravitatorio resultante es la suma vectorial de los cuatro:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$$

$$\vec{g} = 1{,}9 \cdot 10^{-11}\left[(-\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j})\right] +$$

$$+\,3{,}8 \cdot 10^{-11}\left[(-\vec{i} - \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j})\right]\text{N/kg}$$

$$\vec{g} = -3{,}8 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \text{N/kg}$$

Su módulo es $g = -3{,}8 \cdot 10^{-11}$ N/kg

b) Calculamos la fuerza que actuaría sobre la masa de 100 kg:

$$\vec{F} = m\,\vec{g} = 100\ \text{kg} \cdot (-3{,}8 \cdot 10^{-11})\ \vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{F} = -3{,}8 \cdot 10^{-9}\ \vec{j}\ \text{N}$$

$$F = 3{,}8 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

c) Calculamos el potencial gravitatorio debido a cada una de las cuatro masas:

$$V_1 = -G\,\frac{M_1}{r}$$

$$V_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{1\,000\ \text{kg}}{49{,}5\ \text{m}} = -1{,}3 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_2 = -G\,\frac{M_2}{r}$$

$$V_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{1\,000\ \text{kg}}{49{,}5\ \text{m}} = -1{,}3 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_3 = -G\,\frac{M_3}{r}$$

$$V_3 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{2\,000\ \text{kg}}{49{,}5\ \text{m}} = -2{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_4 = -G\,\frac{M_4}{r}$$

$$V_4 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{2\,000\ \text{kg}}{49{,}5\ \text{m}} = -2{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

El potencial gravitatorio resultante será la suma de los cuatro:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -8{,}1 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

d) Calculamos la energía potencial gravitatoria que adquiriría una masa de 100 kg sometida a este potencial:

$$Ep = m\,V = 100\ \text{kg} \cdot (-8{,}1 \cdot 10^{-9})\ \text{J/kg}$$

$$Ep = -8{,}1 \cdot 10^{-7}\ \text{J}$$

31. Datos: R = 0,5 m; M = 1 000 kg

a) r = 1,5 m

Este punto es exterior a la corteza. Por tanto, aplicamos las expresiones del campo y el potencial gravitatorios creados por una corteza esférica en un punto exterior.

$$g = G\,\frac{M}{r^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\,000\ \text{kg}}{(1{,}5\ \text{m})^2} = 3 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$V = -G\,\frac{M}{r}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1\,000\ \text{kg}}{1{,}5\ \text{m}} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

b) r = 0,25 m

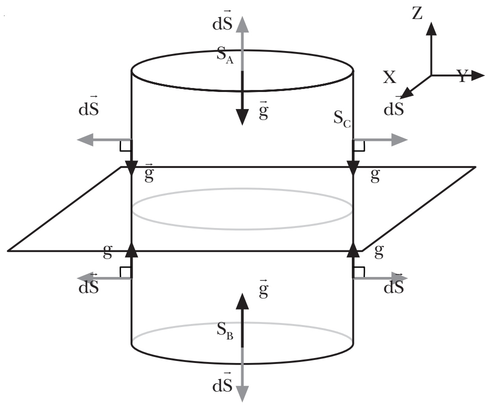
En este caso, el punto es interior a la corteza. Por tanto,

$$g = 0\ \text{N/kg}; \quad V = -G\,\frac{M}{R}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{1\,000\ \text{kg}}{0{,}5\ \text{m}} = -1{,}3 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

La superficie gaussiana es cilindrica, de caras paralelas a la lámina, y está cortada por ésta.

32.



Determinamos el flujo a través de la superficie. En las dos caras paralelas a la lámina, S_a y S_b, el campo gravitatorio es perpendicular a la superficie y de módulo constante:

$$\vec{g} \cdot d\vec{S} = g\ dS \cos 180° = -g\ dS$$

En cambio, en la superficie cilíndrica S_c, el campo es paralelo a la superficie, de forma que el ángulo entre $\vec{g}$ y $d\vec{S}$ es de 90°. Por tanto,

$$\vec{g} \cdot d\vec{S} = g\ dS \cos 90° = 0$$

Entonces, el flujo total a través de la superficie, si llamamos S a la superficie de cada cara de la superficie cilíndrica, será:

$$\Phi = \int_{S_A} \vec{g} \cdot d\vec{S} + \int_{S_B} \vec{g} \cdot d\vec{S} + \int_{S_C} \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = -g\ S_A - g\ S_B + 0 = -g\ (S_A + S_B) = -2g\ S$$

Aplicamos el teorema de Gauss para hallar el campo gravitatorio, teniendo en cuenta que la masa interior a la superficie será $M = S \cdot \sigma$:

$$\Phi = -4\pi\ GM = -4\pi\ GS\sigma; \quad -2g\ S = -4\pi\ GS\sigma$$

$$g = 2\pi\ G\sigma$$

Por tanto, el vector campo gravitatorio es, para cada lado de la lámina,

por encima de la lámina: $\vec{g}_A = -2\pi\ G\sigma\ \vec{k}$

por debajo de la lámina: $\vec{g}_B = 2\pi\ G\sigma\ \vec{k}$

Calculamos el potencial a partir del campo gravitatorio:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -2\pi\ G\sigma\ dz = -2\pi\ G\sigma\left(z_B - z_A\right)$$

$$V_A - V_B = 2\pi\ G\sigma\left(z_B - z_A\right)$$

Si escogemos como origen de potencial la lámina plana, obtenemos:

$$V = 2\pi\ G\sigma\ z$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 72 y 73)

33. *Modelo de Ptolomeo (geocéntrico):* este modelo consideraba la Tierra en el centro del universo, con la Luna, el Sol y los planetas describiendo órbitas circulares o epiciclos alrededor de puntos que, a su vez, orbitaban alrededor de la Tierra. Este modelo explicaba los complejos movimientos de los planetas, algo que no había conseguido Aristóteles.

    Modelo de Copérnico (heliocéntrico): según Copérnico, el Sol se situaba en el centro del sistema, y la Tierra, con los otros planetas, giraba alrededor del Sol. La Luna era el único objeto en órbita alrededor de la Tierra, mientras que esta última ya no era el centro del universo, sino que también estaba en movimiento.

34. *Leyes de Kepler:*

    1. Todos los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.
    2. La recta que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
    3. El cuadrado del período de la órbita de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del Sol al planeta,

$$T^2 = C\ R^3$$

35. *Ley de la gravitación universal:* dos partículas materiales se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

    Características principales de las fuerzas gravitatorias:

    — La dirección del vector fuerza es la de la recta que une las dos partículas.

    — Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas.

    — Son fuerzas que actúan a distancia.

    — Se presentan siempre a pares, ya que si una partícula 1 atrae a otra partícula 2, la segunda también atrae a la partícula 1, con una fuerza igual en módulo y dirección pero de sentido contrario. Son fuerzas de acción y reacción.

    — La constante de gravitación universal G tiene un valor muy pequeño, de forma que la fuerza será inapreciable a menos que una de las masas sea muy grande.

36. Recibe el nombre de campo de fuerzas una perturbación del espacio tal que, si situamos en esa región un cuerpo de prueba, éste se ve sometido a una fuerza.

    — Ejemplos: campo gravitatorio creado por una placa infinita de densidad uniforme (campo uniforme) campo eléctrico creado por una carga puntual (campo central).

37. Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo sometida a la acción de la fuerza del campo, la suma de la energía potencial más la energía cinética (denominada energía mecánica), es constante.

    Demostración:

    — El trabajo realizado por las fuerzas de un campo conservativo no depende del camino seguido. Por tanto, se puede expresar como la variación de cierta magnitud, que llamamos energía potencial:

$$W = Ep_A - Ep_B = -\Delta Ep$$

    — Por otro lado, el teorema de las fuerzas vivas establece que el trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza resultante se invierte en variar su energía cinética:

$$W = \int_A^B F_t\ dr = \int_A^B m\ a_t\ dr = \int_A^B m\ \frac{dv}{dt}\ dr$$

$$W = \int_A^B m\ dv\ \frac{dr}{dt} = -\int_A^B mv\ dv = \frac{1}{2} m\ v_B^2 - \frac{1}{2} m\ v_A^2$$

$$W = Ec_B - Ec_A = \Delta Ec;$$

$$W = \Delta Ec$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} W = Ec_B - Ec_A \\ W = Ep_A - Ep_B \end{array}\right\} Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

38. La intensidad del campo gravitatorio en un punto del espacio es la fuerza que experimentaría la unidad de masa situada en ese punto. Es una magnitud vectorial. En cambio, el potencial gravitatorio en un punto del espacio es la energía potencial gravitatoria que tendría una masa unidad colocada en ese punto. Es una magnitud escalar.

39. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para desplazar un cuerpo de masa m desde un punto A a un punto B es igual a la diferencia de energía potencial entre los dos puntos. La energía potencial puede calcularse como el producto del potencial por la masa, de forma que:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = mV_A - mV_B = m(V_A - V_B)$$

Es decir, el trabajo es igual al producto de la masa por la diferencia de potencial gravitatorio.

40. Al separar dos masas, su energía potencial gravitatoria aumenta. Las masas se desplazan por acción de una fuerza exterior al campo gravitatorio, por tanto el trabajo realizado por el campo es negativo.

41. Para representar un campo de fuerzas como el gravitatorio, se utilizan líneas de campo y superficies equipotenciales. Las líneas de campo son tangentes en cada punto al vector intensidad de campo, mientras que las superficies equipotenciales unen todos los puntos con el mismo potencial gravitatorio.

42. El flujo gravitatorio es una medida del número de líneas de campo gravitatorio que atraviesan una determinada superficie.

43. Datos: m_1 = 150 g = 0,15 kg; m_2 = 200 g = 0,20 kg; d = 10 cm = 0,1 m

Calculamos la fuerza a partir de la ley de la gravitación universal:

$$F = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{0{,}15\ kg \cdot 0{,}20\ kg}{(0{,}1\ m)^2}$$

$$F = 2 \cdot 10^{-10}\ N$$

44. Datos: $m_1 = m_2 = m$ = 10 kg; F = 10^{-5} N

Determinamos la distancia despejándola de la ley de la gravitación universal:

$$F = G\frac{m_1\, m_2}{r^2} = G\frac{m^2}{r^2};\quad r = \sqrt{\frac{G\, m^2}{F}}$$

$$r = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\ (10\ kg)^2}{10^{-5}\ N}} = 2{,}6 \cdot 10^{-2}\ m$$

45. Datos: $m_1 = m_2 = m$; F = 10^{-4} N; r = 3 mm = $3 \cdot 10^{-3}$ m

Determinamos la masa despejándola de la ley de la gravitación universal:

$$F = G\frac{m^2}{r^2};\quad m = \sqrt{\frac{F\, r^2}{G}}$$

$$m = \sqrt{\frac{10^{-4}\ N \cdot (3 \cdot 10^{-3}\ m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}}} = 3{,}7\ kg$$

46. Datos: m = 2 kg; d = 50 m = 0,5 m

Determinamos la intensidad del campo gravitatorio creado por la masa puntual:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

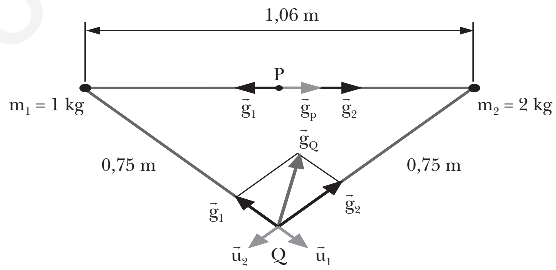
$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{(0{,}5\ m)^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$

Calculamos el potencial gravitatorio:

$$V = G\frac{m}{r}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{0{,}5\ m} = -2{,}7 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

47. Datos:



— Punto P: cada masa está a una distancia r = 0,53 m.

Determinamos el campo creado por cada una de las masas:

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg}{(0{,}53\ m)^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{g}_1 = -2{,}4 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r^2}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{(0{,}53\ m)^2}\,(-\vec{i})$$

$$\vec{g}_2 = 4{,}7 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ N/kg$$

El campo resultante será la suma vectorial:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2{,}3 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ N/kg$$

$$g = |\vec{g}| = 2{,}3 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

— Punto Q: cada una de las masas está a una distancia r = 0,75 m.

Determinamos el campo creado por cada una de las masas:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m_1}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg}{(0{,}75\ m)^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -1{,}2 \cdot 10^{-10}\,\vec{u}_1\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -G\,\frac{m_2}{r^2}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{(10{,}75\ m)^2}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -2{,}4 \cdot 10^{-10}\,\vec{u}_2\ N/kg$$

El campo total será la suma vectorial:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1{,}2\,\vec{u}_1 - 2{,}4\,\vec{u}_2) \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

$$g = \left|\vec{g}\right| = \sqrt{(-1{,}2)^2 + (-2{,}4)^2} \cdot 10^{-10}\ N\ kg$$

$$g = 2{,}8 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

48. Datos: m_1 = 0,5 kg; m_2 = 0,75 kg; r = 2 m

Determinamos la energía potencial gravitatoria:

$$Ep = -\,G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{0{,}5\ kg \cdot 0{,}75\ kg}{2\ m}$$

$$Ep = -1{,}2 \cdot 10^{-11}\ J$$

49. Datos: m_1 = 450 g = 0,45 kg; d = 50 cm = 0,5 m; m_2 = 3 g = $3 \cdot 10^{-3}$ kg

Hallamos el potencial gravitatorio creado por m_1 a 50 cm:

$$V = -G\,\frac{m_1}{r}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{0{,}45\ kg}{0{,}5\ m} = -6 \cdot 10^{-11}\ \frac{J}{kg}$$

Determinamos la energía potencial multiplicando el potencial por m_2:

$$Ep = m_2\ V = -3 \cdot 10^{-3} kg \cdot 6 \cdot 10^{-11}\ N/kg = -1{,}8 \cdot 10^{-13}\ J$$

50. Datos: V = $-5 \cdot 10^{-9}$ J/kg; r = 2 m

Determinamos la masa despejándola de la expresión del potencial creado por una masa puntual:

$$V = -G\frac{M}{r}; \quad M = -\frac{Vr}{G}$$

$$M = \frac{-5 \cdot 10^{-9}\ J/kg \cdot 2\ m}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}} = 149{,}9\ kg$$

51. Datos: $M_1 = 2 \cdot 10^6$ kg; $M_2 = 4 \cdot 10^6$ kg; $r_1 = 3 \cdot 10^3$ m; $r_2 = 4 \cdot 10^3$ m

Calculamos el potencial gravitatorio en el punto P como la suma algebraica del potencial creado por cada una de las masas:

$$V_1 = -G\,\frac{M_1}{r_1}$$

$$V_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^6\ kg}{3 \cdot 10^3\ m} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}\ \frac{J}{kg}$$

$$V_2 = -G\,\frac{M_2}{r_2}$$

$$V_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^6\ kg}{4 \cdot 10^3\ m} = -6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{J}{kg}$$

$$V = V_1 + V_2 = -1{,}1 \cdot 10^{-7}\ J/kg$$

— Si colocamos una masa de 500 kg en el punto, su energía potencial será el producto de la masa por el potencial en el punto P:

$$Ep = m\ V = -500\ kg \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-7}\ J/kg = -5{,}5 \cdot 10^{-5}\ J$$

52. Datos: M = 2 kg; r_1 = 1 m; r_2 = 40 cm = 0,4 m; m = 500 g = 0,5 kg

a) Determinamos el potencial creado por una masa puntual a las dos distancias:

$$V_1 = -G\,\frac{M}{r_1}$$

$$V_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{1\ m} = -1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

$$V_2 = -G\,\frac{M}{r_2}$$

$$V_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{2\ kg}{0{,}4\ m} = -3{,}3 \cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

b) El trabajo realizado por el campo para trasladar la masa de desde el primer punto hasta el segundo será la variación de energía potencial:

$$W = m\left(V_1 - V_2\right)$$

$$W = 0{,}5\ kg \cdot \left[-1{,}3 - (-3{,}3)\right] \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

$$W = 10^{-10}\ J$$

53. Datos: R = 500 m; M = 6 000 kg; d = 300 m

Tomamos como superficie gaussiana S, una esfera concéntrica con la distribución de masa. Por simetría, el vector campo gravitatorio es perpendicular a la superficie S en todos los puntos y de valor constante:

$$\vec{g} \cdot d\vec{S} = g - dS \cdot \cos 180^\circ = -g\ dS$$

Entonces, el flujo a través de S es:

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int -g\ dS = -g \int dS = -g\ 4\pi\left(R + d\right)^2$$

Aplicamos el teorema de Gauss para determinar la intensidad del campo gravitatorio:

$$\Phi = -4\pi\, GM; \quad -g\, 4\pi \left(R+d\right)^2 = -4\pi\, GM$$

$$g = G\,\frac{M}{\left(R+d\right)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{6\,000\ kg}{(500\ m + 300\ m)^2}$$

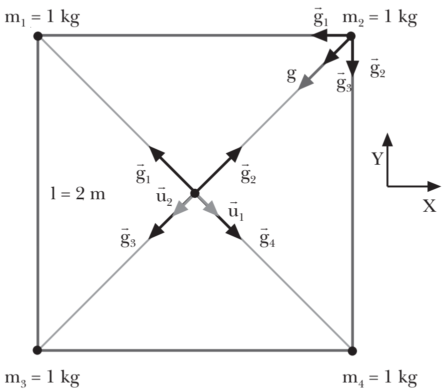
$$g = 6{,}3 \cdot 10^{-13}\ N/kg$$

Calculamos el potencial a partir del campo gravitatorio:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{g} \cdot d\vec{r} = -G\,\frac{M}{R+d}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\,\frac{6\,000\ kg}{(500+300)\ m} = -5 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

54. Datos:



a) Determinamos el campo gravitatorio debido a cada una de las masas. Para ello, calculamos la distancia de los vértices al centro del cuadrado:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\ m}{\sqrt{2}} = 1{,}4\ m$$

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\,\frac{1\ kg}{(1{,}4\ m)^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -3{,}4 \cdot 10^{-11}\,\vec{u}_1\ N\ kg$$

$$\vec{g}_2 = -3{,}4 \cdot 10^{-11}\,\vec{u}_2\ N/kg$$

$$\vec{g}_3 = 3{,}4 \cdot 10^{-11}\,\vec{u}_2\ N/kg$$

$$\vec{g}_4 = 3{,}4 \cdot 10^{-11}\,\vec{u}_1\ N/kg$$

El campo en el centro del cuadrado será la suma vectorial de las cuatro contribuciones:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4 = 0\ N/kg$$

b) Calculamos el campo gravitatorio debido a cada partícula en un vértice del cuadrado:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m_1}{r_1^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg}{(2\ m)^2}\,\vec{i} = -1{,}7 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\,\frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_4 = -1{,}7 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N/kg$$

$$\vec{g}_3 = -G\,\frac{m_3}{r_3^2}\,\vec{u}_3$$

$$\vec{g}_3 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg}{\left(2\sqrt{2\ m}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{g}_3 = -5{,}9 \cdot 10^{-12}\,(\vec{i} + \vec{j})\ N\ kg$$

El vector campo gravitatorio en cada vértice será la suma vectorial de los campos de tres partículas:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$$

$$\vec{g} = (-2{,}3 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 2{,}3 \cdot 10^{-11}\,\vec{j})\ N/kg$$

$$\vec{g} = -2{,}3\,(\vec{i} + \vec{j}) \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

Determinamos su módulo:

$$\left|\vec{g}\right| = g = \sqrt{(-2{,}3)^2 + (-2{,}3)^2} \cdot 10^{-11}\ N\ kg$$

$$g = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

Y el módulo de la fuerza que experimenta cada partícula es:

$$F = m\,g = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ N$$

c) Calculamos el potencial debido a cada partícula en un vértice:

$$V_1 = V_4 = -G\,\frac{m}{r_1}$$

$$V_1 = V_4 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg}{2\ m} = -3{,}3 \cdot 10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

$$V_3 = -G\,\frac{m}{r_3}$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\,\frac{1\ kg}{2\sqrt{2}\ m} = -2{,}3 \cdot 10^{-11}\,\frac{J}{kg}$$

El potencial total será la suma algebraica:

$$V = V_1 + V_3 + V_4$$

$$V = 2 \cdot (-3{,}3 \cdot 10^{-11}\ J/kg) - 2{,}3 \cdot 10^{-11}\ J/kg$$

$$V = -8{,}9 \cdot 10^{-11}\ J/kg$$

Entonces, la energía potencial gravitatoria será el producto del potencial por la masa:

$$Ep = mV = -1\ kg \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-11}\,J\,/\,kg = -8{,}9 \cdot 10^{-11}\,J$$

55. La fuerza elástica que un muelle de constante elástica igual a K ejerce cuando está comprimido una distancia x viene dada por:

$$\vec{F} = -Kx\,\vec{i}$$

donde $\vec{i}$ es el vector unitario en la dirección de las x positivas.

La fuerza será conservativa si el trabajo que realiza para trasladar una partícula depende sólo de las posiciones inicial y final:

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B -Kx\, \vec{i}\, d\vec{r} = -K\int_A^B x\, dx$$

$$W = -\frac{1}{2}K\, x_B^2 + \frac{1}{2}K\, x_A^2 = \frac{1}{2}K\, x_A^2 - \frac{1}{2}K\, x_B^2$$

Por tanto, como el resultado no depende del camino seguido, la fuerza es conservativa. Podemos comprobar que el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es cero:

$$W_C = \oint \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$W_C = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}\, d\vec{r} + \left[\int_A^B -kx\, dx\right] + \left[\int_B^A -kx\, dx\right]$$

$$W_C = -\frac{1}{2}K\, x_B^2 + \frac{1}{2}K\, x_A^2 - \frac{1}{2}K\, x_A^2 + \frac{1}{2}K\, x_B^2 = 0$$

El trabajo realizado será el incremento de la energía potencial elástica cambiado de signo.

$$W = Ep_A - Ep_B = -\Delta Ep$$

$$W = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2 = Ep_A - Ep_B$$

Por tanto, la energía potencial elástica vendrá dada por

$$Ep = \frac{1}{2}Kx^2 + C$$

La constante C viene determinada por la elección del origen de energías. Si escogemos como origen de potencia la posición de equilibrio (x = 0) obtenemos C = 0 y la energía potencial elástica resulta:

$$Ep = \frac{1}{2}Kx^2$$

56. Datos: $M = 5 \cdot 10^5$ kg; R = 10 km

Por simetría, el campo gravitatorio será constante en toda la superficie y perpendicular a ella. La intensidad del campo será la correspondiente a una masa puntual:

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int g\, dS \cos 180°$$

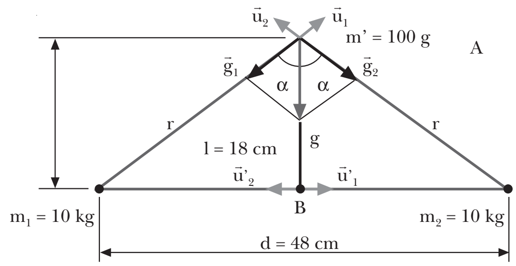
$$\Phi = -\int g\, dS = -g\int dS = -g\; 4\pi R^2$$

$$\Phi = -G\frac{M}{R^2}\, 4\pi R^2 = -4\pi\, GM$$

$$\Phi = -4\pi\, 6{,}67 \cdot 10^{-11}\; \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\; 5 \cdot 10^5\ kg$$

$$\Phi = -4{,}2 \cdot 10^{-4}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-1}$$

57. Datos:



a) Según la ecuación fundamental de la dinámica de traslación, la aceleración de la masa coincidirá en cada punto con la intensidad del campo gravitatorio en ese punto:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}; \quad \vec{F}_g = m\,\vec{g}; \quad m\,\vec{a} = m\,\vec{g}; \quad \vec{a} = \vec{g}$$

Calculamos, por tanto, el campo gravitatorio en A y en B.

A: Determinamos primero la distancia de cada masa al punto A:

$$r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l^2} = \sqrt{\left(\frac{48\ cm}{2}\right)^2 + (18\ cm)^2}$$

$$30\ cm = 0{,}3\ m$$

Calculamos el campo debido a cada masa y los sumamos vectorialmente:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{10\ kg}{(0{,}3\ m)^2}\,(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{g}_1 = -7{,}4 \cdot 10^{-9}\ \frac{N}{kg}\left(\frac{\frac{d}{2}}{r}\,\vec{i} + \frac{l}{r}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_1 = -7{,}4 \cdot 10^{-9}\ \frac{N}{kg} \cdot \frac{24\ cm}{30\ cm}\,\vec{i} + \frac{18\ cm}{30\ cm}\,\vec{j}$$

$$\vec{g}_1 = (-5{,}9\,\vec{i} - 4{,}4\,\vec{j})\,10^{-9}\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -\left|\vec{g}_2\right|\vec{u}_2 = -\left|\vec{g}_1\right|\vec{u}_2 = \left|\vec{g}_1\right|\left(\frac{\frac{d}{2}}{r}\,\vec{i} - \frac{l}{r}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_2 = (+5{,}9\,\vec{i} - 4{,}4\,\vec{j})\,10^{-9}\ N/kg$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -8{,}8 \cdot 10^{-9}\ \vec{j}\ N/kg$$

$$\vec{a} = -8{,}8 \cdot 10^{-9}\ \vec{j}\ m/s^2; \quad \vec{a} = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\ m/s^2$$

B: En este caso, la distancia de cada masa al punto B es d/2. Por tanto,

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_1^1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{10\ kg}{(0{,}24\ m)^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{g}_1 = -1{,}16 \cdot 10^{-8}\ \vec{i}\ N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -\left|\vec{g}_2\right| \vec{u}_2^1 = -\left|\vec{g}_1\right| \vec{u}_2^1 = 1{,}16 \cdot 10^{-8}\ \vec{i}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0\ \text{N/kg}$$

El campo total es nulo en este punto. Por tanto, la aceleración en el punto B es cero:

$$\vec{g} = \vec{a}; \quad a = 0\ \text{m/s}^2$$

b) Calculamos la energía potencial de la masa m' en el punto A:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = -G\frac{m_1}{r} - G\frac{m_2}{r}$$

$$V_A = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg}}{0{,}3\ \text{m}} -$$

$$-\ 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg}}{0{,}3\ \text{m}}$$

$$V_A = -4{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

$$Ep_A = m'\ V_A = 0{,}1\ \text{kg} \cdot (-4{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg})$$

$$Ep_A = -4{,}4 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Determinamos la energía potencial de la masa m' en el punto B:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -G\frac{m_1}{\frac{d}{2}} - G\frac{m_2}{\frac{d}{2}}$$

$$V_B = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg}}{0{,}24\ \text{m}} -$$

$$-\ 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10\ \text{kg}}{0{,}24\ \text{m}}$$

$$V_B = -5{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

$$Ep_B = m'\ V_B = 0{,}1\ \text{kg} \cdot (-5{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg})$$

$$Ep_B = -5{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía y despejamos la velocidad en el punto B:

$$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$$

$$Ep_A + 0 = Ep_B + Ec_B$$

$$Ec_B = Ep_A - Ep_B = -4{,}4 \cdot 10^{-10}\ \text{J} + 5{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

$$Ec_B = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

$$Ec_B = \frac{1}{2} m'\ v_B^2; \quad v_B = \sqrt{\frac{2\ Ec_B}{m'}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{0{,}1\ \text{kg}}} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 73)

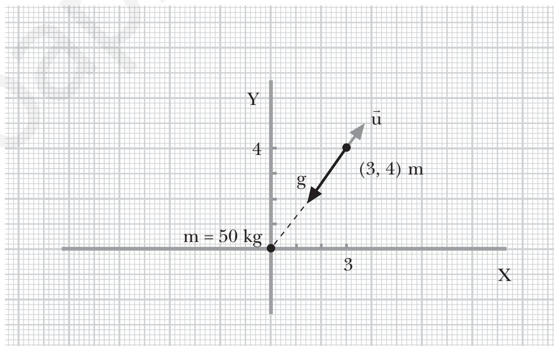
1. Que un campo de fuerzas sea conservativo significa que el trabajo realizado por las fuerzas del campo para desplazar una partícula de un punto a otro depende de las posiciones inicial y final, pero no del camino seguido. El campo gravitatorio es conservativo.

2. El potencial gravitatorio y la energía potencial gravitatoria son negativos, porque tomamos el origen de energía en el infinito. El trabajo del campo supone siempre una disminución de la energía potencial y del potencial. Por tanto, si consideramos que una partícula libre (o en el infinito) tiene energía potencial nula, cuando esté sometida al campo gravitatorio su energía potencial será negativa.

3. El potencial gravitatorio en un punto es la energía potencial que tendría una masa unidad situada en ese punto por el hecho de encontrarse sometida al campo gravitatorio. Por otro lado, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B es el trabajo realizado por el campo sobre la masa unidad para desplazarla de A a B.

4. Es posible que dos observadores den para el mismo cuerpo energías potenciales diferentes, ya que pueden haber considerado distintos orígenes de energía potencial. La magnitud que resulta relevante es la diferencia de energía potencial entre dos puntos. Esta diferencia tiene el mismo valor para ambos observadores, pero el origen escogido es arbitrario.

5. Datos:



a) Determinamos la distancia del punto al origen de coordenadas, donde se encuentra la masa:

$$r = \sqrt{(3\ \text{m})^2 + (4\ \text{m})^2} = 5\ \text{m}$$

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{g} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{50\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\vec{u}$$

$$\vec{g} = -1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \vec{u}\ \text{N/kg}$$

El vector unitario $\vec{u}$ es:

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\ \vec{i} + 4\ \vec{j}) = 0{,}6\ \vec{i} + 0{,}8\ \vec{j}$$

Por tanto el campo gravitatorio también se puede expresar:

$$\vec{g} = -g\ \vec{u} = -1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{N/kg} \cdot (0{,}6\ \vec{i} + 0{,}8\ \vec{j})$$

$$\vec{g} = (-0{,}78\ \vec{i} - 1{,}04\ \vec{j}) \cdot 10^{-10}\ \text{N/kg}$$

b) La fuerza que actuaría sobre una masa m = 20 kg será el producto de la masa por el campo:

$$\vec{F} = m\,\vec{g} = 20\ \text{kg} \cdot (-0{,}78\ \vec{i} - 1{,}04\ \vec{j}) \cdot 10^{-10}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{F} = (-15{,}6\ \vec{i} - 20{,}8\ \vec{j})\ \text{N}$$

$$\left|\vec{F}\right| = F = 2{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

c) Calculamos el potencial gravitatorio en el punto (3, 4) m.

$$V = -G\,\frac{M}{r}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{50\ \text{kg}}{5\ \text{m}} = -6{,}7 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

d) La energía potencial gravitatoria de la masa m = 20 kg será:

$$Ep = m\,V = -20\ \text{kg} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

$$Ep = -1{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

6. Datos: $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1\ 740$ km; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m

Determinamos el campo en la superficie teniendo en cuenta que, para una distribución de masa esférica, el campo fuera de la distribución es el mismo que el creado por una masa puntual situada en el centro de la distribución. Entonces:

$$g = G\,\frac{M_L}{R_L^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = 1{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

7. Datos: $m_1 = 12$ g = 0,012 kg; $m_2 = 18$ g = 0,018 kg; d = 1 cm = 0,01 m

En el punto medio, la distancia a cada masa es d/2 = $= 5 \cdot 10^{-3}$ m. Determinamos el potencial debido a cada masa y los sumamos algebraicamente para determinar el potencial total.

$$V_1 = -G\,\frac{m_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

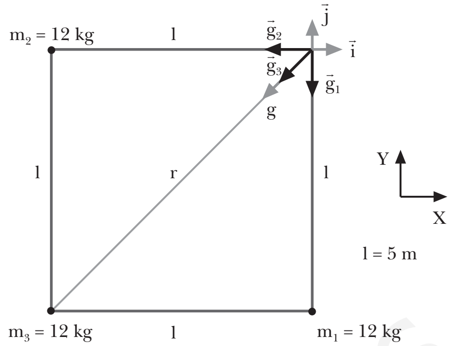
$$V_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{0{,}012\ \text{kg}}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = -1{,}6 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_2 = -G\,\frac{m_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$V_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{0{,}018\ \text{kg}}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = -2{,}4 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V = V_1 + V_2 = -4{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

8. Datos:



a) Calculamos el campo gravitatorio creado por cada masa en el cuarto vértice, y los sumamos vectorialmente para determinar al campo total:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{M_1}{l^2}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\ \vec{j}$$

$$\vec{g}_1 = -3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\,\frac{M_2}{l^2}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\ \vec{i}$$

$$\vec{g}_2 = -3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \vec{i}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_3 = -G\,\frac{M_3}{r^2}\,\vec{u}_3$$

$$\vec{g}_3 = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg}}{\left(\sqrt{(5\ \text{m})^2 + (5\ \text{m})^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{g}_3 = -1{,}1 \cdot 10^{-11}\ (\vec{i} + \vec{j})\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g} = \left[-3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \vec{j} - 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} - 1{,}1 \cdot 10^{-11}\ (\vec{i} + \vec{j})\right]\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g} = (-4{,}3\vec{i} - 4{,}3\vec{j}) \cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

$$g = \left|\vec{g}\right| = 6{,}1 \cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

b) Calculamos la energía potencial de una masa m = 12 kg en el cuarto vértice. Tendremos en cuenta que $M_1 =$ $= M_2 = M_3 = M$= 12 kg.

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A}$$

$$V_A = -2G\,\frac{M}{l} - G\,\frac{M}{\sqrt{l^2 + l^2}} = -GM\left(\frac{2}{l} + \frac{1}{l\sqrt{2}}\right)$$

$$V_A = -\,6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 12\ \text{kg} \cdot \left(\frac{2}{5\ \text{m}} + \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2}\text{m}}\right)$$

$$V_A = -4{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{J kg}$$

$$Ep_A = m\,V_A = -5{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

Calculamos la energía potencial de la masa m en el centro del cuadrado. Tendremos en cuenta que $M_1 = M_2 = M_3 = M = 12$ kg y que estas tres masas distan una distancia $\frac{r}{2}$ del centro del cuadrado.

$$\frac{r}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\ \text{m}}{\sqrt{2}} = 3{,}5\ \text{m}$$

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} = -3G\frac{M}{\frac{r}{2}}$$

$$V_B = -3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg}}{3{,}5\ \text{m}}$$

$$V_B = -6{,}9 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

$$Ep_B = m\,V_B = -8{,}3 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

El trabajo realizado por el campo será la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$$

$$W = \left[-5{,}2 - (-8{,}3)\right] \cdot 10^{-9}\ \text{J} = 3{,}1 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

9. Datos: $Ep_A = -80$ J; $Ep_B = -160$ J

   a) El trabajo realizado por el campo es la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -80\ \text{J} - (-160\ \text{J}) = 80\ \text{J}$$

   Por tanto la respuesta correcta es; *b)* 80 J

3. Gravitación en el universo

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 75)

- *a)* $0{,}000003 \text{ km} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ km}$

  b) $25\,000\,000 \text{ mg} = 2{,}5 \cdot 10^{7} \text{ mg}$

  c) $4\,537\,000 \text{ kg} = 4{,}537 \cdot 10^{6} \text{ kg}$

  d) $12\,425,\,65 \text{ s} = 1{,}242\,565 \cdot 10^{4} \text{ s}$

- Datos: m = 25 kg

  Llamamos peso a la fuerza gravitatoria con la que la Tierra atrae a los cuerpos. Esta fuerza se expresa como p = m g, y es un vector dirigido hacia el centro de la Tierra. En la superficie terrestre, $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$. Por tanto:

$$p = m\,g = 25 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 245 \text{ N}$$

- Datos: m = 2 kg; v = 20 m/s; $y_0 = 0$ m

  a) Por la conservación de la energía mecánica, la energía potencial gravitatoria que adquirirá será igual a la energía cinética inicial:

$$Ep = Ec_0 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot (20 \text{ m/s})^2 = 400 \text{ J}$$

  b) A partir de la expresión para la energía potencial en puntos cercanos a la superficie terrestre, podemos calcular la altura a la que llegará el cuerpo:

$$Ep = m\,g\,h;\; h = \frac{Ep}{m\,g}$$

$$h = \frac{400 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 20{,}4 \text{ m}$$

- Datos: $M = 5 \cdot 10^{14}$ kg; $r_1 = 3\,000$ m; $r_2 = 15\,000$ m;

  $m = 75$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

  a) Calculamos el potencial gravitatorio a las dos distancias:

$$V_1 = -G\,\frac{M}{r_1} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{14} \text{ kg}}{3\,000 \text{ m}}$$

$$V_1 = -11{,}12\,\frac{\text{J}}{\text{Kg}}$$

$$V_2 = -G\,\frac{M}{r_2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{14} \text{ kg}}{15\,000 \text{ m}}$$

$$V_2 = -2{,}22\,\frac{\text{J}}{\text{Kg}}$$

  b) El trabajo que realiza el campo para llevar una masa del punto 1 al punto 2 es igual a la diferencia de energía potencial entre los dos puntos.

  Como podemos escribir la energía potencial en términos del potencial gravitatorio:

$$Ep = m\,V$$

  el trabajo será:

$$W = Ep_1 - Ep_2 = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

$$W = 75 \text{ kg} \cdot [(-11{,}12 \text{ J/Kg} - (-2{,}22 \text{ J/Kg})]$$

$$W = -667{,}5 \text{ J}$$

1. CAMPO GRAVITATORIO DE LA TIERRA
(págs. 79 y 81)

1. Existe un campo gravitatorio alrededor de la Tierra debido a la masa de ésta. Todos los cuerpos, por el hecho de tener masa, crean a su alrededor un campo gravitatorio. En el caso de la Tierra, como en el de todos los planetas y estrellas, al ser su masa muy grande, el campo es más importante que el generado por otros cuerpos.

   — La intensidad del campo gravitatorio terrestre en un punto del espacio representa la fuerza con que la Tierra atraería un objeto de masa unidad situado en ese punto.

2. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca de éste e independiente del lugar donde se encuentra. Por tanto, aunque el cuerpo se aleje de la superficie terrestre, su masa no cambia, es la misma que en cualquier otro lugar.

   Su peso, por el contrario, es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Esta fuerza es inversamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra. Por lo tanto, si el cuerpo se aleja de la superficie (asciende), su peso disminuye.

3. Datos: $h = 200 \text{ km} = 2 \cdot 10^5$ m; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

   $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

   Hallamos el módulo del campo gravitatorio terrestre a una distancia del centro de la Tierra $r = R_T + h$:

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5)^2 \text{ m}^2}$$

$$g = 9{,}24\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

4. Datos: m = 4 500 kg; h = 10 000 km; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

   a) En la superficie terrestre, el peso del avión p_0 será:

   $$p_0 = m\,g = 4\,500 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg} = 44\,100 \text{ N}$$

   b) Hallamos el peso a una altura h = 10 000 km = 10^7 m, mediante la expresión de la variación del peso con la altura:

   $$p = \frac{p_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{44\,100 \text{ N}}{\left(1+\frac{10^7 \text{ m}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m}}\right)^2} = 6\,678 \text{ N}$$

5. Datos: m = 4 kg; $M_M = 6{,}45 \cdot 10^{23}$ kg;

   R_M = 3 380 km = $3{,}38 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

   a) La aceleración con que caen los cuerpos en caída libre coincide con la intensidad del campo gravitatorio. Por tanto, en la superficie de Marte:

   $$a = g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^{\,2}} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\cdot \frac{6{,}45\cdot 10^{23}\text{ kg}}{(3{,}38\cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

   $$g_M = 3{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

   b) El peso de un objeto de m = 4 kg será el producto de su masa por la intensidad del campo gravitatorio:

   $$p = m\,g_M = 4 \text{ kg} \cdot 3{,}8 \text{ N/kg} = 15{,}2 \text{ N}$$

6. Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

   Hallamos la altura a la cual el peso se reduce a la cuarta parte, $p = \frac{1}{4}\,p_0$, a partir de la expresión:

   $$p = \frac{p_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{1}{4}\,p_0;\ \left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2 = 4$$

   $$1+\frac{h}{R_T} = 2;\ h = (2-1)\,R_T = R_T;\ h = R_T = 6{,}37\cdot 10^6 \text{ m}$$

7. *a)* Los astronautas en órbita alrededor de la Tierra están en estado de ingravidez porque su peso, es decir, la fuerza con que la Tierra los atrae, es la fuerza que necesitan para describir su órbita circular. La intensidad de campo gravitatorio en su órbita coincide con la aceleración centrípeta de su movimiento circular.

   b) Los planetas no caen sobre el Sol ni las lunas sobre sus respectivos planetas por la misma razón que los astronautas están en estado de ingravidez. La fuerza gravitatoria que actúa sobre ellos se emplea en hacerles describir su trayectoria circular.

8. **Ep = m g h**. Esta expresión es válida sólo para puntos próximos a la superficie terrestre y para variaciones de altura pequeñas comparadas con el radio terrestre. El origen de la energía potencial se toma en la superficie de la Tierra.

   $\mathbf{Ep = -G\,\frac{M_T\ m}{R_T + h}}$. Esta expresión es la más general y es válida para cualquier punto del espacio. El origen de energía potencial está, en este caso, en el infinito.

9. Datos: m = 500 kg; h = 2 000 km = $2 \cdot 10^6$ m;

   $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

   $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

   A una altura de 2 000 km, la expresión de la energía potencial para cuerpos situados cerca de la superficie ya no es válida.

   Si tomamos el origen de la energía potencial en el infinito:

   $$Ep = -G\,\frac{M_T\ m}{R_T + h}$$

   $$Ep = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\cdot \frac{5{,}98\cdot 10^{24}\text{ kg}\cdot 500 \text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 2\cdot 10^6 \text{ m}}$$

   $$Ep = -2{,}38\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

10. Datos: h_A = 4 200 km = $4{,}2 \cdot 10^6$ m;

    h_B = 5 800 km = $5{,}8 \cdot 10^6$ m; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

    $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; m = 7 500 kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    Si tomamos el origen del potencial en el infinito, el potencial gravitatorio creado por la Tierra en cada uno de los dos puntos será:

    $$V_A = -G\,\frac{M_T}{R_T + h_A}$$

    $$V_A = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\cdot \frac{5{,}98\cdot 10^{24}\text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 4{,}2\cdot 10^6 \text{ m}}$$

    $$V_A = -3{,}77\cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

    $$V_B = -G\,\frac{M_T}{R_T + h_B}$$

    $$V_B = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}\cdot \frac{5{,}98\cdot 10^{24}\text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 5{,}8\cdot 10^6 \text{ m}}$$

    $$V_B = -3{,}28\cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

    — El trabajo realizado por el campo es igual a la variación de energía potencial. Podemos expresar la energía potencial gravitatoria como el producto de la masa del satélite por el potencial. Por tanto:

    $$W = Ep_A - Ep_B = m\,(V_A - V_B)$$

    $$W = 7\,500 \text{ kg}\cdot[-3{,}77\cdot 10^7\ \text{J/kg} - (-3{,}28\cdot 10^7\ \text{J/kg})]$$

    $$W = -3{,}68\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

2. MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES
(págs. 83, 85 y 87)

11. Cuesta más situar en órbita un satélite pesado que uno ligero. Aunque una vez en órbita ambos tendrán la misma velocidad, tanto la energía potencial como la energía cinética de cada uno será proporcional a su masa. Por tanto, cuanto más pesado sea, más energía se necesita para situarlo a determinada altura y darle la velocidad correspondiente a esa órbita.

12. La altura sobre el ecuador de un satélite geoestacionario es fija e invariable. Su período debe ser igual al período orbital de la Tierra (24 h). Esta condición establece una única velocidad y altura posibles para el satélite. Estas características de la órbita se han calculado en el ejemplo 7.

13. Datos: $r = 8\,500$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

    $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    Calculamos la velocidad orbital del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{8{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}}}$$

$$v = 6{,}85 \cdot 10^3\ \text{m s}$$

    Hallamos el período de revolución:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}}{6{,}85 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 7{,}8 \cdot 10^3\ \text{s}$$

14. Datos: $v = 2{,}52 \cdot 10^4$ km/h = 7 000 m/s;

    $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

    $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    a) Despejamos el radio de la órbita de la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}};\ r = \frac{G\,M_T}{v^2}$$

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(7\,000\ \text{m/s})^2} = 8{,}14 \cdot 10^6\ \text{m}$$

    b) Determinamos el período de revolución de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8{,}14 \cdot 10^6\ \text{m}}{7\,000\ \text{m/s}} = 7{,}3 \cdot 10^3\ \text{s}$$

15. La energía mecánica de un satélite en órbita alrededor de la Tierra es siempre negativa, ya que el satélite está ligado al campo gravitatorio terrestre. Si su energía mecánica no fuera negativa, el satélite escaparía de la órbita.

16. Datos: $v_0 = 1\,000$ m/s; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

    $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    En ausencia de rozamiento, la energía mecánica se conserva: $Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep$;

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2} - G\,\frac{M_T\,m}{R_T} = -G\,\frac{M_T\,m}{R_T + h}$$

$$h = \frac{2\,G\,M_T\,R_T}{2\,G\,M_T - R_T\,v_0^{\,2}} - R_T$$

$$h = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}37 \cdot 10^6\,(1\,000)^2} -$$

$$- 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = 5{,}12 \cdot 10^4\ \text{m}$$

17. Datos: $h = 2\,000$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

    $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    La distancia al centro de la Tierra es:

    $r = h + R_T = 2 \cdot 10^6\ \text{m} + 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = 8{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$

    Calculamos la correspondiente velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{8{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}}$$

$$v_e = 9{,}8 \cdot 10^3\ \text{m s}$$

18. La órbita de los planetas tiene forma elíptica, con el Sol en uno de sus focos. La órbita de los satélites es igualmente elíptica, con el planeta en uno de los focos.

19. La velocidad de un planeta es mayor cerca del Sol que lejos de éste. Teniendo en cuenta la segunda ley de Kepler, la velocidad será máxima cuando la distancia al Sol sea mínima, ya que con menos radio tiene que barrer la misma área que en los otros puntos de la órbita.

20. La existencia de los planetas puede predecirse a partir de su interacción gravitatoria con otros cuerpos celestes conocidos.

    — Las masas de los planetas se determinan a partir del radio y el período de alguno de sus satélites. Gracias a la tercera ley de Kepler, podemos relacionar el período y el radio de la órbita del satélite con la masa del objeto alrededor del cual orbitan.

21. Datos: $T = 16{,}7$ días $= 1{,}44 \cdot 10^6$ s; $r = 1{,}88 \cdot 10^9$ m;

    $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

    Hallamos la masa de Júpiter a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M}\,r^3;\ M = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}88 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot (1{,}44 \cdot 10^6\ \text{s})^2} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

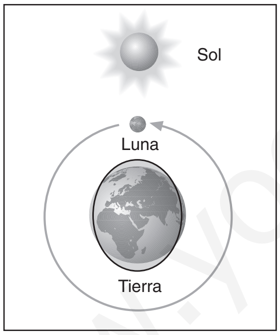
22. Éstos son los planetas del Sistema Solar y los datos de sus órbitas alrededor del Sol:

Nombre del planeta	*Distancia media al Sol (·10⁶ km)*	*Período de revolución*	*Velocidad orbital (·10³ m/s)*	*Masa (·10²⁴ kg)*
Mercurio	58	88 días	47,93	0,36
Venus	108	225 días	34,91	4,84
Tierra	150	1 año	29,89	5,98
Marte	228	1,9 años	23,91	0,65
Júpiter	778	11,9 años	13,02	1 900,98
Saturno	1 427	29,5 años	9,64	568,94
Urano	2 870	84 años	6,81	86,83
Neptuno	4 497	164,8 años	5,44	103,16
Plutón	5 899	247,7 años	4,74	0,60

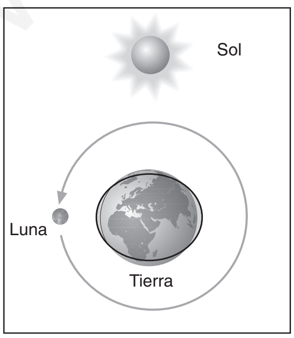
23. Respuesta sugerida:

Las mareas consisten en el ascenso y descenso sucesivo del nivel del agua del mar por efecto de la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

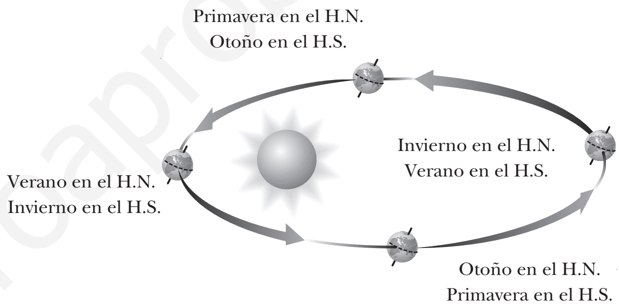
— En las **mareas vivas**, la Tierra, la Luna y el Sol están alineados. Las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna se suman.



— En las **mareas muertas**, la Luna, la Tierra y el Sol forman ángulo recto con la Tierra en el vértice. Las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna se restan.



24. — Las estaciones del año son debidas a la inclinación del eje de rotación terrestre respecto al plano de su órbita.



Como consecuencia de esta inclinación, en diferentes puntos de la órbita el ángulo con que inciden los rayos de luz solares en los dos hemisferios y la superficie de éstos iluminada cambian.

Cuando la Tierra muestra al Sol uno de los hemisferios, la superficie de éste iluminada es mayor, los rayos inciden más perpendiculares y calientan más; estamos en verano. Al mismo tiempo, en el otro hemisferio es invierno.

En épocas en las que los dos hemisferios están expuestos por igual a la radiación solar, hablamos de primavera y de otoño.

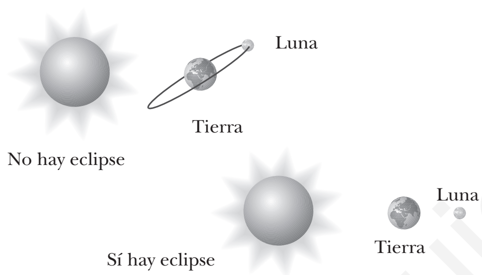
Las estaciones del año son claramente distinguibles en las latitudes medias (zonas templadas). En la zona ecuatorial no se distinguen estaciones, pues los rayos del Sol inciden siempre muy perpendiculares, justo lo contrario de lo que ocurre en las zonas polares.

— La Luna no emite luz propia, sino que refleja la luz proveniente del Sol. Los eclipses de Luna se producen cuando ésta entra en la zona de sombra de la Tierra.

Al dejar de estar iluminada por el Sol, veremos cómo se oscurece, produciéndose un eclipse lunar. La Tierra se interpone entre el Sol y la Luna.

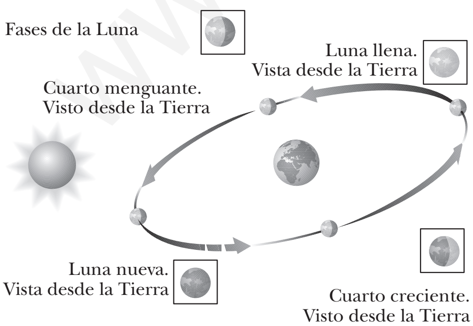
En el caso de los eclipses de Sol, es la Luna la que se interpone entre el Sol y la Tierra. La Luna pasa por delante del Sol y proyecta su sombra sobre la Tierra.

En los dos casos, el fenómeno no se produce en cada órbita. El plano de la órbita de la Luna está inclinado respecto al plano de la órbita de la Tierra.



Ello es la causa de que la orientación relativa de los tres cuerpos vaya variando con el tiempo. En los momentos en que coinciden los tres cuerpos alineados y además la Luna pasa por delante o por detrás de la Tierra, se produce un eclipse de Sol o de Luna, según el caso.

— La Luna tiene distintas fases según la orientación de su cara iluminada respecto a la Tierra.



A medida que nuestro satélite describe su órbita entorno a la Tierra, va orientando su cara iluminada en distintas direcciones. Cuando muestra su cara iluminada a la Tierra, vemos la Luna llena, mientras que si nos muestra la cara en sombra, estamos en Luna nueva. Las otras dos fases son posiciones intermedias.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 88)

a) La última expedición tripulada a la Luna fue la del *Apolo XVII,* lanzado el 7 de diciembre de 1972. Alunizó cinco días más tarde. El comandante de la misión fue Eugene Cernan y estuvo acompañado por Roland Evans, piloto del módulo de mando, y Harrison Schmitt, piloto del módulo lunar y primer científico tripulante de una misión *Apolo*. Fue considerada la misión más cara del proyecto.

Entre los objetivos del *Apolo XVII* destacan el estudio de la composición de la corteza lunar, la investigación de las ondas de gravedad y la detección de posibles signos de existencia de agua en la Luna. Realizaron tres salidas para estudiar la superficie y el subsuelo lunares, recogiendo 150 kg de piedras y polvo lunar; instalaron una nueva estación transmisora de datos y utilizaron un detector de minerales por debajo de los 1 300 m de profundidad.

La nave amaró en el Pacífico el 19 de diciembre, obteniendo así un récord de permanencia en el espacio y poniendo fin al proyecto que llevó al hombre a la Luna.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 90 y 91)

25. Datos: h = 500 km; $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg;

$R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m; m = 200 kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Determinamos la intensidad del campo gravitatorio a 500 km de la superficie:

$$g = G\,\frac{M_L}{(R_L + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg}{(1{,}74 \cdot 10^6\ m + 5 \cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 1{,}0\ N/kg$$

b) El valor de la aceleración de la gravedad coincide con el de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = 1{,}0\ m/s^2$$

c) La fuerza con que la Luna atrae a un objeto es el peso de éste en la Luna:

$$p = m\,g = 200\ kg \cdot 1{,}0\ N/kg = 200\ N$$

26. Datos: m = 4 800 kg; h = 3 400 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Calculamos el potencial gravitatorio a 3 400 km de la superficie terrestre:

$$V = -G\,\frac{M_T}{R_T + h}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 3{,}4 \cdot 10^6\ m}$$

$$V = -4{,}1 \cdot 10^7\ J/kg$$

b) Hallamos la energía potencial gravitatoria de la nave:

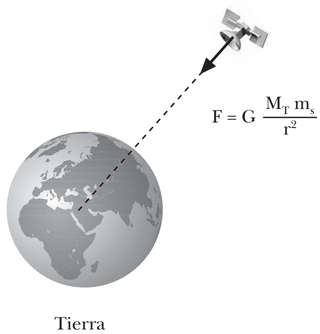
$$Ep = m\,V = 4\,800\ kg \cdot (-4{,}1 \cdot 10^7\ J/kg)$$

$$Ep = -1{,}97 \cdot 10^{11}\ J$$

27. Datos: $p_0 = 8\,330$ N; $r = 1{,}5\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a)



b) Calculamos la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{1{,}5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 6{,}5 \cdot 10^3\ m\ s$$

c) Determinamos el peso en la órbita a partir de su peso en la superficie terrestre mediante la expresión de la variación del peso con la altura:

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2};\ p = \frac{8\,330\ N}{\left(1 + \frac{1{,}5\ R_T - R_T}{R_T}\right)^2}$$

$$p = \frac{8\,330\ N}{(1 + 0{,}5)^2} = 3\,702{,}2\ N$$

28. Datos: $r = R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Determinamos la velocidad orbital de un satélite a $r = R_T$, o primera velocidad cósmica:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 7{,}9 \cdot 10^3\ m\ s$$

Calculamos su período de revolución:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m}{7{,}9 \cdot 10^3\ m/s} = 5{,}1 \cdot 10^3\ s$$

29. Datos: $p_0 = 735$ N (en la Tierra); $h = 50$ km;

$M_L = 0{,}01\ M_T$; $R_L = 0{,}25\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) A partir del peso del cuerpo en la superficie terrestre, determinamos su masa:

$$p_0 = m\,g_T;\ m = \frac{p_0}{g_T} = \frac{735\ N}{9{,}8\ \frac{N}{kg}} = 75\ kg$$

Calculamos el peso del cuerpo cerca de la superficie lunar, aprovechando que conocemos su peso en la Tierra (p_0) y las relaciones entre los radios y las masas de ambos cuerpos celestes:

$$\left.\begin{array}{l} p = G\,\frac{M_L\ m}{{R_L}^2} = G\,\frac{0{,}01\ M_T\ m}{(0{,}25\ R_T)^2} \\ p_0 = m\,g_T = m\,G\,\frac{M_T}{{R_T}^2} \end{array}\right\}\ p = \frac{0{,}01}{(0{,}25)^2}\,p_0$$

$$p = \frac{0{,}01}{(0{,}25)^2} \cdot 735\ N = 117{,}6\ N$$

b) Aplicamos el principio de la conservación de la energía mecánica para determinar la velocidad del cuerpo, que cae desde una altura de 50 km, cuando llegue a la superficie de la Luna:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B;$$

$$0 - \frac{G\,M_L\ m}{R_L + h} = \frac{1}{2}\,m\,{v_B}^2 - \frac{G\,M_L\ m}{R_L}$$

$$v_B = \sqrt{2\,G\,M_L\left(-\frac{1}{R_L + h} + \frac{1}{R_L}\right)} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L\ (R_L + h - R_L)}{R_L\,(R_L + h)}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L\ h}{R_L\,(R_L + h)}} = \sqrt{\frac{2\,G\,0{,}01\ M_T\ h}{0{,}25\ R_T\,(0{,}25\ R_T + h)}}$$

$$v_B = 390{,}5\ m\ s$$

30. Datos: $v_0 = 750$ km/h $= 208{,}3$ m/s; $M_S = 324\,440\ M_T$;

$R_S = 108\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Calculamos la relación entre el peso del cuerpo en el Sol y en la Tierra:

$$\left.\begin{aligned} p_S &= G\,\frac{M_S\, m}{R_S^{\,2}} = G\,\frac{324\,440\, M_T\, m}{(108\, R_T)^2} \\ p_T &= G\,\frac{M_T\, m}{R_T^{\,2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{p_S}{p_T} = \frac{324\,440}{(108)^2} = 27{,}8;\; p_S = 27{,}8\; p_T$$

b) Determinamos la altura máxima alcanzada por el proyectil aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep$$

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^{\,2} - G\,\frac{M_S\, m}{R_S} = -G\,\frac{M_S\, m}{R_S + h}$$

$$h = \frac{2\, G\, M_S\, R_S}{2\, G\, M_S - R_S\, v_0^{\,2}} - R_S$$

$$h = \frac{2\, G \cdot 324\,440\, M_T \cdot 108\, R_T}{2\, G \cdot 324\,440\, M_T - 108\, R_T\, v_0^{\,2}} - 108\, R_T$$

$$h = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 324\,440 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 324\,440 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6} \cdot (208{,}3)^2} -$$

$$- 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \text{m} = 79\ \text{m}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 92 y 93)

31. — La aceleración de la gravedad varía con la altura a la superficie de la Tierra porque varía con la distancia al centro de la Tierra. La aceleración de la gravedad es la intensidad del campo gravitatorio, es decir, la fuerza con que la Tierra atraería un cuerpo de masa unidad situado en ese punto. Como la fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la aceleración de la gravedad disminuye con la altura de la misma manera.

— El peso de un cuerpo no tiene el mismo valor en la Tierra que en la Luna. El peso es la fuerza con que la Tierra o la Luna atraen al objeto, y es proporcional a la masa del planeta o del satélite. Por tanto, no tienen el mismo peso.

32. La intensidad del campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad coinciden en cada punto debido a que la masa inercial y la masa gravitatoria de cualquier cuerpo son iguales. La intensidad del campo g es la fuerza por unidad de masa gravitatoria que la Tierra ejerce sobre todo cuerpo. Entonces, un cuerpo de masa gravitatoria m_g siente una fuerza (peso):

$$p = m_g\, g$$

Por otro lado, debido a esta fuerza, el cuerpo experimentará una aceleración a, proporcional a su masa inercial m_i:

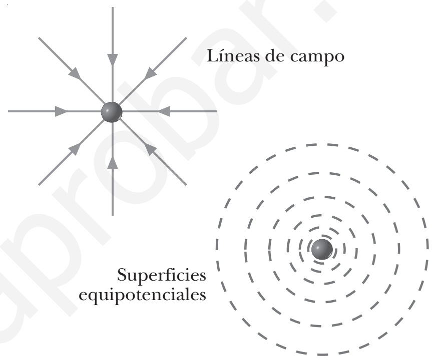
$$p = m_i\, a$$

Como la fuerza es la misma y la masa inercial coincide con la gravitatoria, $m_i = m_g$, la aceleración del cuerpo coincide con la intensidad del campo gravitatorio en ese punto.

33. El peso es la fuerza con que la Tierra atrae a los objetos en su superficie por el hecho de tener masa. Es inversamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra, de modo que no es una magnitud constante.

La masa, en cambio, es una propiedad inherente a los cuerpos. Es fija e invariable. Representa la intensidad con que el cuerpo participa en las interacciones gravitatorias, por una parte, y, por otra, la resistencia que opone a ser acelerado bajo la acción de una fuerza.

34.



35. Cuando un cuerpo se eleva cierta altura sobre la superficie de la Tierra, gana energía potencial. Si se deja caer el cuerpo desde esta altura, la ganancia de energía potencial implica que llegará a la superficie con mayor velocidad.

— La pérdida (o ganancia) de energía potencial significa que el cuerpo queda más (o menos) ligado al campo gravitatorio terrestre.

36. Lo consigue describiendo un movimiento con el mismo período que el período de rotación de la Tierra, 24 horas. Para ello debe describir una órbita con una velocidad y altura concretas. Así, su velocidad angular coincide con la de giro de nuestro planeta.

37.

Energía mecánica	*Tipo de órbita*
E > 0	Abierta: hipérbola
E = 0	Abierta: parábola
E < 0	Cerrada: circular o elíptica

— Para que un cuerpo abandone el campo gravitatorio terrestre, es necesario que su energía mecánica sea igual o superior a cero. Esto se conseguirá si se lanza desde la superficie a una velocidad igual o superior a la velocidad de escape.

38. La trayectoria de los planetas del Sistema Solar debe ser plana por la conservación del momento angular.

El momento angular es una magnitud vectorial perpendicular a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Como sobre los planetas no actúa ningún momento de fuerzas, el momento angular debe conservarse. Así, tendrá la misma dirección en cualquier punto de la órbita, y $\vec{r}$ y $\vec{v}$ estarán siempre en el mismo plano perpendicular a $\vec{L}$.

39. Datos: h = 450 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio terrestre a 450 km de la superficie:

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37 \cdot 10^6\ m + 4{,}5 \cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 8{,}57\ N/kg$$

40. Datos: m = 25 kg; $g_0 = 9{,}8$ m/s²; h = 3 000 km;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

a) Determinamos el peso del cuerpo en la superficie terrestre, donde conocemos el valor de la intensidad del campo gravitatorio:

$$p_0 = m\,g_0 = 25\ kg \cdot 9{,}8\ N/kg = 245\ N$$

b) A 3 000 km de altura ya no es válida la expresión utilizada en el problema anterior. Para calcular el peso utilizaremos la fórmula de la variación del peso con la altura:

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2};\ p = \frac{245\ N}{\left(1 + \dfrac{3 \cdot 10^6\ m}{6{,}37 \cdot 10^6\ m}\right)^2} = 113{,}2\ N$$

41. Datos: $p_0 = 19{,}6$ N (en la Tierra); $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg;

$R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$; $g_0 = 9{,}8$ N/kg

a) Calculamos la masa del objeto a partir de su peso en la Tierra y de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre:

$$p_0 = m\,g_0$$

$$m = \frac{p_0}{g_0} = \frac{19{,}6\ N}{9{,}8\ \dfrac{N}{kg}} = 2\ kg$$

b) El valor de la masa en la Luna será el mismo que en la Tierra y que en cualquier otro lugar, m = 2 kg.

El peso en la superficie lunar es la fuerza gravitatoria con que la Luna atrae el objeto:

$$p_L = G\,\frac{M_L\,m}{{R_L}^2}$$

$$p_L = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg \cdot 2\ kg}{(1{,}74 \cdot 10^6\ m)^2} = 3{,}3\ N$$

42. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

Para determinar el punto sobre la superficie terrestre donde la gravedad es dos tercios de g_0, despejamos h de la expresión de la variación de la gravedad con la altura:

$$g = \frac{2}{3}\,g_0 = \frac{g_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2};\ \frac{3}{2} = \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2$$

$$1 + \frac{h}{R_T} = \sqrt{\frac{3}{2}};\ h = R_T\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) = 6{,}37 \cdot 10^6\ m\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$h = 1{,}43 \cdot 10^6\ m$$

43. Datos: m = 600 kg; r = 10 000 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la energía potencial del satélite a 10 000 km del centro de la Tierra:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\,m}{r}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 600\ kg}{10^7\ m}$$

$$Ep = -2{,}39 \cdot 10^{10}\ J$$

44. Datos: $V = -2 \cdot 10^7$ J/kg; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Despejamos de la expresión general del potencial gravitatorio la distancia r al centro de la Tierra:

$$V = -G\,\frac{M_T}{r};\ r = -G\,\frac{M_T}{V}$$

$$r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(-2 \cdot 10^7\ J/kg)} = 1{,}99 \cdot 10^7\ m$$

Por tanto, la distancia a la superficie terrestre será:

$$h = r - R_T = 1{,}99 \cdot 10^7\ m - 6{,}37 \cdot 10^6\ m = 1{,}35 \cdot 10^7\ m$$

45. Datos: m = 2 500 kg; r_1 = 8 000 km; r_2 = 10 000 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

El trabajo necesario para trasladar el satélite coincidirá con la variación de su energía potencial:

$$W = Ep_1 - Ep_2 = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

$$W = m\left(G\,\frac{M_T}{r_1} - G\,\frac{M_T}{r_2}\right) = m\,G\,M_T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$W = 2\,500 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot 10^6} - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$W = 2{,}5 \cdot 10^{10}\ J$$

46. Datos: r = 7 000 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la velocidad orbital en una órbita de 7 000 km de radio:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{7 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 7{,}5 \cdot 10^3\ m\ s$$

47. Datos: m = 1 250 kg; h = 1 400 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Determinamos su energía potencial:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\ m}{R_T + h}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\,250\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m}$$

$$Ep = -6{,}42 \cdot 10^{10}\ J$$

b) Para determinar la energía cinética del satélite, calculamos primero su velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 7{,}2 \cdot 10^3\ m\ s$$

$$Ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,250\ kg\ (7{,}2 \cdot 10^3\ m/s)^2 = 3{,}24 \cdot 10^{10}\ J$$

c) Hallamos el período de revolución a partir de la velocidad y el radio de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m)}{7{,}2 \cdot 10^3\ m/s} = 6{,}8 \cdot 10^3\ s$$

48. Datos: h = 5 000 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para que el satélite llegue a 5 000 km de altura, es necesario lanzarlo con una velocidad tal que su energía mecánica inicial sea igual a la energía potencial que tendrá a esa altura, a donde llegaría con velocidad nula:

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 - G\,\frac{M_T\ m}{R_T} = -G\,\frac{M_T\ m}{R_T + h}$$

$${v_0}^2 = \frac{2}{m}\,G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$${v_0}^2 = 2\,G\,M_T\,\frac{R_T + h - R_T}{R_T\,(R_T + h)};\ v_0 = \sqrt{2\,G\,M_T\,\frac{h}{R_T\,(R_T + h)}}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg\ \cdot}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6\ m}{6{,}37 \cdot 10^6\ m \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m + 5 \cdot 10^6\ m)}}$$

$$v_0 = 7{,}4 \cdot 10^3\ m\ s$$

49. Datos: $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la velocidad de escape desde la superficie de la Luna:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg}{1{,}74 \cdot 10^6\ m}} = 2{,}4 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

50. Datos: $r = 6{,}7 \cdot 10^5$ km; $M_J = 318{,}4\ M_T$;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos el período de revolución de Europa a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot 318{,}4\ M_T}\,r^3}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6{,}7 \cdot 10^8\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 318{,}4 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}}$$

$$T = 3{,}0 \cdot 10^5\ s$$

51. Datos: T = 1 día = 24 h = $8{,}64 \cdot 10^4$ s;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para determinar el radio de la órbita aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (8{,}64 \cdot 10^4\ \text{s})^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m}$$

52. Datos: $R = 1{,}25\ R_T$; $g_0 = 14{,}7\ \text{m/s}^2$ (en el planeta);

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a) Para calcular la relación entre las masas de la Tierra y el planeta, escribimos las expresiones del campo gravitatorio en la superficie de cada uno de ellos y las dividimos:

$$g_0\ (\text{en la Tierra}) = G\,\frac{M_T}{{R_T}^2} = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_0\ (\text{en el planeta}) = G\,\frac{M}{R^2} = G\,\frac{M}{(1{,}25\ R_T)^2} = 14{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{g_0\ (\text{en el planeta})}{g_0\ (\text{en la Tierra})} = \frac{G\,\frac{M}{(1{,}25\ R_T)^2}}{G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}} = \frac{M}{(1{,}25)^2\ M_T}$$

$$\frac{M}{M_T} = (1{,}25)^2 \cdot \frac{g_0\ (\text{en el planeta})}{g_0\ (\text{en la Tierra})} = (1{,}25)^2 \cdot \frac{14{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}34$$

b) A 275 m sobre la superficie, podemos escribir la energía potencial como Ep = m g h.

Aplicamos la conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad con que el objeto llegaría a la superficie:

$$Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep;\ m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Imponemos que las velocidades sean las mismas en los dos planetas para determinar la altura desde la cual debemos soltar el objeto en el otro planeta:

$$v = v_t$$

$$\sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g_T\,h_T}$$

$$h = \frac{g_T}{g}\,h_T;\ h = \frac{9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{14{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 275\ \text{m} = 183{,}3\ \text{m}$$

53. Datos: m = 1 500 kg; h = 500 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a) Calculamos la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 5 \cdot 10^5\ \text{m}}} = 7{,}6 \cdot 10^3\ \text{m s}$$

b) Determinamos el período orbital a partir de la velocidad y el radio de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 5 \cdot 10^5\ \text{m})}{7{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 5{,}7 \cdot 10^3\ \text{s}$$

c) Hallamos la energía mecánica de traslación del satélite:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{R_T + h}$$

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 1\,500\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 5 \cdot 10^5\ \text{m}}$$

$$E = -4{,}35 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

d) Calculamos la aceleración centrípeta, que debe coincidir con la aceleración de la gravedad a esa altura, pues el campo gravitatorio es el responsable de que el satélite describa una órbita circular:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

$$a_c = \frac{(7{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 5 \cdot 10^5\ \text{m}} = 8{,}4\ \text{m/s}^2$$

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}5 \cdot 10^6\ \text{m})^2}$$

$$g = 8{,}4\ \text{N/kg}$$

54. Datos: $r_{\text{Umbriel}} = 2{,}67 \cdot 10^8$ m; $T_{\text{Umbriel}} = 3{,}58 \cdot 10^5$ s;

$r_{\text{Ober.}} = 5{,}86 \cdot 10^8$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a) Determinamos la masa de Urano a partir de la tercera ley de Kepler, aplicada a su satélite Umbriel:

$$T^2_{\text{Umbriel}} = \frac{4\pi^2}{G\,M_{\text{Urano}}}\,r^3_{\text{Umbriel}}$$

$$M_{\text{Urano}} = \frac{4\pi^2}{G\,{T_{\text{Umbriel}}}^2}\,r^3_{\text{Umbriel}}$$

$$M_{\text{Urano}} = \frac{4\pi^2 \cdot (2{,}67 \cdot 10^8\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot (3{,}58 \cdot 10^5\ \text{s})^2} = 8{,}79 \cdot 10^{25}\ \text{kg}$$

b) Conocida la masa, aplicamos la misma ley para determinar el período de revolución de Oberón a partir de su distancia al centro del planeta:

$$T_{Ober.} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\, M_{Urano}}\, r_{Ober.}^{\ 3}}$$

$$T_{Ober.} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5{,}86 \cdot 10^8\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 8{,}79 \cdot 10^{25}\ kg}} = 1{,}16 \cdot 10^6\ s$$

55. — **Los agujeros negros** son el resultado final de la evolución de algunas estrellas muy masivas en las que, debido a su propia atracción gravitatoria, la estrella se contrae de forma que su masa se concentra en un volumen muy pequeño.

El campo gravitatorio en su interior es tan intenso que ningún objeto que caiga en él, ni siquiera la luz, puede llegar a escapar nunca.

— **Púlsares y quásares**. Los **púlsares** se observan como una corta emisión periódica de ondas de radio de gran energía y período muy exacto. Son la última etapa de algunas estrellas que explotan expulsando la materia de las capas más externas. La visión de esta explosión recibe el nombre de supernova. El núcleo de la estrella, que sobrevive a la explosión, es un objeto muy denso que rota a gran velocidad y posee un intenso campo magnético. Recibe el nombre de estrella de neutrones, pues éstos son sus principales componentes. Cada vez que uno de los polos magnéticos de la estrella de neutrones, al girar, apunta en nuestra dirección, observamos un pulso de radiación.

Los **quásares** son galaxias lejanas cuyo núcleo despide de repentinamente una gran cantidad de luz y/o ondas de radiofrecuencia, como si se tratara de una explosión. Este fenómeno puede llegar a hacer que la luminosidad de la galaxia aumente en un factor 100 respecto a lo que es normal.

— **Evolución de las estrellas**. Las estrellas se forman a partir de gas y polvo interestelar. El material se va compactando, debido a su propio campo gravitatorio, hasta llegar a presiones y temperaturas suficientemente elevadas como para iniciar la fusión del hidrógeno. La energía de las reacciones termonucleares impide que el material siga compactándose y la estrella empieza a brillar. La mayor parte de la vida de una estrella consiste en la combustión de todo su hidrógeno. Cuando éste se acaba, al faltar la energía que impedía que se contrajera, la estrella empieza otra vez a compactarse. El resultado de esta compresión dependerá de la masa de la estrella: puede que llegue a las condiciones de fusión de otros elementos distintos del hidrógeno y prolongue un tiempo así su vida; o puede acabar convirtiendo su núcleo en un objeto muy compacto (enana blanca, estrella de neutrones o agujero negro, según el caso) y expulsando sus capas más externas al espacio exterior (nebulosa planetaria —sin explosión— o supernova —con explosión—).

— **El origen del universo.** En los años veinte, el astrónomo E. Hubble descubrió que las otras galaxias que pueblan el universo se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia que las separa de nuestra galaxia. Ello implica que desde otra galaxia cualquiera también veríamos que las demás galaxias se alejan. Toda galaxia se aleja del resto de las galaxias como en una especie de explosión. Esta observación, sumada a la teoría de la relatividad de Einstein, sugiere que, en algún momento del pasado, las distancias entre todos los puntos del universo eran nulas. A partir de esa situación inicial, el universo empezó a expandirse, como si hubiera estallado una bomba. Por eso esta teoría recibe el nombre del *big bang*, la gran explosión.

56. El principal efecto de la ingravidez sobre el cuerpo humano es la alteración de la presión sanguínea y su flujo. La sangre tiende a concentrarse en las partes superiores del cuerpo, lo que perjudica a los miembros inferiores. Además, los huesos sufren descalcificación y los músculos atrofia, especialmente los de las piernas. Los astronautas que realizan estancias prolongadas en el espacio necesitan una adaptación de entre diez y quince días a las condiciones de ingravidez, mediante ejercicios diarios y medicación. Antes de volver a la Tierra, se someten a una readaptación a la gravedad, con un dispositivo que reproduce las condiciones de gravedad de la Tierra, para normalizar la presión sanguínea.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 93)

1. El peso de un cuerpo es la fuerza con que éste es atraído por la Tierra o por el planeta sobre el que se encuentre.

   Depende directamente de la masa del cuerpo y de la masa del planeta, y es inversamente proporcional a la distancia al centro del planeta al cuadrado.

$$p = m\, g = m\, G\, \frac{M}{r^2}$$

2. Para hallar la expresión de la velocidad de escape, imponemos que su energía mecánica final sea igual a cero. Por tanto, por la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 - G\, \frac{M\, m}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2}\, v^2 - G\, \frac{M}{r}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{r}}$$

3. **Leyes de Kepler:**

   1. Todos los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.

   2. La recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

   3. El cuadrado del período de la órbita de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = C\, R^3$$

— Para demostrar la tercera ley de Kepler partimos de las expresiones para la velocidad orbital y para el período:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\,;\,T^2 = \frac{2\pi\,r}{v}$$

Sustituimos la expresión de v en T y elevamos al cuadrado:

$$T = \frac{2\pi\,r}{\sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}}\,;\,T^2 = \frac{4\pi^2\,r^2}{\dfrac{G\,M}{r}} = \frac{4\pi^2}{G\,M}\,r^3$$

4. Datos: h = 275 km; g_0 = 9,8 N/kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37\cdot 10^6\ m + 2{,}75\cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 9{,}03\ N/kg$$

— Determinamos la altura en que $g = g_0 - 0{,}15\ g_0 = 0{,}85\ g_0$ a partir de la expresión de la variación de la gravedad con la altura:

$$g = 0{,}85\ g_0 = \frac{g_0}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2}\,;1+\frac{h}{R_T} = \sqrt{\frac{1}{0{,}85}}$$

$$h = R_T\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}85}} - 1\right) = 6{,}37\cdot 10^6\ m\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}85}} - 1\right)$$

$$h = 5{,}4\cdot 10^5\ m$$

5. Datos: t = 3 s; $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

La aceleración de una partícula en caída libre coincide con la intensidad del campo gravitatorio en ese punto. Determinamos, pues, el campo gravitatorio de la Luna cerca de su superficie:

$$g = \frac{G\,M_L}{{R_L}^2}$$

$$g = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{7{,}47\cdot 10^{22}\ kg}{(1{,}74\cdot 10^6\ m)^2} = 1{,}65\ m/s^2$$

Para determinar la distancia que recorre la partícula en tres segundos, aplicamos la ecuación correspondiente del MRUA:

$$x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2}\,g\,t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}65\ m/s^2\cdot(3\ s)^2 = 7{,}4\ m$$

6. Datos: m = 5 kg

Si la balanza se equilibra en la Tierra con pesas por valor de 5 kg, la masa del cuerpo es de 5 kg. La balanza está equilibrada porque el peso en los dos platillos es el mismo: es el producto de la gravedad en la superficie terrestre por la masa en los platillos. Como la gravedad es la misma en los lados de la balanza, ésta se equilibra con masas iguales.

En la Luna, lo único que cambia es la intensidad del campo gravitatorio o gravedad en la superficie. Como en los dos platillos la gravedad que actúa es la misma, la balanza se equilibrará también con masas iguales. Por tanto, en la Luna necesitaremos 5 kg de pesas.

7. Datos: m = 1 000 kg; T = 2 días = 48 h = $1{,}73 \cdot 10^5$ s

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Calculamos el radio de la órbita mediante la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,r^3;\ r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ kg\cdot(1{,}73\cdot 10^5\ s)^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 6{,}71\cdot 10^7\ m$$

b) Su aceleración normal coincide con la aceleración de la gravedad en la órbita:

$$a_n = g = G\,\frac{M_T}{r^2}$$

$$g = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}71\cdot 10^7\ m)^2}$$

$$g = 0{,}09\ N/kg = 0{,}09\ m/s^2$$

c) Determinamos la energía potencial gravitatoria:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\,m}{r}$$

$$Ep = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\ kg\cdot 1\,000\ kg}{6{,}71\cdot 10^7\ m}$$

$$Ep = -5{,}94\cdot 10^9\ J$$

8. Datos: $r = 9{,}4 \cdot 10^6$ m; T = 460 min = 27 600 s;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para determinar la masa de Marte aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_M}\,r^3;\ M_M = \frac{4\pi^2}{G\,T^2}\,r^3$$

$$M_M = \frac{4\pi^2\cdot(9{,}4\cdot 10^6\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}\cdot(27\,600\ s)^2} = 6{,}45\cdot 10^{23}\ kg$$

4. Movimientos vibratorios

1. MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (págs. 97, 102 y 103)

1. En un **movimiento periódico** las variables posición, velocidad y aceleración de la partícula o del cuerpo toman los mismos valores después de cada intervalo de tiempo denominado período.

   En un **movimiento oscilatorio** la partícula se desplaza sucesivamente a un lado y a otro de la posición de equilibrio, repitiendo a intervalos regulares de tiempo los valores de sus variables cinemáticas.

   El **movimiento armónico simple** es el movimiento oscilatorio sobre una recta, de un cuerpo sometido a una fuerza de atracción proporcional a la distancia al punto de equilibrio o centro de oscilaciones, y de sentido opuesto al vector posición del cuerpo respecto a dicho punto.

2. Un movimiento periódico no tiene por qué ser oscilatorio. Pueden repetirse los valores de las magnitudes cinemáticas cada cierto intervalo de tiempo sin que el cuerpo se desplace a un lado y a otro de un punto de equilibrio. Cualquier movimiento circular uniforme es periódico sin ser oscilatorio. Por ejemplo, el movimiento de los planetas en torno al Sol.

3. No todos los movimientos oscilatorios son armónicos. Son oscilatorios todos los movimientos periódicos de un lado a otro de un punto de equilibrio, pero no tienen por qué tener lugar a lo largo de una recta ni estar causados por una fuerza de atracción proporcional a la distancia al punto de equilibrio.

4. Las oscilaciones de los extremos del diapasón se denominan vibraciones porque son muy rápidas. Su período es muy corto, y el valor exacto del período determina el tono del sonido que emite el diapasón.

5. *a)* **Falso.** La elongación no es el valor máximo de la amplitud, sino que la amplitud es el valor máximo de la elongación.

   b) **Falso.** $x = \pm A$ cuando sen $(\omega t + \varphi_0) = 1$

   c) **Cierto**, siempre que utilicemos la ecuación del MAS en la forma $x = A$ sen $(\omega t + \varphi_0)$

   d) **Cierto.**

   e) **Falso.** La aceleración es nula cuando $x = 0$, y es máxima para $x = \pm A$.

   f) **Falso.** La partícula se halla en el centro de oscilación cuando $x = 0$ y $a = 0$, pero en este punto la velocidad toma su valor máximo.

6. Datos: MAS con 15 vibraciones cada 40 segundos.

   a) La frecuencia es el número de vibraciones por segundo. Por tanto:

   $$f = \frac{15 \text{ vibraciones}}{40 \text{ s}} = 0{,}375 \text{ Hz}$$

   b) Calculamos el período a partir de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}375 \text{ Hz}} = 2{,}67 \text{ s}$$

   c) Determinamos la pulsación:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}375 \text{ Hz} = 2{,}36 \text{ rad/s}$$

7. Datos: MAS; $\varphi_0 = 0$; $f = 50$ Hz; $A = 3$ cm $= 0{,}03$ m

   a) Calculamos el período como el inverso de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ Hz}} = 0{,}02 \text{ s}$$

   b) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ rad/s}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación del movimiento armónico simple:

   $$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03 \text{ sen } (100\pi t)$$

8. Datos: MAS; $\varphi_0 = \pi/4$; $f = 60$ Hz; $A = 2$ m

   a) Calculamos el período como el inverso de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ s}$$

   b) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 \text{ Hz} = 120\pi \text{ rad/s}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación:

   $$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) = 2 \text{ sen}\left(120\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

9. Datos: MAS; $A = 0{,}05$ m; $T = 4$ s; $t_0 = 0$; $x_0 = 0$; $v_0 > 0$

   a) Si la partícula se encuentra en el origen en el tiempo inicial, su fase inicial es cero:

   $$\varphi_0 = 0$$

   b) Determinamos la pulsación a partir del período:

   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4 \text{ s}} = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

d) Calculamos el valor de la elongación en t = 1 s:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = 0{,}05\text{ m}$$

10. Datos: MAS; A = 0,03 m; f = 150 Hz; x_0 = A; t_0= 0

Calculamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 150\text{ Hz} = 300\pi\text{ rad/s}$$

Escribimos la ecuación del MAS, dejando la fase inicial por determinar:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03\,\text{sen}\,(300\pi t + \varphi_0)$$

Determinamos la fase inicial a partir de los datos del problema:

$$x_0 = A = 0{,}03 = 0{,}03\,\text{sen}\,\varphi_0;\ \text{sen}\,\varphi_0 = 1;$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$x = 0{,}03\,\text{sen}\left(300\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

11. Datos: MAS; A = 3 cm = 0,03 m; f = 5 Hz; $\varphi_0 = 3\pi/2$

a) Calculamos la pulsación, para escribir la ecuación de la elongación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 5\text{ Hz} = 10\pi\text{ rad/s}$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) Escribimos la ecuación de la velocidad:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03\cdot 10\pi\cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$v = 0{,}3\pi\cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

c) La ecuación de la aceleración es:

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -0{,}03\cdot(10\pi)^2\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$a = -3\pi^2\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

12. Datos: MAS; T = 0,5 s; A = 0,05 m; φ_0 = 0

a) Determinamos la pulsación y escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5\text{ s}} = 4\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\,\text{sen}\,(4\pi t)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\cdot 4\pi\cos(4\pi t)$$

$$v = 0{,}2\pi\cos(4\pi t)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -0{,}05\cdot(4\pi)^2\,\text{sen}(4\pi t)$$

$$a = -0{,}8\pi^2\,\text{sen}\,(4\pi t)$$

Para t = 10 s:

$$x\ (t = 10\text{ s}) = 0{,}05\text{ sen }(40\pi) = 0\text{ m}$$

$$v\ (t = 10\text{ s}) = 0{,}2\pi\cos(40\pi) = 0{,}2\pi\text{ m/s}$$

$$a\ (t = 10\text{ s}) = -0{,}8\pi^2\text{ sen }(40\pi) = 0\text{ m/s}^2$$

b) El cuerpo se encuentra en el origen de coordenadas, que es el punto de equilibrio o centro de oscilación del movimiento. En este punto, la velocidad del cuerpo es máxima y la aceleración es nula.

13. Datos: MAS; A = 0,2 m; T = 4 s; $\varphi_0 = \pi/3$

Calculamos la pulsación del movimiento a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\text{ s}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Escribimos las ecuaciones para la elongación, la velocidad y la aceleración del movimiento:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -0{,}05\pi^2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

14. Datos: MAS; f = 50 Hz; x = –0,001 m

Determinamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 50\text{Hz} = 100\pi\text{ rad/s}$$

Hallamos la aceleración a partir de su relación con la elongación:

$$a = -\omega^2 x = -(100\pi\text{ rad/s})^2\cdot(-0{,}001\text{ m})$$

$$a = 10\pi^2\text{ m/s}^2$$

15. En el MAS sólo existe una componente de la aceleración, ya que es un movimiento unidimensional, sobre una recta. La aceleración es siempre tangente a la velocidad, ya que son paralelas y, por lo tanto, no existe aceleración normal.

16. *a)* La coordenada x tiene el mismo valor para la partícula que describe el MCU que para su proyección. Lo que diferencia el MCU del MAS es que en el primero varía, además de la coordenada x, la coordenada y.

b) No, las dos partículas no tienen siempre la misma velocidad. La del MAS tiene una velocidad igual a la proyección en el eje horizontal de la velocidad del MCU. Tampoco tienen la misma aceleración, pues en el MCU la aceleración es normal, mientras que en el MAS es la proyección en el eje x de la aceleración anterior.

17. Datos: MCU; R = 0,20 m; T = 2 s; x_0 = 0; $\varphi_0 = \pi/2$

El movimiento de la proyección sobre el eje de abscisas será un MAS.

La amplitud coincidirá con el radio de la circunferencia, A = R = 0,20 m.

El período será el mismo que el del MCU, T = 2 s. Entonces, la pulsación es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2s} = \pi \frac{rad}{s}$$

Teniendo en cuenta que en el instante inicial la proyección de la posición de la partícula coincide con el origen, si escribimos la ecuación en seno, la fase inicial será nula:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2\,\text{sen}\,(\pi t)$$

Podemos también escribir la ecuación en función del coseno, y la fase inicial será entonces $\varphi_0 = \pi/2$:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE (págs. 105, 107 y 109)

18. *a)* En el oscilador armónico simple, el valor de la fuerza recuperadora es F = –Kx. Por lo tanto, de la 2ª ley de Newton tenemos que:

$$F = m\,a = -Kx;\ a = -\frac{K}{m}x$$

— En x = 0, la aceleración es nula.

— En x = A, el valor de la aceleración es $-\frac{K}{m}A$ con dirección y sentido hacia la posición de equilibrio.

— En x = –A, el valor de la aceleración es $\frac{K}{m}A$ también con dirección y sentido hacia la posición de equilibrio.

b) La aceleración es máxima para x = ± A.

19. Determinamos cómo varía la pulsación o frecuencia angular si duplicamos la masa del cuerpo:

$$\omega_0^{\,2} = \frac{K}{m_0};\ \omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{K}{2\,m_0} = \frac{1}{2}\omega_0^{\,2};\ \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Hallamos la variación de la frecuencia y del período:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{2} = \sqrt{2}\,T_0$$

La velocidad máxima será:

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm A\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_{0\,max}$$

Y la aceleración máxima:

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0\right)^2 = \pm\frac{1}{2}A\omega_0^{\,2} = \frac{1}{2}a_{0\,max}$$

20. Datos: m = 200 g = 0,2 kg; K = 25 N/m

a) La amplitud será igual a la distancia desde el punto del que soltamos el cuerpo hasta el punto de equilibrio. El punto de equilibrio para el sistema formado por el resorte y la masa se encuentra, respecto a la longitud natural del resorte, a una distancia tal que el peso del cuerpo y la fuerza del resorte son iguales:

$$mg = Kx;\ x = \frac{m\,g}{K}$$

$$x = \frac{0{,}2\text{ kg}\cdot 9{,}8\,\frac{N}{kg}}{25\,\frac{N}{m}} = 0{,}08\text{ m};\ A = 0{,}08\text{ m}$$

b) Determinamos el período del movimiento, que es independiente de la amplitud:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2\text{ kg}}{25\,\frac{N}{m}}} = 0{,}56\text{ s}$$

El período del movimiento es el mismo que en el caso en que el resorte está horizontal. La presencia de la gravedad no altera el período.

21. Datos: m = 2,0 kg; F_{max} = 8,0 N; A = 20 cm = 0,2 m

a) Hallamos la constante elástica a partir de la fuerza que realiza el resorte cuando la elongación es máxima:

$$K = \frac{F_{max}}{A} = \frac{8{,}0\text{ N}}{0{,}2\text{ m}} = 40\,\frac{N}{m}$$

b) Calculamos el período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{ kg}}{40\,\frac{N}{m}}} = 1{,}4\text{ s}$$

22. Datos: m = 50 g = 0,05 kg; T = 1,5 s

Hallamos la constante recuperadora del resorte a partir de la expresión del período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\ T^2 = 4\pi^2\frac{m}{K};\ K = 4\pi^2\frac{m}{T^2}$$

$$K = 4\pi^2\frac{0{,}05\text{ kg}}{(1{,}5\text{ s})^2} = 0{,}88\,\frac{N}{m}$$

23. Datos: m = 2 kg; K = 65 N/m; A = 0,3 m

a) Inicialmente el cuerpo está en reposo. Por tanto, su energía potencial inicial coincide con su energía mecánica:

$$Ep = E = \frac{1}{2}K\,A^2 = \frac{1}{2}\cdot 65\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}3\text{m})^2 = 2{,}925\text{ J}$$

b) La velocidad máxima se alcanzará cuando la energía potencial sea nula. Entonces, toda la energía mecánica es energía cinética, Ec = E:

$$E = Ec = \frac{1}{2} m\, v^2;\ v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}925\ J}{2\ kg}} = \pm 1{,}7\ \frac{m}{s}$$

24. Datos: m = 1,5 kg; K = 1,5 N/m; v_{max} = ±3 m/s

a) Por la conservación de la energía mecánica, la energía del bloque parado es igual a su energía en cualquier otro instante de tiempo. Cuando la velocidad es máxima, la energía potencial es cero y la energía mecánica coincide con la energía cinética.

$$E = Ec_{max} = \frac{1}{2} m\, v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ kg \cdot \left(\pm 3\ \frac{m}{s}\right)^2 = 6{,}75\ J$$

b) Despejamos la amplitud de la expresión de la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} K\, A^2;\ A = \sqrt{\frac{2E}{K}};\ A = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}75\ J}{1{,}5\ \frac{N}{m}}} = 3\ m$$

c) Calculamos la pulsación y determinamos la aceleración máxima:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}5\ \frac{N}{m}}{1{,}5\ kg}} = 1\ \frac{rad}{s}$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2;\ a_{max} = \pm\left(1\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 3\ m = \pm 3\ \frac{m}{s^2}$$

25. Datos: x_1 = 5 cm = 0,05 m; m_1 = 1,0 kg;

m_2 = 500 g = 0,5 kg; A = 3 cm = 0,03 m

a) Calculamos la constante de recuperación del resorte a partir de los datos para la primera masa que colgamos. La posición de equilibrio x_1 es aquélla para la cual el peso del cuerpo que colgamos y la fuerza del muelle son iguales y de sentido contrario:

$$m_1\, g = K x_1;\ K = \frac{m_1\, g}{x_1};$$

$$K = \frac{1\ kg \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg}}{0{,}05\ m} = 196\ \frac{N}{m}$$

b) Calculamos la energía potencial del resorte en el punto de máxima deformación (x = A), donde toda la energía será energía potencial:

$$Ep = E = \frac{1}{2} K\, A^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 196\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}03\ m)^2 = 0{,}088\ J$$

c) La energía mecánica se conserva, por lo que es igual a la energía potencial en el punto de máxima deformación, donde el cuerpo está en reposo. En otra posición, como en x = 2 cm, la energía cinética será la energía mecánica menos la potencial. Determinamos la energía potencial del resorte en x = 2 cm = 0,02 m:

$$Ep = \frac{1}{2} K\, x^2;\ Ep = \frac{1}{2} \cdot 196\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}02\ m)^2 = 0{,}039\ J$$

Entonces, la energía cinética en este punto es:

$$Ec = E - Ep;\ Ec = 0{,}088\ J - 0{,}039\ J = 0{,}049\ J$$

d) Determinamos la velocidad en este punto a partir de la energía cinética:

$$Ec = \frac{1}{2} m\, v^2;\ v = \sqrt{\frac{2Ec}{m}};\ v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049\ J}{0{,}5\ kg}} = 0{,}443\ \frac{m}{s}$$

26. Si tenemos un reloj de péndulo que adelanta, hemos de aumentar la longitud del péndulo. De esta forma, el período de oscilación será más largo y las manecillas del reloj avanzarán más lentamente.

— Si un péndulo simple tiene un período de T = 2 s con L = 1 m, otro con T = 5 s tendrá una longitud mayor, ya que el período es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo. Concretamente, la longitud del segundo péndulo será de 6,25 m. Para encontrarla, despejamos el valor de la gravedad en el lugar del experimento a partir de la longitud y el período del primer péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ g = 4\pi^2\ \frac{L}{T^2};\ g = 9{,}87\ \frac{m}{s^2}$$

Utilizamos este valor de g para hallar la longitud del segundo péndulo:

$$L = \frac{g\, T^2}{4\pi^2};\ L = 6{,}25\ m$$

27. *a)* Datos: L = 0,556 m; g = 9,75 m/s²

Determinamos el período del péndulo en este lugar:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}556\ m}{9{,}75\ \frac{m}{s^2}}} = 1{,}5\ s$$

b) Datos: g_L = 1,96 m/s²; T_T = 2 s; g_T = 9,8 m/s²

Con los datos del péndulo en la Tierra, determinamos su longitud:

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}};\ L = \frac{g_T\, T_T^{\ 2}}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \cdot (2\ s)^2}{4\pi^2} = 0{,}99\ m$$

Conociendo la longitud, hallamos el período en la Luna:

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}};\ T_L = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}99\ m}{1{,}96\ \frac{m}{s^2}}} = 4{,}47\ s$$

3. OTROS MOVIMIENTOS OSCILATORIOS (pág. 111)

28. La frecuencia de un oscilador amortiguado permanece constante, no disminuye. Lo único que disminuye es la amplitud. La frecuencia no puede variar porque es una magnitud propia del oscilador, esté o no amortiguado. El amortiguamiento depende de las características del oscilador y del agente amortiguador, y de la velocidad del oscilador en cada momento.

29. Un oscilador entra en resonancia cuando actúa sobre él una fuerza externa periódica de frecuencia igual a la frecuencia propia del oscilador. Si además de esta fuerza periódica existe otra fuerza amortiguadora que disipe más energía que la suministrada por la fuerza periódica, las oscilaciones serán amortiguadas. En cambio, si la energía disipada es inferior a la suministrada por la fuerza periódica, la amplitud de las oscilaciones, en vez de amortiguarse, aumentará.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 112)

a) Resonancia, osciladores forzados y osciladores amortiguados.

Un oscilador sobre el que actúe una fuerza disipativa realizará oscilaciones amortiguadas. En cada ciclo, el oscilador irá perdiendo energía, y por ello la amplitud del movimiento irá disminuyendo. El movimiento será periódico, con la misma frecuencia natural del oscilador, pero, a diferencia del MAS, la amplitud no es constante, sino que decrece.

Si además de la fuerza disipativa existe alguna otra fuerza externa que proporcione energía al oscilador, hablamos de oscilaciones forzadas. En el caso que la energía suministrada compense exactamente la que el oscilador pierde a causa de la amortiguación, el movimiento tiene el mismo período natural y amplitud constante, como el MAS.

Una manera de introducir esta energía es mediante una fuerza periódica. La absorción de energía por parte del oscilador será máxima cuando esta fuerza tenga un período igual o casi igual al período natural del oscilador. En este caso, no sólo se mantendrán las oscilaciones sin disminuir su amplitud, sino que la amplitud del movimiento irá en aumento, llegando incluso a sobrepasar los límites de resistencia de la estructura del oscilador. Se trata de un fenómeno de resonancia. El período del movimiento es el natural del sistema, pero en este caso la amplitud tampoco es constante, sino que aumenta.

b) Tres ejemplos de resonancia:

Cuando nos impulsamos en un columpio, estamos forzando las oscilaciones. Si nos impulsamos en el momento adecuado en cada ciclo (es decir, con la frecuencia natural del columpio), la amplitud del movimiento va creciendo.

La mayoría de los instrumentos musicales tiene lo que se llama una caja de resonancia. Así, por ejemplo, la forma de una guitarra o de un violín es la adecuada para que el aire de su interior entre en resonancia con las notas producidas por la vibración de las cuerdas. De esta forma, se amplifica la intensidad del sonido.

Otro ejemplo de resonancia poco visible pero muy útil es el microondas. En este caso, los osciladores son las moléculas de agua que todos los alimentos contienen. Como la temperatura de un material es consecuencia de las vibraciones de sus átomos y moléculas, si conseguimos hacer vibrar con mayor amplitud las moléculas de agua de los alimentos, conseguiremos que su temperatura aumente. Para hacer oscilar la molécula de agua, el microondas emite radiación electromagnética de una frecuencia igual o parecida a la frecuencia propia de la molécula de agua, la cual entra en resonancia y vibra cada vez con más amplitud.

En la industria y en la construcción en necesario prevenir el fenómeno de resonancia y tomar medidas para evitarlo. Por ejemplo, en los puertos, la distancia entre los diques no debe ser un múltiplo de la longitud de onda de las olas de los temporales más frecuentes en esa costa. Si lo fuera, las oscilaciones del agua dentro del puerto entrarían en resonancia con las olas del temporal y su altura iría en aumento. Otro ejemplo es la construcción de grandes edificios. Algunos rascacielos disponen de un sistema amortiguador para reducir las oscilaciones cuando soplan fuertes vientos. El sistema oscila con la misma frecuencia que el edificio pero con un desfase de 180°, de modo que amortigua las oscilaciones.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 114 y 115)

30. Datos: x (t = 5 s) = 3,36 m; v (t = 5 s) = 0,216 m/s;

$\omega = 0{,}1$ rad/s

a) Determinamos la frecuencia a partir de la pulsación:

$$\omega = 2\pi\, f;\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi};\ f = \frac{0{,}05}{\pi}\ \text{Hz}$$

b) Determinamos la amplitud a partir de la relación entre la elongación y la velocidad para t = 5 s:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}\,;\ v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right);\ A^2 = \frac{v^2}{\omega^2} + x^2$$

$$A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2}\,;\ A = \sqrt{\frac{\left(0{,}216\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(0{,}1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} + (3{,}36\ \text{m})^2} = 4\ \text{m}$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación en t = 5 s, cuando la velocidad es positiva, para determinar la fase inicial:

$$x = A\ \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0)$$

$$3{,}36 = 4\ \text{sen}\ (0{,}1 \cdot 5 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\,(0{,}5 + \varphi_0) = \frac{3{,}36\text{ m}}{4\text{ m}} = 0{,}84$$

$$0{,}5 + \varphi_0 = \text{arcsen}\,0{,}84 = 1\text{ rad o }(\pi - 1)\text{ rad}$$

Como la velocidad, que varía con el coseno del ángulo de fase, es positiva:

$$(0{,}5 + \varphi_0) = 1\text{ rad};\ \varphi_0 = (1 - 0{,}5)\text{ rad} = 0{,}5\text{ rad}$$

d) La aceleración en t = 5 s será:

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

$$a = -(0{,}1\text{ rad/s})^2 \cdot 3{,}36\text{ m} = -0{,}03\text{ m/s}^2$$

e) Determinamos la elongación, la velocidad y la aceleración para t = 0 s:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 4\,\text{sen}\,(0{,}1 \cdot 0 + 0{,}5) = 1{,}9\text{ m}$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 4 \cdot 0{,}1\cos(0{,}1 \cdot 0 + 0{,}5)$$

$$v = 0{,}35\text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -(0{,}1\text{ rad/s})^2 \cdot 1{,}9\text{ m} = -0{,}02\text{ m/s}^2$$

f) Las expresiones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo son:

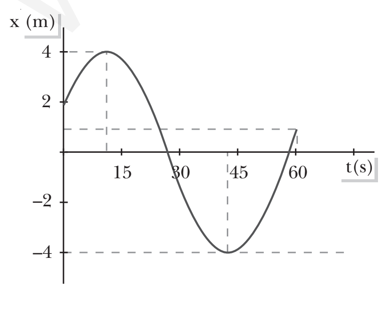
$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 4\,\text{sen}\,(0{,}1t + 0{,}5)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}4\cos(0{,}1t + 0{,}5)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -0{,}04\cos(0{,}1t + 0{,}5)$$

g) Para representar la elongación en función del tiempo, hallamos varios puntos y los representamos. Escogemos los puntos de elongación máxima, mínima y cero:

t (s)	*x (m)*
0	1,9
10,7	A = 4
26,4	0
42,1	–A = –4
57,8	0
60	0,86



31. Datos: m = 1 g = 0,001 kg; f = $10^3/\pi$ Hz;

$a_{max} = \pm\, 8{,}0 \cdot 10^3\text{ m/s}^2$

a) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{10^3}{\pi}\text{ Hz} = 2 \cdot 10^3\text{ rad/s}$$

b) Hallamos la amplitud a partir de la aceleración en el extremo del recorrido, punto donde la elongación coincide con la amplitud del movimiento:

$$|a_{max}| = A\omega^2;\ A = \frac{|a_{max}|}{\omega^2};\ A = \frac{8{,}0 \cdot 10^3\text{ m/s}^2}{(2 \cdot 10^3\text{ rad/s})^2}$$

$$A = 2 \cdot 10^{-3}\text{ m} = 2\text{ mm}$$

c) Utilizamos la relación entre la velocidad y la elongación para determinar la velocidad de la partícula cuando su elongación es de x = 1,2 mm = $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \pm 2 \cdot 10^3\text{ rad/s}\sqrt{(2 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2 - (1{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2}$$

$$v = \pm 3{,}2\text{ m/s}$$

d) Determinamos la fase inicial a partir de la velocidad para t = 2 s:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$4 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3\cos(2 \cdot 10^3 \cdot 2 + \varphi_0)$$

$$4 = 4\cos(4 \cdot 10^3 + \varphi_0);\ \cos(4 \cdot 10^3 + \varphi_0) = 1$$

$$(4 \cdot 10^3 + \varphi_0) = 0;\ \varphi_0 = -4 \cdot 10^3\text{ rad}$$

Escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{sen}\,(2 \cdot 10^3 t - 4 \cdot 10^3)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 4\cos(2 \cdot 10^3 t - 4 \cdot 10^3)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -8 \cdot 10^3\,\text{sen}\,(2 \cdot 10^3 t - 4 \cdot 10^3)$$

32. Datos: m = 0,6 kg; K = 10 N/m; A = 5 cm = 0,05 m

Hay que tener en cuenta que se trata de un MAS de energía constante, ya que no existe rozamiento.

a) Calculamos la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2}K\,A^2;\ E = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,(0{,}05\text{ m})^2 = 0{,}0125\text{ J}$$

b) El cuerpo tendrá velocidad máxima cuando toda su energía sea cinética, lo que sucede en el punto de equilibrio:

$$Ec_{max} = E = \frac{1}{2}m\,v_{max}{}^2;\ v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}012\text{ J}}{0{,}6\text{ kg}}} = \pm 0{,}2\text{ m/s}$$

c) Determinamos la energía potencial del cuerpo en x = 2 cm = 0,02 m:

$$Ep = \frac{1}{2}K\,x^2;\ Ep = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\,(0{,}02\text{ m})^2 = 2 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

La energía cinética es la energía total menos la potencial:

$$E = Ep + Ec$$

$$Ec = E - Ep; Ec = 0{,}012 \text{ J} - 2 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 0{,}01 \text{ J}$$

33. Datos: m = 0,5 kg; A = 10 cm = 0,1 m; T = 2 s

a) Determinamos la energía total del sistema, que coincidirá con la energía potencial máxima en los extremos de la trayectoria, y con la cinética máxima en el punto de equilibrio. Para ello, calculamos primero la pulsación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \omega = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$Ec_{max} = Ep_{max} = E = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot \left(\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0{,}1 \text{ m})^2$$

$$Ec_{max} = Ep_{max} = E = 0{,}02 \text{ J}$$

b) La velocidad del cuerpo será máxima cuando sea máxima su energía cinética. Por tanto:

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2; v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2Ec_{max}}{m}}$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}02 \text{ J}}{0{,}5 \text{ kg}}} = \pm 0{,}3 \text{ m/s}$$

c) En este sistema, la energía sólo depende de las características del muelle (K) y del movimiento (A). Es independiente de la masa del cuerpo. Por tanto, con un cuerpo de m = 2 kg tendríamos los mismos resultados.

34. Datos: m = 0,5 kg; L = 1 m; α = 8° = 0,14 rad; g = 9,8 m/s²

a) Hallamos la pulsación y la amplitud para determinar la energía potencial máxima, Ep:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}; \omega = \sqrt{\frac{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ m}}} = 3{,}1 \text{ rad/s}$$

$$A = \alpha L = 0{,}14 \text{ rad} \cdot 1 \text{ m} = 0{,}14 \text{ m}$$

$$Ep_{max} = E = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$Ep_{max} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot \left(3{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0{,}14 \text{ m})^2 = 0{,}05 \text{ J}$$

b) Calculamos la velocidad máxima a partir de la energía cinética máxima:

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2; Ec_{max} = Ep_{max}; v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2Ec_{max}}{m}}$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05 \text{ J}}{0{,}5 \text{ kg}}} = \pm 0{,}45 \text{ m/s}$$

35. Datos: L = 0,248 m; T = 1 s; α = 18° = 0,314 rad;

m = 5 g = 0,005 kg

a) Determinamos g en ese punto a partir del período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}; g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{0{,}248 \text{ m}}{(1 \text{ s})^2}; g = 9{,}79 \text{ m/s}^2$$

b) Hallamos la amplitud y la pulsación del movimiento para calcular la velocidad máxima:

$$A = \alpha L = 0{,}314 \text{ rad} \cdot 0{,}248 \text{ m} = 0{,}078 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \text{ s}} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0{,}078 \text{ m} \cdot 2\pi \text{ rad/s} = \pm 0{,}49 \text{ m/s}$$

c) La fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio es máxima en los puntos de máxima elongación:

$$|F| = Kx; F_{max} = \pm KA = \frac{m g}{L} A$$

$$F_{max} = \pm \frac{0{,}005 \text{ kg} \cdot 9{,}79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}248 \text{ m}} \cdot 0{,}078 \text{ m} = \pm 0{,}015 \text{ N}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 116 y 117)

36. *a)* La aceleración de un oscilador armónico, en el punto donde la velocidad es máxima, es nula (esto ocurre en el punto de equilibrio, de elongación nula).

b) Cuando la elongación es máxima, la aceleración es también máxima, mientras que la velocidad es nula.

37. $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$

a) Si el movimiento comienza en el centro de la oscilación, x = 0 para t = 0. Por tanto:

$$0 = A \text{ sen } \varphi_0; \text{sen } \varphi_0 = 0; \varphi_0 = 0 \text{ ó } \pi$$

b) Si el movimiento empieza en el punto extremo de las elongaciones positivas:

$$A = A \text{ sen } \varphi_0; \text{sen } \varphi_0 = 1; \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

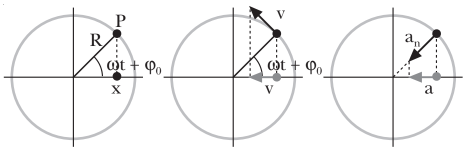
c) En el caso que comience en el extremo de las elongaciones negativas:

$$-A = A \text{ sen } \varphi_0; \text{sen } \varphi_0 = -1; \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

38. Una partícula que describe un MAS en un período recorre una distancia igual al doble de la amplitud, x = 2A.

— Si sabemos que en un instante la velocidad de una partícula en una MAS es nula, podemos decir que la partícula está en uno de los puntos extremos, pero no podemos saber si está en x = A o en x = –A. Tampoco podemos conocer el sentido de su desplazamiento.

39. La proyección sobre un diámetro de un MCU corresponde a la elongación de un MAS. El radio del MCU es igual a la amplitud del MAS. La frecuencia y el período del MCU y del MAS son los mismos. La velocidad del MAS corresponde a la proyección de la velocidad lineal del MCU, y la aceleración del MAS es la proyección de la aceleración normal del MCU.



$x = R\cos(\omega t + \varphi_0) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi'_0)$

40. La fuerza que aplicamos para estirar el extremo de un muelle debe ser igual pero de signo opuesto a la fuerza elástica del resorte en el punto en que lo soltamos. No es la fuerza elástica, porque la aplicamos nosotros y no el muelle, pero debe ser igual en módulo y de sentido opuesto.

41. El período de oscilación de un resorte depende de la masa colgada en el extremo y de la constante del muelle. Por tanto, si cambiamos la masa, cambiará el período.

— En particular, si duplicamos la masa, m' = 2 m:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}} = \sqrt{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\; T' = \sqrt{2}\,T$$

42. Como la energía total del sistema es la cinética más la potencial, los puntos de la trayectoria de un MAS en los que la energía potencial y la cinética sean iguales verificarán que Ep = Ec = $\frac{1}{2}$ E:

$$Ep = \frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}K\,A^2\right) = \frac{1}{4}K\,A^2$$

$$\frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{4}K\,A^2;\; x^2 = \frac{1}{2}A^2;\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A$$

43. Como el período de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad, en la Luna, donde la gravedad es menor, el péndulo oscilará más lentamente que en la Tierra; es decir, el período será más largo. En cambio, en Júpiter, donde la gravedad es mucho mayor, el período del péndulo será mucho más pequeño y oscilará más rápido.

44. Un sistema real, con fuerzas de rozamiento, sólo podrá tener un MAS si existe algún dispositivo que fuerce las oscilaciones, proporcionando al sistema justamente la energía que disipa la fuerza de rozamiento.

45. Datos: MAS; f = 150 Hz; A = 5 cm = 0,05 m

a) Hallamos el período a partir de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f};\; T = \frac{1}{150\text{ Hz}} = 6{,}7\cdot 10^{-3}\text{ s}$$

b) Calculamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\,f;\; \omega = 2\pi\cdot 150\text{ Hz};\; \omega = 300\pi\text{ rad/s}$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\,\text{sen}\,(300\pi t + \varphi_0)$$

Si en t = 0 la elongación es x = 0, podemos determinar la fase inicial:

$$0 = 0{,}05\,\text{sen}\,(300\pi\cdot 0 + \varphi_0);\, \text{sen}\,\varphi_0 = 0;\, \varphi_0 = 0 \text{ ó } \pi$$

Como en t = 0 es v > 0, tenemos:

$$v = A\cos\varphi_0 > 0$$

Por lo tanto, $\varphi_0 = 0$:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}\,(300\pi t)$$

46. Datos: MAS; x = 0,20 sen (10t + π/2), unidades SI

De la expresión de la elongación deducimos que A = 0,20 m, ω = 10 rad/s y $\varphi_0 = \pi/2$.

Determinamos la velocidad máxima a partir de la ecuación de la velocidad:

$$v_{max} = \pm\omega\,A;\; v_{max} = \pm 10\text{ rad/s}\cdot 0{,}20\text{ m};\; v_{max}$$
$$v_{max} = \pm 2\text{ m/s}$$

— Cuando la velocidad es máxima, sabemos que la partícula está exactamente en x = 0. Sin más información, no podemos saber el sentido del movimiento.

47. *a)* Datos: MAS; a = –90 m/s² cuando x = 0,10 m

Determinamos la pulsación a partir de la relación entre la aceleración y la elongación:

$$a = -\omega^2 x;\; \omega = \sqrt{\frac{-a}{x}};\; \omega = \sqrt{\frac{-\left(-90\,\frac{m}{s^2}\right)}{0{,}10\text{ m}}} = 30\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hallamos el período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\text{ rad/s}} = 0{,}21\text{ s}$$

b) Datos: MAS; x = –0,01 m; f = 5 Hz

Calculamos la pulsación y relacionamos la aceleración con la elongación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 5\text{ Hz};\; \omega = 10\pi\text{ rad/s}$$

$$a = -\omega^2 x;\; a = -(10\pi\text{ rad/s})^2\cdot(-0{,}01\text{ m}) = \pi^2\text{ m/s}^2$$

c) Datos: MAS; a = –2x; A = 0,01 m

De la relación entre a y x hallamos la pulsación y el período:

$$a = -\omega^2 x = -2x;\; \omega = \sqrt{2}\text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\text{ rad/s}} = \sqrt{2}\pi\text{ s}$$

Con ello, podemos escribir la ecuación de la elongación, excepto la fase inicial, que supondremos nula:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 0{,}01\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t)$$

48. Datos: MAS; $a = -16\,\pi^2\,x$; $A = 0{,}04$ m

A partir de la elongación máxima, encontramos el valor de la aceleración máxima:

$$a_{max} = \pm\omega^2 A = \pm 16\pi^2\,\frac{rad^2}{s^2}\cdot 0{,}04\,m = \pm 0{,}64\,\pi^2\,\frac{m}{s^2}$$

Calculamos la velocidad máxima:

$$v_{max} = \pm\omega\,A = \pm\sqrt{16\pi^2}\,A = \pm 4\pi\cdot 0{,}04\,\frac{m}{s^2} = \pm 0{,}16\,\pi\,\frac{m}{s}$$

49. Datos: $K = 20$ N/m; $m = 300$ g $= 0{,}3$ kg

La posición de equilibrio del cuerpo será aquélla en que la fuerza recuperadora del muelle y el peso del cuerpo sean iguales:

$$m\,g = -Kx$$

$$x = -\frac{m\,g}{K};\; x = -\frac{0{,}3\,kg\cdot 9{,}8\,\frac{N}{kg}}{20\,\frac{N}{m}} = -0{,}15\,m$$

a) La amplitud de las oscilaciones será la distancia desde el punto en que lo soltamos (longitud natural del muelle) hasta el punto de equilibrio, $A = 0{,}15$ m. Es decir, la amplitud coincidirá con el alargamiento del muelle. Entonces, la posición más baja estará a $-2A$ de donde lo hemos soltado, a una distancia $x = -A$ del punto de equilibrio y centro de las oscilaciones. Así, la posición más baja será $x = -0{,}15$ m respecto a la posición de equilibrio.

b) Determinamos el período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}3\,kg}{20\,N/m}} = 0{,}77\,s$$

50. Datos: $m = 1{,}8$ kg; $K = 20$ N/m; $A = 30$ cm $= 0{,}3$ m

En la posición de equilibrio, la energía cinética y la velocidad son máximas, mientras que la energía potencial es nula. Calculamos la energía total del sistema, que coincidirá con la energía cinética en la posición de equilibrio:

$$Ec = E = \frac{1}{2}K\,A^2;\; E = \frac{1}{2}\cdot 20\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}3\,m)^2 = 0{,}9\,J$$

$$Ec = E = 0{,}9\,J$$

Hallamos la velocidad:

$$Ec = \frac{1}{2}m\,v^2;\; v = \pm\sqrt{\frac{2Ec}{m}};\; v = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}9\,J}{1{,}8\,kg}};\; v = \pm 1{,}0\,\frac{m}{s}$$

51. Datos: $T = 10$ s

Despejamos la longitud del péndulo de la expresión del período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\; T^2 = 4\pi^2\,\frac{L}{g};\; L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{(10\,s)^2\cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 24{,}8\,m$$

52. Datos: MAS; $x = 4\cos(\pi t + \pi/4)$, unidades SI

a) La pulsación del movimiento es $\omega = \pi$ rad/s. Por tanto, el período y la frecuencia serán:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,s;\; f = \frac{1}{T} = 0{,}5\,Hz$$

b) Calculamos la posición, la velocidad y la aceleración para $t = 1$ s:

$$x = 4\cos\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{5\pi}{4} = -2{,}83\,m$$

$$v = -4\pi\,\mathrm{sen}\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = 8{,}89\,\frac{m}{s}$$

$$a = -4\pi^2\cos\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2\cos\frac{5\pi}{4} = 27{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

53. Datos: MAS; $t_1 = 0{,}75$ s, $x_1 = 2$ m; $t_2 = 3{,}75$ s; $v_2 = 0$ m/s;

$T = 6$ s

a) Determinamos primero la pulsación a partir del período, para escribir la ecuación de la elongación para t_1 y la ecuación de la velocidad para t_2:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6\,s} = \frac{\pi}{3}\,\frac{rad}{s}$$

$$x_1 = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}t_1 + \varphi_0\right);\; 2 = A\,\mathrm{sen}\,(0{,}25\pi + \varphi_0)$$

$$v_2 = A\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t_2 + \varphi_0\right);\; 0 = A\frac{\pi}{3}\cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0)$$

A partir de la segunda ecuación determinamos parcialmente la fase inicial:

$$0 = A\frac{\pi}{3}\cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0);\; \cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0) = 0$$

$$1{,}25\pi + \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = -0{,}75\pi\,rad \text{ o } \varphi_0 = -1{,}75\pi\,rad$$

Como la elongación en t_1 es positiva:

$$\mathrm{sen}\,(0{,}25\pi + \varphi_0) > 0 \text{ y } \varphi_0 = -1{,}75\pi\,rad$$

Hallamos ahora la amplitud despejándola de la ecuación de la elongación para t_1:

$$2 = A\,\mathrm{sen}\,(0{,}25\pi - 1{,}75\pi) = A\,\mathrm{sen}\,(-1{,}5\pi) = A$$

$$A = 2\,m$$

b) En t_2 = 3,75 s, como sabemos que la velocidad es nula, la partícula se encuentra en uno de los extremos de su movimiento y la aceleración es máxima. Por tanto:

$$|a_{max}| = \omega^2 A;\ a_{max} = \left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 2\ m = 2{,}2\ \frac{m}{s^2}$$

c) Calculamos la velocidad máxima:

$$v_{max} = \pm\omega\ A = \pm\left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right)\cdot 2\ m = \pm 2{,}1\ \frac{m}{s}$$

d) Escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo:

$$x = 2\ sen\left(\frac{\pi}{3}t - 1{,}75\pi\right)$$

$$v = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - 1{,}75\pi\right)$$

$$a = -\frac{2\pi^2}{9}\ sen\left(\frac{\pi}{3}t - 1{,}75\pi\right)$$

54. Datos: Δx = 10 cm = 0,1 m; m = 2 kg; A = 3 cm = 0,03 m

a) Determinamos la constante del resorte a partir de la nueva posición de equilibrio para la masa de 2 kg:

$$m\ g = K\ \Delta x;\ K = \frac{m\ g}{\Delta x} = \frac{2\ kg \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg}}{0{,}1\ m} = 196\ \frac{N}{m}$$

Hallamos la pulsación y el período del MAS del resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{196\ \frac{N}{m}}{2\ kg}};\ \omega = 9{,}90\ \frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9{,}90\ \frac{rad}{s}};\ T = 0{,}63\ s$$

b) La velocidad máxima es:

$$v_{max} = \pm A\ \omega = \pm 0{,}03\ m \cdot 9{,}90\ rad/s$$
$$v_{max} = \pm 0{,}30\ m/s$$

c) Determinamos la energía mecánica, que será constante para todo el movimiento:

$$E = \frac{1}{2}K\ A^2;\ E = \frac{1}{2}\cdot 196\ \frac{N}{m}\cdot(0{,}03\ m)^2 = 0{,}088\ J$$

55. Datos: K = 250 $N{\cdot}m^{-1}$; x = –10 cm = –0,1m; m = 0,5 kg

a) Inicialmente, cuando el muelle está comprimido, toda su energía es potencial, y es:

$$Ep = \frac{1}{2}K\ x^2 = \frac{1}{2}\cdot 250\ \frac{N}{m}\cdot(0{,}1\ m)^2;\ Ep = 1{,}25\ J$$

En ese instante, el cuerpo está en reposo y su energía cinética es nula. Cuando el resorte empieza a estirarse, pierde paulatinamente energía potencial y la cede al cuerpo, que adquiere energía cinética. Finalmente, el cuerpo sale despedido con una energía cinética igual a la energía potencial inicial del resorte:

$$Ec = 1{,}25\ J$$

b) Calculamos la velocidad del cuerpo a partir de su energía cinética:

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2;\ v = \sqrt{\frac{2Ec}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}25\ J}{0{,}5\ kg}};\ v = 2{,}2\ \frac{m}{s}$$

56. Datos: L = 155 cm = 1,55 m; 100 vibraciones en 250 s; α = 20° = 0,35 rad

Determinamos el período del péndulo:

$$f = \frac{100\ vibraciones}{250\ s} = 0{,}4\ Hz;\ T = \frac{1}{f} = 2{,}5\ s$$

Hallamos la aceleración de la gravedad en ese lugar a partir de la fórmula del período del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ g = 4\pi^2\ \frac{L}{T^2}$$

$$g = 4\pi^2\ \frac{1{,}55\ m}{(2{,}5\ s)^2} = 9{,}79\ \frac{m}{s^2}$$

— Calculamos la amplitud del movimiento, para determinar a continuación la velocidad máxima:

$$A = \alpha\ L = 0{,}35\cdot 1{,}55\ m = 0{,}54\ m$$
$$v_{max} = A\ \omega;\ v_{max} = A\cdot 2\pi\ f = 0{,}54\ m\cdot 2\pi\cdot 0{,}4\ Hz;$$
$$v_{max} = 1{,}4\ m/s$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO
(pág. 117)

1. En un MAS el vector posición y la aceleración nunca tienen el mismo sentido, ya que la aceleración siempre apunta hacia el punto de equilibrio, y este mismo punto es el origen de las posiciones.

   La aceleración y la velocidad, en cambio, sí pueden tener el mismo sentido, pero no lo tienen siempre. Sólo tienen el mismo sentido cuando el oscilador se desplaza desde uno de los extremos hasta el punto de equilibrio. Pero mientras se mueve del centro a los extremos, la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos.

   La velocidad y el desplazamiento tienen el mismo sentido en el tramo del centro de las oscilaciones a los extremos, pero tienen sentido opuesto en el movimiento de vuelta desde los extremos al punto de equilibrio.

2. Escribimos primero la ecuación de la velocidad y determinamos el valor de la fase cuando $v = \frac{1}{2}v_{max}$:

$$v = \frac{1}{2}v_{max} = \frac{1}{2}A\ \omega = A\ \omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\omega t + \varphi_0);\ \omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Conocida la fase, hallamos la elongación correspondiente:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 0{,}86\ A$$

3. *a)* Si un oscilador lineal duplica su amplitud, su energía total se cuadruplicará, ya que si $A_1 = 2A$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K\ {A_1}^2 = \frac{1}{2} K\ (2A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} K\ A^2 = 4\ E$$

b) Si se duplica la frecuencia, la energía también se cuadruplica, ya que es proporcional a la constante recuperadora K, y $K = m\omega^2$. Así, si $\omega_1 = 2\omega$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K_1\ A^2 = \frac{1}{2} m\ {\omega_1}^2 A^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 = 4\ E$$

c) Si se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad, la energía permanece constante, ya que si $A_1 = 2A$ y $\omega_1 = \omega/2$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K_1\ {A_1}^2 = \frac{1}{2} m\ {\omega_1}^2 {A_1}^2 = \frac{1}{2} m\ \frac{\omega^2}{4} \cdot 4A^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} K\ A^2 = E$$

4. El período de un péndulo simple de longitud L que oscila en un lugar con gravedad g es, independientemente de la masa colgada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para otro péndulo de longitud L’ = 2L, tendremos:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ L}{g}} = \sqrt{2}\ 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{2}\ T$$

$$T' = \sqrt{2}\ T$$

5. Datos: MAS; $x_0 = -A$; $T/4 = 0{,}1$ s; $2A = 0{,}2$ m

a) El tiempo que tarda en ir de un extremo de la trayectoria al centro es una cuarta parte del período:

$$T = 4 \cdot 0{,}1\ s = 0{,}4\ s$$

b) Hallamos la pulsación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ \omega = \frac{2\pi}{0{,}4\ s} = 5\pi\ \frac{rad}{s}$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1 \operatorname{sen}(5\pi t + \varphi_0)$$

Sabiendo que en t = 0 la posición es $x_0 = -A$, determinamos la fase inicial:

$$-A = A \operatorname{sen}(5\pi \cdot 0 + \varphi_0);\ \operatorname{sen}\varphi_0 = -1$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Hallamos la posición para t = 1 s:

$$x = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(5\pi \cdot 1\ s - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0{,}1\ m$$

6. Datos: $m_1 = 5$ kg; K = 500 N/m; A = 10 cm = 0,1m

a) Calculamos la pulsación del resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{500\ \frac{N}{m}}{5\ kg}} = 10\ \frac{rad}{s}$$

Escribimos la ecuación de la elongación tomando como origen de posiciones el punto de equilibrio, después de haber colgado la masa, y el sentido positivo hacia arriba:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0);\ x = 0{,}1 \operatorname{sen}(10t + \varphi_0)$$

Teniendo en cuenta que la posición inicial (para t = 0) es $x_0 = -A$, determinamos la fase inicial:

$$-0{,}1 = 0{,}1 \operatorname{sen}(10 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = -1;\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) La aceleración de la masa es nula en la posición de equilibrio, para x = 0.

c) La energía total del oscilador es constante a partir del momento en que soltamos la masa:

$$E = \frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} \cdot 500\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}1\ m)^2$$

$$E = 2{,}5\ J$$

En los puntos extremos de la trayectoria, la masa queda momentáneamente en reposo, y toda la energía es potencial elástica, debida a la compresión o alargamiento del resorte.

En el punto de equilibrio, la energía potencial elástica es nula, y toda la energía del sistema está en forma de energía cinética.

En este problema, como los desplazamientos son pequeños, podemos considerar que la energía potencial gravitatoria es constante en todo momento. Escogemos el origen de forma que sea nula.

5. Movimiento ondulatorio

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 119)

- *a)* **Movimiento periódico:** La característica que define un movimiento periódico es que se repite cada cierto intervalo de tiempo, que denominamos período.

  b) **Movimiento oscilatorio periódico:** Se caracteriza por repetirse cada cierto intervalo de tiempo (es periódico) sucesivamente a un lado y a otro de un punto de equilibrio.

  c) **Movimiento oscilatorio armónico simple:** Se trata de un movimiento periódico y oscilatorio, en el que la aceleración en cada momento es proporcional a la elongación y de sentido contrario.

- Datos: MAS; $x = 0{,}3$ sen $(10\pi t)$ en unidades SI

  a) Si comparamos con la expresión general de un MAS, $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_o)$, vemos que la fase inicial es $\varphi_0 = 0$.

  b) La pulsación es $\omega = 10\pi$ rad/s.

  c) La amplitud es $A = 0{,}3$ m.

  d) Calculamos el período a partir de la pulsación:

  $$\omega = \frac{2\pi}{T}; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2 \text{ s}$$

  e) Hallamos la frecuencia, que es la inversa del período:

  $$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2 \text{ s}} = 5 \text{ Hz}$$

  f) Calculamos la elongación para $t = 0$:

  $$x = 0{,}3 \text{ sen } (10\pi t) = 0{,}3 \text{ sen } 0 = 0 \text{ m}$$

  g) La elongación para $t = 2$ s es:

  $$x = 0{,}3 \text{ sen } (10\pi t) = 0{,}3 \text{ sen } (20\pi) = 0 \text{ m}$$

  h) Para hallar la velocidad, derivamos la elongación:

  $$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}3 \cdot 10\pi \cos(10\pi t) = 3\pi \cos(10\pi t)$$

  $$v(5 \text{ s}) = 3\pi \cos(10\pi t) = 3\pi \cos(10\pi \cdot 0{,}5)$$

  $$v(5 \text{ s}) = 3\pi \cos(5\pi) = -3\pi$$

- Consideramos un MAS con ecuación para la elongación $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$.

  a) Si $\varphi_0 = 0$, se cumple que en $t = 0$:

  $$x = A \text{ sen } \varphi_0 = A \text{ sen } 0 = 0$$

  Por tanto, la elongación en el instante inicial debe ser nula.

  b) Si $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; en $t = 0$, $x = A \text{ sen } \varphi_0 = A \text{ sen } \frac{\pi}{2} = A$. Por tanto, en el instante inicial la elongación debe ser máxima y positiva.

- Que el logaritmo en base b de a valga c ($\log_b a = c$) significa que b elevado a c vale a ($b^c = a$).

- La unidad de presión en el Sistema Internacional es el Pa y la de densidad es el kg/m^3.

1. ONDAS (pág. 120)

1. La perturbación que se propaga en las ondas formadas en la superficie del agua es la elevación de algunas partículas y el hundimiento de otras. De hecho, se está transmitiendo energía a través de las ondas, cosa que permite la elevación del agua.

2. *a)* Cuando la onda generada por nuestra sacudida en la cuerda alcance el cuerpo que cuelga de ella, el cuerpo se elevará y volverá a bajar.

   b) Este hecho demuestra que las ondas transportan energía, ya que el cuerpo, al elevarse, tiene mayor energía potencial que antes, y esta energía no se puede crear de la nada. Es la energía que le llega a través de la onda.

2. ONDAS MECÁNICAS (pág. 122)

3. Respuesta sugerida:

   Un fenómeno típicamente ondulatorio son las ondas que se crean en la superficie de un estanque cuando dejamos caer una piedra. Las ondas que se propagan por el agua son ondas mecánicas, ya que precisan la presencia del agua para propagarse.

4. Se define como onda transversal aquel movimiento ondulatorio en el que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección de oscilación de las partículas del medio perturbado son perpendiculares.

   Se define como onda longitudinal aquel movimiento ondulatorio en el que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección de oscilación de las partículas del medio perturbado son paralelas.

5. Las ondas transmitidas por una cuerda son transversales porque la propagación de la onda a lo largo de la cuerda y la dirección de vibración de la cuerda (subiendo y bajando) son perpendiculares.

6. Las ondas de compresión y expansión transmitidas por un resorte son longitudinales porque la dirección de propagación de las ondas y la dirección del movimiento oscilatorio coinciden, son paralelas al resorte.

   — Podemos establecer una onda transversal en un resorte dando un golpe en uno de sus extremos en la dirección perpendicular al resorte.

7. La velocidad de propagación de una onda mecánica depende de las propiedades del medio en el que se transmite. Para las ondas longitudinales, por ejemplo, en el caso de sólidos, estas propiedades son la densidad y la constante elástica; mientras que en los fluidos la velocidad depende de la densidad y del módulo de compresibilidad.

8. *a)* En los fluidos sólo pueden propagarse las ondas mecánicas longitudinales, ya que carecen de las fuerzas recuperadoras necesarias para la transmisión de ondas mecánicas transversales.

   b) En los sólidos pueden transmitirse tanto las ondas mecánicas transversales como las longitudinales.

9. Datos: L = 50 m; t = 90 s

   La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{L}{t} = \frac{50\ \text{m}}{90\ \text{s}} = 0{,}56\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. ONDAS ARMÓNICAS (págs. 124, 128 y 131)

10. Una **onda armónica** se define como una onda que tiene su origen en las perturbaciones periódicas producidas en un medio elástico por un movimiento armónico simple.

    Las magnitudes que la caracterizan son:

    Amplitud de la onda. Es el valor máximo de la elongación, la máxima distancia al punto de equilibrio.

    Longitud de onda, λ. Es la distancia mínima entre dos puntos consecutivos que se hallan en el mismo estado de oscilación.

    Período, T. Es el tiempo que tarda un punto cualquiera en efectuar una oscilación completa, o bien, el tiempo que emplea la onda en avanzar una longitud de onda.

    Frecuencia, f. Es el número de ondas que pasan por un punto dado por unidad de tiempo. Coincide también con el número de oscilaciones que efectúa un punto del medio por unidad de tiempo.

    Las magnitudes de una onda transversal y de una onda longitudinal se definen de la misma forma.

11. Si sacudimos el extremo de una cuerda tensa tres veces por segundo, el período será:

$$T = \frac{1\ \text{s}}{3\ \text{oscilaciones}} = 0{,}33\ \text{s}$$

12. Si no variamos la tensión de la cuerda, la velocidad de la onda será la misma. Hallamos el valor de la longitud de onda al duplicar la frecuencia mediante la relación entre la longitud de onda, la velocidad y la frecuencia:

$$v = \lambda\, f; \lambda = \frac{v}{f}; \text{si } f' = 2f \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{2f} = \frac{1}{2}\lambda$$

    Por tanto, la longitud de onda se reducirá a la mitad.

13. Datos: λ = 20 cm = 0,2 m; f = 1 750 Hz

    Calculamos la velocidad de la onda:

$$v = \lambda\, f = 0{,}2\ \text{m} \cdot 1\ 750\ \text{Hz} = 350\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

14. En la ecuación general de las ondas armónicas, φ_0 es la fase inicial. En el instante inicial, t = 0 s, φ_0 determina el estado de vibración de cada punto x. En concreto, para x = 0, la elongación inicial será $y_0 = A \operatorname{sen} \varphi_0$.

15. Datos: y = 0,03 sen (3,5t – 2,2x), en unidades SI

    Comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda y = A sen (ωt – kx), para determinar:

$$\omega = 3{,}5\ \text{rad/s};\ k = 2{,}2\ \text{m}^{-1};\ A = 0{,}03\ \text{m}$$

    a) Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2\ \text{m}^{-1}} = 2{,}86\ \text{m}$$

    b) Determinamos el período a partir de la pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1{,}8\ \text{s}$$

    c) Calculamos la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y el período:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2{,}86\ \text{m}}{1{,}8\ \text{s}} = 1{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

    d) Hallamos la velocidad derivando la función de onda:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}03 \cdot 3{,}5 \cos(3{,}5t - 2{,}2x)$$
$$v = 0{,}105 \cos(3{,}5t - 2{,}2x)$$

    La velocidad es máxima cuando el coseno vale 1:

$$v_{max} = 0{,}105\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

16. Datos: x = λ/6; t = T/4; A = 2 cm; y(0, 0) = 0

    Con los datos del problema, hallamos la elongación, escribiendo primero la función de onda:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx - \varphi_0)$$
$$y(0,0) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} \varphi_0 = 0; \varphi_0 = 0$$
$$y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{1}{T}t - \frac{1}{\lambda}x\right)\right] = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{1}{T}\frac{T}{4} - \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{6}\right)\right]$$
$$y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right] = A \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{1}{12}\right) = A \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{A}{2} = \frac{2\text{ cm}}{2} = 1\text{ cm}$$

17. Datos: v = 8 m/s; y = 0,3 sen $(16\pi t + kx)$, en unidades SI

a) Si comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda, obtenemos:

$$A = 0{,}3\text{ m};\ \omega = 16\pi\text{ rad/s}$$

Calculamos la frecuencia a partir de la pulsación:

$$\omega = 2\pi f;\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi} = 8\text{ Hz}$$

El signo positivo del término kx indica que la onda se mueve en el sentido negativo del eje X.

b) Determinamos λ y k a partir de los valores de la frecuencia y la velocidad:

$$v = \lambda f;\ \lambda = \frac{v}{f} = \frac{8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{8\text{ Hz}} = 1\text{ m};\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1\text{ m}} = 2\pi\text{ m}^{-1}$$

c) La velocidad de cualquier punto de la cuerda será:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}3 \cdot 16\pi \cos(16\pi t + 2\pi x)$$

$$v = 4{,}8\pi \cos(16\pi t + 2\pi x)$$

Para x = 0,5 m y t = 60 s:

$$v = 4{,}8\pi \cos(16\pi t + 2\pi x) = 4{,}8\pi \cos(16\pi \cdot 60 + 2\pi \cdot 0{,}5)$$

$$v = 4{,}8\pi \cos(961\pi) = 4{,}8\pi \cos\pi = -15{,}1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

18. El hecho de que la función de onda sea periódica respecto a la posición significa que cada cierta distancia, denominada longitud de onda, encontramos puntos del sistema en el mismo estado de vibración. El hecho de que sea periódica en el tiempo significa que cada cierto intervalo de tiempo, denominado período, todo el sistema vuelve a estar en el mismo estado de vibración.

19. Datos: λ = 20 cm = 0,2 m; f = 25 Hz; A = 3 cm = 0,03 m

a) Determinamos la velocidad a partir de la frecuencia y la longitud de onda:

$$v = \lambda f = 0{,}2\text{ m} \cdot 25\text{ Hz} = 5\text{ m/s}$$

b) Escribimos la ecuación de una onda longitudinal que se propaga en el sentido negativo del eje X:

$$\Delta x = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25\text{ Hz} = 50\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2\text{ m}} = 10\pi\text{ m}^{-1}$$

$$\Delta x = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) = 0{,}03 \operatorname{sen}(50\pi t + 10\pi x)$$

Hemos supuesto que en el instante inicial, t = 0, el punto en el origen, x = 0, tiene una elongación nula, por lo que la fase inicial φ_0 será nula.

c) La velocidad y la aceleración de cualquier punto de la cuerda serán:

$$v = \frac{d(\Delta x)}{dt} = 0{,}03 \cdot 50\pi \cos(50\pi t + 10\pi x)$$

$$v = 1{,}5\pi \cos(50\pi t + 10\pi x)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -1{,}5 \cdot 50\pi^2 \operatorname{sen}(50\pi t + 10\pi x)$$

$$a = -75\pi^2 \operatorname{sen}(50\pi t + 10\pi x)$$

Por tanto:

$$v_{max} = 1{,}5\pi = 4{,}7\text{ m/s};\ a_{max} = 75\pi^2 = 740\text{ m/s}^2$$

20. Datos: y = 0,3 sen $(4\pi t - 8\pi x)$, en unidades SI

Si comparamos con la expresión general de la función de onda, obtenemos:

$$A = 0{,}3\text{ m};\ \omega = 4\pi\text{ rad/s};\ k = 8\pi\text{ m}^{-1}$$

a) Estarán en fase con el punto que se encuentra en x = 3 m todos los que disten de él un número entero de longitudes de onda. Determinamos, pues, la longitud de onda del movimiento a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8\pi\text{ m}^{-1}} = 0{,}25\text{ m}$$

Por tanto, estarán en fase con el punto en x = 3 m los puntos situados en x = (3 + 0,25n) m, con n ∈ Z.

b) El estado de vibración será el mismo que para t = 2 s para todos los instantes separados de él por un número entero de períodos. Hallamos el período a partir de la pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0{,}5\text{ s}$$

Por tanto, el estado de vibración será el mismo que en t = 2 s para t = (2 + 0,5n) s, con n ∈ Z.

21. Si duplicamos la amplitud de una onda armónica, como la potencia es proporcional a la intensidad y ésta es proporcional al cuadrado de la amplitud, la potencia se cuadruplicará. Por tanto, para duplicar la amplitud de una onda es necesario cuadruplicar la potencia necesaria para generarla.

22. La intensidad se define como la potencia por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación. La potencia es proporcional a la energía, y ésta se conserva.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{\frac{E}{\Delta t}}{S}$$

Si consideramos un foco emisor puntual, la intensidad a cierta distancia será la potencia emitida (constante para todas las distancias) dividida por una superficie esférica de radio R, igual a la distancia al foco. Como la superficie de una esfera vale $4\pi R^2$, la intensidad será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

23. La intensidad de la luz decrece con el cuadrado de la distancia, debido a que la misma energía emitida por el foco debe repartirse por un área mayor cuanto mayor es la distancia. La energía y la potencia que cruzan una superficie esférica cerrada centrada en el foco son las mismas para cualquier distancia, ya que la energía se conserva. Pero como la intensidad se define como la energía por unidad de superficie, cuanto más grande sea la superficie, menor es la intensidad.

24. Datos: P = 4 W

a) Hallamos la intensidad a 2 m de la fuente:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi\, R_1^{\,2}} = \frac{4\text{W}}{4\pi\,(2\text{ m})^2} = 0{,}080\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Al duplicar la distancia, $R_2 = 4$ m:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi\, R_2^{\,2}} = \frac{4\text{ W}}{4\pi\,(4\text{ m})^2} = 0{,}020\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Por tanto, la intensidad disminuye en:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = -0{,}060\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$$

c) Utilizamos la relación general entre amplitudes y distancias:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{4\text{ m}}{2\text{ m}} = 2;\ A_1 = 2A_2$$

4. ONDAS SONORAS (págs. 133, 134 y 136)

25. El sonido es una vibración o perturbación mecánica de algún cuerpo que se propaga a través de cualquier medio material elástico. Algunos ejemplos de ondas sonoras son las generadas por voces humanas, por altavoces de aparatos de audio o por el televisor, las generadas por los instrumentos musicales…

26. Decimos que las ondas sonoras son longitudinales porque la perturbación que se propaga es una compresión y dilatación del medio. El movimiento generado por la perturbación se realiza, pues, en la misma dirección en que se propaga la onda.

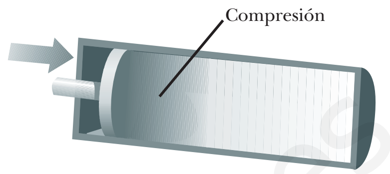
27. Los límites de frecuencia para que una onda sonora sea audible por el oído humano son 20 Hz y 20 000 Hz.

28. Para los sonidos con frecuencias inferiores a 20 Hz o frecuencias superiores a 20 000 Hz todos los humanos somos sordos. El oído humano no es capaz de percibir esos sonidos.

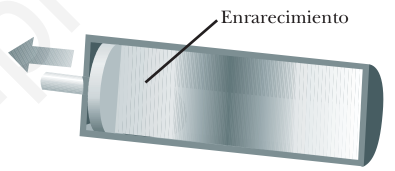
29. Las ondas ultrasónicas tienen una frecuencia mayor que la máxima frecuencia audible, mayor que 20 000 Hz, mientras que las infrasónicas tienen una frecuencia menor que la mínima frecuencia audible, inferior a 20 Hz. Por tanto, las ondas ultrasónicas tienen mayor frecuencia que las infrasónicas.

30. La energía de un movimiento ondulatorio es proporcional al cuadrado de la frecuencia. Por tanto, una onda ultrasónica tiene mayor energía que una onda infrasónica, ya que su frecuencia es mayor.

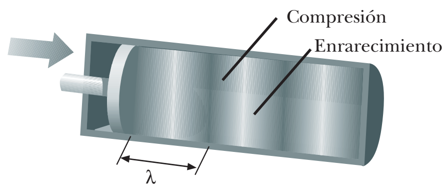
31. Las ondas sonoras se forman y se propagan mediante sucesivas compresiones y dilataciones del medio producidas por un foco en movimiento vibratorio. Podemos esquematizar la formación y propagación mediante tres figuras:



Disponemos de un émbolo vibratorio situado en el extremo de un cilindro estrecho de longitud indefinida que contiene un gas. Al empujar el émbolo hacia la derecha, el gas se comprime en la región más próxima al émbolo, aumentando la presión y la densidad del gas. Se forma así un pulso de compresión que viaja hacia la derecha.



Al retroceder el émbolo hacia la izquierda, el gas próximo a éste se expansiona, disminuyendo así su presión y densidad. Se produce un pulso de enrarecimiento que se propaga por el cilindro, siguiendo el anterior pulso de compresión.



Al hacer oscilar el émbolo rápida y periódicamente, viaja por el cilindro un tren de sucesivas compresiones y enrarecimientos. La onda longitudinal se propaga por el tubo, siendo λ la distancia entre dos compresiones o dos enrarecimientos consecutivos.

32. La diferencia de fase existente entre el desplazamiento y la presión de una onda sonora es de $\frac{\pi}{2}$ rad.

33. Respuesta sugerida:

La principal aplicación médica de los ultrasonidos es la ecografía o sonograma. Además de utilizarse para otros estudios, se usa para examinar el feto durante el embarazo. La sonda articulada que se desliza por encima del vientre de la madre emite ondas sonoras de alta frecuencia, ultrasonidos. Las ondas se reflejan en los tejidos corporales del feto, siendo esta reflexión de mayor o menor intensidad según las características del tejido. Los ecos son registrados y convertidos electrónicamente en una imagen en una pantalla.

34. Los indios ponían el oído en tierra para determinar la presencia de soldados en su territorio porque el sonido viaja más rápidamente y a mayor distancia en la tierra que en el aire. En general, las ondas sonoras se propagan a mayor velocidad en los sólidos que en los gases, debido a que el módulo de Young de los sólidos es mayor que el módulo de compresibilidad en los fluidos. Como las ondas viajan más rápidamente y más lejos en los sólidos que en el aire, los indios podían percibir la presencia de soldados escuchando en tierra antes de oírlos normalmente por el aire.

35. *a)* Si colocamos el despertador en el extremo de una viga de 100 m, podremos oír el tictac del reloj poniendo el oído en el otro extremo de la viga, ya que el sonido se transmitirá por el hierro mejor que lo haría por el aire.

b) Por el mismo motivo, es posible que no podamos oír el despertador a través del aire a la misma distancia a la que sí podemos percibirlo a través de la viga.

36. Para conocer la distancia en kilómetros a la que cayó un rayo, se puede contar los segundos desde que se vio el relámpago hasta que se oye el trueno y dividirlos por tres. Lo que hacemos es contar el tiempo que emplea el sonido en llegar hasta nosotros. Como la velocidad de la luz es muy grande ($3 \cdot 10^8$ m/s), podemos considerar que la luz del relámpago nos llega instantáneamente y en el mismo momento en que se produce el trueno. Si contamos el tiempo que tarda en llegar el sonido del trueno en segundos, t(s), y lo multiplicamos por la velocidad en metros por segundo, tendremos la distancia en metros. Pasando los metros a kilómetros:

$$x(\text{m}) = v\ t(\text{s}) = 340\ \text{m/s} \cdot t(\text{s})$$

$$x(\text{km}) = \frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}} \cdot 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t(\text{s}) \cong \frac{t(\text{s})}{3}\ \text{km}$$

37. Datos: $M_{aire} = 28{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg·mol^{-1}; $R = 8{,}314$ J·K^{-1}·mol^{-1};

$\gamma_{aire} = 1{,}4$; $T_1 = 0$ °C = 273 K; $T_2 = 30$ °C = 303 K

a) Hallamos la velocidad de las ondas sonoras en el aire a 0 °C:

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{\gamma_{aire}\ RT}{M_{aire}}}$$

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \cdot 273\ \text{K}}{28{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}}} = 332\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Si la temperatura es de 30 °C:

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{\gamma_{aire}\ RT}{M_{aire}}}$$

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \cdot 303\ \text{K}}{28{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}}} = 350\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

38. Datos: t = 10 s

Si se oye el trueno 10 s después de verse el relámpago:

$$x = v\ t = 340\ \text{m/s} \cdot 10\ \text{s} = 3\,400\ \text{m} = 3{,}4\ \text{km}$$

39. Datos: v_{sonido} (20 °C) = 5 130 m·s^{-1} ; $\lambda = 5{,}1$ m

Determinamos el período y la frecuencia de la onda sonora:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{5{,}1\ \text{m}}{5\,130\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5\,130\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5{,}1\ \text{m}} = 1\,005{,}9\ \text{Hz}$$

40. Las tres cualidades del sonido son la intensidad, el tono y el timbre.

Intensidad. Se definen la intensidad física (potencia transmitida por unidad de superficie) y la intensidad subjetiva (sensación sonora más o menos intensa). Ambas se relacionan según una escala logarítmica. Es lo que comúnmente llamamos volumen del sonido.

Tono. El tono permite distinguir sonidos de distintas frecuencias. Llamamos sonidos agudos a los de alta frecuencia y graves a los de frecuencias bajas. Esta cualidad permite distinguir las notas musicales y crear la música.

Timbre. El timbre viene determinado por la forma de la onda sonora, que es el resultado de varios movimientos periódicos superpuestos a la onda fundamental. Según el timbre, somos capaces de distinguir un mismo tono con la misma intensidad emitido por diferentes instrumentos musicales.

41. Datos: $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ W·m^{-2}; $I = 1{,}0$ W·m^{-2}

Determinamos los niveles de intensidad sonora correspondientes al umbral de audición, β_0, y al umbral del dolor, β:

$$\beta_0 = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0\ \text{dB}$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{1{,}0\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}} = 10 \log 10^{12}$$

$$\beta = 120\ \text{dB}$$

42. Datos: $\beta = 100$ dB; $\lambda_1 = 30$ m; $\lambda_2 = 12$ m; $\lambda_3 = 0{,}003$ m; $v_{sonido} = 340$ m/s

El nivel de intensidad es superior al umbral de audición e inferior al umbral del dolor. Por lo tanto, por lo que a la intensidad se refiere, podemos captar el sonido. Pero falta determinar si las frecuencias de cada uno están dentro de los límites audibles (somos capaces de oír ondas sonoras entre 20 Hz y 20 000 Hz). Calculamos a qué longitudes de onda corresponden estas frecuencias en el aire:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\lambda_{max} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{20\ Hz} = 17\ m$$

$$\lambda_{min} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{20\,000\ Hz} = 0{,}017\ m$$

Por tanto, λ_2 será audible para el oído humano. Pero λ_1 y λ_3 quedan fuera del rango que nuestro órgano auditivo es capaz de registrar.

43. Datos: $f_{La} = 440$ Hz; $f_{Do} = 264$ Hz; $v_{sonido} = 340$ m/s

Determinamos las longitudes de onda correspondientes:

$$\lambda_{La} = \frac{v_{sonido}}{f_{La}} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{440\ Hz} = 0{,}77\ m$$

$$\lambda_{Do} = \frac{v_{sonido}}{f_{Do}} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{264\ Hz} = 1{,}29\ m$$

44. Datos: P = 1 mW = $1 \cdot 10^{-3}$ W; R = 4 m

a) A una distancia de 4 m, si suponemos que la potencia de la onda sonora se distribuye uniformemente por una semiesfera, la intensidad de la onda sonora será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\frac{1}{2}4\pi\,R^2} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ W}{2\pi\,(4\ m)^2} = 9{,}9 \cdot 10^{-6}\ W{\cdot}m^{-2}$$

Calculamos el nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{9{,}9 \cdot 10^{-6}\ W{\cdot}m^{-2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ W{\cdot}m^{-2}} = 70\ dB$$

b) Si ladran tres perros a la vez, la potencia emitida será el triple, P = $3 \cdot 10^{-3}$ W:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\frac{1}{2}4\pi\,R^2} = \frac{3 \cdot 10^{-3}\,W}{2\pi\,(4\ m)^2}$$

$$I = 2{,}98 \cdot 10^{-5}\ W{\cdot}m^{-2}$$

Calculamos el nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{2{,}98 \cdot 10^{-5}\ W{\cdot}m^{-2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ W{\cdot}m^{-2}}$$

$$\beta = 74{,}7\ dB$$

La intensidad del sonido, que es proporcional a la potencia, se ha multiplicado por 3. En cambio, el nivel de intensidad sonora, como está en relación logarítmica con la intensidad, y por tanto con la potencia, no se ha multiplicado por 3, sino por 1,067.

45. Datos: β = 45 dB

Si tenemos dos aparatos de radio, tendremos el doble de intensidad de sonido, pero no de nivel de intensidad sonora. Calculamos el nuevo nivel de intensidad sonora:

$$\beta' = 10\log\frac{2I}{I_0} = 10\left(\log 2 + \log\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\beta' = 10\log 2 + 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log 2 + \beta$$

$$\beta' = 3 + \beta = (3 + 45)\ dB = 48\ dB$$

46. La legislación a nivel local, las ordenanzas minicipales, recogen o deberían recoger una serie de valores límite para los niveles de ruido según los criterios de:

— Zona: es decir, si se trata de una zona industrial, residencial, de servidumbre (por el paso de importantes infraestructuras), etc.

— Horario: diurno o nocturno.

— Si el ruido se mide en exteriores, por ejemplo la calle, o interiores, como una vivienda.

— Si la medida es del ruido que procede de un foco concreto o del ruido total ambiente.

Para conseguir una mayor calidad acústica en nuestras vidas, existen otras regulaciones locales, autonómicas, estatales e incluso europeas que afectan a conceptos como:

— La emisión sonora de actividades realizadas en el exterior, de vehículos de motor, de maquinaria industrial, de instalaciones (ascensores, calefacción, climatización...) en los edificios de viviendas y locales públicos.

— Horarios de realización de obras, de cierre de locales nocturnos...

— Requisitos acústicos (emisión de ruidos) y de aislamiento que son necesarios para obtener una licencia para comercios, locales, industrias... Por ejemplo, la solicitud de licencias para actividades clasificadas suele incluir un estudio del impacto acústico de la actividad, o el proyecto de una nueva edificación debe justificar el cumplimiento de la normativa sobre aislamiento acústico.

— Limitaciones de emisiones sonoras en los aviones.

— Protección de los trabajadores contra los riesgos debidos a la exposición al ruido en su puesto de trabajo.

Además, los ayuntamientos realizan medidas periódicas del nivel de ruido en el ambiente y publican los resultados. También es su misión, en lo concerniente a la vía pública:

— Colocar apantallamiento acústico donde sea necesario.

— Pavimentar con materiales absorbentes del ruido.

— Instalar equipos urbanos de baja emisión sonora.

— Gestionar el tráfico adecuadamente para conseguir los menores niveles de ruido posibles.

Finalmente, es potestad de los ayuntamientos efectuar las labores de inspección y sanción. Las sanciones pueden consistir en una multa, la suspensión temporal de la actividad, la retirada temporal o definitiva de la licencia, o la clausura del local o negocio. En cuanto a los vehículos, puede comportar multas y la inmovilización de éstos.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 138)

a) Paul Langevin (1872-1946) utilizó el fenómeno de la piezoelectricidad, descubierto anteriormente por Curie, para generar ultrasonidos. Dicho fenómeno consiste en que si se somete un cristal de cuarzo a una variación alterna de potencial eléctrico de elevada frecuencia, el cristal vibra con una frecuencia tan alta que es capaz de generar ondas ultrasónicas.

Langevin pretendía desarrollar un invento basado en los ultrasonidos que localizara objetos submarinos mediante la detección de los ultrasonidos reflejados en ellos. Su invento fue la base del sonar moderno.

b)

Aplicación de los ultrasonidos	*Frecuencia (kHz)*	*Intensidad (W/cm²)*
Ecografía	16-20	0,01
Señales submarinas y detección de objetos	16-20	—
Soldadura ósea	16-20	3-30
Soldadura de termoplásticos	20	1 000
Limpieza ultrasónica	20-25	0-5
Terapia ultrasónica	100-1 000	1

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 140 y 141)

47. Datos: $y = 0{,}2\ \text{sen}\ (60\pi t - 50\pi x)$; $A = 0{,}2$ m; $k = 50\pi$ m^{-1}; $\omega = 60\pi$ rad·s^{-1}; $x = 2$ m; $t = 10$ s

a) Calculamos la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \lambda\, f;\ v = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{60\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{50\pi\ \text{m}^{-1}} = 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Calculamos la velocidad de vibración:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}2\cdot 60\pi\cos\,(60\pi t - 50\pi x)$$
$$v = 12\pi\cos\,(60\pi t - 50\pi x)$$

Para x = 2 m y t = 10 s:

$$v = \frac{dy}{dt} = 12\pi\cos\,(60\pi\cdot 10 - 50\pi\cdot 2) = 12\pi\cos\,(500\pi)$$
$$v = 12\pi\cos\,(2\pi) = 12\pi\ \text{m/s}$$

c) Determinamos la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -12\pi\cdot 60\pi\ \text{sen}\ (60\pi t - 50\pi x)$$
$$a = -720\pi^2\ \text{sen}\ (60\pi t - 50\pi x);\ a_{max} = 720\pi^2\ \text{m/s}^2$$

48. Datos: $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}x\right)$; $A = 2$ m; $k = \pi/4$ m^{-1}; $\omega = 2\pi/5$ rad·s^{-1}; $x = 4$ m; $t = 8$ s

a) El número de ondas es $k = \pi/4$ m^{-1}. Calculamos la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}\ \text{m}^{-1}} = 8\ \text{m}$$

b) Calculamos la velocidad de vibración:

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\cdot\frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}x\right)$$
$$v = \frac{4\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}x\right)$$

Para x = 4 m y t = 8 s:

$$v = \frac{4\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 8 - \frac{\pi}{4}\cdot 4\right) = \frac{4\pi}{5}\cos\left(\frac{16\pi}{5} - \pi\right)$$
$$v = 2{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Determinamos la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{2\pi}{5}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}x\right)$$
$$a = -\frac{8\pi^2}{25}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}x\right)$$

Para t = 8 s y x = 4 m:

$$a = -\frac{8\pi^2}{25}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 8 - \frac{\pi}{4}\cdot 4\right) = -\frac{8\pi^2}{25}\ \text{sen}\left(\frac{16\pi}{5} - \pi\right)$$
$$a = -1{,}86\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

49. Datos: A = 0,12 m; λ = 3 m; f = 5 Hz

a) Determinamos el período y la velocidad de propagación:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5\ \text{Hz}} = 0{,}2\ \text{s}$$
$$v = \lambda\, f = 3\ \text{m}\cdot 5\ \text{Hz} = 15\ \text{m/s}$$

b) Calculamos la pulsación y el número de ondas para escribir la ecuación de onda. Suponemos que la fase inicial es cero y que la onda se propaga en el sentido positivo del eje X:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi\cdot 5\ \text{Hz} = 10\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3\ \text{m}} = \frac{2\pi}{3}\ \text{m}^{-1}$$

$$y = 0{,}12 \text{ sen}\left(10\pi t - \frac{2\pi}{3}x\right)$$

c) La distancia mínima entre dos puntos en oposición de fase es la mitad de la longitud de onda:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{3 \text{ m}}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$

50. Datos: $\lambda = 0{,}2$ m; $f = 10$ Hz; $A = 0{,}12$ m

a) Determinamos el período y la velocidad de la onda:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ Hz}} = 0{,}1 \text{ s}$$

$$v = \lambda\, f = 0{,}2 \text{ m} \cdot 10 \text{ Hz} = 2 \text{ m/s}$$

b) Los puntos que están en fase con el que ocupa la posición $x = 3$ m son los que distan de él un número entero de longitudes de onda. Por tanto, son los que verifican:

$$x = (3 + \lambda n) \text{ m} = (3 + 0{,}2n) \text{ m, con } n \in Z$$

51. Datos: $A = 0{,}05$ m; $v = 12{,}5$ m/s; $T = 0{,}08$ s
$y\ (t = 0, x = 0) = 0{,}05$ m

a) Hallamos el número de ondas y la pulsación aplicando la definición.

$$\lambda = v \cdot T = 12{,}5 \text{ m/s} \cdot 0{,}08 \text{ s} = 1 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1 \text{ m}} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}08 \text{ s}} = 25\pi \text{ s}^{-1}$$

b) La ecuación de onda es:

$$y\ (t, x) = A \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi_o)$$

La fase inicial se obtiene de la condición inicial del enunciado.

$$y\ (t = 0, x = 0) = 0{,}05 \text{ m}$$

$$0{,}05 \text{ m} = 0{,}05 \text{ m sen } \varphi_0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Por tanto, la función de onda resulta:

$$y\ (t, x) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(25\pi t - 2\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{en unidades del SI}$$

52. Datos: $A = 0{,}5$ m; $f = 50$ Hz; $v = 10$ m/s
$y\ (t = 0, x = -0{,}1 \text{ m}) = 0{,}5$ m; $\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1}$

a) La amplitud y la pulsación del MAS son conocidas. La fase inicial se obtiene de la condición inicial del enunciado.

$$y\ (t) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

$$y\ (t = 0, x = -0{,}1 \text{ m}) = 0{,}5 \text{ m}$$

$$0{,}5 \text{ m} = 0{,}5 \text{ m sen } \varphi_0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_0 = 1;\ \varphi_0\ \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Por tanto, la ecuación del MAS que describe la partícula situada en el punto $x = -0{,}1$ m es:

$$y\ (t) = 0{,}5 \text{ sen}\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) En primer lugar hallamos el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 10\pi \text{ m}^{-1}$$

La ecuación de onda se puede expresar:

$$y\ (t, x) = A \text{ sen } (\omega t + kx + \delta_0)$$

$$y\ (t, x) = 0{,}5 \text{ sen } (100\pi t + 10\pi x + \delta_0) \text{ en unidades del SI}$$

Y la fase inicial se obtiene de la condición inicial del enunciado:

$$y\ (t = 0, x = -0{,}1 \text{ m}) = 0{,}5 \text{ m}$$

$$0{,}5 \text{ m} = 0{,}5 \text{ sen } (-\pi + \delta_0) \Rightarrow \text{sen } (-\pi + \delta_0) = 1$$

$$-\pi + \delta_0 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \delta_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Con esto la función de onda resulta:

$$y\ (t, x) = 0{,}5 \text{ sen}\left(100\pi t + 10\pi x + \frac{3\pi}{2}\right) \text{en unidades del SI}$$

53. Datos: $T = 2$ s $\quad \Delta x = 0{,}1 \text{ m} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad

a) Hallamos el número de ondas a partir de la diferencia de fase.

$$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0{,}1 \text{ m}} = 5\pi \text{ m}^{-1}$$

Calculamos la pulsación.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Hallamos la diferencia de fase entre dos oscilaciones de un mismo punto separadas 1 s.

$$\Delta\varphi = \omega\ (t_2 - t_1) = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} = \pi \text{ rad}$$

54. Datos: $v = 45$ m/s $\quad \Delta x = 1 \text{ m} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi$ rad

a) De la diferencia de fase determinamos el número de ondas y, a partir de éste, la longitud de onda y la frecuencia.

$$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\pi \text{ rad}}{1 \text{ m}} = \pi \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi \text{ m}^{-1}} = 2 \text{ m}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{45 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 22{,}5 \text{ Hz}$$

b) En primer lugar hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 22{,}5 \text{ Hz} = 45\pi \text{ rad/s}$$

Hallamos la diferencia de fase entre dos oscilaciones de un mismo punto separadas 1 s.

$$\Delta\varphi = \omega\,(t_2 - t_1) = 45\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1\ \text{s} = 45\pi\ \text{rad}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 142 y 143)

55. **Ondas mecánicas:** se caracterizan por propagarse necesariamente a través de un medio material. La perturbación que transmiten es de tipo mecánico.

    Ondas transversales: la dirección de propagación de la onda y la dirección del movimiento vibratorio generado por la perturbación son perpendiculares.

    Ondas longitudinales: en este caso, la dirección de propagación de la onda y la dirección del movimiento vibratorio generado por la perturbación son paralelas.

    Ondas superficiales: se caracterizan por ser ondas bidimensionales, que se propagan en dos dimensiones a lo largo de una superficie.

    Ondas armónicas: se caracterizan por ser generadas por las perturbaciones producidas en el medio por un movimiento armónico simple.

56. En las ondas armónicas, la velocidad de propagación, la frecuencia y la longitud de onda se relacionan por $v = \lambda\, f$.

57. Datos: $f = 500$ Hz; $v_{hierro} = 4\,500$ m/s; $v_{aire} = 340$ m/s

    a) La relación entre velocidad, longitud de onda y frecuencia, $v = \lambda\, f$, nos indica que la longitud de onda es proporcional a la velocidad, $\lambda = \frac{v}{f}$. Por tanto, la longitud de onda será mayor para el hierro que para el aire, ya que en el hierro es mayor la velocidad de propagación.

    b) Calculamos cuántas veces es mayor en el hierro que en el aire:

$$\frac{\lambda_{hierro}}{\lambda_{aire}} = \frac{\frac{v_{hierro}}{f}}{\frac{v_{aire}}{f}} = \frac{v_{hierro}}{v_{aire}} = \frac{4\,500\ \frac{m}{s}}{340\ \frac{m}{s}} = 13{,}2$$

58. Si se duplica el período de una onda armónica y la velocidad de propagación permanece constante, la longitud de onda también se duplica:

$$\lambda = v\, t;\ \lambda' = v\, T' = v \cdot 2T = 2\lambda$$

59. La velocidad de una onda en una cuerda tensa sólo depende de la tensión de la cuerda, T, y de su masa por unidad de longitud, μ: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Por tanto, si modificamos la frecuencia pero mantenemos constante la tensión de la cuerda, la velocidad permanece constante.

60. La función de onda, y, representa matemáticamente el valor de la elongación para cada punto del medio en función del tiempo.

    El hecho de que la función de onda sea periódica respecto a la posición significa que cada cierta distancia, denominada longitud de onda, encontramos puntos del sistema en el mismo estado de vibración. El hecho de que sea periódica en el tiempo significa que cada cierto intervalo de tiempo, denominado período, todo el sistema vuelve a estar en el mismo estado de vibración.

61. Dos partículas de un medio por el que se propaga una onda están en fase cuando se encuentran en el mismo estado de vibración, con la misma elongación, velocidad y aceleración.

62. Energía mecánica de una onda armónica:

$$E = 2\pi^2\ m\ A^2 f^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$$

    a) Se deduce calculando la energía cinética en el punto de equilibrio, posición en que toda la energía es energía cinética.

    b) La unidad de la energía mecánica total es la de la energía, el julio, J, en el SI.

63. La potencia de una onda, energía transmitida por unidad de tiempo, es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia. Por tanto, si se duplica la potencia de un movimiento ondulatorio y mantenemos constante la frecuencia, la amplitud aumentará en un factor $\sqrt{2}$. Si por el contrario, se mantiene constante la amplitud, la frecuencia será la que aumentará en un factor $\sqrt{2}$.

64. La amplitud de una onda está relacionada con la intensidad. La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. La frecuencia, la longitud de onda y el período se relacionan entre sí, pero son independientes de la amplitud.

65. La energía de la onda disminuye a medida que ésta se aleja del foco emisor. Ello se debe a que:

    — La energía total disponible debe repartirse sobre una superficie de onda mayor cuanto más nos alejamos del foco. Por tanto, la energía por unidad de superficie disminuye, lo que recibe el nombre de atenuación.

    — El rozamiento de las partículas del medio y otras causas producen una absorción de energía de la onda. La absorción depende de la naturaleza del medio.

66. Datos: $f_{murc.} = 120\,000$ Hz; $f_{delf.} = 200\,000$ Hz; $v_{aire} = 340$ m/s; $v_{agua} = 1\,435$ m/s

    a) Determinamos la longitud de onda correspondiente al murciélago:

$$\lambda_{murc.} = \frac{v_{aire}}{f_{murc.}} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{120\,000\ \text{Hz}} = 2{,}83 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

    b) Determinamos la longitud de onda correspondiente al delfín:

$$\lambda_{delf.} = \frac{v_{agua}}{f_{delf.}} = \frac{1\,435\ \frac{m}{s}}{200\,000\ Hz} = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\ m$$

67. La potencia de un foco sonoro es la energía que emite por unidad de tiempo. Su unidad en el SI es el J/s o el W. Se puede medir registrando la intensidad de un foco puntual a una distancia R. Como la intensidad es la potencia por unidad de superficie, si multiplicamos la intensidad recibida por la superficie esférica de radio R, obtenemos la potencia emitida.

68. El umbral de audición es la intensidad mínima que es capaz de captar el oído humano. El umbral de dolor es la máxima intensidad de sonido que puede resistir el oído humano sin sensación dolorosa. Estos umbrales son de intensidad y, por tanto, son independientes de la frecuencia del sonido.

69. La intensidad de un violín es:

$$\beta = 10 \log \frac{I_1}{I_0}; 40 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}; 4 = \log \frac{I_1}{I_0}; 10^4 = \frac{I_1}{I_0}$$

$$I_1 = 10^4\ I_0 = 10^4 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2}$$

Un nivel de intensidad de 60 dB corresponde a una intensidad de sonido:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}; 60 = 10 \log \frac{I}{I_0}; 6 = \log \frac{I}{I_0}$$

$$10^6 = \frac{I}{I_0}; I = 10^6\ I_0 = 10^6 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$$

$$I = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \frac{W}{m^2}$$

Por tanto, para tener un nivel de intensidad de 60 dB con violines de 40 dB cada uno, necesitamos:

$$\frac{I}{I_1} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \frac{W}{m^2}}{1{,}0 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2}} = 100 \text{ violines}$$

70. Calculamos el nivel de intensidad sonora si la intensidad se multiplica por 100; I' = 100 I:

$$\beta' = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{100I}{I_0} = 10\left(\log 100 + \log \frac{I}{I_0}\right)$$

$$\beta' = 10\left(2 + \log \frac{I}{I_0}\right) = 20 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 + \beta$$

Por tanto, si la intensidad se multiplica por 100, el nivel de intensidad sonora aumenta en 20dB.

71. Datos: L = 1,0 m; m = 10,0 g = 0,010 kg; T = 30 N

Determinamos la masa por unidad de longitud y, con ella, la velocidad de propagación:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}010\ kg}{1{,}0\ m} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{30\ N}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{m}}} = 54{,}8\ \frac{m}{s}$$

72. Datos: y = sen(0,5x – 200t + 2,5), en unidades SI

Si comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda, obtenemos:

A = 1 m; k = 0,5 m^{-1}; ω = 200 rad/s; φ_0 = 2,5 rad

Determinamos la frecuencia a partir de la pulsación:

$$\omega = 2\pi f; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\ \frac{rad}{s}}{2\pi} = 31{,}8\ Hz$$

Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}5\ m^{-1}} = 4\pi\ m$$

Calculamos la velocidad a partir de la longitud de onda y la frecuencia:

$$v = \lambda\ f = 4\pi\ m \cdot 31{,}8\ Hz = 400\ m/s$$

73. Datos: y = 0,05 sen (1 992t – 6x), en unidades SI

Si comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda, obtenemos:

A = 0,05 m; ω = 1 992 rad/s; k = 6 m^{-1}

a) La amplitud del movimiento es A = 0,05 m. Determinamos la frecuencia a partir de la pulsación del movimiento:

$$\omega = 2\pi\ f; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1\,992\ \frac{rad}{s}}{2\pi} = 317\ Hz$$

De forma análoga, determinamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6\ m^{-1}} = 1{,}05\ m$$

b) Para calcular la distancia recorrida por la onda en 3 s determinamos primero la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \lambda\ f = 1{,}05\ m \cdot 317\ Hz = 333\ m/s$$

Entonces, la distancia recorrida en 3 s será:

$$x = v\ t = 333\ \frac{m}{s} \cdot 3\ s = 999\ m$$

c) La onda descrita por la función de onda se propaga en el sentido positivo del eje de las X, ya que el término kx es negativo. La ecuación de una onda idéntica pero que se propague en sentido contrario será y = 0,05 sen (1 992t + 6x).

74. Datos: y = 3 sen (8t – 0,5x)

Si comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda, obtenemos:

$A = 3$ m; $\omega = 8$ rad/s; $k = 0{,}5$ m^{-1}

a) La amplitud del movimiento es A = 3 m. Determinamos la frecuencia a partir de la pulsación del movimiento:

$$\omega = 2\pi\, f;\, f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi} = 1{,}27 \text{ Hz}$$

Calculamos el período como el inverso de la frecuencia, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}27 \text{ Hz}} = 0{,}79 \text{ s}$.

Determinamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\, \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}5 \text{ m}^{-1}} = 4\pi \text{ m} = 12{,}6 \text{ m}$$

b) Determinamos la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y la frecuencia:

$$v = \lambda\, f = 12{,}6 \text{ m} \cdot 1{,}27 \text{ Hz} = 16 \text{ m/s}$$

Para x = 15 m y t = 4 s, la elongación será:

$$y = 3 \text{ sen } (8t - 0{,}5x) = 3 \text{ sen } (8 \cdot 4 - 0{,}5 \cdot 15)$$

$$y = -1{,}77 \text{ m}$$

75. Datos: $y = 0{,}4 \cos\,(50t - 2x)$, en unidades SI

Si comparamos la ecuación dada con la expresión de la función de onda en coseno, $y = A \cos\,(\omega t - kx)$, obtenemos:

$A = 0{,}4$ m; $\omega = 50$ rad/s; $k = 2$ m^{-1}

a) Calculamos la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \lambda\, f;\, v = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{50\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \text{ m}^{-1}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Determinamos la elongación y la velocidad de vibración para t = 0,5 s y x = 20 cm = 0,2 m:

$$y = 0{,}4 \cos\,(50t - 2x) = 0{,}4 \cos\,(50 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}2)$$

$$y = 0{,}345 \text{ m}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}4 \cdot 50 \text{ sen } (50t - 2x) = -20 \text{ sen } (50t - 2x)$$

$$v = -20 \text{ sen } (50 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}2) = 10{,}16 \text{ m/s}$$

c) La elongación máxima es la amplitud del movimiento, $y_{max} = 0{,}4$ m. Determinamos la velocidad máxima a partir de su expresión cuando el seno vale –1:

$$v = -20 \text{ sen } (50t - 2x);\, v_{max} = 20 \text{ m/s}$$

76. Datos: f = 100 Hz; A = 0,5 m; v = 10 m/s; $t_0 = 0$; $y_0 = 0{,}5$ m para x = 0

a) La ecuación de la onda es de la forma:

$$y = A \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi_0)$$

Determinamos la pulsación w y el número de ondas k a partir de la frecuencia f y de la velocidad v:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz} = 200\pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{100 \text{ Hz}} = 0{,}1 \text{ m};\, k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}1 \text{ m}}$$

$$\lambda = 20\pi \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$y = 0{,}5 \text{ sen } (200\pi t - 20\pi x + \varphi_0)$$

Si tenemos en cuenta que en el origen, x = 0, la elongación inicial es $y_0 = 0{,}5$ y coincide con la amplitud, debe ser $\text{sen } \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Por tanto, la ecuación de la onda será:

$$y = 0{,}5 \text{ sen } \left(200\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Hallamos la diferencia de fase entre dos puntos separados 0,2 m:

$$\left(200\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{2}\right) - \left(200\pi t - 20\pi\,(x + 0{,}2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$20\pi \cdot 0{,}2 = 4\pi \text{ rad}$$

77. Datos: $\frac{A_1}{A_2} = 3;\, R_2 - R_1 = 5$ m

La relación entre amplitudes y distancias es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(R_1 + 5\text{m})}{R_1} = 3$$

$$3\,R_1 = R_1 + 5\text{m};\, 2R_1 = 5\text{m}$$

$$R_1 = \frac{5\text{m}}{2} = 2{,}5\text{m}$$

78. Datos: T = 10 °C = 283 K; $g_{aire} = 1{,}4$; R = 8,314 J·K^{-1}·mol^{-1}; $M_{aire} = 28{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg·mol^{-1}

La velocidad del sonido en el aire a 10 °C es:

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{\gamma_{aire}\, RT}{M_{aire}}}$$

$$v_{aire} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}314 \text{ J·K}^{-1}\text{·mol}^{-1} \cdot 283\text{K}}{28{,}8 \cdot 10^{-3}\text{kg·mol}^{-1}}} = 338{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

79. Datos: t = 5 s; v = 340 m/s

Calculamos la distancia a la que se encuentra la tormenta, foco del trueno:

$$x = v\, t = 340 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 1\,700 \text{ m}$$

80. Datos: f = 5 Hz; $v_{aire} = 340$ m/s; $v_{agua} = 1\,435$ m/s

Determinamos la longitud de onda en el aire:

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{f} = \frac{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ Hz}} = 68 \text{ m}$$

Igualmente calculamos la longitud de onda en el agua:

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{f} = \frac{1\,435\ \frac{m}{s}}{5\ Hz} = 287\ m$$

81. Datos: $f_{min} = 20$ Hz; $f_{max} = 20\,000$ Hz; $v = 340$ m/s

Hallamos las correspondientes longitudes de onda:

$$\lambda_{max} = \frac{v}{f_{min}} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{20\ Hz} = 17\ m$$

$$\lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{20\,000\ Hz} = 0{,}017\ m$$

82. Datos: $L = 30$ m; $v_{Fe} = 5\,130\ m\cdot s^{-1}$; $v_{aire} = 340\ m\cdot s^{-1}$

Calculamos la razón entre los tiempos que tarda el sonido en ir de un extremo a otro de la viga:

$$\frac{t_{aire}}{t_{Fe}} = \frac{\frac{L}{v_{aire}}}{\frac{L}{v_{Fe}}} = \frac{v_{Fe}}{v_{aire}} = \frac{5\,130\ \frac{m}{s}}{340\ \frac{m}{s}} = 15$$

83. Datos: $P = 60$ W

a) La intensidad a 5 m, si suponemos que la potencia se distribuye uniformemente sobre una superficie esférica, es:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi\ R^2} = \frac{60\ W}{4\pi\ (5\ m)^2} = 0{,}191\ \frac{W}{m^2}$$

b) Hallamos la distancia a la que el nivel de intensidad sonora es de 50 dB a partir de la intensidad correspondiente a ese nivel:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0};\ 50 = 10\log\frac{I}{I_0};\ 5 = \log\frac{I}{I_0}$$

$$10^5 = \frac{I}{I_0};\ I = 10^5\ I_0 = 10^5\cdot 1{,}0\cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$$

$$I = 1{,}0\cdot 10^{-7}\ \frac{W}{m^2}$$

$$I = \frac{P}{4\pi R^2};\ R = \sqrt{\frac{P}{4\pi\ I}}$$

$$R = \sqrt{\frac{60 W}{4\pi\cdot 1{,}0\cdot 10^{-7}\ \frac{W}{m^2}}} = 6\,910\ m$$

84. Datos: $y = 0{,}1$ sen $2\pi(2t - x/1{,}5)$, en unidades SI

Comparamos la ecuación dada con la expresión general de la función de onda $y = A$ sen $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ para determinar:

$$A = 0{,}1\ m;\ T = \frac{1}{2}\ s;\ \lambda = 1{,}5\ m$$

a) Determinamos la frecuencia a partir del inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2}\ s} = 2\ Hz$$

La longitud de onda es $\lambda = 1{,}5$ m.

Calculamos la velocidad de propagación de la onda o velocidad de fase a partir de la longitud de onda y la frecuencia:

$$v = \lambda\ f = 1{,}5\ m\cdot 2\ Hz = 3\ m/s$$

b) Los puntos que están en fase con el punto situado en $x = 2$ m son aquellos que distan de él un número entero de longitudes de onda:

$$x = (2 + \lambda n)\ m = (2 + 1{,}5n)\ m,\ con\ n \in Z$$

Los que están en oposición de fase distarán un número impar de medias longitudes de onda:

$$x = \left(2 + (2n+1)\ \frac{\lambda}{2}\right) m = \left(2 + (2n+1)\ \frac{1{,}5}{2}\right) m,\ con\ n \in Z$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 143)

1. Se define como onda transversal aquel movimiento ondulatorio en el que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son perpendiculares. Por ejemplo, las ondas transmitidas por una cuerda son transversales, ya que la propagación de la onda a lo largo de la cuerda y la dirección de vibración de la cuerda (subiendo y bajando) son perpendiculares.

   Se define como onda longitudinal aquel movimiento ondulatorio en el que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son paralelas. Por ejemplo, las ondas de compresión y expansión transmitidas por un resorte son longitudinales, ya que la dirección de propagación de las ondas y la dirección del movimiento oscilatorio coinciden, son paralelas al resorte.

2. En la función de onda, la fase inicial φ_0 determina el estado de vibración de cada punto x en el instante inicial, $t = 0$ s. En concreto, para $x = 0$, la elongación inicial será $y_0 = A$ sen φ_0.

3. Un vibrador produce ondas en la superficie de un estanque a intervalos regulares de tiempo. Si se ajusta el vibrador de modo que produzca un número triple de ondas por segundo, en este caso, las ondas...

   d) tienen un tercio de la longitud de onda.

   Como la velocidad de propagación se mantiene constante, si se triplica la frecuencia, la longitud de onda disminuye en un tercio.

4. Datos: $y\ (x, t) = 0{,}02$ sen $\pi(20t + 2x)$, en unidades SI

   Para calcular la aceleración, derivamos dos veces la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}02 \cdot 20\pi \cos \pi\,(20t + 2x)$$

$$v = 0{,}4\pi \cos \pi\,(20t + 2x)$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -0{,}4\pi \cdot 20\pi \operatorname{sen} \pi\,(20t + 2x)$$

$$a = -8\pi^2 \operatorname{sen} \pi\,(20t + 2x)$$

En x = –0,3 m:

$$a = -8\pi^2 \operatorname{sen} \pi\,(20t + 2 \cdot (-0{,}3))$$

$$a = -8\pi^2 \operatorname{sen} \pi\,(20t - 0{,}6), \text{ en unidades SI}$$

5. Datos: L = 4,2 m; f = 300 Hz; A = 10 cm = 0,1 m; $\Delta t = 0{,}02$ s

a) Suponemos que la fase inicial es cero y que las ondas se propagan en el sentido positivo de las X. Para escribir la ecuación de la onda necesitamos la pulsación y el número de ondas. Para determinarlos, calculamos la velocidad y la longitud de onda:

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{4{,}2\ \text{m}}{0{,}02\ \text{s}} = 210\ \text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{210\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{300\ \text{Hz}} = 0{,}7\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}7\ \text{m}} = 9\ \text{m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 300\ \text{Hz} = 600\pi\ \text{rad/s}$$

Por tanto, $y = 0{,}1 \operatorname{sen}(600\pi t - 9x)$.

b) La longitud de onda es λ = 0,7 m. Podemos determinar el período como la inversa de la frecuencia, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{300\ \text{Hz}} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$. La velocidad de transmisión de la onda es v = 210 m/s.

c) El desplazamiento máximo coincide con la amplitud de la onda, y_{max} = 0,1 m.

Para hallar la velocidad máxima, derivamos la ecuación de la onda:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}1 \cdot 600\pi \cos(600\pi t - 9x)$$

$$v = 60\pi \cos(600\pi t - 9x); \quad v_{max} = 60\pi\ \text{m/s}$$

Para calcular la aceleración, derivamos la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = -60\pi \cdot 600\pi \operatorname{sen}(600\pi t - 9x)$$

$$a = -36\,000\pi^2 \operatorname{sen}(600\pi t - 9x)$$

$$a_{max} = 36\,000\pi^2\ \text{m/s}^2 = 3{,}6 \cdot 10^4\ \text{m/s}^2$$

6. Datos: P = 5 W; R = 3 m

Calculamos la intensidad a 3 m, si suponemos que la potencia se distribuye uniformemente sobre una superficie esférica:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{5\text{W}}{4\pi\,(3\ \text{m})^2} = 0{,}044\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

7. Datos: β_1 = 90dB; 1 000 espectadores

Si 1 000 espectadores gritan a la vez, la intensidad del sonido emitido por cada uno de ellos se multiplicará por 1 000. Debemos, pues, determinar la intensidad de un espectador a partir del nivel de intensidad sonora:

$$\beta = 10 \log \frac{I_1}{I_0};\ 90 = 10 \log \frac{I_1}{I_0};\ 9 = \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$10^9 = \frac{I_1}{I_0};\ I_1 = 10^9\ I_0 = 10^9 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Por tanto, la intensidad de sonido total y el correspondiente nivel de intensidad sonora son:

$$I_{tot} = 1\,000\ I_1 = 1\,000 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2 = 1{,}0\ \text{W/m}^2$$

$$\beta = 10 \log \frac{I_{tot}}{I_0} = 10 \log \frac{1{,}0\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 10 \log 10^{12}$$

$$\beta = 120\ \text{dB}$$

6. Fenómenos ondulatorios

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 145)

- Las ondas mecánicas se definen como una perturbación que se propaga necesariamente a través de un medio material. La perturbación que transmiten es de tipo mecánico.

  Se define como onda transversal aquel movimiento ondulatorio en que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son perpendiculares.

  Se define como onda longitudinal aquel movimiento ondulatorio en que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son paralelas.

- La velocidad de propagación de una onda es la velocidad a la que se desplaza la perturbación a través del medio, mientras que la velocidad de vibración de una partícula afectada por la onda corresponde a la velocidad con que cada punto del medio afectado por la onda se mueve respecto de su punto de equilibrio.

- La velocidad de una onda en una cuerda tensa sólo depende de la tensión de la cuerda, T, y de su masa por unidad de longitud, μ: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

-

Ángulo φ	*sen φ*	*cos φ*
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	–1
$\frac{3\pi}{2}$	–1	0

- Datos: y = 0,5 sen (200t – 30x) (unidades SI)

  Determinamos la amplitud de la onda por comparación con la ecuación general de una onda armónica, y = A sen (ωt – kx):

$$A = 0{,}5\ \text{m}$$

  De la misma manera, identificamos el número de ondas, $k = 30\ \text{m}^{-1}$, y la pulsación, $\omega = 200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

  Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

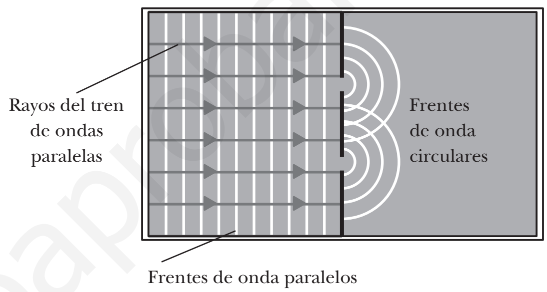
$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30\ \text{m}^{-1}} = 0{,}21\ \text{m}$$

  Calculamos la velocidad de propagación de la onda a partir del número de ondas y de la pulsación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{30\ \text{m}^{-1}} = 6{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1. FENÓMENOS BÁSICOS (págs. 147, 149 y 150)

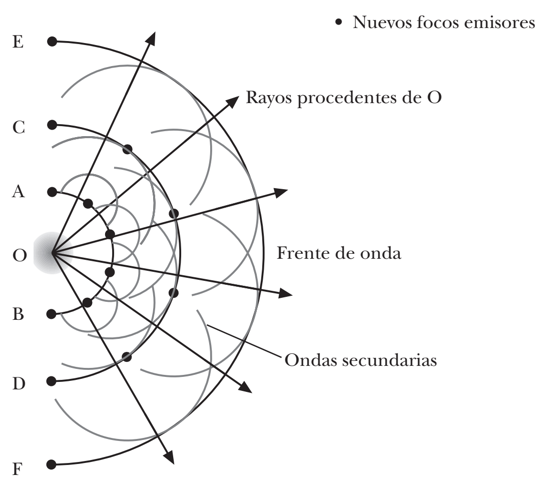
1.



2. *a)* **Falso.** De hecho, es cierto que siempre se produce difracción al interceptar la propagación de una onda. Pero sólo será apreciable cuando las dimensiones del objeto u orificio que intercepta la onda sean iguales o menores que la longitud de onda de la perturbación.

   b) **Cierto.** El principio de Huygens dice que todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas secundarias.

3.



4. Datos: $n_{21} > 1$

— Como n_{21} es el cociente de velocidades, la velocidad en el nuevo medio es menor que en el medio 1:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} > 1; \quad v_1 > v_2$$

— La frecuencia se mantiene constante.

— El período, que es el inverso de la frecuencia, será también constante.

— La longitud de onda se relaciona con la velocidad y el período como $\lambda = v\,T$. Si T es constante y la velocidad v disminuye, también la longitud de onda será menor.

— El ángulo de refracción será menor que el ángulo de incidencia, ya que:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = n_{21} > 1; \quad \text{sen}\, i > \text{sen}\, r; \quad i > r$$

5. Datos: $v_1 = 0{,}1\ \text{m·s}^{-1}$; $\lambda_1 = 0{,}02$ m; $i = 30°$; $\lambda_2 = 0{,}01$ m

a) Hallamos la frecuencia de la onda a partir de su velocidad y su longitud de onda en el primer medio:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{0{,}1\ \text{m/s}}{0{,}02\ \text{m}} = 5\ \text{Hz}$$

b) Determinamos la velocidad de la onda en el segundo medio a partir de la frecuencia, que se mantiene constante, y de la longitud de onda en este medio:

$$v_2 = \lambda_2\, f = 0{,}01\ \text{m} \cdot 5\ \text{Hz} = 0{,}05\ \text{m/s}$$

c) Calculamos el seno del ángulo de refracción a partir de la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\text{sen}\, r = \frac{v_2}{v_1} \cdot \text{sen}\, i = \frac{0{,}05\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{m/s}} \cdot \text{sen}\ 30° = 0{,}25$$

6. **Falso.** Esta afirmación es verdadera para las ondas polarizadas linealmente pero no en el caso de la polarización circular o elíptica. En éstas, las partículas del medio no vibran todas en el mismo plano, como en la polarización lineal, sino que cada una se mueve describiendo círculos en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

7. La polarización es una característica de las ondas transversales porque consiste en limitar las direcciones de vibración de las partículas del medio. En el caso de las ondas longitudinales, la dirección de vibración está siempre limitada, ya que coincide con la dirección de propagación. Por tanto no tiene sentido hablar de polarización en ondas longitudinales.

8. No es posible polarizar las ondas sonoras ya que se trata de ondas longitudinales. Sólo es posible polarizar ondas transversales.

2. FENÓMENOS POR SUPERPOSICIÓN DE ONDAS
(págs. 153, 155 y 160)

9. A pesar de que en el libro del alumno se ha estudiado el caso de la interferencia de ondas armónicas, la interferencia es un fenómeno propio de todos los tipos de movimiento ondulatorio.

10. Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente no se produce ninguna ganancia o pérdida de energía en el sistema, pero sí una redistribución de la energía. Los puntos donde las ondas interfieren constructivamente tendrán más energía, proveniente de los nodos o puntos de interferencia destructiva.

11. Datos: $y = 0{,}25 \cos[4\pi(10t - x)]$ (SI); $r = 1{,}5$ m; $r' = 1{,}75$ m

Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$$A = 0{,}25\ \text{m};\ \omega = 40\pi\ \text{rad·s}^{-1};\ k = 4\pi\ \text{m}^{-1}$$

a) Deducimos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi\ \text{m}^{-1}} = 0{,}5\ \text{m}$$

b) Hallamos si la interferencia es constructiva o destructiva a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 1{,}75\ \text{m} - 1{,}5\ \text{m} = 0{,}25\ \text{m}$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{0{,}25\ \text{m}}{0{,}5\ \text{m}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número impar de semilongitudes de onda, la interferencia en este punto es destructiva.

12. Datos: $f = 40$ Hz; $v = 20\ \text{cm·s}^{-1} = 0{,}2\ \text{m·s}^{-1}$

Calculamos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0{,}2\ \text{m/s}}{40\ \text{Hz}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 0{,}5\ \text{cm}$$

a) Determinamos el tipo de interferencia en el punto A a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 12\ \text{cm} - 10{,}5\ \text{cm} = 1{,}5\ \text{cm}$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{1{,}5\ \text{cm}}{0{,}5\ \text{cm}} = 3$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia en este punto es constructiva.

b) Determinamos el tipo de interferencia en el punto B a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 8\ \text{cm} - 6{,}25\ \text{cm} = 1{,}75\ \text{cm}$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{1{,}75\ \text{cm}}{0{,}5\ \text{cm}} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número impar de semilongitudes de onda, la interferencia en este punto es destructiva.

c) Determinamos el tipo de interferencia en el punto C a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 9\text{ cm} - 5\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{4\text{ cm}}{0{,}5\text{ cm}} = 8$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia en este punto es constructiva.

13. Datos: r' = 26 cm = 0,26 m; r = 25,8 cm = 0,258 m; v = 1 200 m/s

La condición que cumple el primer nodo o mínimo de amplitud es:

$$r' - r = \frac{\lambda}{2}$$

Si tenemos en cuenta la relación entre la longitud de onda, la velocidad de propagación y la frecuencia, podemos escribir la condición del primer mínimo en la forma:

$$r' - r = \frac{v}{2f}; \quad f = \frac{v}{2\,(r' - r)}$$

$$f = \frac{1200\text{ m/s}}{2\,(0{,}26\text{ m} - 0{,}258\text{ m})} = 3 \cdot 10^5\text{ Hz}$$

14. *a)* **Cierto.**

b) **Cierto.** siempre que ambas tengan la misma velocidad de propagación, ya que en este caso tendrán también distinta frecuencia.

c) **Falso.** No aparecerán pulsaciones a no ser que también tengan frecuencias próximas.

d) **Falso.** Si tienen velocidades distintas pero próximas, y la misma frecuencia, no se producirán pulsaciones.

15. Datos: f_1 = 430 Hz; f_2 = 436 Hz

a) Calculamos la frecuencia de la onda resultante como el promedio de f_1 y f_2:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{430\text{ Hz} + 436\text{ Hz}}{2} = 433\text{ Hz}$$

b) Hallamos la frecuencia de la pulsación y su período:

$$f_p = f_2 - f_1 = 436\text{ Hz} - 430\text{ Hz} = 6\text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{6\text{ Hz}} = 0{,}17\text{ s}$$

16. Datos: f_1 = 349 Hz; 3 pulsaciones por segundo

La frecuencia correspondiente a 3 pulsaciones por segundo es de 3 Hz, f_p = 3 Hz. Por tanto, si suponemos que la frecuencia conocida es la mayor:

$$f_p = f_1 - f_2; \quad f_2 = f_1 - f_p$$

$$f_2 = 349\text{ Hz} - 3\text{ Hz} = 346\text{ Hz}$$

Pero también es posible que la frecuencia conocida sea la menor. En tal caso:

$$f_p = f_2 - f_1; \quad f_2 = f_p + f_1 = 349\text{ Hz} + 3\text{ Hz} = 352\text{ Hz}$$

17. Respuesta sugerida:

El período de las pulsaciones se relaciona con las frecuencias de los diapasones mediante la expresión:

$$T = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

Por lo tanto, cuanto más parecidas son ambas frecuencias, mayor será el período de las pulsaciones.

Al realizar la práctica se observa que cuanto más parecida es la posición de las piezas de modificación de frecuencia, el período de las pulsaciones es mayor. Así, podemos concluir que:

a) La frecuencia de los diapasones depende de la posición de las piezas de modificación.

b) Cuanto más parecida es la posición de estas piezas en ambos diapasones, más cercanos están los valores de sus frecuencias y mayor es el período de las pulsaciones.

18. *a)* Para que se produzca una onda estacionaria es necesaria la interferencia de dos ondas **armónicas** de **amplitud y frecuencia iguales** que se propaguen en la **misma dirección y sentido contrario.**

b) Todos los puntos de la cuerda en la que se produce una onda estacionaria, excepto los nodos, oscilan armónica y verticalmente y alcanzan a la vez la posición de equilibrio.

19. Datos: $y_1 = A\,\text{sen}\,(\omega t + kx)$; $y_2 = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx + \varphi)$

a) La superposición de estas dos ondas será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = A\,\text{sen}(\omega t + kx) + A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left[\frac{(\omega t + kx) + (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(\omega t + kx) - (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right]$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = A_r\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right); \quad A_r = 2A\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Se trata de una onda armónica de igual frecuencia que las ondas componentes y con una amplitud A_r independiente del tiempo, donde la fase de la oscilación es independiente del punto considerado. Por tanto, todos los puntos de la onda alcanzan a la vez la posición de equilibrio y los nodos se encuentran siempre en reposo. En definitiva, se trata de una onda estacionaria.

b) Si en x = 0 hay un nodo, la amplitud es siempre nula, para todo t. Por tanto:

$$\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

c) La elongación máxima en cualquier punto se da en el momento en que $\text{sen}(\omega t + \pi/2) = 1$. Por tanto, en $x = \lambda/4$:

$$y_{max} = 2A\cos\left(k\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{max} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\cos 0 = 2A$$

Derivamos la elongación respecto del tiempo para hallar la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = 2A\,\omega\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = 2A\,\omega\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = 2A\,\omega\cos 0\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = -2A\,\omega\,\text{sen}\,(\omega t)$$

20. Datos: $y = 0{,}3\cos(0{,}2x - 100t)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$A = 0{,}3$ m; $\omega = 100$ rad·s^{-1}; $k = 0{,}2$ m^{-1}

Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas; la frecuencia, a partir de la pulsación; y la velocidad de propagación a partir de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}2\text{ m}^{-1}} = 10\pi\text{ m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\text{ Hz}$$

$$v = \lambda f = 10\pi\text{ m}\cdot\frac{50}{\pi}\text{ Hz} = 500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La onda que se propaga en el sentido contrario tiene por ecuación $y = 0{,}3\cos(0{,}2x + 100t)$. Por lo tanto, la ecuación de la onda estacionaria resultante será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 0{,}3\cos(0{,}2x - 100t) + 0{,}3\cos(0{,}2x + 100t)$$

$$y_r = 2\cdot 0{,}3\cos\left[\frac{(0{,}2x - 100t) + (0{,}2x + 100t)}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\cos\left[\frac{(0{,}2x - 100t) - (0{,}2x + 100t)}{2}\right]$$

$$y_r = 0{,}6\cos(0{,}2x)\cos(-100t)$$

$$y_r = 0{,}6\cos(0{,}2x)\cos(100t)\quad\text{(SI)}$$

c) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2};\quad x_n - x_{n-1} = \frac{10\pi\text{ m}}{2} = 5\pi\text{ m}$$

21. En una cuerda con sus dos extremos fijos sólo pueden formarse ondas estacionarias de longitud de onda $\lambda = \frac{2L}{n}$, con L la longitud de la cuerda y n un número entero.

Si la cuerda está fija sólo por un extremo, la longitud de onda de las ondas estacionarias ha de ser $\lambda = \frac{4L}{n}$.

22. Datos: L = 2 m; A(x = 1 m) = 0,1 m; v = 4 m/s; cuerda sujeta por los dos extremos; n = 1

a) La longitud de onda de la onda estacionaria es:

$$\lambda = \frac{2L}{n};\quad \lambda = \frac{2\cdot 2\text{ m}}{1} = 4\text{ m}$$

b) Hallamos la frecuencia a partir de la velocidad de propagación y la longitud de onda:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{4\text{ m/s}}{4\text{ m}} = 1\text{ Hz}$$

c) Como la cuerda está fija en sus dos extremos, x = 0 y x = L deben ser nodos de la onda estacionaria. Su ecuación es:

$$y_r = 2A\,\text{sen}\,(kx)\cos(\omega t)$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos(2\pi f\,t)$$

$$y_r = 0{,}1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}x\right)\cos(2\pi\cdot 1\cdot t)$$

$$y_r = 0{,}1\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(2\pi t)\quad\text{(SI)}$$

23. Datos: L = 1,2 m; v = 130 m·s^{-1}

Las frecuencias de la serie armónica en una cuerda fija por los dos extremos vienen dadas por la expresión:

$$f = n\,\frac{v}{2L}\qquad n = 1, 2, 3...$$

Calculamos las frecuencias correspondientes a los tres primeros armónicos, n = 1, 2, 3:

$$f_1 = 1\cdot\frac{v}{2L} = 1\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 54{,}2\text{ Hz}$$

$$f_2 = 2\cdot\frac{v}{2L} = 2\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 108{,}3\text{ Hz}$$

$$f_3 = 3\cdot\frac{v}{2L} = 3\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 162{,}5\text{ Hz}$$

24. Datos: L = 1 m; f_1 = 430 Hz; cuerda fija por un extremo

Hallamos la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda a partir de la expresión del primer armónico para una cuerda fija por un extremo:

$$f_1 = \frac{v}{4L};\quad v = 4L\,f_1$$

$$v = 4\cdot 1\text{ m}\cdot 430\text{ Hz} = 1\,720\text{ m/s}$$

25. Las longitudes de onda de cada uno de los modos normales de vibración son las mismas en la cuerda fija por

los dos extremos que en el tubo de la misma longitud abierto por los dos extremos: $\lambda = \frac{2L}{n}$

De la misma forma, la expresión de la longitud de onda de los modos normales de vibración de un tubo abierto por un extremo coincide con la de los de una cuerda fija por un extremo de la misma longitud: $\lambda = \frac{4L}{n}$

26. Datos: f_n = 300 Hz; f_m = 425 Hz

a) f_n y f_m son armónicos de la misma frecuencia fundamental f. Por tanto, f_n = n f y f_m = m f. Entonces, la frecuencia fundamental es el máximo común divisor de f_n y f_m:

$$f_n = 300 \text{ Hz} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \text{ Hz}$$

$$f_m = 425 \text{ Hz} = 5^2 \cdot 17 \text{ Hz}$$

$$f = 25 \text{ Hz}$$

b) Conocida la frecuencia fundamental, hallamos el orden de los armónicos:

$$n = \frac{f_n}{f}; \quad n = \frac{300 \text{ Hz}}{25 \text{ Hz}} = 12$$

$$m = \frac{f_m}{f}; \quad m = \frac{425 \text{ Hz}}{25 \text{ Hz}} = 17$$

27. Datos: L = 1,25 m; v = 342 m·s^{-1}

a) Hallamos la frecuencia de los tres primeros armónicos si el tubo está abierto por sus dos extremos:

$$f = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3...$$

$$f_1 = 1 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{2 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 136{,}8 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{2 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 273{,}6 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{2 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 410{,}4 \text{ Hz}$$

b) Calculamos la frecuencia de los tres primeros armónicos si el tubo está abierto sólo por uno de sus extremos:

$$f = n\frac{v}{4L}; \quad n = 1, 3, 5...$$

$$f_1 = 1 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 68{,}4 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 3 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 205{,}2 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 5 \cdot \frac{342 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}25 \text{ m}} = 342 \text{ Hz}$$

28. El sonido amplificado de la voz humana manteniendo cierto tono durante varios segundos es capaz de romper una copa de cristal debido a un fenómeno de resonancia. Este fenómeno sólo aparece en el caso de que la frecuencia correspondiente al tono de la voz humana coincida con la frecuencia de uno de los modos normales de vibración del cristal de la copa. En tal caso, la voz es capaz de estimular una vibración en el cristal cuya amplitud irá en aumento. Si la amplitud de la vibración del cristal llega a superar los límites de elasticidad de la estructura de la copa, ésta se romperá.

3. FENÓMENOS DEBIDOS AL MOVIMIENTO DE LA FUENTE Y DEL RECEPTOR (pág. 162)

29. El efecto Doppler es un fenómeno común a todas las ondas armónicas.

30. Si una fuente sonora y un observador se mueven con la misma velocidad, dirección y sentido, no habrá efecto Doppler. El efecto Doppler sólo aparece cuando existe un movimiento relativo entre el observador y la fuente y en la dirección de la línea que los une. Si la velocidad relativa es nula, no aparece el efecto Doppler.

31. Datos: v_F = 30 m·s^{-1}; f = 600 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima:

$$f_R = f\frac{v}{v - v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} - 30 \text{ m·s}^{-1}} = 658{,}1 \text{ Hz}$$

b) Si la fuente se aleja del receptor:

$$f_R = f\frac{v}{v + v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} + 30 \text{ m·s}^{-1}} = 551{,}4 \text{ Hz}$$

32. Datos: v_R = 15 m·s^{-1}; f = 1 000 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima a la sirena:

$$f_R = f\frac{v + v_R}{v}$$

$$f_R = 1\,000 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} + 15 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1}} = 1\,044{,}1 \text{ Hz}$$

b) Si el conductor se aleja de la fuente:

$$f_R = f\frac{v - v_R}{v}$$

$$f_R = 1\,000 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} - 15 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1}} = 955{,}9 \text{ Hz}$$

33. Datos: v_F = 40 m·s^{-1}; v_R = 20 m·s^{-1}; f = 980 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima a la ambulancia:

$$f_R = f\frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 980 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} + 20 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} - 40 \text{ m·s}^{-1}} = 1176 \text{ Hz}$$

b) Si el conductor y la fuente se alejan uno del otro:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 980\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} - 20\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 40\ \text{m·s}^{-1}} = 825{,}3\ \text{Hz}$$

34. Datos: $v = 340\ \text{m·s}^{-1}$; si el tren se acerca, $f_R = 704$ Hz; si el tren se aleja, $f_R = 619$ Hz

Si el tren se acerca, la frecuencia percibida por el receptor es:

$$f_R = f\,\frac{v}{v - v_F};\quad 704\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - v_F}$$

Si el tren se aleja, la frecuencia percibida es:

$$f_R = f\,\frac{v}{v + v_F};\quad 619\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + v_F}$$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Si dividimos la primera ecuación entre la segunda, obtenemos la velocidad de la fuente:

$$\frac{704\ \text{Hz}}{619\ \text{Hz}} = \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + v_F}{340\ \text{m·s}^{-1} - v_F}$$

$$704 \cdot (340\ \text{m·s}^{-1} - v_F) = 619\ \text{m·s}^{-1}\ (340\ \text{m·s}^{-1} + v_F)$$

$$239\,360\ \text{m·s}^{-1} - 704\ v_F = 210\,460\ \text{m·s}^{-1} + 619\ v_F$$

$$1\,323\ v_F = 28\,900\ \text{m·s}^{-1}$$

$$v_F = 21{,}8\ \text{m·s}^{-1}$$

Hallamos la frecuencia a partir de la primera ecuación:

$$704\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 21{,}8\ \text{m·s}^{-1}}$$

$$704\ \text{Hz} \cdot 318{,}2\ \text{m·s}^{-1} = 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot f$$

$$f = \frac{704\ \text{Hz} \cdot 318{,}2\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1}} = 659\ \text{Hz}$$

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 165)

35. Datos: $y = 1{,}2 \cos\,(100t - 0{,}1x)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$A = 1{,}2$ m; $\omega = 100\ \text{rad·s}^{-1}$; $k = 0{,}1\ \text{m}^{-1}$

Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas; la frecuencia, a partir de la pulsación; y la velocidad de propagación, a partir de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}1\ \text{m}^{-1}} = 20\pi\ \text{m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\ \text{rad·s}^{-1}}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\ \text{Hz}$$

$$v = \lambda\, f = 20\pi\ \text{m} \cdot \frac{50}{\pi}\ \text{Hz} = 1\,000\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La onda que se propaga en sentido contrario tiene por ecuación $y = 1{,}2 \cos\,(100t + 0{,}1x)$. Por lo tanto la ecuación de la onda estacionaria resultante será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 1{,}2 \cos\,(100t - 0{,}1x) + 1{,}2 \cos\,(100t + 0{,}1x)$$

$$y_r = 2 \cdot 1{,}2 \cos\left[\frac{(100t - 0{,}1x) + (100t + 0{,}1x)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(100t - 0{,}1x) - (100t + 0{,}1x)}{2}\right]$$

$$y_r = 2{,}4 \cos\,(100t) \cos\,(-0{,}1x)$$

$$y_r = 2{,}4 \cos\,(0{,}1x) \cos\,(100t) \quad \text{(SI)}$$

c) Calculamos la posición de los nodos:

$$x = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\,\frac{20\pi\ \text{m}}{4}$$

$$x = (2n+1)\,5\pi\ \text{m}$$

d) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2};\quad x_n - x_{n-1} = \frac{20\pi\ \text{m}}{2} = 10\pi\ \text{m}$$

36. Datos: $y_r = 2 \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\,(40\pi t)$ (SI)

a) La ecuación general de una onda estacionaria generada por superposición de dos ondas iguales que se mueven en sentido contrario es $y_r = 2A\ \text{sen}\ (kx) \cos\ (\omega t)$. Si comparamos con la ecuación del problema, vemos que la amplitud de las ondas que pueden generarla por superposición es $A = 1$ m. Deducimos también que $k = \pi/3\ \text{m}^{-1}$ y $\omega = 40\pi\ \text{rad·s}^{-1}$. Por tanto, la velocidad de propagación de las ondas generadoras es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi\ \text{rad·s}^{-1}}{\frac{\pi}{3}\ \text{m}^{-1}} = 120\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}\ \text{m}^{-1}} = 3\ \text{m}$$

c) Hallamos la velocidad en cualquier punto de la cuerda derivando la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2 \cdot 40\pi \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \text{sen}\ (40\pi t)$$

$$v = -80\pi \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \text{sen}\ (40\pi t) \quad \text{(SI)}$$

Para la partícula situada en $x = 1{,}5$ m cuando $t = 1{,}125$ s, la velocidad es:

$$v = -80\pi \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1{,}5\right) \cdot \text{sen}\,(40\pi \cdot 1{,}125) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

37. Datos: $v_F = 33\ m{\cdot}s^{-1}$; $v_R = 25\ m{\cdot}s^{-1}$; $f = 400$ Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

Antes de ser adelantado, cuando la ambulancia se aproxima al automóvil y éste se aleja de ella:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 400\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ m{\cdot}s^{-1} - 25\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 33\ m{\cdot}s^{-1}} = 410{,}4\ \text{Hz}$$

Después de ser adelantado, la fuente se aleja del receptor pero éste se dirige hacia ella:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 400\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 25\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 33\ m{\cdot}s^{-1}} = 391{,}4\ \text{Hz}$$

38. Datos: $v_F = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; $f = 150$ Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) El camionero que circula tras él con una velocidad de $v_R = 20\ m{\cdot}s^{-1}$ se acercaría a la fuente si ésta se encontrara en reposo. Al mismo tiempo, la fuente se aleja del receptor. Por lo tanto:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 150\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 20\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 30\ m{\cdot}s^{-1}} = 145{,}9\ \text{Hz}$$

b) El automovilista que circula en sentido contrario con una velocidad de $v_R = 28\ m{\cdot}s^{-1}$ se acerca a la fuente. Por tanto:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 150\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 28\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 30\ m{\cdot}s^{-1}} = 178\ \text{Hz}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 166 y 167)

39. Principio de Huygens*:* todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias, de igual velocidad y frecuencia que la onda inicial, cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

El principio de Huygens es aplicable a todas las ondas, incluidas las electromagnéticas.

40. La difracción consiste en la desviación en la propagación rectilínea de las ondas cuando éstas atraviesan una abertura o pasan próximas a un obstáculo. La difracción se produce tanto en ondas longitudinales (por ejemplo, el sonido) como en ondas transversales (por ejemplo, la luz).

41. Podemos oír la conversación que mantienen unas personas al otro lado de la esquina de un edificio, sin que podamos verlas, porque las ondas sonoras se difractan en la esquina. Es decir, su trayectoria rectilínea se ve alterada y las ondas son capaces de «doblar» la esquina.

En cambio, si se sitúan detrás de una casa y delante de la fachada, la pared refleja todo el sonido. Si éste no llega a una esquina cercana, no se podrá difractar y llegar hasta nosotros.

42. El índice de refracción relativo de un medio respecto a otro se define como la razón entre las velocidades de propagación de un movimiento ondulatorio en los dos medios.

Las leyes de la refracción son:

1.ª El rayo refractado, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo incidente están en el mismo plano.

2.ª La razón entre el seno del angulo de incidencia y el del ángulo de refracción es una constante igual a la razón entre las respectivas velocidades de propagación del movimiento ondulatorio:

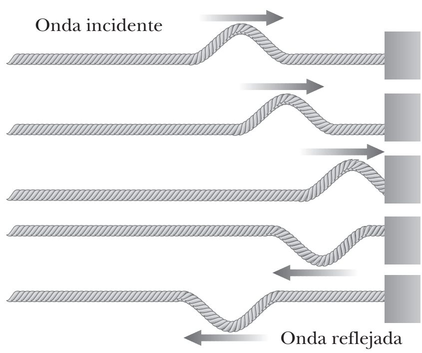
$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

43. La velocidad de propagación de las ondas sonoras en el agua es mayor que en el aire. Por tanto, el índice de refracción relativo del agua respecto del aire será $n_{21} = \frac{v_1}{v_2} < 1$. Como el cociente del seno del ángulo incidente y el seno del ángulo refractado es igual al índice de refracción relativo n_{21}:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = n_{21} < 1; \quad \text{sen}\, i < \text{sen}\, r \Rightarrow r > i$$

Por tanto, la onda refractada se alejará de la normal.

44. Una onda que viaja por una cuerda tensa, al reflejarse en una pared, sufre una inversión de fase. Por tanto, la onda reflejada está en oposición de fase con la onda incidente.



La inversión se debe a que la onda produce una fuerza hacia arriba sobre la pared que, debido a la tercera ley de Newton, provoca una fuerza de reacción hacia abajo sobre la cuerda, fuerza que genera la onda reflejada en oposición de fase con la incidente.

Si la ecuación de la onda incidente es y = 0,02 sen (50t – – 3x), la onda reflejada, que viajará en sentido contrario y con un desfase de π/2, será:

$$y' = 0{,}02\ \text{sen}\ (50t + 3x - \pi/2) = 0{,}02\ \cos\ (50t + 3x)$$

45. **Polarización:** limitación en la dirección o direcciones de vibración de los puntos afectados por una onda transversal.

Polarización rectilínea o lineal: una onda está polarizada rectilínea o linealmente si la vibración tiene lugar siempre siguiendo rectas con la misma dirección perpendicular a la dirección de propagación.

Polarización circular: hablamos de polarización circular cuando la vibración de un punto a lo largo del tiempo tiene lugar siguiendo círculos situados en planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

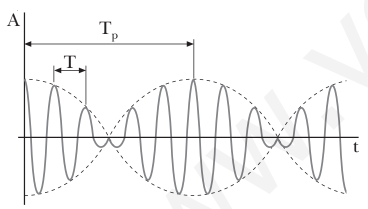
Polarización elíptica: hablamos de polarización elíptica cuando la vibración de un punto a lo largo del tiempo tiene lugar siguiendo elipses situadas en planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

Podemos conseguir una onda polarizada linealmente si sacudimos arriba y abajo el extremo libre de una cuerda fija, de modo que sus puntos vibren siempre en el mismo plano. Si hacemos vibrar el extremo libre de la cuerda formando círculos o elipses, obtendremos una onda polarizada circular o elípticamente.

46. *a)* **Falso.** La interferencia es constructiva en los puntos donde las ondas llegan en concordancia de fase. Si las dos fuentes están separadas una distancia arbitraria, aunque emitan en fase, las ondas no llegarán a todos los puntos del espacio en fase, y la interferencia no será siempre constructiva.

b) **Falso.** Como la diferencia de fase entre ambas se mantiene constante, se trata de fuentes coherentes.

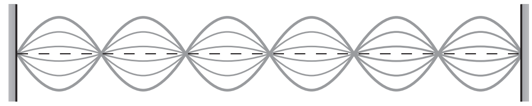
47.

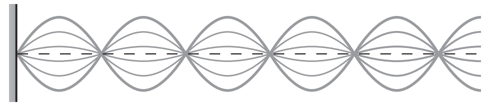


48. Si dos violinistas separados dos metros tocan la misma nota, existirán puntos de la habitación donde la interferencia será destructiva. La nota no se oirá en esos puntos sólo si tocan los dos con la misma intensidad, de forma que las ondas tengan la misma amplitud.

49. Si una cuerda está vibrando con seis vientres, los nodos pueden tocarse sin perturbar el movimiento, ya que son puntos de vibración nula.

Si la cuerda tiene seis vientres y está fijada por los extremos (que también son nodos), habrá siete puntos en total que puedan tocarse sin perturbar el movimiento. Si sólo está fija por un extremo, los nodos serán seis.





50. La cuerda vibrará con la frecuencia fundamental y la correspondiente longitud de onda, determinadas ambas por la posición de los dedos del violinista (es decir, por la longitud efectiva de la cuerda). Pero, además, se superpondrán otros armónicos, que serán los responsables del timbre característico del violín.

51. Un tubo abierto por los dos extremos tiene como frecuencia fundamental $f_1 = \dfrac{v}{2L}$, mientras que un tubo abierto sólo por un extremo tiene por frecuencia fundamental $f_1' = \dfrac{v}{4L'}$. Si el segundo tubo tiene una longitud L'= L/2, las frecuencias fundamentales coincidirán.

52. El efecto Doppler en la luz sólo tiene efectos apreciables para movimientos con grandes velocidades. Además, como la longitud de onda de la luz visible es muy pequeña, los correspondientes desplazamientos Doppler son también pequeños.

Sin embargo, el efecto Doppler en la luz visible se puede apreciar en la luz de las estrellas, donde las velocidades implicadas son muy grandes.

53. Datos: $t_1 = 8$ s; $t_2 = 12$ s; $v = 340\ \text{m·s}^{-1}$

Si tardamos 8 segundos en oír la explosión procedente del barco:

$$d_1 = v\ t_1 = 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot 8\ \text{s} = 2\,720\ \text{m}$$

Es decir, estamos a 2 720 m del barco.

Si tardamos 12 segundos en oír el eco procedente de los acantilados, como a los 8 s el sonido nos había llegado desde el barco, las ondas han tardado $t_3 = 12\ \text{s} - 8\ \text{s} = 4$ s en viajar de nuestra barca al acantilado y volver. En este tiempo han recorrido $2d_2$, donde d_2 es la distancia que nos separa del acantilado:

$$2d_2 = v\ t_3; \quad d_2 = \frac{1}{2} v\ t_3 = \frac{1}{2} \cdot 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot 4\ \text{s} = 680\ \text{m}$$

54. Datos: $f = 225$ Hz; $v_1 = 120\ \text{m·s}^{-1}$; $v_2 = 210\ \text{m·s}^{-1}$

a) Calculamos el índice de refracción del segundo medio respecto al primero:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{120\ \text{m·s}^{-1}}{210\ \text{m·s}^{-1}} = 0{,}57$$

b) Hallamos la longitud de onda en el primer medio, donde $v_1 = 120\ \text{m·s}^{-1}$:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f}; \quad \lambda_1 = \frac{120\ m{\cdot}s^{-1}}{225\ Hz} = 0{,}53\ m$$

En el segundo medio:

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f}; \quad \lambda_2 = \frac{210\ m{\cdot}s^{-1}}{225\ Hz} = 0{,}93\ m$$

55. Datos: f = 50 Hz; A = 2 cm; v = 100 cm·s^{-1}; r = 5 cm; r'= 9 cm

Hallamos primero el número de ondas y la pulsación de estas ondas armónicas:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\ Hz = 100\pi\ rad{\cdot}s^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{\omega}{v}$$

$$k = \frac{100\pi\ rad{\cdot}s^{-1}}{100\ cm{\cdot}s^{-1}} = \pi\ cm^{-1}$$

Entonces, la ecuación resultante de la superposición será:

$$y_r = 2A\cos\left(k\frac{r'-r}{2}\right)\text{sen}\left(\omega t - k\frac{r'+r}{2}\right)$$

$$y_r = 2\cdot 2\cos\left(\pi\ cm^{-1}\cdot\frac{9\ cm - 5\ cm}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\text{sen}\left(100\pi t - \pi\ cm^{-1}\cdot\frac{9\ cm + 5\ cm}{2}\right)$$

$$y_r = 4\cos(2\pi)\,\text{sen}\,(100\pi t - 7\pi)$$

$$y_r = 4\,\text{sen}\,(100\pi t - 7\pi)\ cm$$

56. Datos: f = 100 Hz; r' = 83,4 m; r = 80 m; v = 340 m·s^{-1}

Únicamente no habrá sonido si en P se cumple la condición de interferencia destructiva:

$$r' - r = (2n+1)\frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2...$$

Calculamos λ:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{100\ Hz} = 3{,}4\ m$$

En el punto donde hemos situado el aparato registrador, r' = 83,4 m y r = 80 m:

$$83{,}4\ m - 80\ m = (2n+1)\cdot 1{,}7\ m$$

$$3{,}4\ m = (2n+1)\cdot 1{,}7\ m$$

$$(2n+1) = 2; \quad 2n = 1; \quad n = \frac{1}{2} \neq 0, 1...$$

Por tanto, como este punto no verifica la condición para que la amplitud resultante sea nula, el aparato registrará sonido.

57. Datos: f_1 = 380 Hz; f_2 = 374 Hz

Calculamos la frecuencia de la pulsación, f_p, y la frecuencia, f, de la onda resultante de la interferencia:

$$f_p = f_1 - f_2 = 380\ Hz - 374\ Hz = 6\ Hz$$

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{380\ Hz + 374\ Hz}{2} = 377\ Hz$$

58. Datos: $y_1 = 2$ sen (1500t – 250x) (SI);
$y_2 = 2$ sen (1500t + 250x) (SI)

a) La superposición de estas dos ondas será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 2\,\text{sen}\,(1\,500t - 250x) + 2\,\text{sen}\,(1\,500t + 250x)$$

$$y_r = 4\cos(250x)\,\text{sen}\,(1\,500t) \quad (SI)$$

b) La distancia entre dos antinodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/k}{2} = \frac{\pi}{k}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\pi}{250\ m^{-1}} = \frac{\pi}{250}\ m$$

59. Datos: $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cos(5\pi t)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación de la onda del problema con la ecuación general de una onda estacionaria, y = 2 A cos (kx) sen (ωt), obtenemos:

$$A = 1\ m;\ k = \frac{\pi}{6}\ m^{-1};\ \omega = 5\pi\ rad{\cdot}s^{-1}$$

Calculamos la longitud de onda y la velocidad de propagación:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\pi/6\,m^{-1}} = 12\ m$$

$$v = \lambda f = \lambda\frac{\omega}{2\pi}; \quad v = 12\ m\cdot\frac{5\pi\ rad/s}{2\pi} = 30\ \frac{m}{s}$$

b) Calculamos la posición de los nodos:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4};\ n = 0, 1, 2...$$

$$x = (2n+1)\frac{12\ m}{4} = 3\ (2n+1)\ m;\ n = 0, 1, 2...$$

La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es media longitud de onda. Por tanto, como λ = 12 m, la distancia entre dos nodos o dos vientres es de 6 m. Pero como nodos y vientres están alternados y equiespaciados, la distancia entre un nodo y el vientre siguiente será de un cuarto de longitud de onda, es decir, de 3 m.

c) Hallamos la velocidad en cualquier punto de la cuerda derivando la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\cdot 5\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\text{sen}\,(5\pi t)$$

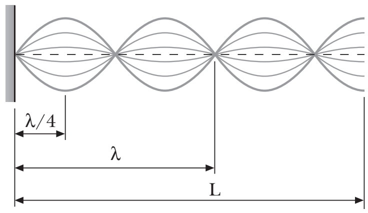
$$v = -10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\text{sen}\,(5\pi t) \quad (SI)$$

Para la partícula situada en x = 6 m:

$$v = -10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\text{sen}\,(5\pi t) = 10\pi\,\text{sen}\,(5\pi t)\ m{\cdot}s^{-1}$$

La velocidad máxima corresponde al instante en que sen $(5\pi t) = 1$; por tanto, $v_{max} = 10\pi\ m{\cdot}s^{-1}$.

60. Datos: L = 1,2 m; f = 120 Hz; 4 vientres



a) Si la cuerda está sujeta por un extremo, se generará un número impar de cuartos de longitud de onda, ya que el extremo sujeto será siempre un nodo y el libre, un vientre. Si vemos 4 vientres en la cuerda, se han generado 3 nodos además del extremo fijo. Por tanto, la longitud de la cuerda equivale a 7/4 de longitud de onda. Entonces:

$$L = \frac{7}{4}\lambda;\quad \lambda = \frac{4}{7}L = \frac{4}{7}\cdot 1{,}2\ m = 0{,}69\ m$$

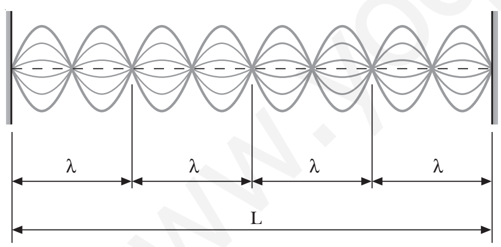
b) Como los modos normales de vibración de la cuerda fija en un extremo son de la forma $\lambda = 4\dfrac{L}{n}$, la vibración corresponde al séptimo armónico, n = 7:

$$f = n\frac{v}{4L};\, f_1 = \frac{v}{4L}$$

Por lo tanto:

$$f_7 = 7\cdot\frac{v}{4L} = 7\,f_1;\quad f_1 = \frac{f_7}{7} = \frac{120\ Hz}{7} = 17{,}1\ Hz$$

61. Datos: L = 1 m; 9 nodos; A_{max} = 2 cm = 0,02 m; $v = 10\ m{\cdot}s^{-1}$



a) Si en la cuerda de guitarra, que está sujeta por los dos extremos, se forman 9 nodos, la longitud de onda corresponde a un cuarto de la longitud de la cuerda: $\lambda = \dfrac{L}{4} = \dfrac{1\ m}{4} = 0{,}25\ m$.

Para escribir la ecuación de la onda estacionaria, determinamos primero el número de ondas y la pulsación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}25\ m} = 8\pi\ m^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\ f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = k\ v = 8\pi\ m^{-1}\cdot 10\ m{\cdot}s^{-1}$$

$$\omega = 80\pi\ rad{\cdot}s^{-1}$$

Como la cuerda está fija en sus dos extremos, x = 0 y x = L deben ser nodos de la onda estacionaria. Por lo tanto, su ecuación es:

$$y_r = 2A\ sen\ (kx)\cos(\omega t)$$

$$y_r = 0{,}02\ sen\ (8\pi x)\cos(80\pi t)\quad (SI)$$

b) Calculamos la frecuencia fundamental de vibración:

$$f = n\frac{v}{2L} = 1\cdot\frac{10\ m{\cdot}s^{-1}}{2\cdot 1\ m} = 5\ Hz$$

c) Hallamos la longitud de onda correspondiente a la frecuencia fundamental:

$$\lambda = \frac{2L}{n};\quad \lambda = \frac{2\cdot 1\ m}{1} = 2\ m;\ \text{o también:}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10\ m{\cdot}s^{-1}}{5\ Hz} = 2\ m$$

62. Datos: f = 250 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Calculamos la longitud del tubo si tiene los dos extremos abiertos:

$$f = n\frac{v}{2L};\quad L = n\frac{v}{2f} = 1\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{2\cdot 250\ Hz} = 0{,}68\ m$$

b) Hallamos la longitud del tubo si tiene un solo extremo abierto:

$$f = n\frac{v}{4L};\quad L = n\frac{v}{4f} = 1\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{4\cdot 250\ Hz} = 0{,}34\ m$$

63. Datos: $v_F = 60\ km/h = 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 1 000 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Si el tren se aproxima:

$$f_R = f\frac{v}{v - v_F}$$

$$f_R = 1\,000\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}} = 1051{,}7\ Hz$$

b) Si la fuente se aleja del receptor:

$$f_R = f\frac{v}{v + v_F}$$

$$f_R = 1\,000\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}} = 953{,}2\ Hz$$

64. Datos: $v_R = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 500 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

Si el motorista se aproxima a la sirena:

$$f_R = f\frac{v + v_R}{v}$$

$$f_R = 500\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 30\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1}} = 544{,}1\ Hz$$

65. Datos: $v_F = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; $v_R = 24\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 450 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Antes de cruzarse, ambos se aproximan el uno al otro. Por lo tanto, la frecuencia percibida por el motorista es:

$$f_R = f\frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 450 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} + 24 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} - 30 \text{ m·s}^{-1}} = 528{,}4 \text{ Hz}$$

b) Después de cruzarse, ambos se alejan uno del otro. Por tanto:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 450 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} - 24 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} + 30 \text{ m·s}^{-1}} = 384{,}3 \text{ Hz}$$

66. Datos: L = 2 m; $\mu = 0{,}005$ kg·m^{-1}; $f_1 = 65$ Hz

La velocidad de una onda en una cuerda tensa sólo depende de la tensión de la cuerda, T, y de su masa por unidad de longitud. Por tanto, si determinamos la velocidad a partir de la frecuencia del modo fundamental de vibración y la longitud de la cuerda, hallaremos la tensión.

Calculamos la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda:

$$f = n\,\frac{v}{2L}; \quad v = \frac{2L\,f}{n} = \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 65 \text{ Hz}}{1} = 260\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Con ella, hallamos la tensión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \quad T = \mu\, v^2 = 0{,}005 \text{ kg·m}^{-1} \cdot \left(260 \text{ m·s}^{-1}\right)^2$$

$$T = 338 \text{ N}$$

67. Datos: $\lambda_{roja} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda_{verde} = 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ m; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

Hallamos las frecuencias de la luz roja y la luz verde:

$$f_{roja} = \frac{c}{\lambda_{roja}}; \quad f_{roja} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}84 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_{verde} = \frac{c}{\lambda_{verde}}; \quad f_{verde} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{5{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 5{,}56 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Calculamos la velocidad a la que debe circular el vehículo para que el conductor vea verde ($f_R = f_{verde}$) la luz roja del semáforo ($f = f_{roja}$):

$$f_R = f\,\frac{c + v_R}{c}; \quad c + v_R = c\,\frac{f_R}{f}; \quad v_R = c\left(\frac{f_R}{f} - 1\right)$$

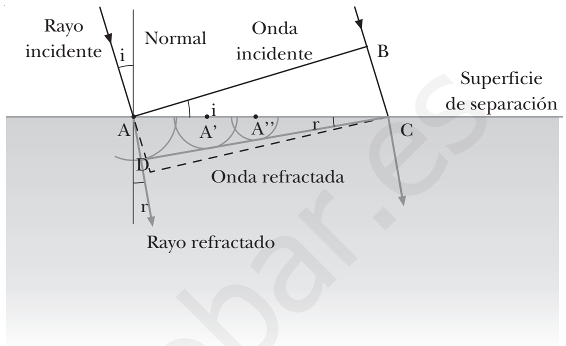
$$v_R = 3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}\left(\frac{5{,}56 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}{4{,}84 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} - 1\right) = 4{,}46 \cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 167)

1. Principio de Huygens: todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

Consideremos un frente de onda (representado por el segmento AB) que incide con un ángulo i sobre la superficie de separación de un medio, en que la onda se propaga con velocidad v_1, respecto de otro en que lo hace con velocidad v_2, siendo v_2 menor que v_1. Cada punto de la superficie donde incide el primer frente de onda, por el principio de Huygens, se convierte en un nuevo foco emisor.

Debido a la menor velocidad de propagación de la onda en el segundo medio, las ondas secundarias recorren una menor distancia en el mismo tiempo de la que recorrerían en el primer medio. Por ello, la onda se refracta, es decir, cambia de dirección. La envolvente de las ondas secundarias es el nuevo frente de la onda refractada, DC.



El rayo correspondiente al punto B del frente de onda incidente alcanzará la superficie en un tiempo t después de que lo haya hecho el rayo del mismo frente situado en A. Por tanto, para el triángulo ABC tenemos:

$$\text{sen } i = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 t}{AC} \Rightarrow AC = \frac{v_1 t}{\text{sen } i}$$

Por otro lado, cuando el rayo procedente de B incida sobre la superficie, el rayo refractado en A habrá avanzado $v_2\,t$ por el nuevo medio. Entonces, para el triángulo ACD podemos escribir:

$$\text{sen } r = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 t}{AC} \Rightarrow AC = \frac{v_2 t}{\text{sen } r}$$

Si igualamos los dos valores de AC, obtenemos la segunda ley de la refracción:

$$\frac{v_1 t}{\text{sen } i} = \frac{v_2 t}{\text{sen } r}; \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

2. El eco consiste en la reflexión del sonido sobre una superficie suficientemente alejada como para que seamos capaces de diferenciar el sonido emitido del reflejado. En el caso de la luz, al ser su velocidad de propagación muy grande, nuestra vista sólo sería capaz de distinguir la reflexión de la emisión si la superficie reflejante estuviera muy lejos. En ese caso podríamos observar, por ejemplo, que la imagen de nuestros movimientos ante un espejo lleva retraso respecto al propio movimiento real.

Para hacer una estimación de cuál sería la distancia necesaria, supondremos que la vista puede distinguir señales distanciadas por medio segundo. Entonces, si tenemos en cuenta que la velocidad de propagación de la luz en el aire es de $3 \cdot 10^8$ m/s:

$$d = v\,t = 3 \cdot 10^8 \text{m·s}^{-1} \cdot 0{,}5 \text{ s} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Es decir, la superficie debería encontrarse a x = d/2, x = 0,75 · 10^8 m = 75 000 km.

3. Datos: f = 50 Hz; A = 2 cm = 0,02 m; $v = 1\ \text{m·s}^{-1}$; $\varphi = \pi/3$; propagación en el sentido positivo del eje OX

Hallamos la pulsación y el número de ondas:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 50\ \text{Hz} = 100\ \pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v}\, f = \frac{2\pi}{1\ \text{m·s}^{-1}} \cdot 50\ \text{Hz} = 100\pi\ \text{m}^{-1}$$

Escribimos la ecuación de cada una de las ondas:

$$y = A\ \text{sen}\ (\omega\, t - kx + \varphi)$$

$$y_1 = 0{,}02\ \text{sen}\ [100\pi(t - x)] \quad \text{(SI)}$$

$$y_2 = 0{,}02\ \text{sen}\left[100\pi\left(t - x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{(SI)}$$

La onda resultante de su interferencia será:

$$y_r = y_1 + y_2 = A\ \text{sen}\ (\omega t - kx) + A\ \text{sen}\ (\omega t - kx + \varphi)$$

$$y_r = 2A\ \text{sen}\left[\frac{(\omega t - kx) + (\omega\, t - kx + \varphi)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(\omega t - kx) - (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right]$$

$$y_r = 2A\ \text{sen}\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = 2A\ \text{sen}\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = 0{,}04\ \text{sen}\left[100\pi(t - x) + \frac{\pi}{6}\right] \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_r = 0{,}035\ \text{sen}\left[100\pi(t - x) + \frac{\pi}{6}\right] \quad \text{(SI)}$$

4. Datos: L = 2 m; $v = 340\ \text{m·s}^{-1}$

a) Si el tubo está abierto en sus dos extremos:

$$f = n\, \frac{v}{2L}; \quad n = 1, 2, 3...$$

$$n = 1; \quad f_1 = 1 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{2 \cdot 2\ \text{m}} = 85\ \text{Hz}$$

$$n = 2; \quad f_2 = 2 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{2 \cdot 2\ \text{m}} = 170\ \text{Hz}$$

$$n = 3; \quad f_3 = 3 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{2 \cdot 2\ \text{m}} = 255\ \text{Hz}$$

b) Si el tubo está abierto sólo por un extremo, sólo existen armónicos impares:

$$f = n\, \frac{v}{4L}; \quad n = 1, 3, 5...$$

$$n = 1; \quad f_1 = 1 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{4 \cdot 2\ \text{m}} = 42{,}5\ \text{Hz}$$

$$n = 3; \quad f_3 = 3 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{4 \cdot 2\ \text{m}} = 127{,}5\ \text{Hz}$$

$$n = 5; \quad f_5 = 5 \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{4 \cdot 2\ \text{m}} = 212{,}5\ \text{Hz}$$

5. Datos: $v_F = 14\ \text{m·s}^{-1}$; $v_R = 18\ \text{m·s}^{-1}$; f = 600 Hz; $v = 340\ \text{m·s}^{-1}$

a) Si el tren A y el tren B están en movimiento acercándose el uno al otro:

$$f_R = f\, \frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + 18\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 14\ \text{m·s}^{-1}} = 658{,}9\ \text{Hz}$$

Si el pasajero y la sirena se alejan el uno del otro:

$$f_R = f\, \frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} - 18\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 14\ \text{m·s}^{-1}} = 545{,}8\ \text{Hz}$$

b) Si el pasajero del tren A está en reposo ($v_R = 0$) y el tren B se aproxima:

$$f_R = f\, \frac{v}{v - v_F}$$

$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 14\ \text{m·s}^{-1}} = 625{,}8\ \text{Hz}$$

Si la sirena, por el contrario, se aleja del receptor:

$$f_R = f\, \frac{v}{v + v_F}$$

$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 14\ \text{m·s}^{-1}} = 576{,}3\ \text{Hz}$$

7. Campo eléctrico

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 171)

- Se dice que un cuerpo es neutro cuando su carga eléctrica total es cero. Esto no quiere decir que no tenga cargas positivas y cargas negativas, sino que la suma de todas sus cargas eléctricas es nula.

  Se dice que está cargado positiva o negativamente si su carga total es positiva o negativa.

- Una experiencia de electrización por frotamiento es el péndulo eléctrico. Consiste en una pequeña bolita de material muy ligero colgada de un hilo. Si frotamos un bolígrafo de plástico y lo acercamos a la bolita, veremos cómo el bolígrafo la atrae. Si llega a tocarla, desde ese momento el bolígrafo repelerá la bola. La explicación es que el bolígrafo, al frotarlo, ha quedado cargado negativamente, porque ha arrancado cargas negativas del paño. Entonces es capaz de atraer la bolita. Pero cuando entran en contacto, parte de las cargas negativas del bolígrafo pasan a la bola. Como los dos cuerpos quedan ahora cargados con cargas del mismo signo, se repelen. En cambio, si frotamos un trozo de vidrio con un paño de seda y lo acercamos a la bola cargada negativamente, a diferencia del plástico, el vidrio atraerá la bola. Esto nos indica que el vidrio, al frotarlo, adquiere cargas positivas.

-

Materiales conductores	*Materiales aislantes*
Cobre	Vidrio
Hierro	Plástico
Solución salina	Madera

- Decimos que un campo de fuerzas es uniforme cuando la fuerza que experimenta una partícula de prueba es igual en todos los puntos del espacio.

  Decimos que un campo de fuerzas es central cuando la fuerza que experimenta una partícula de prueba en cualquier punto está dirigida hacia el centro del campo y depende de la distancia a dicho centro.

- Los primeros en fijarse en los fenómenos eléctricos fueron los griegos, quienes observaron que, si frotaban el ámbar, éste atraía pequeños pedacitos de tela. Precisamente la palabra *electricidad* procede del griego *elektron*, que significa 'ámbar'. En los siglos XVII y XVIII resurgió el interés por la electricidad. Así, B. Franklin advirtió que existen dos tipos de cargas eléctricas, a los que dio los nombres de *positiva* y *negativa*. Pero hubo que esperar hasta el año 1785 para que C. A. Coulomb estableciera la primera relación matemática entre las cargas, la distancia entre ellas y las fuerzas eléctricas que experimentan. Durante el siglo XIX se desarrolló la mayor parte de la teoría electromagnética, con los experimentos de Faraday sobre la inducción magnética y la teoría de Maxwell sobre la naturaleza electromagnética de la luz, comprobada posteriormente con los experimentos de Hertz.

1. FUERZAS ELÉCTRICAS (págs. 173 y 175)

1. La carga eléctrica de los cuerpos es debida a la estructura atómica de la materia. Algunos átomos tienen más facilidad que otros en desprenderse de los electrones más externos, quedando así cargados positivamente. En cambio, algunos átomos aceptan fácilmente los electrones que otro les cede, y quedan con carga negativa.

2. El plástico del peine, al frotarlo con el pelo, es capaz de tomar algunos electrones de éste. Así, el peine queda con carga negativa y atrae el pelo, que ha quedado cargado positivamente.

3. Respuesta sugerida:

   La conservación de la carga se pone de manifiesto en fenómenos como el descrito en el ejercicio anterior. La carga no se crea, sino que los electrones pasan de un cuerpo a otro. La carga total de los dos cuerpos al final es la misma que teníamos inicialmente.

   Otro ejemplo no tan cotidiano es el fenómeno de aniquilación de partículas con antipartículas. La carga total inicial y final es nula, ya que partícula y antipartícula tienen siempre cargas opuestas.

4. *a)* Datos: $q = -39$ C

   Teniendo en cuenta que cada electrón tiene una carga de $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C:

   $$-39\ \text{C} \cdot \frac{1\ \text{e}}{-1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = -2{,}43 \cdot 10^{20}\ \text{e}$$

   b) Datos: $4 \cdot 10^{20}$ e

   $$4 \cdot 10^{20}\ \text{e} \cdot \frac{-1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1\ \text{e}} = -64{,}1\ \text{C}$$

5. Respuesta sugerida:

   La electrización por influencia o inducción electrostática consiste en cargar un cuerpo acercándolo a otro objeto ya cargado, pero sin que entren en contacto. Para ello ponemos en contacto dos objetos descargados de material conductor; por ejemplo, dos esferas metálicas. Si acercamos a una de las esferas un cuerpo cargado positivamente, éste atraerá las cargas negativas de las dos esferas. Entonces, las cargas negativas acudirán a la esfera más cercana al cuerpo cargado, mientras que la esfera más alejada quedará cargada positivamente. Si en este momento, y sin apartar el cuerpo cargado, separamos dos esferas, tendremos las dos con cargas iguales y opuestas.

Otro procedimiento de electrización por influencia es el que se explica en la página 93 del libro *Física y Química 1.º Bachillerato, Ed. Edebé.*

6. Respuesta sugerida:

   Los camiones que transportan productos inflamables arrastran una cadena metálica para evitar que el camión, por el rozamiento con el aire, quede cargado. Como la cadena metálica es conductora, cualquier carga que adquiera el camión por rozamiento se descargará a tierra por la cadena.

7. Ley de Coulomb:

   La fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

   Las fuerzas eléctricas tienen las siguientes características:

   — La fuerza está dirigida a lo largo de la recta que une las dos cargas.

   — Es repulsiva para cargas del mismo signo y atractiva para cargas de signo opuesto.

   — Actúan a distancia sin necesidad de que exista ningún medio material entre ellas.

   — Siempre se presentan a pares, siguiendo el principio de acción y reacción.

   — Verifican el principio de superposición.

8. Datos: $Q_1 = +3 \cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = +1{,}2 \cdot 10^{-5}$ C; r = 50 cm = 0,5 m

   a) En el aire, la constante dieléctrica relativa es $\varepsilon_r = 1$. Por tanto:

$$|\vec{F}| = K\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

$$|\vec{F}| = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 12 \cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}5\ m)^2}$$

$$|\vec{F}| = 1{,}3\ N$$

   b) En el agua, $\varepsilon_r = 80$. Entonces:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 80} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ C}{(0{,}5\ m)^2}$$

$$|\vec{F}| = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\ N$$

9. Datos: $Q_1 = +2 \cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = +4 \cdot 10^{-6}$ C; r_{12} = 90 cm = 0,9 m; $Q_3 = -3 \cdot 10^{-6}$ C; r_{13} = 30 cm = 0,3 m

   Calculamos primero la fuerza que ejerce Q_1 sobre Q_3:

$$|\vec{F}_{13}| = K\frac{|Q_1||Q_3|}{r_{13}^2}$$

$$|\vec{F}_{13}| = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}3\ m)^2}$$

$$|\vec{F}_{13}| = 0{,}6\ N$$

   Calculamos la fuerza que ejerce Q_2 sobre Q_3:

$$|\vec{F}_{23}| = K\frac{|Q_2||Q_3|}{r_{23}^2}$$

$$|\vec{F}_{23}| = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}6\ m)^2}$$

$$|\vec{F}_{23}| = 0{,}3\ N$$

   Teniendo en cuenta que Q_3 se encuentra entre las cargas Q_1 y Q_2, las fuerzas $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ tienen sentidos opuestos.

   Aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

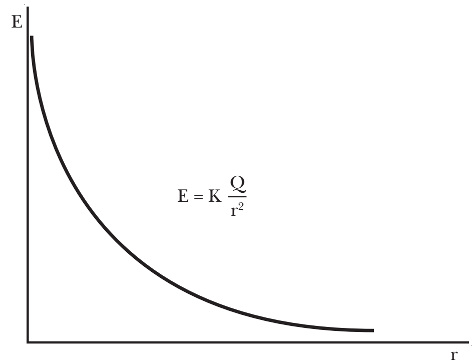
$$F_3 = F_{13} - F_{23} = 0{,}6\ N - 0{,}3\ N = 0{,}3\ N$$

   Como hemos tomado el sentido positivo de Q_1 a Q_3, la fuerza sobre Q_3 apunta hacia Q_1.

   Si la carga Q_3 fuera positiva, las dos fuerzas $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ tendrían el valor calculado anteriormente, pero sentido opuesto. La fuerza resultante tendría el mismo valor, 0,3 N, pero sentido opuesto; es decir, apuntaría hacia Q_2.

2. ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO
(págs. 177, 180, 181 y 183)

10. La intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, disminuyendo a medida que nos alejamos de la carga que genera el campo.



11. Datos: Q = +4μC; r = 50 cm = 0,5 m

a) En el vacío:

$$\left|\vec{E}\right| = K\,\frac{|Q|}{r^2}$$

$$\left|\vec{E}\right| = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}5\ m)^2} = 1{,}4\cdot 10^5\ \frac{N}{C}$$

b) En agua, $\varepsilon_r = 80$:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\frac{|Q|}{r^2}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}\cdot 80}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}5\ m)^2}$$

$$\left|\vec{E}\right| = 1{,}8\cdot 10^3\ N/C$$

12. Datos: Q = 120 nC = $1{,}2\cdot 10^{-7}$ C; E = 6 750 N/C

Despejamos la distancia de la expresión de la intensidad del campo eléctrico:

$$E = K\,\frac{|Q|}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{K\,|Q|}{E}}$$

$$r = \sqrt{\frac{9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\ 1{,}2\cdot 10^{-7}\ C}{6\,750\ N/C}} = 0{,}4\ m$$

13. Datos: Q_1 = +3 μC; Q_2 = −2 μC; d = 40 cm = 0,4 m

El punto medio del segmento que une las dos cargas está situado a una distancia $r = \frac{d}{2} = 0{,}2$ m de ambas cargas.

El campo eléctrico en este punto será la superposición de los campos creados por cada una de las cargas:

$$E_1 = K\,\frac{Q_1}{r^2}$$

$$E_1 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{3\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}2\ m)^2} = 6{,}75\cdot 10^5\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = K\,\frac{Q_2}{r^2}$$

$$E_2 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}2\ m)^2} = 4{,}5\cdot 10^5\ \frac{N}{C}$$

Aplicamos el principio de superposición teniendo en cuenta que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen el mismo sentido:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = 6{,}75\cdot 10^5\ N/C\ \vec{i} + 4{,}5\cdot 10^5\ N/C\ \vec{i}$$

$$\vec{E} = 1{,}12\cdot 10^6\ \vec{i}\ N/C$$

14. Datos: Q_1= +4 · 10^{-6} C; Q_2 = +1 · 10^{-6} C;
d = 30 cm = 0,3 m; r_1 = 12 cm = 0,12 m

Calculamos el campo creado por cada una de las cargas en el punto que dista 12 cm de Q_1 (r_1 = 0,12 m) y 18 cm de Q_2 (r_2 = 0,3 m − 0,12 m = 0,18 m), tomando como sentido positivo el que va de Q_1 a Q_2:

$$E_1 = K\,\frac{Q_1}{r_1^{\,2}}$$

$$E_1 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}12\ m)^2} = 2{,}5\cdot 10^6\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = K\,\frac{Q_2}{r_2^{\,2}}$$

$$E_2 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1\cdot 10^{-6}\ C}{(0{,}18\ m)^2} = 2{,}78\cdot 10^5\ \frac{N}{C}$$

Aplicamos el principio de superposición teniendo en cuenta que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen sentidos opuestos:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = 2{,}5\cdot 10^6\ N/C\ \vec{i} - 2{,}78\cdot 10^5\ N/C\ \vec{i}$$

$$\vec{E} = -2{,}2\cdot 10^6\ \vec{i}\ N/C$$

Por tanto, el vector intensidad de campo eléctrico apunta hacia Q_1.

Si en dicho punto situamos una carga Q_3= −0,5 μC, la fuerza que experimentará será:

$$\vec{F} = Q_3\ \vec{E} = -0{,}5\cdot 10^{-6}\,C\cdot(-2{,}2\cdot 10^6\ N/C)\ \vec{i} = 1{,}1\ \vec{i}\ N$$

La fuerza estará dirigida hacia Q_2.

15. La energía potencial eléctrica de una carga q se relaciona con el potencial eléctrico V de esta manera:

$$Ep = q\,V$$

a) La carga se dirige hacia potenciales eléctricos menores. Al tratarse de una carga positiva, su energía potencial eléctrica disminuye.

b) La carga se desplaza hacia potenciales eléctricos mayores. Por tanto, su energía potencial eléctrica aumenta.

c) El potencial eléctrico no varía. Por tanto la energía potencial eléctrica de la carga se mantiene constante.

d) Si la carga vuelve al punto de partida, el potencial eléctrico final es igual al inicial. Por tanto la variación de la energía potencial eléctrica es nula.

16. Datos: Q = +4 · 10^{-8} C

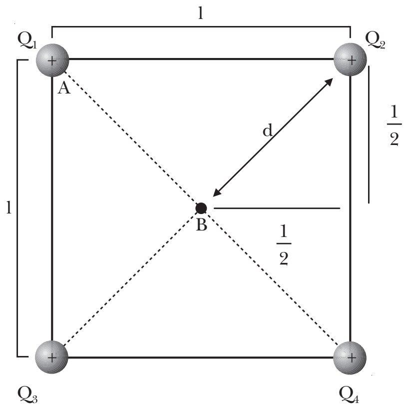
a) Calculamos el potencial eléctrico a una distancia r = 5 cm = 0,05 m:

$$V = K\,\frac{Q}{r} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-8}\ C}{0{,}05\ m} = 7\,200\ V$$

b) Una carga q = −1,5 · 10^{-9} C tendrá una energía potencial eléctrica:

$$Ep = q\,V = -1{,}5\cdot 10^{-9}\ C\cdot 7\,200\ V = -1{,}1\cdot 10^{-5}\ J$$

17. Datos:



$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = +5 \cdot 10^{-6}$ C

$l = 40$ cm $= 0{,}4$ m

$$d = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}4\ \text{m}}{2}\right)^2 + \left(\frac{0{,}4\ \text{m}}{2}\right)^2} = 0{,}28\ \text{m}$$

El trabajo necesario para trasladar una carga (por ejemplo, Q_1) del vértice al centro del cuadrado será igual a la variación de la energía potencial eléctrica de Q_1. Determinamos el potencial eléctrico creado por las otras tres cargas en el vértice y en el centro:

$$V_{2A} = K\,\frac{Q}{l} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}4\ \text{m}} = 1{,}125 \cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V_{3A} = K\,\frac{Q}{l} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}4\ \text{m}} = 1{,}125 \cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V_{4A} = K\,\frac{Q}{2d} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2 \cdot 0{,}28\ \text{m}} = 8{,}03 \cdot 10^4\ \text{V}$$

Por el principio de superposición, el potencial eléctrico en el vértice será:

$$V_A = V_{2A} + V_{3A} + V_{4A}$$

$$V_A = 1{,}25 \cdot 10^5\ \text{V} + 1{,}125 \cdot 10^5\ \text{V} + 8{,}03 \cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_A = 3{,}053 \cdot 10^5\ \text{V}$$

En el centro del cuadrado:

$$V_{2B} = K\,\frac{Q}{d} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}28\ \text{m}}$$

$$V_{2B} = 1{,}607 \cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V_{3B} = K\,\frac{Q}{d} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}28\ \text{m}}$$

$$V_{3B} = 1{,}607 \cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V_{4B} = K\,\frac{Q}{d} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}28\ \text{m}}$$

$$V_{4B} = 1{,}607 \cdot 10^5\ \text{V}$$

Por el principio de superposición:

$$V_B = V_{2B} + V_{3B} + V_{4B}$$

$$V_B = 1{,}607 \cdot 10^4\ \text{V} + 1{,}607 \cdot 10^4\ \text{V} + 1{,}607 \cdot 10^4\ \text{V}$$

$$V_B = 4{,}821 \cdot 10^5\ \text{V}$$

Entonces, el trabajo necesario para trasladar Q_1 será:

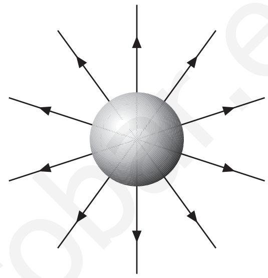
$$W = Q_1\,(V_B - V_A)$$

$$W = 5 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot (4{,}821 \cdot 10^5\ \text{V} - 3{,}053 \cdot 10^5\ \text{V})$$

$$W = 0{,}88\ \text{J}$$

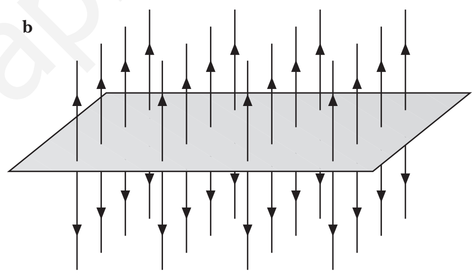
18.

a



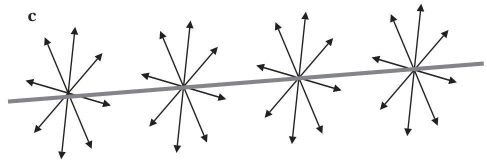
Esfera cargada uniformemente

b



Plano infinito cargado uniformemente

c

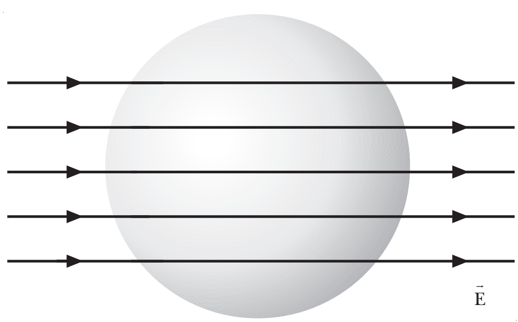


Alambre infinito cargado uniformemente

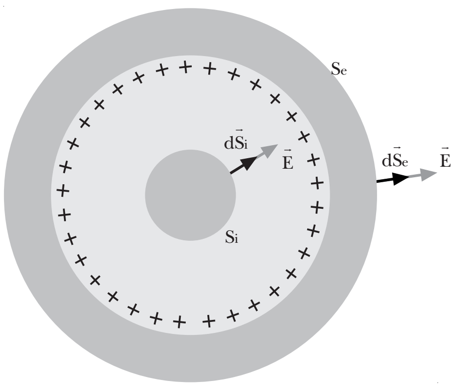
19. — Dos líneas de campo eléctrico no pueden cruzarse, ya que en cada punto del espacio el vector intensidad del campo eléctrico tiene una sola dirección y sentido bien definidos.

— Para trasladar una carga eléctrica a través de una superficie equipotencial no es necesario realizar ningún trabajo. En una superficie equipotencial, el potencial es constante. Como el trabajo es la carga por la variación del potencial, y no hay variación del potencial, el trabajo es nulo.

20. El flujo eléctrico a través de una superficie es una medida del número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie. Como el número de líneas que entran en la esfera es igual al número de líneas que salen de ella, el flujo eléctrrico es nulo.



21.



Puntos interiores: Para determinar el campo en el interior de la corteza, escogemos como superficie de Gauss una superficie esférica concéntrica con la corteza S_i y de radio menor. Como no hay carga en su interior:

$$\Phi = \int_{Si} \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E}_i = 0$$

Puntos exteriores: En este caso elegimos como superficie de Gauss una esfera concéntrica a la corteza S_e, pero de radio mayor, r. Como en cada punto de la superficie el campo eléctrico y el vector superficie son paralelos, $\vec{E}_e \cdot d\vec{S}_e = E_e\, dS_e$. Además, como la distancia de todos los puntos de S_e a la carga es igual, el campo será constante en toda la superficie. Entonces, el flujo a través de S_e será:

$$\Phi = \int_{Se} \vec{E}_e\, d\vec{S}_e = \int_{Se} E_e\, dS_e = E_e \int_{S_e} dS_e$$

$$\Phi = E_e\, S_e = E_e\, 4\pi r^2$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E_e\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

3. COMPORTAMIENTO DE LA MATERIA EN CAMPOS ELÉCTRICOS (págs. 185 y 186)

22. Decimos que un conductor está en equilibrio electrostático cuando sus cargas libres están en reposo. En equilibrio electrostático, un conductor tiene todas sus cargas eléctricas distribuidas en la superficie de modo que el campo eléctrico interior es nulo.

23. El potencial eléctrico de un conductor en equilibrio electrostático es constante en todo el conductor porque el campo eléctrico en su interior es cero. Como no hay campo en el interior, el trabajo para desplazar una partícula de prueba desde un punto a otro del interior es nulo. Por lo tanto, el potencial eléctrico es constante.

24. Datos: R = 10 cm = 0,1 m

    Determinamos la capacidad de la esfera metálica:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 0{,}1\ m$$

$$C = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\ F$$

25. Datos: R = 10 cm = 0,1 m; Q = +1 μC

    La capacidad de la esfera será:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 0{,}1\ m$$

$$C = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\ F$$

    Entonces, el potencial es:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ C}{1{,}1 \cdot 10^{-11}\ F} = 9{,}0 \cdot 10^4\ V$$

26. Los conductores se caracterizan por su capacidad, a diferencia de los dieléctricos, que se caracterizan por la constante dieléctrica relativa. La constante dieléctrica relativa de un conductor es infinita, ya que el campo eléctrico interior de un conductor es nulo aún cuando se aplica otro campo eléctrico exterior.

27. Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se orienta paralelo al campo, debido al par de fuerzas que actúa sobre él como consecuencia del campo y de su distribución de carga.

    El campo eléctrico en el interior de un dieléctrico es inferior al exterior, debido a la distribución de cargas en el interior del material. El campo exterior $\vec{E}_0$ hace aparecer cargas superficiales en las paredes del conductor de forma que generan un campo eléctrico $\vec{E}'$ opuesto al exterior. Como consecuencia, el campo eléctrico resultante en el interior del dipolo $\vec{E}_{int}$ es inferior al exterior.

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

28. Datos: $\varepsilon_r = 6$; $\vec{E}_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ N/C

$$\vec{E}_{int} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{1 \cdot 10^{-5}\ N/C}{6} = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \frac{N}{C}$$

29. Un condensador está constituido por dos placas conductoras muy próximas entre sí, denominadas armaduras, y un material dieléctrico entre ellas.

    a) La principal característica de un condensador es el almacenamiento de carga eléctrica y de energía. Por esta razón es muy utilizado para crear campos eléctricos, para rectificar corrientes alternas y en el diseño de aparatos para transmitir y recibir señales electromagnéticas (radio, TV...).

b) La capacidad de un condensador es la constante de proporcionalidad entre la carga acumulada en el dispositivo y la diferencia de potencial aplicada entre sus armaduras.

c) Montar condensadores en serie o en paralelo es útil para conseguir condensadores equivalentes con una capacidad determinada a partir de condensadores de capacidades distintas a la deseada.

30. Datos: C = 12 μF = $1,2 \cdot 10^{-5}$ F; V = 220 V

Determinamos la carga acumulada en el condensador:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C\,V = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{F} \cdot 220\ \text{V} = 2{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

La energía acumulada en el condensador será:

$$Ep = \frac{1}{2}\,C\,V^2 = \frac{1}{2}\,1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{F} \cdot (220\ \text{V})^2 = 0{,}3\ \text{J}$$

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 187)

a) Respuesta sugerida:

Desviar partículas cargadas mediante campos eléctricos tiene muchísimas aplicaciones. Además de las citadas en el texto *Aplicaciones de la electrostática* de la página 187 del libro del alumno, un ejemplo muy común es el funcionamiento del televisor. La pantalla del televisor emite luz porque desde el fondo del tubo se envían partículas cargadas que, al chocar contra la pantalla, hacen que ésta emita luz. La partículas cargadas son aceleradas y dirigidas a lo largo del tubo del televisor mediante campos eléctricos para así formar las imágenes. El televisor recibe por la antena la información de cómo deben variar estos campos para formar la imagen correcta en cada momento.

b) Los conductores eléctricos presentan una propiedad conocida como *efecto de las puntas:* el campo eléctrico exterior es más intenso en las zonas del conductor con menor radio de curvatura, pues la carga de un conductor tiende a concentrarse en las partes más puntiagudas de éste. Por esta razón, cuando una nube con carga negativa pasa sobre un cuerpo conductor puntiagudo, induce una carga positiva en su punta. El rayo es absorbido por la punta y descargado a tierra a través del conductor.

Los pararrayos consisten en un conductor metálico que une la parte más alta de un edificio a tierra. Este conductor, acabado en punta, incentiva la formación del rayo y lo conduce a tierra.

c) Respuesta sugerida:

La xerografía es una técnica para la reproducción de imágenes en papel basada en la electrostática. Las principales etapas de este proceso son:

a) Sobre un sustrato metálico conectado a tierra se coloca una fina lámina de un material fotoconductor. Este tipo de material es aislante de la electricidad en la oscuridad, pero conduce la corriente eléctrica cuando se ilumina.

En la oscuridad, se cubre la superficie del fotoconductor con una carga eléctrica positiva uniforme. En la unión metal-fotoconductor se induce una carga negativa y la lámina fotoconductora queda sometida a una gran diferencia de potencial.

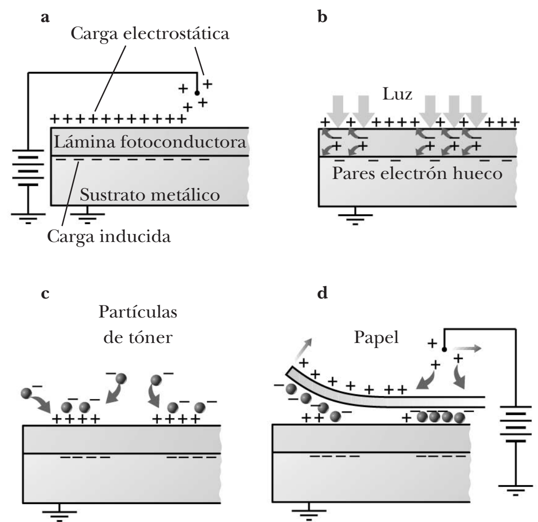
b) La lámina fotoconductora se expone a la luz reflejada en la imagen que se tiene que reproducir. En la lámina se absorbe la luz y se generan pares electrón-agujero (carga positiva).

Por la acción del campo eléctrico, los electrones se mueven hacia la superficie del fotoconductor, donde neutralizan las cargas positivas, mientras que los agujeros se dirigen hacia la unión metal-fotoconductor, donde neutralizan las cargas negativas. La imagen óptica del documento original queda registrada en una imagen electrostática sobre la lámina.

c) Se cubre la lámina con partículas de tóner. Se trata de partículas pigmentadas con carga negativa, que son atraídas por la carga positiva de la superficie. De esta manera la imagen electrostática se convierte en una imagen visible.

d) Se coloca una hoja de papel cargado positivamente sobre la lámina para que el tóner se le adhiera. A continuación se calienta el papel, con lo cual el tóner se funde y se fija al papel de una manera permanente. Se ha obtenido una fotocopia.

Se limpia de tóner la lámina y se descarga exponiéndola a la luz. Así, la lámina está preparada para repetir nuevamente el proceso .



Para la elaboración del informe se recomienda seguir esta estructura:

— **Introducción.** Plantea el objetivo del trabajo, la justificación del método seguido y el comentario de las causas que han motivado la selección del tema.

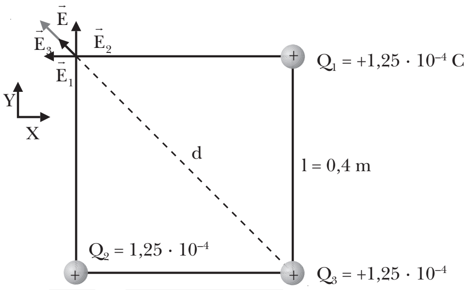
— **Cuerpo o desarrollo.** Describe mediante una exposición lógica y coherente el contenido del estudio, organizado en capítulos, apartados y subapartados. Conviene incluir ejemplos, dibujos, fotografías, gráficos... que ilustren y completen la exposición del tema.

— **Conclusión.** Resume las principales ideas que se han ido exponiendo e incluye las impresiones personales y los juicios críticos oportunos.

— **Bibliografía.** Es la relación de los libros que se han consultado, ordenados alfabéticamente. Se deben indicar los apellidos y el nombre del autor, el título del libro, la editorial, y el lugar y la fecha de edición.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 189, 190 y 191)

31. Datos:



$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{(0,4\ m)^2 + (0,4\ m)^2} = 0,57\ m$

a) Determinamos el campo eléctrico en el cuarto vértice. Para ello, calculamos primero la contribución de cada carga:

$$\vec{E}_1 = K\,\frac{Q_1}{l^2}\,\vec{u}_1 = -9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{(0,4\ m)^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{E}_1 = -7,03\cdot 10^6\ \vec{i}\ N/C$$

$$\vec{E}_2 = K\,\frac{Q_2}{l^2}\,\vec{u}_2 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{(0,4\ m)^2}\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = 7,03\cdot 10^6\ \vec{j}\ N/C$$

$$\vec{E}_3 = K\,\frac{Q_3}{d^2}\,\vec{u}_3$$

$$\vec{E}_3 = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{(0,57\ m)^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})\right]$$

$$\vec{E}_3 = 2,45\cdot 10^6[(-\vec{i}+\vec{j})]\ N\ C$$

El campo eléctrico total será la suma vectorial de los tres:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 9,48\cdot 10^6\ (-\vec{i}+\vec{j})\ N/C$$

Su módulo es:

$$E = 9,48\cdot 10^6\ \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 1,34\cdot 10^7\ N/C$$

b) Para calcular el trabajo necesario para trasladar una carga de q = –10 μC del cuarto vértice hasta el centro del cuadrado debemos determinar primero el potencial en cada uno de los dos puntos. Determinamos la contribución de cada carga al potencial en el vértice del cuadrado:

$$V_{1ver} = K\,\frac{Q}{l} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,4\ m} = 2,81\cdot 10^6\ V$$

$$V_{2ver} = K\,\frac{Q}{l} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,4\ m} = 2,81\cdot 10^6\ V$$

$$V_{3ver} = K\,\frac{Q}{l} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,56\ m} = 2,01\cdot 10^6\ V$$

Por el principio de superposición, el potencial eléctrico en el vértice será:

$$V_{ver} = V_{1ver} + V_{2ver} + V_{3ver}$$

$$V_{ver} = 2,81\cdot 10^6\ V + 2,81\cdot 10^6\ V + 2,01\cdot 10^6\ V$$

$$V_{ver} = 7,63\cdot 10^6\ V$$

Determinamos el potencial en el centro del cuadrado:

$$V_{1cen} = K\,\frac{Q}{\frac{d}{2}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,28\ m}$$

$$V_{1cen} = 4,02\cdot 10^6\ V$$

$$V_{2cen} = K\,\frac{Q}{\frac{d}{2}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,28\ m}$$

$$V_{2cen} = 4,02\cdot 10^6\ V$$

$$V_{3cen} = K\,\frac{Q}{\frac{d}{2}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot\frac{1,25\cdot 10^{-4}\ C}{0,28\ m}$$

$$V_{3cen} = 4,02\cdot 10^6\ V$$

Por el principio de superposición:

$$V_{cen} = V_{1cen} + V_{2cen} + V_{3cen}$$

$$V_{cen} = 4,02\cdot 10^6\ V + 4,02\cdot 10^6\ V + 4,02\cdot 10^6\ V$$

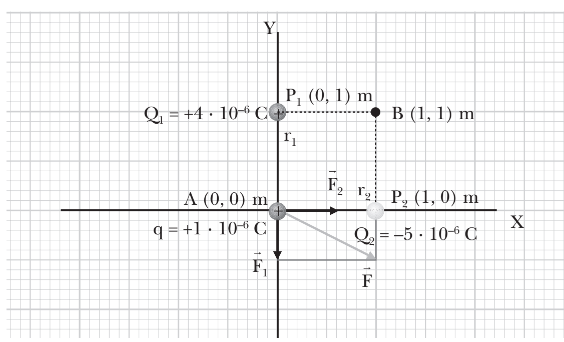
$$V_{cen} = 1,206\cdot 10^7\ V$$

Entonces, el trabajo necesario para trasladar q será:

$$W = q\ (V_{ver} - V_{cen})$$

$$W = -1\cdot 10^{-5}\ C\cdot(7,63\cdot 10^6\ V - 1,206\cdot 10^7\ V) = 44\ J$$

32. Datos:



a) Determinamos la fuerza que ejerce cada carga sobre q y aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{F}_1 = K\frac{Q_1\,q}{r_{1A}^{\;2}}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{F}_1 = -9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C\cdot 1\cdot 10^{-6}\ C}{(1\ m)^2}\ \vec{j} = -0{,}036\ \vec{j}\ N$$

$$\vec{F}_2 = K\frac{Q_2\,q}{r_{2A}^{\;2}}\,\vec{u}_2$$

$$\vec{F}_2 = 9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{(-5\cdot 10^{-6}\ C)\cdot 1\cdot 10^{-6}\ C}{(1\ m)^2}\,(-\vec{i})$$

$$\vec{F}_2 = 0{,}045\ \vec{i}\ N$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (0{,}045\ \vec{i} - 0{,}036\ \vec{j})\ N$$

El módulo de la fuerza será:

$$F = \sqrt{(0{,}045\ N)^2 + (0{,}036\ N)^2} = 5{,}7\cdot 10^{-2}\ N$$

b) El cálculo del trabajo necesario para trasladar la carga q = +1 μC desde A(0, 0) m hasta B(1, 1) m exige determinar primero el potencial en cada uno de los dos puntos a partir de la contribución de cada carga, Q_1 y Q_2:

$$V_{1A} = K\frac{Q_1}{r_{1A}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C}{1\ m}$$

$$V_{1A} = 36\,000\ V$$

$$V_{2A} = K\frac{Q_2}{r_{2A}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{(-5\cdot 10^{-6}\ C)}{1\ m}$$

$$V_{2A} = -45\,000\ V$$

Por el principio de superposición, el potencial eléctrico en A será:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = 36\,000\ V - 45\,000\ V = -9\,000\ V$$

En B(1, 1) m:

$$V_{1B} = K\frac{Q_1}{r_{1B}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-6}\ C}{1\ m} = 36\,000\ V$$

$$V_{2B} = K\frac{Q_2}{r_{2B}} = 9\cdot 10^9\ \frac{N{\cdot}m^2}{C^2}\cdot\frac{(-5\cdot 10^{-6}\ C)}{1\ m} = -45\,000\ V$$

Por el principio de superposición:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = 36\,000\ V - 45\,000\ V = -9\,000\ V$$

Entonces, el trabajo necesario para trasladar q desde el punto A al punto B será:

$$W = q\,(V_A - V_B) = 1\cdot 10^{-6}\,C\cdot 0 = 0\ J$$

El potencial eléctrico tiene el mismo valor en los puntos A y B, pues sólo depende de las cargas y de la distancia entre ellas, de forma que no es necesario realizar ningún trabajo para trasladar una carga entre dichos puntos.

33. Datos: $\lambda = +30\ \mu C{\cdot}m^{-1} = +3\cdot 10^{-5}\ C{\cdot}m^{-1}$; $r_0 = 1$ m; r = 3 m

Determinamos el campo y el potencial eléctricos para los datos del enunciado a partir de los resultados del ejemplo 2 (página 250):

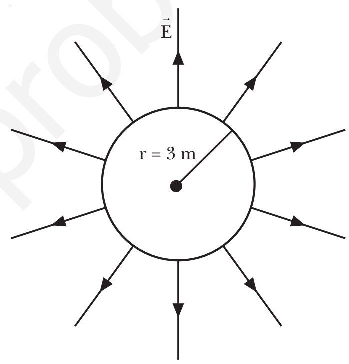
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{+3\cdot 10^{-5}\ C{\cdot}m^{-1}}{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}\cdot 3\ m}$$

$$E = 1{,}8\cdot 10^5\ N/C$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} = -\frac{+3\cdot 10^{-5}\ C{\cdot}m^{-1}}{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2}}\cdot$$

$$\cdot\ln\frac{3\ m}{1\ m} = -5{,}9\cdot 10^5\ V$$

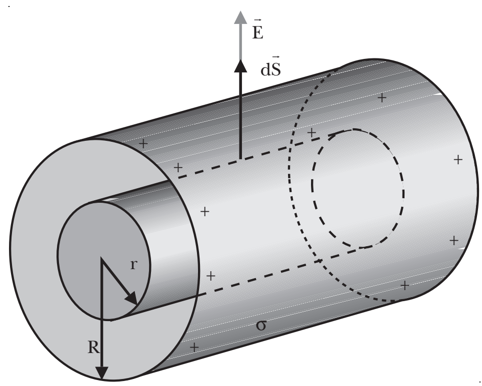
— Representamos el vector intensidad de campo eléctrico sobre una circunferencia de 3 m de radio centrada en el hilo.



34. Aplicamos el teorema de Gauss para determinar el campo eléctrico en el interior y en el exterior de un cilindro infinito hueco de radio R y cargado uniformemente con una densidad superficial de carga σ.

Puntos interiores:

Elegimos como superficie gaussiana un cilindro de radio r, r < R. Por simetría, en las tapas del cilindro el vector $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$, de forma que el flujo es nulo. En la cara lateral, el vector $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S}$ y su módulo es constante sobre esta superficie. Por tanto, el flujo a través de la superficie gaussiana será:

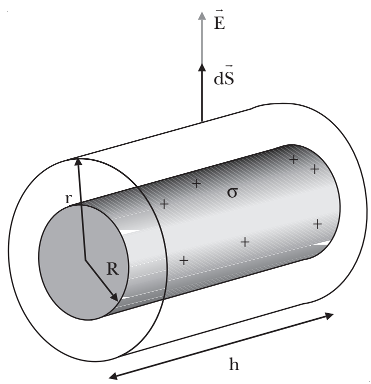


$$\Phi = \int_S \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = E_{int}\, S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E_{int} = 0$$

Por tanto, el campo eléctrico en el interior del cilindro es nulo.

Puntos exteriores:

Elegimos como superficie gaussiana un cilindro cualquiera de radio r, r > R. En las tapas de este cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$, de forma que el flujo es nulo. En la cara lateral del cilindro, $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S}$ y su módulo es constante sobre la superficie, de forma que:



$$\Phi = \int_S \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{S} = E_{ext} \int_S dS = E_{ext}\, S = E_{ext}\, 2\pi rh$$

Aplicamos el teorema de Gauss, teniendo en cuenta que la carga eléctrica dentro de la superficie es $Q = 2\pi Rh\sigma$:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E\, 2\pi rh = \frac{2\pi Rh\sigma}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

— Con los datos del problema, R = 20 cm = 0,2 m; $\sigma = +5 \cdot 10^{-6}\ C{\cdot}m^{-2}$; r = 30 cm = 0,3 m:

$$E = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r} = \frac{0{,}2\ m \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ C{\cdot}m^{-2}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2{\cdot}N^{-1}{\cdot}m^{-2} \cdot 0{,}3\ m}$$

$$E = 3{,}8 \cdot 10^5\ \frac{N}{C}$$

35. Datos: $S = 10\ cm^2 = 1 \cdot 10^{-3}\ m^2$; $d = 1\ mm = 1 \cdot 10^{-3}\ m$; $Q = 2{,}4 \cdot 10^{-9}\ C$

a) Determinamos la capacidad del condensador:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N{\cdot}m^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}\ m^2}{1 \cdot 10^{-3}\ m}$$

$$C = 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ F = 8{,}8\ pF$$

b) Calculamos la diferencia de potencial:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-9}\ C}{8{,}8 \cdot 10^{-12}\ F} = 271{,}5\ V$$

c) Si introducimos un dieléctrico de $\varepsilon_r = 6{,}8$ entre las armaduras del condensador, la capacidad será:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N{\cdot}m^2} \cdot 6{,}8 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}\ m^2}{1 \cdot 10^{-3}\ m}$$

$$C = 59{,}8 \cdot 10^{-12}\ F = 59{,}8\ pF$$

Entonces:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-9}\ C}{59{,}8 \cdot 10^{-12}\ F} = 40\ V$$

36. Datos: $Q = 1{,}8 \cdot 10^{-11}\ C$; V = 1,5 V; $\varepsilon_r = 7{,}5$

a) La nueva capacidad del condensador será:

$$C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C$$

Como el condensador se mantiene aislado, su carga no varía: $Q' = 1{,}8 \cdot 10^{-11}\ C$. Entonces, la diferencia de potencial es:

$$V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q}{\varepsilon_r C} = \frac{V}{\varepsilon_r}$$

$$V' = \frac{1{,}5\ V}{7{,}5} = 0{,}2\ V$$

b) Si mantenemos la pila conectada, la carga eléctrica varía, pero la diferencia de potencial se mantiene constante. La capacidad variará de la misma manera que en el apartado anterior. Por tanto:

$$V' = 1{,}5\ V$$

$$Q' = C'V' = \varepsilon_r CV = \varepsilon_r Q$$

$$Q' = 7{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-11}\ C = 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ C$$

37. *a)* Llamamos C_{23} a la capacidad equivalente de la asociación en paralelo de C_2 y C_3, que será:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 4\ nF + 5\ nF = 9\ nF$$

La capacidad equivalente total será:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$

$$C = 2{,}25\ nF$$

b) Calculamos la capacidad equivalente de cada rama:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; \quad \frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}; \quad C_{12} = 2{,}40\ nF$$

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}; \quad \frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3}; \quad C_{34} = 0{,}75\ nF$$

$$\frac{1}{C_{567}} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7}; \quad \frac{1}{C_{567}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{567} = 0{,}80\ nF$$

La capacidad equivalente total será:

$$C = C_{12} + C_{34} + C_{567} = 3{,}95\ nF$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 192 y 193)

38. **Conservación de la carga eléctrica:**

En los procesos físicos la carga eléctrica puede redistribuirse en un cuerpo, o pasar de un cuerpo a otro, pero en todo proceso la carga eléctrica total permanece constante.

Cuantización de la carga eléctrica:

Cualquier carga eléctrica es un múltiplo entero de una unidad elemental de carga, la carga del electrón, cuyo valor absoluto denotamos por e.

$$|e| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

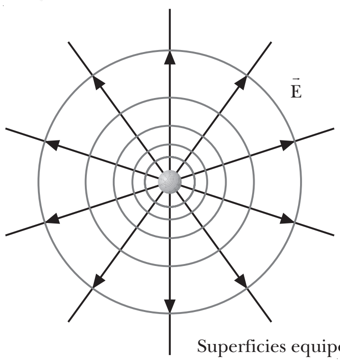
39. *a)* Si una carga positiva penetra en un campo eléctrico uniforme con una velocidad inicial con la dirección y el sentido del campo, la aceleración debida al campo y la velocidad inicial serán paralelas y del mismo sentido. Por tanto, la partícula se acelerará e incrementará su velocidad. La carga describe un MRUA.

b) Si la velocidad inicial tiene sentido opuesto al campo, la aceleración será de sentido contrario a la velocidad inicial. La partícula irá frenando hasta pararse. A continuación, empezará a moverse en sentido contrario al inicial, incrementando uniformemente su velocidad. La carga describe un MRUA.

c) Si la velocidad forma cierto ángulo con el campo eléctrico, la carga adquiere una aceleración en la dirección y el sentido del campo eléctrico. La velocidad tiene dos componentes: una perpendicular al campo que se mantiene constante, y una paralela al campo que varía uniformemente. La carga eléctrica describe un movimiento parabólico.

40. Si en cierta región del espacio el potencial eléctrico es constante, el campo eléctrico es nulo. La diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo que realiza el campo para trasladar una partícula de carga unidad entre los dos puntos. Si el potencial es constante en una región del espacio, el trabajo realizado por el campo para desplazar la carga eléctrica unidad entre dos puntos cualesquiera de esta región es nulo. Esto sólo puede suceder si el campo en dicha región es nulo.

41.



42. En un conductor, toda la carga eléctrica se distribuye por la superficie de éste y de forma que el campo eléctrico en el interior del conductor sea nulo. Si queremos proteger un aparato sensible de un campo eléctrico, podemos introducirlo en una caja metálica (jaula de Faraday). Cuando exista cualquier campo eléctrico exterior, las cargas de la caja metálica se distribuirán por la superficie de manera que el campo en el interior sea nulo.

43. La capacidad de un condensador es el cociente entre la carga eléctrica que almacena y la diferencia de potencial aplicada entre sus bornes. Esta relación es constante para cada condensador y depende de sus características geométricas, de la separación entre las placas y del aislante que existe entre ellas.

— En un condensador plano, la capacidad es directamente proporcional a la constante dieléctrica del material interpuesto entre las armaduras.

44. Datos: $Q_1 = +4{,}0 \cdot 10^{-9}$ C; $Q_2 = +2{,}0 \cdot 10^{-9}$ C;
$r = 6$ cm $= 0{,}06$ m

Determinamos el módulo de la fuerza que se ejercen las dos cargas:

$$\left|\vec{F}\right| = K\frac{|Q_1|\,|Q_2|}{r^2}$$

$$\left|\vec{F}\right| = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(0{,}06\ \text{m})^2}$$

$$\left|\vec{F}\right| = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

45. Datos: $Q_1 = +5 \cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$ C;
$Q_3 = +2 \cdot 10^{-6}$ C; $r_{12} = 30$ cm $= 0{,}3$ m;
$r_{13} = 10$ cm $= 0{,}1$ m
$r_{23} = r_{12} - r_{13} = 0{,}3$ m $- 0{,}1$ m $= 0{,}2$ m

Determinamos la fuerza que ejercen Q_1 y Q_2 por separado sobre Q_3. Llamaremos $\vec{u}$ al vector unitario en la dirección y el sentido de Q_1 a Q_2:

$$\vec{F}_{13} = K\frac{Q_1\,Q_3}{{r_{13}}^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{F}_{13} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}1\ \text{m})^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{F}_{13} = 9\,\vec{u}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_{23} = K\frac{Q_2\,Q_3}{{r_{23}}^2}\,(-\vec{u})$$

$$\vec{F}_{23} = -9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}) \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(0{,}2\ \text{m})^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{F}_{23} = 1{,}8\,\vec{u}\ \text{N}$$

La fuerza total sobre Q_3 será la suma de las dos:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} = 9\,\vec{u}\ \text{N} + 1{,}8\,\vec{u}\ \text{N} = 10{,}8\,\vec{u}\ \text{N}$$

Su módulo es F = 10,8 N.

46. Datos: $Q_1 = +1 \cdot 10^{-5}$ C; $Q_2 = -1 \cdot 10^{-5}$ C; d = 10 cm = 0,1 m

a) Llamamos $\vec{u}$ al vector unitario en la dirección y el sentido de Q_1 a Q_2 y calculamos los campos eléctricos creados por Q_1 y Q_2 en el punto medio del segmento que une las dos cargas.

$$r_1 = r_2 = \frac{d}{2} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\vec{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^{\,2}}\,\vec{u} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{1\cdot 10^{-5}\text{ C}}{(0{,}05\text{ m})^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{E}_1 = 3{,}6\cdot 10^7\ \vec{u}\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^{\,2}}\,(-\vec{u}) = -9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(-1\cdot 10^{-5}\text{C})}{(0{,}05\text{ m})^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{E}_2 = 3{,}6\cdot 10^7\ \vec{u}\ \text{N/C}$$

Aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 3{,}6\cdot 10^7\ \vec{u}\ \text{N/C} + 3{,}6\cdot 10^7\ \vec{u}\ \text{N/C}$$

$$\vec{E} = 7{,}2\cdot 10^7\ \vec{u}\ \text{N/C}$$

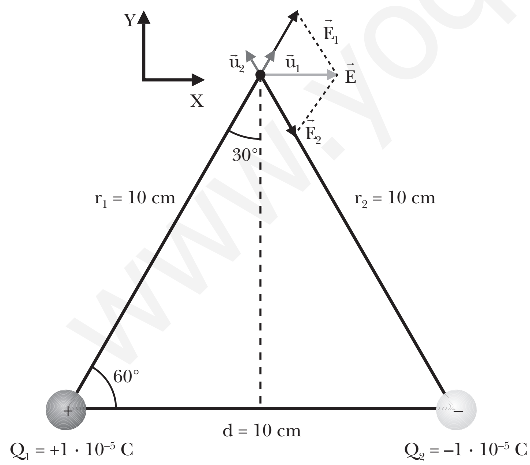
Determinamos el potencial eléctrico en este punto calculando las contribuciones de las dos cargas y aplicando el principio de superposición:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{1\cdot 10^{-5}\text{ C}}{0{,}05\text{ m}} = 1{,}8\cdot 10^6\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(-1\cdot 10^{-5}\text{ C})}{0{,}05\text{ m}} = -1{,}8\cdot 10^6\ \text{V}$$

$$V = V_1 + V_2 = 1{,}8\cdot 10^6\ \text{V} - 1{,}8\cdot 10^6\ \text{V} = 0\ \text{V}$$

b) Representamos los campos eléctricos creados por Q_1 y Q_2 en un punto equidistante 10 cm de ambas cargas y calculamos su valor.



$$\vec{u}_1 = \cos 60°\ \vec{i} + \cos 30°\ \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$$

$$\vec{u}_2 = \cos 120°\ \vec{i} + \cos 30°\ \vec{j} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$$

$$\vec{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^{\,2}}\,\vec{u}_1 = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{1\cdot 10^{-5}\text{ C}}{(0{,}1\text{ m})^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\ \vec{j})\right] = 9\cdot 10^6\left[\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\ \vec{j})\right]\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^{\,2}}\,\vec{u}_2 = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(-1\cdot 10^{-5}\text{ C})}{(0{,}1\text{ m})^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\ \vec{j})\right] = 9\cdot 10^6\left[\frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\ \vec{j})\right]\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 9\cdot 10^6\left[\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{3}\ \vec{j})\right]\frac{\text{N}}{\text{C}} +$$

$$+\,9\cdot 10^6\cdot\left[\frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\ \vec{j})\right]\frac{\text{N}}{\text{C}} = 9\cdot 10^6\ \vec{i}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E = 9\cdot 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Determinamos el potencial eléctrico calculando las contribuciones de las dos cargas y aplicando el principio de superposición:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{1\cdot 10^{-5}\text{ C}}{0{,}1\text{ m}} = 9\cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(-1\cdot 10^{-5}\text{ C})}{0{,}1\text{ m}} = -9\cdot 10^5\ \text{V}$$

$$V = V_1 + V_2 = 9\cdot 10^5\ \text{V} - 9\cdot 10^5\ \text{V} = 0\ \text{V}$$

47. Datos: $Q_1 = +4 \cdot 10^{-8}$ C; $Q_2 = -3 \cdot 10^{-8}$ C; d = 10 cm = 0,1 m

a) El punto medio del segmento que une las cargas dista de cada una $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}d$ = 0,05 m. Calculamos el potencial eléctrico debido a cada carga en dicho punto:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-8}\text{ C}}{0{,}05\text{ m}} = 7\,200\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(-3\cdot 10^{-8}\text{ C})}{0{,}05\text{ m}} = -5\,400\ \text{V}$$

Aplicamos el principio de superposición:

$$V_A = V_1 + V_2 = 7\,200\ \text{V} - 5\,400\ \text{V} = 1\,800\ \text{V}$$

b) En un punto situado a r_1 = 8 cm = 0,08 m de la primera carga y a r_2 = 6 cm = 0,06 m de la segunda, los potenciales eléctricos son:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-8}\text{ C}}{0{,}08\text{ m}} = 4\,500\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{-3\cdot 10^{-8}\text{ C}}{0{,}06\text{ m}} = -4\,500\ \text{V}$$

Aplicamos el principio de superposición:

$$V_B = V_1 + V_2 = 4\,500\ \text{V} - 4\,500\ \text{V} = 0\ \text{V}$$

c) La energía potencial de una partícula con carga $q = +5 \cdot 10^{-9}$ C en los puntos anteriores será:

$$Ep_A = qV_A = +5\cdot 10^{-9}\ \text{C}\cdot 1\,800\ \text{V} = 9\cdot 10^{-6}\ \text{J}$$

$$Ep_B = qV_b = +5\cdot 10^{-9}\ \text{C}\cdot 0\ \text{V} = 0\ \text{J}$$

48. Datos: $q = +1$ C

a) $V_1 = -25$ V; $V_2 = +25$ V

El trabajo necesario para trasladar la carga q de V_1 a V_2 será:

$$W = q(V_1 - V_2) = 1\ \text{C}\ (-25\ \text{V} - 25\ \text{V}) = -50\ \text{J}$$

b) Los puntos de una superficie equipotencial, por definición, tienen todos el mismo potencial. Por tanto, no es necesario realizar trabajo alguno para trasladar una carga entre dos puntos de una superficie equipotencial.

$$W = 0\ \text{J}$$

49. Datos: $r = 50$ cm $= 0{,}5$ m; $R = 30$ cm $= 0{,}3$ m; $Q = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ C

Para calcular el campo aplicaremos el teorema de Gauss sobre una esfera de radio r concéntrica a la esfera cargada. Por simetría, en cada punto de la superficie el campo y el vector superficie son paralelos, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$. Además, el campo será constante en toda la superficie. Entonces, el flujo a través de la esfera de radio r será:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E \cdot ds = E \int_S dS = ES = E\ 4\pi r^2$$

Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0};\quad E\ 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0};\quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{4{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\pi\ 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}\ (0{,}5\ \text{m})^2}$$

$$E = 1{,}55 \cdot 10^5\ \text{N/C}$$

El campo creado por la esfera en puntos exteriores a ella es el mismo que crearía una carga puntual situada en el centro de la esfera. El potencial será también equivalente al creado por una carga puntual:

$$V = K\frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}5\ \text{m}} = 7{,}74 \cdot 10^4\ \text{V}$$

50. Datos: $E_T = 110$ N/C; $R_T = 6\,370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m

El campo eléctrico creado por una esfera cargada en puntos exteriores a la esfera es equivalente al campo creado por una carga puntual situada en el centro de la esfera. Como el campo eléctrico está dirigido hacia la Tierra, sabemos que la carga será negativa. La carga total de la Tierra será, pues:

$$E = K\frac{|Q|}{r^2};\quad |Q| = \frac{Er^2}{K}$$

$$|Q| = \frac{110\ \text{N/C} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{C}^2}} = 4{,}96 \cdot 10^5\ \text{C}$$

$$Q = -4{,}96 \cdot 10^5\ \text{C}$$

Si consideramos esta carga uniformemente distribuida, la densidad superficial de carga de la Tierra será:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{-4{,}96 \cdot 10^5\ \text{C}}{4\pi\ (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = -9{,}7 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

51. Datos: $d = 1$ mm $= 1 \cdot 10^{-3}$ m; $V = 1\,000$ V; $\varepsilon_r = 2{,}3$

Determinamos primero la capacidad del condensador por unidad de área:

$$\frac{C}{S} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N·m}^2} \cdot 2{,}3 \cdot \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}$$

$$\frac{C}{S} = 2{,}04 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{F}}{\text{m}^2}$$

Entonces, calculamos la carga de una armadura por unidad de área, que es igual a la carga inducida en la superficie del dieléctrico por unidad de área:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{C}{S} V = 2{,}04 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{F}}{\text{m}^2} \cdot 1\,000\ \text{V}$$

$$\sigma = 2{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

52. Datos: $C_1 = 0{,}5\ \mu\text{F} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F; $V_1 = 100$ V; $C_2 = 1\ \mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-6}$ F; $V_2 = 200$ V

Una vez cargados los condensadores, si se mantiene el sistema aislado, la carga total se conservará. Podremos determinar las condiciones del sistema final teniendo en cuenta que la carga total será la suma de la carga inicial de cada uno de los condensadores.

a) Calculamos la capacidad equivalente del sistema final. Si conectamos los condensadores en paralelo:

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} + 1 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F}$$

b) La energía inicial será la suma de las energías de cada uno de los dos condensadores:

$$E_{i1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot (100\ \text{V})^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

$$E_{i2} = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot (200\ \text{V})^2 = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

$$E_i = E_{i1} + E_{i2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{J} + 2 \cdot 10^{-2}\ \text{J} = 2{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

Podemos calcular la energía final directamente a partir de la carga total y la capacidad equivalente. Para ello, necesitamos calcular la carga inicial de cada condensador:

$$Q_1 = C_1 V_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 100\ \text{V} = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$$

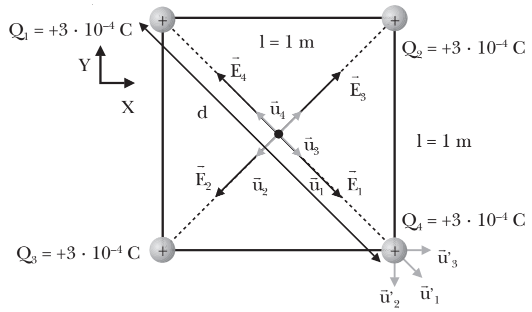
$$Q_2 = C_2 V_2 = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 200\ \text{V} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{C} + 2 \cdot 10^{-4}\ \text{C} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

Entonces, la energía final del sistema será:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})^2}{1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 2{,}10 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

53. Datos:



$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \qquad d = \sqrt{l^2 + l^2} \qquad \vec{u}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} - \vec{j}) \qquad d = \sqrt{(1\ \text{m})^2 + (1\ \text{m})^2} = \sqrt{2}\ \text{m} \qquad \vec{u}'_2 = -\vec{j}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \qquad \vec{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}) \qquad \vec{u}'_3 = \vec{i}$$

a) Por simetría, el campo en el centro del cuadrado debe ser nulo. Teniendo en cuenta que todas las cargas distan del centro la misma distancia y que tienen el mismo valor Q, el módulo del campo creado por cada una de ellas será el mismo, E. Si sumamos vectorialmente todos los campos:

$$\vec{E} = E\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4)$$

$$\vec{E} = E\,\frac{1}{\sqrt{2}}[(\vec{i} - \vec{j}) + (-\vec{i} - \vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j}) + (-\vec{i} + \vec{j})] = 0$$

b) Determinamos la fuerza eléctrica que experimenta Q_4 en el cuarto vértice debido a las otras tres cargas. Para ello, calculamos primero la contribución de cada carga:

$$\vec{F}_1 = K\frac{Q_1 Q_4}{d^2}\vec{u}'_1 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 \cdot 10^{-4}\ \text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{(\sqrt{2}\ \text{m})^2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})\right]$$

$$\vec{F}_1 = 405\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})\right]\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = K\frac{Q_2 Q_4}{l^2}\vec{u}'_2 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 \cdot 10^{-4}\ \text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{(1\ \text{m})^2} \cdot (-\vec{j}) = -810\ \vec{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = K\frac{Q_3 Q_4}{l^2}\vec{u}'_3 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 \cdot 10^{-4}\ \text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}{(1\ \text{m})^2}\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 810\ \vec{i}\ \text{N}$$

Aplicamos el principio de superposición:

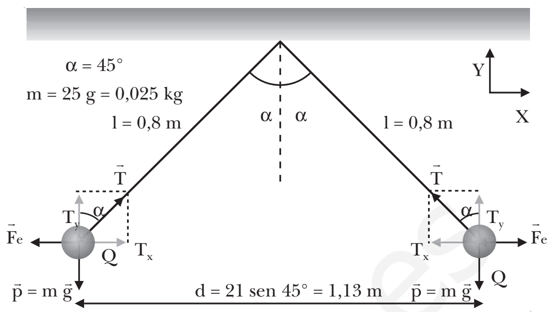
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 405\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})\right]\text{N} -$$

$$- 810\ \vec{j}\ \text{N} + 810\ \vec{i}\ \text{N} = 1\,096{,}4\,(\vec{i} - \vec{j})\ \text{N}$$

El módulo es:

$$F = \sqrt{(1\,096{,}4\ \text{N})^2 + (-1\,096{,}4\ \text{N})^2} = 1{,}55 \cdot 10^3\ \text{N}$$

54. Datos:



a) Planteamos la ecuación fundamental de la dinámica para cada eje, teniendo en cuenta que las bolas están en reposo:

$$\text{Eje X:}\quad T_y - m\,g = 0; \quad T \cos 45° - m\,g = 0$$

$$\text{Eje Y:}\quad T_x - F_e = 0; \quad T \text{ sen } 45° - F_e = 0$$

De la primera ecuación obtenemos la tensión de los hilos:

$$T = \frac{m\,g}{\cos 45°} = \frac{0{,}025\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg}}{\cos 45°} = 0{,}35\ \text{N}$$

Obtenemos la fuerza eléctrica que se ejercen las dos cargas mutuamente a partir de la ecuación para el eje Y:

$$F_e = T \text{ sen } 45° = 0{,}35\ \text{N} \cdot \text{sen } 45° = 0{,}25\ \text{N}$$

Despejamos el valor absoluto de la carga de la expresión de la fuerza eléctrica:

$$F_e = K\frac{|Q|^2}{d^2}; \quad |Q| = d\sqrt{\frac{F_e}{K}}$$

$$|Q| = 1{,}13\ \text{m}\sqrt{\frac{0{,}25\ \text{N}}{9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}}} = 5{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

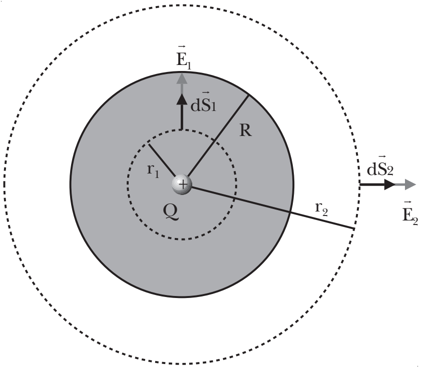
El valor absoluto de la carga es $5{,}9 \cdot 10^{-6}$ C. Puesto que las esferas se repelen, las dos cargas tienen el mismo signo; éste puede ser tanto positivo como negativo.

b) Tal y como hemos calculado en el apartado anterior, T = 0,35 N.

55. Datos: r = 10 cm = 0,1 m; Q = $3 \cdot 10^{-6}$ C; R = 5 cm; R = 0,05 m

Campo eléctrico en el interior

Para aplicar el teorema de Gauss escogemos como superficie gaussiana una esfera de radio $r_1 < R$ concéntrica con la esfera metálica. Por simetría en cada punto de esta superficie, el campo eléctrico y el vector superficie son paralelos y el campo eléctrico es constante en toda la superficie.



Calculamos el flujo a través de S_1:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} E_1 \, dS_1 = E_1 \int_{S_1} dS_1 = E_1 \, S_1$$

$$\Phi = E_1 \, 4\pi r_1^2$$

Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E_1 \, 4\pi r_1^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

El campo eléctrico en el interior de la esfera metálica es el mismo que crearía una carga eléctrica puntual Q situada en el centro de la esfera.

Campo eléctrico en el exterior

Como la carga total del conductor es nula, en la superficie exterior de la corteza quedará una carga +Q, que será la responsable del campo eléctrico exterior a la esfera. Así pues, en los puntos exteriores, el cálculo será análogo al anterior, y el campo será:

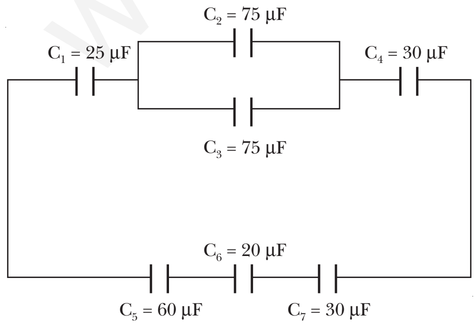
$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

— Sustituimos los datos del enunciado en la expresión obtenida para el campo eléctrico en el exterior de la esfera metálica:

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = K\frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \ \text{C}}{(0{,}1 \ \text{m})^2}$$

$$E_2 = 2{,}7 \cdot 10^6 \ \text{N/C}$$

56. Datos:



Llamamos C_{23} a la capacidad equivalente de la asociación de C_2 y C_3 en paralelo:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 75 \ \mu\text{F} + 75 \ \mu\text{F} = 150 \ \mu\text{F}$$

Entonces, la capacidad equivalente de la rama superior C_{1234} será:

$$\frac{1}{C_{1234}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{25 \ \mu\text{F}} + \frac{1}{150 \ \mu\text{F}} + \frac{1}{30 \ \mu\text{F}}$$

$$C_{1234} = 12{,}5 \ \mu\text{F}$$

Para la rama inferior la capacidad equivalente C_{567} será:

$$\frac{1}{C_{567}} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{60 \ \mu\text{F}} + \frac{1}{20 \ \mu\text{F}} + \frac{1}{30 \ \mu\text{F}}$$

$$C_{567} = 10 \ \mu\text{F}$$

Entonces, la capacidad equivalente de todo el sistema será:

$$C = C_{1234} + C_{567} = 12{,}5 \ \mu\text{F} + 10 \ \mu\text{F} = 22{,}5 \ \mu\text{F}$$

57. — Al frotar el objeto con un trozo de lana, el primero adquiere una carga eléctrica negativa. Al acercar este objeto a la bolita del electroscopio se produce en ésta una redistribución de la carga eléctrica: las cargas positivas se acercan al objeto de plástico y las cargas negativas se alejan de él. En consecuencia, la bolita es atraída por el objeto de plástico.

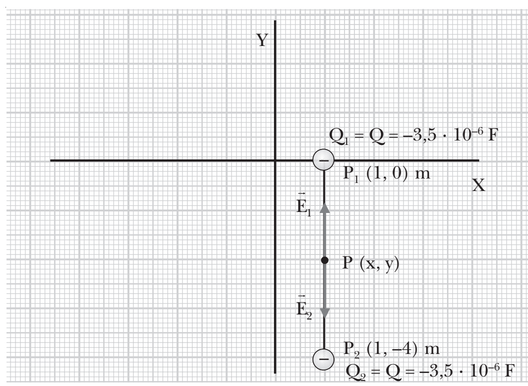
Al tocar la bolita con el objeto de plástico, la bolita queda cargada negativamente y sufre una repulsión.

— Al frotar el objeto de vidrio con un trozo de seda, el primero queda cargado positivamente. Por tanto, la bolita (cargada negativamente) resulta atraída cuando la acercamos al objeto de vidrio.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 193)

1. El hecho de que la carga eléctrica esté cuantizada significa que toda carga eléctrica que se encuentre en la naturaleza es múltiplo de una unidad elemental de carga, que coincide en módulo con la carga del electrón, $|e| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

2. Datos:



El campo se anulará en algún punto del segmento que va de P_1 a P_2. Dicho segmento es perpendicular al eje X, con x = 1 constante.

Si llamamos (x, y) a las coordenadas del punto que buscamos, observamos que x = 1 m. La distancia de dicho punto a Q_1 es $d_1 = |y|$, y la distancia de dicho punto a Q_2 es $d_2 = 4 - |y|$.

Para que el campo eléctrico se anule en P(x, y), los campos creados por las cargas Q_1 y Q_2 deben tener el mismo módulo y signo opuesto.

$$0 = E = E_1 - E_2 = K\frac{Q}{|y|^2} - K\frac{Q}{(4-|y|)^2}$$

$$0 = E = KQ\left(\frac{|y|^2 + 16 - 8|y| - |y|^2}{|y|^2(4-|y|)^2}\right)$$

$$0 = KQ\,\frac{16 - 8|y|}{|y|^2(4-|y|)^2}$$

$$E = 0 \Rightarrow 16 - 8|y| = 0; \quad |y| = 2$$

Por tanto, el punto donde se anula el campo es P(1, –2) m.

— El hecho de que el campo eléctrico sea nulo no quiere decir que el potencial sea cero. El potencial en P(x, y) será la suma algebraica de los potenciales creados por Q_1 y Q_2:

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{d_1} + K\frac{Q_2}{d_2} = KQ\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)$$

$$V = 9\cdot 10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}\cdot(-3{,}5\cdot 10^{-6}\ C)\left(\frac{1}{2\ m} + \frac{1}{2\ m}\right)$$

$$V = -3{,}15\cdot 10^4\ V$$

3. Datos: $W_{A\to\infty} = 1{,}25$ J; $W_{B\to\infty} = 4{,}50$ J

a) El trabajo realizado para desplazar la carga q de A a B será:

$$W_{AB} = W_{A\to\infty} - W_{B\to\infty} = 1{,}25\ J - 4{,}50\ J = -3{,}25\ J$$

Hemos utilizado la propiedad del campo eléctrico de ser conservativo, por esta razón el trabajo realizado para desplazar una carga eléctrica entre dos puntos no depende del camino seguido.

b) Si q = –5 μC:

$$W_{A\to\infty} = qV_A; \quad W_{B\to\infty} = qV_B$$

$$V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{q} = \frac{1{,}25\ J}{-5\cdot 10^{-6}\ F} = -2{,}5\cdot 10^5\ V$$

$$V_B = \frac{W_{B\to\infty}}{q} = \frac{4{,}50\ J}{-5\cdot 10^{-6}\ F} = -9\cdot 10^5\ V$$

4. Las superficies equipotenciales de un campo eléctrico no pueden cortarse, ya que esto significaría que en un mismo punto el campo eléctrico (perpendicular a la superficie equipotencial correspondiente) podía tener dos direcciones diferentes, lo cual no tiene sentido.

5. Datos: V = 15 V; E = 30 N/C; q = + 2,5 · 10^{-9} C; m = 5 · 10^{-3} kg

a) Determinamos la separación entre placas, teniendo en cuenta que el campo eléctrico es uniforme:

$$V = \int \vec{E}\, d\vec{r} = E\int dr = Ed$$

$$d = \frac{V}{E} = \frac{15\ V}{30\ N/C} = 0{,}5\ m$$

b) La aceleración vendrá dada por la ecuación fundamental de la dinámica:

$$F = m\,a; \quad qE = m\,a$$

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-9}\ C\cdot 30\ N/C}{0{,}005\ kg} = 1{,}5\cdot 10^{-5}\ \frac{m}{s^2}$$

c) La variación de la energía potencial será:

$$\Delta Ep = q\,\Delta V = 2{,}5\cdot 10^{-9}\ C\cdot 15\ V = 3{,}7\cdot 10^{-8}\ J$$

6. Datos: C_1 = 14 μF; C_2 = 21 μF; C_3 = 12 μF

Determinamos la capacidad equivalente de la asociación en serie de la rama superior:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{14\ \mu F} + \frac{1}{21\ \mu F}; \quad C_{12} = 8{,}4\ \mu F$$

Entonces, la capacidad equivalente total será:

$$C = C_{12} + C_3 = 8{,}4\ \mu F + 12\ \mu F = 20{,}4\ \mu F$$

8. Campo magnético

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 195)

- Podemos identificar los polos norte y sur de los imanes con la ayuda de una brújula. La punta de la aguja que señala el polo Norte terrestre constituye el polo norte de la aguja imantada. Por tanto, como los polos distintos se atraen, si acercamos la brújula a los imanes, la aguja señalará el polo sur de éstos.
- Existen diversos métodos para obtener imanes artificiales. A continuación explicamos cuatro métodos de imantación.

  Imantación por frotamiento. Consiste en frotar repetidas veces la barra de acero con un imán, siempre en el mismo sentido y con el mismo extremo del imán.

  Imantación por contacto. Consiste en acercar la barra de acero a un imán de modo que ambos queden en contacto.

  Imantación por influencia. Consiste en aproximar la barra de acero a un imán sin que lleguen a tocarse.

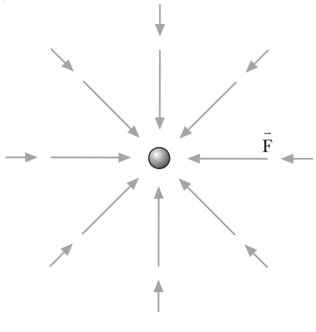
  Imantación por corriente eléctrica. Consiste en enrollar un hilo de cobre alrededor de la barra de acero procurando que las espiras estén bastante próximas, y conectar los extremos del hilo conductor a los polos de una pila.
- Datos: Q = 150 C; t = 1 min = 60 s

  La intensidad de corriente eléctrica es la carga que atraviesa una sección por unidad de tiempo.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{150\,\mathrm{C}}{60\,\mathrm{s}} = 2{,}5\ \mathrm{A}$$

- Decimos que existe un campo de fuerzas en un lugar del espacio si, al colocar en él un cuerpo de prueba, éste queda sometido a una fuerza.

  Para representar esquemáticamente un campo de fuerzas en una región del espacio se dibujan las líneas de campo. Éstas se trazan de modo que el vector intensidad de campo es tangente a las líneas de campo en cada punto y tiene el mismo sentido que éstas. Además, se trazan de forma que la densidad de las líneas de campo sea proporcional a la intensidad del campo.



- *a)* Datos: m = 40 kg; $|\vec{g}| = g = 1{,}6$ N/kg

  Una masa de 40 kg en una campo gravitatorio de 1,6 N/kg experimenta una fuerza:

$$F = m\,g = 40\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}6\ \mathrm{N/kg} = 64\ \mathrm{N}$$

  b) Datos: q = 125 μC = $1{,}25 \cdot 10^{-4}$ C;

  $|\vec{E}| = E = 3 \cdot 10^{-6}$ N/C

  Una masa de 125 μC en una campo eléctrico de $3 \cdot 10^{-6}$ N/C experimenta una fuerza:

$$F = q\,E = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/C} = 3{,}75 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}$$

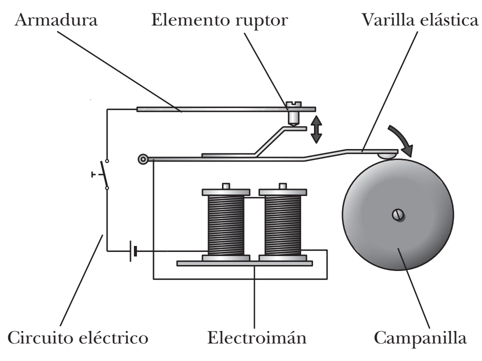
- Respuesta sugerida:

  — Un timbre está constituido por un circuito eléctrico con un interruptor, un electroimán, una armadura de hierro dulce, una varilla elástica, una campanilla y un tornillo o elemento ruptor.

  Un altavoz está constituido por un imán, una o dos bobinas, una membrana vibratoria y un pabellón acústico.

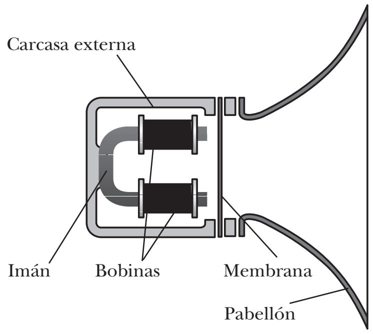
  — **Timbre**

  Cuando se cierra el circuito eléctrico pulsando el interruptor, una corriente eléctrica circula a través del electroimán, que atrae entonces a su armadura. La armadura está unida a la varilla elástica que, al desplazarse, golpea la campanilla produciendo el sonido. El elemento ruptor hace que el electroimán se desactive cada vez que atrae a la varilla.



Altavoz

La corriente variable que circula por la bobina hace variar el flujo magnético y, por tanto, también hace variar la fuerza de atracción sobre la membrana, provocando las vibraciones de ésta. La vibración se transmite a las partículas de aire adyacentes y de esta manera se genera el sonido. El altavoz está provisto de un pabellón para mejorar el rendimiento acústico.



1. MAGNETISMO (pág. 197)

1. Al romper un imán en dos o más trozos obtenemos varios imanes porque el magnetismo de los materiales es debido a la orientación de los dipolos magnéticos de su interior. El movimiento de los electrones alrededor del núcleo atómico genera un campo magnético. Aunque rompamos un imán, en cada uno de los nuevos trozos sigue habiendo electrones en movimiento que generan el campo magnético correspondiente y con la misma orientación.

   Para determinar con una brújula los polos norte y sur de un imán, es necesario tener en cuenta que la punta de la aguja que señala el polo Norte terrestre constituye el polo norte de la aguja imantada. Por tanto, como los polos distintos se atraen, la aguja señalará el polo sur del imán.

2. La experiencia que sirvió de base para la teoría electromagnética fue la experiencia de Oersted (1777–1851). Oersted descubrió que una corriente eléctrica desviaba la aguja imantada de una brújula. Esto significa que la corriente eléctrica genera un campo magnético.

3. Las propiedades magnéticas de los imanes naturales tienen su origen en el movimiento de los electrones alrededor del núcleo del átomo. Como los electrones son cargas eléctricas, podemos entender su movimiento alrededor del núcleo como una corriente eléctrica que, tal como demostró Oersted, generará una campo magnético. De esta forma, cada átomo es equivalente a un pequeño imán o dipolo magnético. Este hecho es común a todos los materiales. En los imanes naturales los dipolos están orientados en un mismo sentido y suman sus efectos, mientras que en la mayor parte de los materiales están orientados al azar y sus efectos se cancelan.

4. El imán atrae a los objetos de hierro, pero no a los de cobre o aluminio. El imán no atrae a cualquier tipo de metal, sólo atraerá aquellos materiales cuyos dipolos atómicos puedan orientarse según el campo magnético del imán.

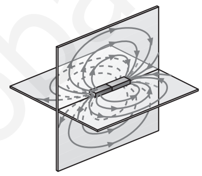
2. ESTUDIO DEL CAMPO MAGNÉTICO
(págs. 199, 201, 203, 205, 206, 207 y 209)

5. La fuerza magnética que actúa sobre una carga eléctrica depende del valor de la carga eléctrica, de la velocidad con que ésta se mueve, del valor del campo magnético y de la orientación de la velocidad respecto al campo magnético.

   Sí. Cuando la carga eléctrica se mueve en la dirección del campo magnético, no actúa ninguna fuerza sobre ella.

6. Un campo magnético se describe mediante el vector campo magnético o inducción magnética, $\vec{B}$. La inducción magnética es la fuerza que actúa sobre una carga de 1 C que se desplaza con una velocidad de 1 m/s perpendicularmente a $\vec{B}$.

   El campo magnético se representa con las líneas de inducción magnética, tangentes en cada punto al vector inducción magnética. La densidad de líneas en una región es proporcional al módulo del campo magnético en dicha región.



7. Las líneas de inducción magnética, al igual que las de campo eléctrico, cumplen estas condiciones:

   — El vector campo, $\vec{B}$, es tangente a las líneas de inducción en cada punto del espacio y tiene el mismo sentido que éstas.

   — La densidad de líneas de inducción es una región proporcional al módulo de $\vec{B}$ en dicha región.

   Las líneas de inducción magnética, a diferencia de las de campo eléctrico:

   — No tienen principio ni fin. Salen del polo norte del imán y entran por el polo sur, continuando su recorrido por el interior del imán hasta cerrar la línea.

   — Otra diferencia esencial es que las fuerzas magnéticas no son tangentes a las líneas de inducción, como en el caso del campo eléctrico, sino perpendiculares en cada punto al campo magnético.

8. Resultados:

   Las limaduras se orientan alrededor del hilo formando circunferencias centradas en éste, siguiendo las líneas de inducción magnética del campo generado por la corriente que circula por el hilo. Las circunferencias son más claras cerca del hilo, donde el campo magnético es más intenso.

9. Las líneas de inducción magnética son tangentes al campo magnético en todo punto, mientras que el campo magnético es siempre perpendicular al elemento de corriente que lo genera. Por tanto, las líneas de inducción magnética de una corriente eléctrica no pueden ser paralelas a la corriente.

10. Datos: R = 32 cm = 0,32 m; I = 2 A

Calculamos la inducción magnética en el centro de la espira utilizando la expresión hallada en el ejemplo 1 (pág. 201) del libro del alumno:

$$B = \frac{\mu_0\ I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}32\,\mathrm{m}} = 3{,}9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

11. Datos: a = 30 cm = 0,3 m; B = 4,2 · 10^{-6} T

Calculamos la intensidad de corriente eléctrica que genera este campo utilizando la expresión hallada en el ejemplo 2 (pág. 201) del libro del alumno para el campo generado por una corriente rectilínea indefinida:

$$B = \frac{\mu_0\ I}{2\pi\ a}; \quad I = \frac{2\pi\ a\ B}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}}$$

$$I = 6{,}3\ \mathrm{A}$$

12. Teorema de Ampère:

La circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada C es igual al producto de la permeabilidad, μ_0, por la intensidad de corriente eléctrica, I_c, que atraviesa la superficie limitada por la curva cerrada C.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\ I_C$$

La principal utilidad del teorema de Ampère es el cálculo del campo magnético o inducción magnética generado por una corriente en sistemas con una geometría apropiada, como en el caso del solenoide.

13. Datos: N = 350 espiras; l = 24 cm = 0,24 m; I = 2 A

Para determinar la inducción magnética en el interior del solenoide utilizamos la expresión deducida en el ejemplo 3 (pág. 203) del libro del alumno:

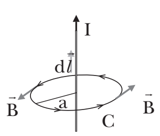
$$B = \mu_0\ \frac{N}{l}\ I = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}\ \frac{350}{0{,}24\,\mathrm{m}}\ 2\,\mathrm{A}$$

$$B = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

14. Se define como **circulación del campo magnético** la integral, a lo largo de cierta trayectoria, del producto escalar del vector inducción magnética, $\vec{B}$, por el elemento de trayectoria $d\vec{l}$.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

15. Las líneas de inducción magnética generadas por una corriente rectilínea indefinida deben ser, por simetría, circunferencias centradas en el hilo conductor.



Para aplicar el teorema de Ampère escogemos como trayectoria una circunferencia de radio a centrada en el hilo.

El campo magnético será paralelo al elemento de trayectoria $d\vec{l}$ a lo largo de toda la trayectoria. Además, como la circunferencia se mantiene a una distancia constante del conductor, la intensidad del campo magnético será constante a lo largo de toda la trayectoria. Entonces, la circulación del campo magnético será:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B\, 2\pi\ a$$

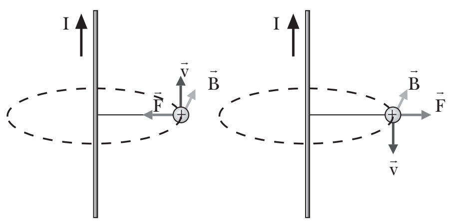
Aplicando el teorema de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\ I; \quad B\, 2\pi\ a = \mu_0\ I; \quad B = \frac{\mu_0\ I}{2\pi\ a}$$

16. Un electrón debe entrar en un campo magnético uniforme moviéndose en una dirección paralela al vector inducción magnética $\vec{B}$ para que el campo magnético no ejerza ninguna fuerza sobre él. Como la fuerza de Lorentz es proporcional al producto vectorial de la velocidad por el campo magnético, si estos vectores son paralelos, la fuerza es nula.

17. *a)* Si una carga eléctrica positiva se mueve paralelamente a un hilo conductor, como el campo magnético es perpendicular al hilo (las líneas de inducción magnética son circunferencias centradas en el hilo), la velocidad de la carga y el campo magnético serán perpendiculares en todo momento. Por tanto, la fuerza que experimentará la carga será máxima y orientada en la dirección de la recta que une la carga con el hilo conductor.

b) Según el sentido de la corriente, la fuerza acercará la carga hacia el conductor o la alejará de él. Si la carga se mueve en el mismo sentido que la corriente, la fuerza atraerá la carga hacia la corriente. En cambio, si la corriente y la velocidad de la carga tienen sentidos contrarios, la fuerza alejará la carga del conductor.



18. Datos: q = +e = +1,6 · 10^{-19} C; m_p = 1,67 · 10^{-27} kg; B = 0,2 T; v = 3 · 10^{7} m/s; α = 90°

a) Calculamos la fuerza mediante la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}); \quad F = q\ v\ B \operatorname{sen} \alpha$$

$$F = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 0{,}2\ \mathrm{T} \cdot \operatorname{sen} 90°$$

$$F = 9{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

b) Hallamos el radio de la órbita circular que describe:

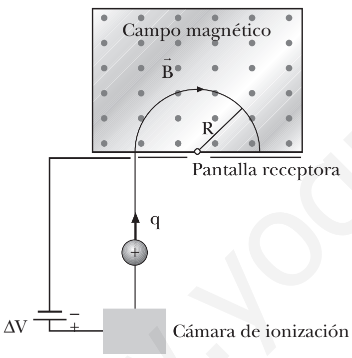
$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}}{+1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}2\ \text{T}} = 1{,}6\ \text{m}$$

19. La principal aplicación del espectrómetro de masas consiste en identificar los diferentes isótopos de un mismo elemento y determinar su abundancia en la naturaleza. Al tener todos los isótopos la misma carga pero diferente masa, al penetrar perpendicularmente en un campo magnético describen órbitas circulares de distinto radio. Si somos capaces de medir los radios de las órbitas, podremos determinar la relación masa-carga de los distintos isótopos.

20. Para determinar la masa de los diferentes isótopos de un elemento químico que inciden sobre la pantalla de un espectrómetro de masas, es necesario medir el radio, R, de la órbita circular que describen a partir de los puntos de la pantalla sobre los que inciden. Entonces, conociendo el elemento químico de que se trata, relacionamos la masa del isótopo, m, con la carga eléctrica del elemento, q, el campo magnético del espectrómetro, B, y la diferencia de potencial aplicada, ΔV:

$$\frac{m}{q} = \frac{R^2\ B^2}{2\Delta V}$$

21.



22. El selector de velocidades se introduce entre la fuente de iones y el campo magnético. Su función es conseguir que todos los iones que penetran en el campo magnético lo hagan con la misma velocidad, y determinar esta velocidad con exactitud.

El selector de velocidades consiste en una región en la que existen un campo magnético y un campo eléctrico perpendiculares entre sí y perpendiculares a su vez a la dirección del movimiento de los iones. Una ranura detiene a los iones que son desviados de su trayectoria, de esta manera sólo atraviesan la ranura los iones con una velocidad determinada, aquéllos para los que las fuerzas eléctrica y magnética se compensan:

$$\vec{F}_{magn} + \vec{F}_{electr} = 0$$

$$e\,v\,B = e\,E; \quad v = \frac{E}{B}$$

23. El ciclotrón es un dispositivo que permite acelerar partículas (protones y deutrones) hasta conseguir velocidades muy altas. Estas partículas se utilizan en la producción de materiales radiactivos con aplicaciones médicas.

El ciclotrón consiste en dos recipientes metálicos semicirculares o *des*, D_1 y D_2, colocados perpendicularmente a un campo magnético. En el centro de las *des* existe una fuente de iones. Debido a la presencia del campo magnético, los iones se mueven en circunferencias por dentro de las *des*. En el momento en que el ion pasa de una *de* a la otra, se aplica entre ambas una diferencia de potencial adecuada para acelerar la partícula. Ésta, al ganar velocidad, describe órbitas de radio cada vez mayor. La diferencia de potencial se va alternando para que tome el valor adecuado en el momento exacto en que la partícula pasa de una *de* a la otra. Cuando el radio de la trayectoria es igual al radio de las *des,* la partícula adquiere su velocidad máxima y sale del ciclotrón.

24. La base del funcionamiento del sincrotrón es parecida a la del ciclotrón. La diferencia esencial está en que en el sincrotrón el radio de la trayectoria se mantiene constante. Esto se consigue introduciendo las partículas a gran velocidad y acelerándolas mediante un campo magnético y una frecuencia de oscilaciones variables. De este modo pueden construirse aceleradores en forma anular: sólo es necesario generar el campo magnético a lo largo de un anillo.

25. Una corriente eléctrica en un campo magnético uniforme no experimentará fuerza magnética alguna si es paralela al campo magnético. La fuerza magnética sobre un elemento de corriente es proporcional al producto vectorial del elemento de corriente por el campo. Si son paralelos, el producto vectorial es nulo y el elemento de corriente no experimenta fuerza magnética.

26. Datos: $l = 4$ m; I = 2,5 A; B = $2 \cdot 10^{-2}$ T; α = 90°

Calculamos la fuerza que experimentará el conductor rectilíneo en presencia del campo magnético:

$$F = I\,l\,B\,\text{sen}\,\alpha = 2{,}5\ \text{A} \cdot 4\ \text{m} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \cdot \text{sen}\ 90°$$
$$F = 0{,}2\ \text{N}$$

27. Para determinar si las corrientes eléctricas que circulan por dos hilos rectilíneos y paralelos tienen el mismo sentido o sentidos contrarios, debemos acercar los dos hilos conductores. Si se atraen, las corrientes tendrán el mismo sentido; mientras que, si se repelen, las corrientes tendrán sentidos contrarios.

28. Datos: $I_1 = 2$ A; $I_2 = 3$ A; d = 12 cm = 0,12 m

La fuerza es repulsiva, ya que las dos corrientes tienen sentidos contrarios. El módulo de esta fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0\ I_1\ I_2}{2\pi\,d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 2\ \text{A} \cdot 3\ \text{A}}{2\pi \cdot 0{,}12\ \text{m}}$$

$$\frac{F}{l} = 1 \cdot 10^{-5}\ \frac{N}{m}$$

Definición de amperio (pág. 209)

Se define el amperio para un valor de la fuerza entre corrientes igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N porque éste es el valor de la fuerza por unidad de longitud que se ejercen dos corrientes separadas una distancia de 1 m en el vacío y tales que, por una sección del conductor, cruza una carga de 1 C por segundo. De esta forma, una corriente de 1 A corresponde a un flujo de carga a través de la sección del conductor de 1 C por segundo.

Para dos corrientes de 2 A, como la fuerza es proporcional al producto de las intensidades de las dos corrientes, la fuerza será de $8 \cdot 10^{-7}$ N.

3. COMPORTAMIENTO DE LA MATERIA EN CAMPOS MAGNÉTICOS (pág. 211)

29. Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas:

    — **Sustancias paramagnéticas:** tienen una permeabilidad relativa ligeramente superior a la unidad, $\mu_r \gtrsim 1$. Entonces, $B_{int} \gtrsim B_{ext}$. Son débilmente atraídas por un imán.

    — **Sustancias diamagnéticas:** su permeabilidad relativa es ligeramente inferior a la unidad, $\mu_r \lesssim 1$. Por tanto, $B_{int} \lesssim B_{ext}$. Son débilmente repelidas por un imán.

    — **Sustancias ferromagnéticas:** se caracterizan por tener una permeabilidad relativa mucho mayor que la unidad, $\mu_r >> 1$. Por tanto, $B_{int} >> B_{ext}$. Además, μ_r no es constante, sino que depende del campo aplicado y del estado previo de imantación del material. Estas sustancias son fuertemente atraídas por los imanes.

30. La diferencia fundamental entre un material paramagnético y otro ferromagnético es que este último está formado por pequeñas regiones, llamadas dominios magnéticos, en las que todos los dipolos atómicos están orientados en la misma dirección. Al aplicar al material un campo magnético externo, varios de sus dominios se orientan en la dirección del campo, con la totalidad de sus dipolos, por tanto el material ferromagnético se imanta. En cambio, un material paramagnético carece de dominios magnéticos, por lo que al aplicar al material un campo magnético externo sólo se orienta en la dirección del campo una pequeña fracción de los dipolos atómicos.

31. Un imán pierde sus propiedades magnéticas si se somete a temperaturas muy elevadas, porque los dipolos que, orientados paralelamente, dotan al imán de sus propiedades magnéticas, pierden su orientación con la temperatura. La temperatura aumenta la energía de los átomos, que vibran y pierden su orientación. Los dipolos quedan entonces orientados aleatoriamente y el imán pierde sus propiedades magnéticas.

32. Respuesta sugerida:

    Los materiales paramagnéticos, al igual que los ferromagnéticos, tienen moléculas con momentos dipolares permanentes. En concreto, en el caso de los materiales paramagnéticos, estos dipolos no interactúan fuertemente entre sí, de forma que normalmente están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo, estos dipolos pueden orientarse paralelamente al campo y contribuir a incrementar su intensidad. Sin embargo, si la temperatura no es muy baja ni el campo muy intenso, el movimiento de los átomos debido a la temperatura tenderá a desorientarlos, de forma que sólo una pequeña fracción de los dipolos contribuirá al campo magnético interior.

    En el caso de los materiales diamagnéticos, sus moléculas no poseen momentos magnéticos permanentes. En presencia del campo magnético externo, se induce en las moléculas un momento dipolar de sentido opuesto al campo que lo genera. De esta forma, el campo en el interior del material se ve debilitado.

    Para la elaboración del informe se recomienda seguir esta estructura:

    — **Introducción.** Plantea el objetivo del trabajo, la justificación del método seguido y el comentario de las causas que han motivado la selección del tema.

    — **Cuerpo o desarrollo.** Describe mediante una exposición lógica y coherente el contenido del estudio, organizado en capítulos, apartados y subapartados. Conviene incluir ejemplos, dibujos fotografías, gráficos... que ilustren y completen la exposición del tema.

    — **Conclusión.** Resume las principales ideas que se han ido exponiendo e incluye las impresiones personales y los juicios críticos oportunos.

    — **Bibliografía.** Es la relación de los libros que se han consultado, ordenados alfabéticamente. Se deben indicar los apellidos y el nombre del autor, el título del libro, la editorial, y el lugar y la fecha de edición.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 212)

a) En cualquier lugar sobre la superficie de la Tierra las líneas de inducción del campo magnético terrestre van de Sur a Norte geográfico. El polo norte magnético coincide aproximadamente con el polo Sur geográfico, mientras que el polo sur magnético se sitúa cerca del polo Norte geográfico.

El eje magnético se mueve actualmente hacia el Oeste a razón de un grado de longitud cada 5 años. Se sabe, gracias a los estudios paleomagnéticos, que a lo largo de los últimos 2 500 millones de años el campo magnético terrestre se ha invertido una vez cada millón de años.

La intensidad del campo magnético terrestre es muy pequeña, cerca de los polos se da el valor máximo, de unos $5 \cdot 10^{-5}$ T.

b) Se define como **declinación magnética** el ángulo que forman las direcciones Norte-Sur geográfica y Norte-Sur magnética.

c) Respuesta sugerida:

Introducción:

Desde hace años los científicos aceptan que el campo magnético terrestre está ligado a los movimientos de la materia en el núcleo de la Tierra. El lento fluir de estos materiales produce corrientes eléctricas, las cuales inducen el campo magnético. Pero en esta teoría hay muchos problemas por resolver. La forma exacta de estos movimientos, la fuente de energía que los mantiene y la forma cómo inducen el campo magnético son todavía aspectos desconocidos. Para profundizar en este estudio, es necesario conocer las características del campo magnético terrestre en la superficie y los datos disponibles sobre la estructura interna del globo.

Cuerpo o desarrollo:

El módulo y la dirección del campo magnético terrestre son variables a lo largo de la superficie. El valor máximo se da cerca de los polos y es de 0,3 gauss. Su dirección es, en promedio, Norte-Sur, pero presenta ligeras variaciones. Estas inhomogeneidades hacen pensar que el campo está formado por remolinos irregulares. Por otra parte, desde que se estudia el campo magnético terrestre, su intensidad ha ido decreciendo y sus remolinos desplazándose hacia el Oeste a razón de unos 90 metros por día. Además, los estudios paleomagnéticos indican que el campo ha ido invirtiendo su sentido aproximadamente cada millón de años.

En cuanto a la estructura del planeta, sabemos que existe un núcleo interno sólido, de unos 1 220 km de radio, y un núcleo externo fluido (3 485 km de radio). El movimiento de esta parte fluida del interior de la Tierra puede ser el origen de su campo magnético.

El principal problema con el que se encuentran los geofísicos es la imposibilidad de obtener datos sobre el campo magnético en el núcleo y sobre sus variaciones. Por ejemplo, se cree que deben existir importantes campos toroidales cuyas líneas son paralelas a las superficies esféricas centradas en el núcleo y, por ello, indetectables.

Por ahora, el modelo más aceptado sobre el origen del campo magnético es el de la dinamo automantenida. Según este modelo, algún campo magnético inicial (el campo que llena la galaxia sería suficiente) generó corrientes eléctricas en el material en movimiento. Estas corrientes, a su vez, empezaron a inducir un campo magnético. Una vez iniciado el proceso, el mismo campo magnético mantiene las corrientes, y viceversa. Parece claro que el movimiento del material está regido por los efectos conjuntos de la gravedad, la rotación y los movimientos radiales debidos a las diferencias de densidad como consecuencia de diferencias de temperatura y composición.

Para estudiar la posible forma de las corrientes, se construyen modelos teóricos y experimentales. En estos modelos se observa que el movimiento del material está confinado en un cilindro paralelo al eje de rotación. En concreto, el flujo dentro de esta región forma largos rodillos paralelos, cuyo diámetro crece con la viscosidad del material. Además, dentro de estos rodillos el material se mueve hacia abajo en el hemisferio Norte y hacia arriba en el hemisferio Sur, siendo el movimiento horizontal en el plano ecuatorial. Los modelos experimentales no pueden reproducir los campos magnéticos, pero la teoría indica que el campo generado sería creciente con el tiempo. A partir de cierto valor crítico, las fuerzas ejercidas por el campo magnético sobre el material son tales que el flujo sigue un movimiento horizontal único a gran escala y genera un campo magnético intenso y toroidal.

Algunos puntos que los modelos no explican son las inversiones temporales del sentido del campo y el origen de la energía que mantiene el movimiento del material, contrarrestando los efectos de la viscosidad y del mismo campo magnético. En los modelos experimentales la fuente de energía es un gradiente de temperatura entre el centro de la esfera y el exterior. En la Tierra, dicho gradiente de temperatura podría mantenerse gracias a la presencia de elementos radiactivos en el núcleo, al calor liberado en el proceso de solidificación del núcleo y a la energía gravitatoria liberada en los movimientos radiales del material fluido.

Conclusión:

En resumen, parece claro que el origen del campo magnético terrestre está relacionado con el movimiento del material fluido en el núcleo de la Tierra. La forma de dichas corrientes puede simularse mediante modelos experimentales o teóricos, pero quedan muchas preguntas por contestar. El estudio del interior del planeta es difícil y sólo puede obtenerse información mediante métodos indirectos. Los modelos pueden ajustar más o menos el campo observado, pero es complicado saber si reproducen adecuadamente el núcleo terrestre.

Bibliografía:

«Origen del campo magnético terrestre», Ch. R. Carrigan, D. Gubbins, *Investigación y ciencia,* abril 1979, pág. 82.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 214 y 215)

33. Datos: R = 32 cm = 0,32 m; I = 4 A

Calculamos el campo magnético en el centro del conductor en forma de semicircunferencia haciendo uso de la expresión hallada en el problema resuelto 1 (pág. 276) del libro del alumno:

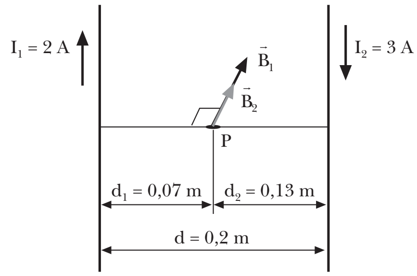
$$B = \frac{\mu_0\, I}{4R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 4\text{A}}{4 \cdot 0{,}32\ \text{m}} = 3{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

34. Datos: R = 40 cm = 0,4 m; B = 2 · 10^{-6} T

Calculamos la intensidad de corriente que circula por el conductor en forma de semicircunferencia haciendo uso de la expresión hallada en el problema resuelto 1 (pág. 214) del libro del alumno para el campo magnético en el centro de un conductor en forma de semicircunferencia:

$$B = \frac{\mu_0\, I}{4R}; \quad I = \frac{4RB}{\mu_0} = \frac{4 \cdot 0{,}4\ \text{m} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}} = 2{,}5\ \text{A}$$

35. Datos:



En el punto P, los campos magnéticos creados por las dos corrientes tienen la misma dirección, perpendicular al plano que contiene los dos hilos, y el mismo sentido, ya que son corrientes de sentidos opuestos, como se observa en la figura.

Calculamos la inducción magnética creada en el punto P por cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi\, d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 2\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}07\ \text{m}} = 5{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

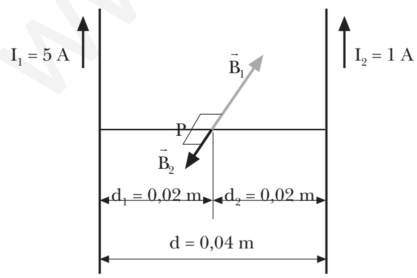
$$B_2 = \frac{\mu_0\, I_2}{2\pi\, d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 3\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}13\ \text{m}} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

La inducción magnética resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Como estos vectores tienen la misma dirección y sentido, el módulo del campo magnético resultante será la suma de los módulos de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$:

$$B = B_1 + B_2 = 5{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{T} + 4{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

$$B = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

36. Datos:



En el punto P, los campos magnéticos creados por las dos corrientes tienen la misma dirección, perpendicular al plano que contiene los dos hilos, y sentidos opuestos, ya que las corrientes tienen el mismo sentido, como se observa en la figura.

Calculamos la inducción magnética creada en el punto P por cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi\, d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 5\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}02\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\, I_2}{2\pi\, d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 1\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}02\ \text{m}} = 1 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

La inducción magnética resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Como estos vectores tienen la misma dirección y sentidos opuestos, el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$:

$$B = B_1 - B_2 = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{T} - 1 \cdot 10^{-5}\ \text{T} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

37. Datos: $m_p = m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg;
$q_p = +e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
$q_n = 0$; $\Delta V = 2 \cdot 10^3$ V; B = 0,4 T

a) El incremento de energía cinética de la partícula alfa es igual a su pérdida de energía potencial eléctrica:

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = q\, \Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\, \Delta V}{m}}$$

Para calcular la velocidad de la partícula alfa hallamos primero su masa y su carga:

$$q = 2q_P + 2q_n = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

$$m = 2m_p + 2m_n = 4m_p = 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m = 6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Entonces, la velocidad de la partícula alfa al penetrar en el campo magnético será:

$$v = \sqrt{\frac{2q\, \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^3\ \text{V}}{6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}};$$

$$v = 4{,}4 \cdot 10^5\ \text{m s}$$

b) Determinamos el radio de la circunferencia que describe la partícula α a partir de la velocidad y el campo magnético:

$$R = \frac{m\, v}{q\, B} = \frac{6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 4{,}4 \cdot 10^5\ \text{m/s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}4\ \text{T}}$$

$$R = 0{,}023\ \text{m} = 2{,}3\ \text{cm}$$

38. Datos: R = 0,9 m; B = 0,4 T

a) Calculamos la masa y la carga del ion $^2H^+$:

$$q = 1q_p + 1q_n = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

$$m = 1m_p + 1m_n = 2m_p = 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$m = 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

Hallamos la velocidad del ion a partir del radio de la órbita circular que describe y del campo magnético:

$$R = \frac{m\, v}{q\, B}; \quad v = \frac{q\, B\, R}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}4\ \text{T} \cdot 0{,}9\ \text{m}}{3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$v = 1{,}72 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Determinamos la energía cinética del ion:

$$Ec = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot (1{,}72 \cdot 10^7\ m/s)^2$$

$$Ec = 4{,}9 \cdot 10^{-13}\ J$$

b) El incremento de energía cinética que ha experimentado el ion es igual a su pérdida de energía potencial eléctrica. Por tanto:

$$Ec = Ep = q\Delta V; \quad \Delta V = \frac{Ec}{q} = \frac{4{,}9 \cdot 10^{-13}\ J}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C}$$

$$\Delta V = 3{,}1 \cdot 10^6\ V$$

39. Datos: R = 0,6 m; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_p = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; B = 1,5 T

a) La condición para que se produzca resonancia es que la frecuencia del oscilador eléctrico coincida con la frecuencia de la partícula acelerada en el ciclotrón:

$$f = \frac{eB}{2\pi\, m_p} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1{,}5\ T}{2\pi \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg} = 2{,}3 \cdot 10^7\ Hz$$

b) Cuando los protones adquieren su velocidad máxima salen del ciclotrón, siendo el radio de su órbita igual al radio de las *des* del ciclotrón. Por tanto:

$$v_{max} = \frac{e\,B\,R}{m_p} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1{,}5\ T \cdot 0{,}6\ m}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg}$$

$$v_{max} = 8{,}6 \cdot 10^7\ m/s$$

40. Datos: R = 0,9 m; f = $1{,}7 \cdot 10^6$ Hz

a) Calculamos la masa y la carga del ion $^2H^+$:

$$q = 1q_p + 1q_n = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

$$m = 1m_p + 1m_n = 2m_p = 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$$

$$m = 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ kg$$

Hallamos el campo magnético en el interior del ciclotrón a partir de la frecuencia de resonancia:

$$f = \frac{q\,B}{2\pi\, m}$$

$$B = \frac{2\pi\, m\, f}{q} = \frac{2\pi \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot 1{,}7 \cdot 10^6\ Hz}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C}$$

$$B = 0{,}2\ T$$

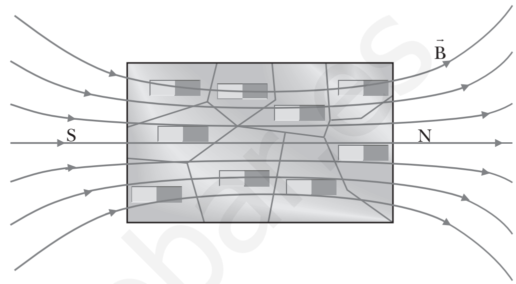
b) Cuando los deuterones adquieren su velocidad máxima salen del ciclotrón, siendo el radio de su órbita igual al radio de las *des* del ciclotrón. Por tanto:

$$v_{max} = \frac{e\,B\,R}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 0{,}2\ T \cdot 0{,}9\ m}{3{,}34 \cdot 10^{-27}\ kg}$$

$$v_{max} = 8{,}6 \cdot 10^6\ m/s$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 216 y 217)

41. Las propiedades de un imán se deben a la presencia en su interior de pequeñas regiones llamadas dominios, en las que todos los dipolos atómicos tienen la misma orientación. Estos dipolos están orientados paralelamente, definiendo así un eje magnético en el material. De esta manera los extremos del imán se constituyen en dos polos magnéticos diferentes (norte y sur). El campo magnético es aquí más intenso y las propiedades magnéticas del imán, más acusadas.



42. Una carga eléctrica en reposo y otra carga en movimiento no producen la misma perturbación en el espacio. Una carga en reposo sólo genera a su alrededor un campo eléctrico. En cambio, un carga en movimiento genera un campo eléctrico y un campo magnético.

43. Si conocemos la forma de las líneas de inducción magnética y la dirección de movimiento de una carga eléctrica, podemos determinar la dirección de la fuerza que actuará sobre ella. La ley de Lorentz establece que esta fuerza será proporcional al producto vectorial de la velocidad por el campo magnético. Por tanto, como las líneas de inducción magnética indican en cada punto la dirección del campo magnético, sabemos que la fuerza que experimentará la carga será perpendicular a su velocidad y a las líneas de inducción magnética.

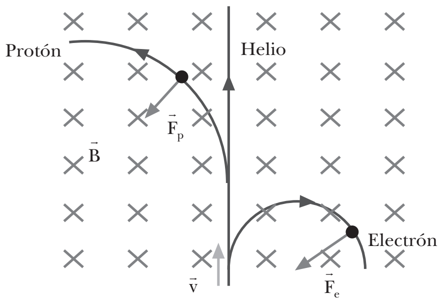
44. Campo magnético creado por un hilo rectilíneo indefinido por el que circula una corriente de intensidad I a una distancia *a* del hilo: $B = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, a}$.

Campo magnético creado por una espira circular de radio R por la que circula una corriente de intensidad I en su centro: $B = \frac{\mu_0\, I}{2R}$.

Campo magnético creado por un solenoide con N espiras, de longitud *l*, por el que circula una corriente de intensidad I en su interior: $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$.

45. *a)* Supongamos un electrón, un protón y un átomo de helio que penetran en un campo magnético uniforme con la misma velocidad y en la misma dirección, perpendicular al campo.

El radio de la órbita circular que describe cada partícula es proporcional a su masa e inversamente proporcional a su carga. El átomo de helio, al ser neutro, no experimenta desviación alguna. El electrón y el protón tienen la misma carga, pero de signos opuestos. Por esta razón se desvían en sentidos opuestos. Además, el protón tiene una masa mayor. Por eso, el radio de la órbita del protón es mayor que el de la del electrón.



b) La aceleración centrípeta, gracias a la cual estas partículas describen una trayectoria circular, es:

$$a_c = \frac{F_c}{m} = \frac{q\,v\,B}{m}$$

La aceleración del átomo de helio es nula, pues su carga neta es cero. Puesto que las cargas eléctricas del protón y del electrón son iguales en valor absoluto y la masa del electrón es unas dos mil veces menor que la del protón, el electrón adquiere una aceleración que será unas dos mil veces mayor.

El aumento de la energía cinética es proporcional al valor de la fuerza que actúa sobre cada partícula. Por ello, sobre el átomo de helio, por ser su carga nula, no actúa ninguna fuerza y su energía cinética se mantiene constante. El protón y el electrón experimentan fuerzas iguales, pero en sentidos opuestos. Por tanto, su energía cinética aumenta con la distancia recorrida a razones iguales.

46. El ciclotrón es un dispositivo que permite acelerar partículas hasta adquirir velocidades muy altas. En el momento en que la partícula o ion pasa de una *de* a la otra, se aplica entre ambas una diferencia de potencial adecuada para acelerar la partícula. Ésta, al ganar velocidad, describe órbitas de radio cada vez mayor. La diferencia de potencial se va alternando para que tome el valor adecuado en el momento exacto en que la partícula pasa de una *de* a la otra. Cuando el radio de la trayectoria es igual al radio de las *des,* la partícula adquiere su velocidad máxima y sale del ciclotrón.

47. La fuerza que ejerce un campo magnético sobre una corriente eléctrica no puede ser nunca paralela a la corriente. La fuerza que actúa sobre cada punto del conductor es proporcional al producto vectorial del elemento de corriente por el campo magnético. Por tanto, la fuerza es perpendicular a la corriente en cualquier punto del conductor.

48. Dos hilos conductores rectos y paralelos se atraen si las corrientes que circulan por ellos tienen el mismo sentido. Los mismos hilos se repelerán si las corrientes que circulan por ellos tienen sentidos opuestos.

49. Las sustancias ferromagnéticas se caracterizan por tener una permeabilidad relativa mucho mayor que la unidad, $\mu_r >> 1$. Por tanto, $B_{int} >> B_{ext}$. Además, μ_r no es constante, sino que depende del campo aplicado y del estado previo de imantación del material. Estas sustancias son fuertemente atraídas por los imanes. Su comportamiento se debe a que un material ferromagnético está formado por pequeñas regiones, llamadas dominios magnéticos, en las que todos los dipolos atómicos están orientados en la misma dirección. En presencia de un campo magnético externo, estos dominios se orientan paralelamente a B_{ext} y contribuyen al campo interno, de forma que $B_{int} >> B_{ext}$.

50. Datos: R = 10 cm = 0,1 m; I = 4 A

Calculamos la inducción magnética en el centro de la espira:

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot 4\text{A}}{2 \cdot 0{,}1\ \text{m}} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

51. Datos: a = 28 cm = 0,28 m; $B = 3 \cdot 10^{-6}$ T

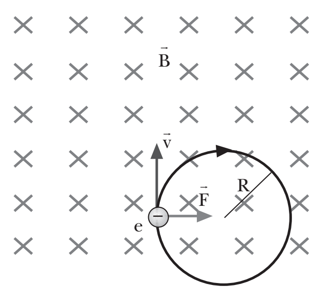
Calculamos la intensidad de corriente eléctrica que genera este campo:

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, a}$$

$$I = \frac{2\pi\, aB}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0{,}28\ \text{m} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ \text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}} = 4{,}2\ \text{A}$$

52. Datos: $q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $B = 3 \cdot 10^{-3}$ T; $v = 1{,}6 \cdot 10^{6}$ m/s; a = 90°

a)



b) Hallamos el radio de la órbita circular que describe:

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \text{T}}$$

$$R = 3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

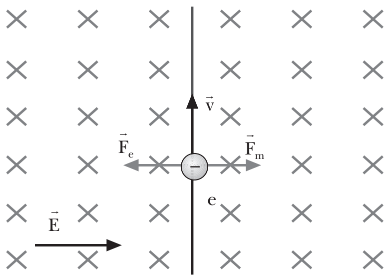
Si se tratara de un protón, la partícula describiría la curva en el otro sentido (sentido antihorario) y con un radio mayor, ya que R es proporcional a la masa y ésta es mayor para el protón.

c) Si queremos que el electrón describa un MRU, debemos superponer un campo eléctrico perpendicular al campo magnético y a la trayectoria del electrón, de forma que la fuerza eléctrica sobre el electrón sea igual pero de sentido opuesto a la fuerza que ejerce el campo magnético.

$$F_m = q\,v\,B; \quad F_e = qE$$

$$q\,v\,B = qE; \quad E = vB = 1{,}6 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$E = 4{,}8 \cdot 10^{3}\ \mathrm{N/C}$$



53. Datos: $m_p = m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg;
$q_p = +e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C;
$q_n = 0$; $\Delta V = 5 \cdot 10^3$ V; $B = 0{,}25$ T

a) El incremento de energía cinética de la partícula alfa es igual a su pérdida de energía potencial eléctrica:

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = q\, \Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\, \Delta V}{m}}$$

Para calcular la velocidad de la partícula alfa hallamos primero su masa y su carga:

$$q = 2q_P + 2q_n = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$m = 2m_p + 2m_n = 4m_p = 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$m = 6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

Entonces, la velocidad de la partícula alfa al penetrar en el campo magnético será:

$$v = \sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 5 \cdot 10^3\ \mathrm{V}}{6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}}$$

$$v = 6{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{m\ s}$$

b) Determinamos el radio de la circunferencia que describe la partícula alfa a partir de la velocidad y el campo magnético:

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}25\ \mathrm{T}}$$

$$R = 0{,}058\ \mathrm{m} = 5{,}8\ \mathrm{cm}$$

54. Datos: $l = 3{,}5$ m; I = 4 A; $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T; $\alpha = 90°$

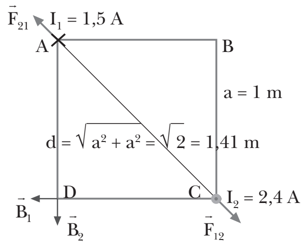
Calculamos la fuerza que experimentará el conductor rectilíneo en presencia del campo magnético:

$$F = I\,l\,B \operatorname{sen} \alpha = 4\,\mathrm{A} \cdot 3{,}5\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T} \cdot \operatorname{sen} 90°$$

$$F = 0{,}28\ \mathrm{N}$$

55. Datos: $I_1 = 1{,}5$ A; $I_2 = 2{,}4$ A; $l = 1$ m

a)



b) El campo magnético en el punto D será la suma vectorial del campo creado por cada uno de los dos hilos. Hallamos el módulo del campo que genera en D cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi\, a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 1{,}5\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 1\ \mathrm{m}}$$

$$B_1 = 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\, I_2}{2\pi\, a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 2{,}4\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 1\ \mathrm{m}}$$

$$B_2 = 4{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$$

Las dos contribuciones son perpendiculares. Por tanto, el módulo del campo magnético total será:

$$B = \sqrt{{B_1}^2 + {B_2}^2} = \sqrt{(3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T})^2 + (4{,}8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T})^2}$$

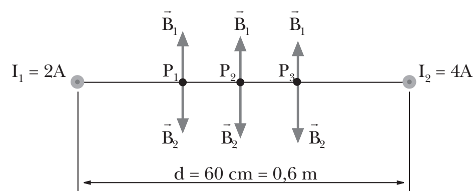
$$B = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$$

La fuerza que se ejercen los hilos es repulsiva, ya que las dos corrientes tienen sentidos opuestos. El módulo de esta fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0\, I_1\, I_2}{2\pi\, d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 1{,}5\ \mathrm{A} \cdot 2{,}4\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 1{,}41\ \mathrm{m}}$$

$$\frac{F}{l} = 5{,}1 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

56. Datos:



a) En el punto P_1 los campos magnéticos creados por las dos corrientes tienen la misma dirección, perpendicular al plano que contiene los dos hilos, y sentido contrario, ya que son corrientes con el mismo sentido.

Calculamos la inducción magnética creada en el punto P_1 por cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\, I_1}{2\pi\, d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}}$$

$$B_1 = 2 \cdot 10^{-6}\ T$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\ I_2}{2\pi\ d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 4\ A}{2\pi \cdot 0{,}4\ m}$$

$$B_2 = 2 \cdot 10^{-6}\ T$$

La inducción magnética resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Como estos vectores tienen la misma dirección y sentidos opuestos, el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$:

$$B = B_2 - B_1 = 2 \cdot 10^{-6}\ T - 2 \cdot 10^{-6}\ T = 0\ T$$

b) Calculamos la inducción magnética creada en el punto P_2 por cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\ I_1}{2\pi\ d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 2\ A}{2\pi \cdot 0{,}3\ m}$$

$$B_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ T$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\ I_2}{2\pi\ d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 4\ A}{2\pi \cdot 0{,}3\ m}$$

$$B_2 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ T$$

Como los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos, el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_1$:

$$B = B_2 - B_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ T - 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ T$$

$$B = 1{,}4 \cdot 10^{-6}\ T$$

c) Calculamos la inducción magnética creada en el punto P_3 por cada uno de los hilos:

$$B_1 = \frac{\mu_0\ I_1}{2\pi\ d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 2\ A}{2\pi \cdot 0{,}4\ m}$$

$$B_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ T$$

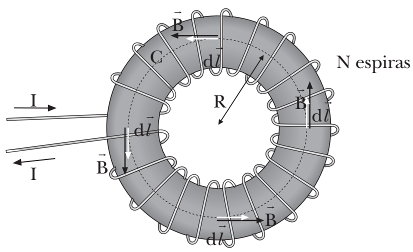
$$B_2 = \frac{\mu_0\ I_2}{2\pi\ d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 4\ A}{2\pi \cdot 0{,}2\ m}$$

$$B_2 = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\ T$$

La inducción magnética resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Como estos vectores tienen la misma dirección y sentidos opuestos, el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_1$:

$$B = B_2 - B_1 = 4 \cdot 10^{-6}\ T - 1 \cdot 10^{-6}\ T = 3 \cdot 10^{-6}\ T$$

57. Datos:



a) Dada la geometría del toroide, podemos suponer que, a lo largo de la circunferencia que pasa por el centro de todas las espiras, el campo magnético es siempre perpendicular al plano de la espira. Por tanto, el campo será siempre tangente a dicha circunferencia. Además, su valor será constante sobre la circunferencia por razones de simetría.

Entonces, para aplicar el teorema de Ampère, tomamos la circunferencia de radio R que pasa por el centro de todas las espiras del toroide.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B\ dl = B \oint_C dl = B\ 2\pi\ R = 2\pi\ R\ B$$

Por otro lado, la intensidad que atraviesa la superficie circular delimitada por la curva C es el producto del número de espiras del toroide por la intensidad que circula por ellas. Por tanto, aplicando el teorema de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\ I_C; \quad 2\pi\ R\ B = \mu_0\ N\ I; \quad B = \frac{\mu_0\ N\ I}{2\pi\ R}$$

b) Para un toroide de 300 espiras, por las que circula una intensidad de 4 A, a 20 cm del centro:

$$B = \frac{\mu_0\ NI}{2\pi\ R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 300 \cdot 4\ A}{2\pi \cdot 0{,}2\ m}$$

$$B = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ T$$

58. Datos: l = 50 cm = 0,5 m; N = 500; I = 2 A

a) Hallamos el campo magnético en el interior del solenoide:

$$B = \mu_0\ \frac{N}{l}\ I = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot \frac{500}{0{,}5\ m} \cdot 2\ A$$

$$B = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ T$$

b) Determinamos el campo magnético en el interior de la barra de hierro dulce situada en el centro del solenoide, sabiendo que la permeabilidad relativa del hierro dulce es μ_r = 1 500:

$$B_{int} = \mu_r\ B_{ext} = 1\,500 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ T = 3{,}75\ T$$

59. Datos: ΔV = 25 000 V; R = 0,4 m;
q = +e = +1,6 · 10^{-19} C; m_p = 1,67 · 10^{-27} kg

a) El incremento de energía cinética del protón es igual a su pérdida de energía potencial eléctrica:

$$\frac{1}{2} m\ v^2 = q\ \Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\ \Delta V}{m}}$$

Entonces, la velocidad del protón al penetrar en el campo magnético será:

$$v = \sqrt{\frac{2q\ \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 2{,}5 \cdot 10^{4}\ V}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg}}$$

$$v = 1{,}5 \cdot 10^{6}\ m\ s$$

Hallamos la inducción magnética a partir del radio de la órbita circular que describe el protón y de su velocidad:

$$R = \frac{m\,v}{q\,B}$$

$$B = \frac{m\,v}{q\,R} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}4\ \text{m}}$$

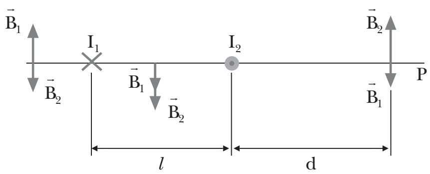
$$B = 5{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

b) Si la inducción magnética tuviera un valor doble al anterior, la velocidad del protón no variaría; en cambio, el radio de la trayectoria sería ahora:

$$R' = \frac{m\,v}{q\,B'} = \frac{m\,v}{q\,2B} = \frac{R}{2} = \frac{0{,}4\ \text{m}}{2}$$

$$R' = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

60. Datos: $I_1 = 2I_2$, I_1 e I_2 con sentidos contrarios.



Debido a su carácter vectorial, el campo magnético resultante sólo puede anularse en el plano que contiene los dos hilos conductores, ya que sólo en este plano los campos generados por los dos conductores son paralelos.

En cualquier punto situado entre los dos conductores rectilíneos, el campo magnético creado por cada una de las dos corrientes tiene la misma dirección, perpendicular al plano que contiene los dos hilos, y el mismo sentido, ya que son corrientes con sentidos contrarios. Por tanto, no se puede anular en ningún punto situado entre los dos conductores.

Como el campo magnético es proporcional a la intensidad e inversamente proporcional a la distancia, debe anularse en los puntos del plano que contiene a los dos hilos que estén a una distancia d del segundo conductor, menor que la distancia que los separa del primer conductor.

Calculamos la inducción magnética creada en un punto P situado a una distancia *d* del segundo conductor. Llamaremos *l* a la separación entre los dos hilos, de forma que el primer hilo dista *d* + *l* del punto donde calculamos el campo:

$$B_1 = \frac{\mu_0\,I_1}{2\pi\,(d+l)} = \frac{2\mu_0\,I_2}{2\pi\,(d+l)} = \frac{\mu_0\,I_2}{\pi\,(d+l)}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\,I_2}{2\pi\,d}$$

La inducción magnética resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Como estos vectores tienen la misma dirección y sentidos opuestos en el punto P, el módulo del campo magnético resultante será la diferencia de los módulos de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Imponiendo la condición de que el campo total sea nulo, determinamos la posición del punto P respecto al segundo conductor:

$$0 = B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0\,I_2}{\pi\,(d+l)} - \frac{\mu_0\,I_2}{2\pi\,d}$$

$$B = \frac{2\mu_0\,I_2 d - \mu_0\,I_2\,(d+l)}{2\pi\,d\,(d+l)} = \frac{\mu_0\,I_2\,(d-l)}{2\pi\,d\,(d+l)} = 0$$

$$\mu_0\,I_2\,(d+l) = 0; \quad d = l$$

Es decir, el campo magnético resultante se anula en los puntos situados en el plano que contiene los dos hilos y a una distancia del segundo conductor igual a la separación entre los dos hilos.

61. Respuesta sugerida:

Introducción:

André-Marie Ampère realizó, a principios del siglo XIX, las primeras investigaciones sistemáticas sobre los campos magnéticos generados por corrientes eléctricas. Los primeros experimentos los llevó a cabo en 1820 motivado por la célebre experiencia del danés Hans Christian Oersted.

Cuerpo o desarrollo:

Oersted observó que una aguja imantada se movía si se situaba cerca de un hilo por el que circulara corriente. Ampère repitió el experimentó y advirtió que la orientación de la aguja dependía también del campo magnético terrestre. Para neutralizarlo, Ampère utilizó diversos imanes y comprobó que, efectivamente, la aguja se movía debido al campo generado por la corriente eléctrica, hasta formar un ángulo recto con el hilo. A partir del comportamiento de la aguja imantada, inventó el galvanómetro, instrumento para detectar y cuantificar la intensidad de corrientes eléctricas.

A este experimento siguieron otros que llevaron a Ampère a formular la hipótesis que defendería toda su vida: que los campos magnéticos están generados por corrientes circulares. Se cree que corroboró esta hipótesis construyendo una pila circular, la cual generaba un campo magnético simétrico.

El siguiente experimento que realizó consistía en hacer circular corriente en el mismo sentido por dos hélices de hilos de cobre. En contra de las expectativas de Ampère, las dos hélices se atraían. Más adelante se daría cuenta de que la atracción era ejercida por los hilos rectos de los extremos, y realizaría un nuevo experimento. Para neutralizar el efecto de los extremos, hizo pasar el extremo superior del hilo por el centro de la hélice. En este caso, tal como esperaba, las hélices se repelían. Efectuó el mismo experimento con dos espirales, con el mismo resultado satisfactorio que en el caso de las hélices.

Una vez aceptada la hipótesis de que las corrientes circulares son las generadoras del campo magnético, se planteó la siguiente pregunta: en los imanes naturales y en los materiales imantados, ¿las corrientes generadoras fluyen por todo el cuerpo o son pequeñas corrientes en el seno de cada molécula? Era ya conocido que una aguja colocada en el centro de una bobina por la que circulara corriente adquiría una imantación transitoria. Pero este campo, ¿se debía a corrientes que fluían alrededor del eje de la aguja o eran corrientes moleculares? Para responder a esta cuestión, Ampère colocó un anillo de cobre en el centro de una bobina, concéntrico con ésta. Era de esperar que, si la imantación se debía a corrientes a lo largo de todo el cuerpo, el anillo se imantara, como la aguja. Ampère acercó al anillo una barra imantada y observó que no existía imantación alguna, de esta manera comprobó la hipótesis de las corrientes moleculares. Posteriormente, repitió el experimento con un potente imán en vez de la barra imantada, y observó que repelía la espira. Curiosamente, Ampère no dio importancia a esta observación. De hecho, sin saberlo, había observado la inducción electromagnética de una corriente eléctrica sobre otra.

En los últimos años de su vida, Ampère dejó a un lado la ciencia y se dedicó a la filosofía. En este campo trató teorías sobre la unificación del conocimiento humano como reflejo de la unidad de la mente divina.

Conclusión:

Los experimentos de Ampère fueron de los primeros sobre la relación entre el campo magnético y las corrientes eléctricas. La unificación de las dos interacciones es el primer paso hacia las teorías de unificación, según las cuales todas las interacciones de la naturaleza no son más que diferentes manifestaciones de una única interacción.

Bibliografía:

«André-Marie Ampère», L. P. Williams, *Investigación y ciencia,* marzo 1989, pág. 82.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 217)

1. Es imposible separar los polos de un imán. Al romper un imán en dos o más trozos obtenemos varios imanes, cada uno con sus dos polos. El magnetismo de los materiales es debido a la orientación de los dipolos magnéticos de su interior. El movimiento de los electrones alrededor del núcleo atómico genera un campo magnético. Aunque rompamos un imán, en cada uno de los nuevos trozos sigue habiendo electrones en movimiento que generan el campo magnético correspondiente y con la misma orientación.

2. Las líneas de inducción magnética son…

   La respuesta correcta es la **b.**

   Las líneas de inducción magnética son siempre cerradas.

3. Datos: a = 10 cm = 0,1 m; I = 4 A

   Calculamos la inducción magnética creada por el conductor indefinido a una distancia de 10 cm:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \cdot 4\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}$$

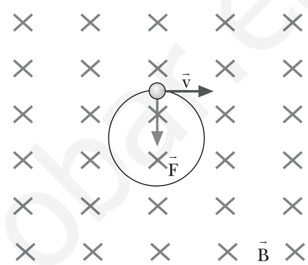
$$B = 8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

4. La fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento depende del valor de la carga eléctrica, del campo magnético, de la velocidad de la carga y del ángulo que forman la velocidad de la carga y el vector inducción magnética.

   Para que no actúe ninguna fuerza sobre una carga que se mueve por un campo magnético, la velocidad de ésta debe ser paralela al campo, ya que la fuerza es proporcional al producto vectorial de la velocidad por el campo.

5. Datos: $q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $B = 0{,}05$ T; $E_c = 2{,}4 \cdot 10^3$ eV

   a)



   b) Determinamos la velocidad a partir de la energía cinética, sabiendo que 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v^2; \quad v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}}$$

$$v = 2{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{m\ s}$$

   Calculamos la fuerza magnética que actúa sobre el electrón:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\left|\vec{F}\right| = F = q\, v\, B \operatorname{sen} 90°$$

$$\left|\vec{F}\right| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 2{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 0{,}05\ \mathrm{T}$$

$$\left|\vec{F}\right| = 2{,}3 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

   Hallamos el radio de la órbita y la frecuencia angular:

$$R = \frac{m\, v}{q\, B} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}05\ \mathrm{T}}$$

$$R = 3{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 3{,}3\ \mathrm{mm}$$

$$\omega = 2\pi\, f = \frac{q\, B}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}05\ \mathrm{T}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}$$

$$\omega = 8{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{s^{-1}}$$

   Determinamos el período a partir de la frecuencia angular:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{s^{-1}}} = 7{,}1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s}$$

6. Datos: $l = 5$ m; $I_1 = 3$ A; $I_2 = 6$ A; d = 4 cm = 0,04 m

Como los hilos son mucho más largos que la separación que hay entre ellos, podemos suponer que la fuerza que se ejercen es la misma que si fueran conductores rectilíneos indefinidos. Calculamos el módulo de esta fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0\, I_1\, I_2}{2\pi\, d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 3\ A \cdot 6\ A}{2\pi \cdot 0{,}04\ m}$$

$$\frac{F}{l} = 9 \cdot 10^{-5}\ \frac{N}{m}$$

Como la longitud de los conductores es de 5 m, la fuerza que éstos se ejercen mutuamente es $F = 5\ m \cdot 9 \cdot 10^{-5}\ N{\cdot}m^{-1} = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ N.

La fuerza es atractiva, ya que las dos corrientes tienen el mismo sentido.

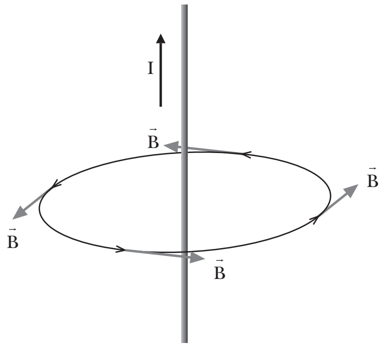
7. Para construir un imán permanente se puede utilizar el acero. Es un material ferromagnético en el que la presencia de una campo magnético externo induce la orientación de los dominios paralelamente al campo magnético. Esta ordenación persiste incluso después de eliminar el campo magnético externo. De esta forma se obtiene un imán permanente.

Para la construcción de un imán temporal se puede utilizar el hierro dulce. También es un material ferromagnético, pero en este caso los dominios orientados pierden su orientación al eliminar el campo externo, de forma que sólo actúa como un imán en presencia de un campo externo.

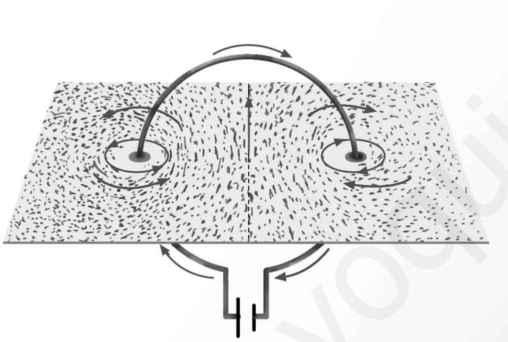
9. Inducción electromagnética

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 219)

- Dibujamos las líneas de inducción del campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida.

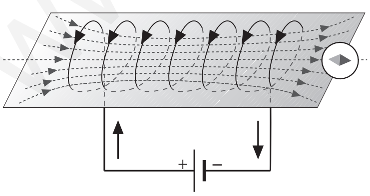


Dibujamos las líneas de inducción del campo magnético creado por una corriente eléctrica circular.



- Una bobina o solenoide es un conductor enrollado en espiral alrededor de un material aislante.

  Las líneas de inducción magnética de un solenoide son idénticas a las de un imán recto.



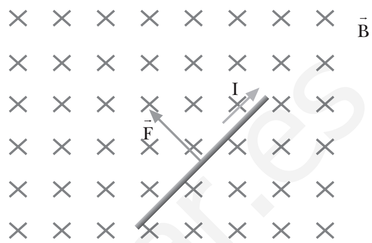
- Datos: N = 1 000; l = 120 cm = 1,2 m; I = 1,5 A

  Calculamos la inducción magnética en el interior del solenoide:

$$B = \frac{\mu_0 \, N \, I}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \ T \cdot m \cdot A^{-1} \cdot 1\,000 \cdot 1{,}5 \ A}{1{,}2 \ m}$$

$$B = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \ T$$

-



- La ley de Ohm se enuncia así:

  El cociente entre la diferencia de potencial aplicada a los extremos de un conductor y la intensidad de corriente que circula por él es una constante llamada resistencia eléctrica del conductor.

  — Datos: R = 1,5 kΩ = 1,5 · 10^3 Ω; V = 15 V

$$I = \frac{V}{R} = \frac{15 \ V}{1{,}5 \cdot 10^3 \ \Omega} = 0{,}01 \ A = 10 \ mA$$

1. INDUCCIÓN DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA (págs. 221, 222, 223, 225 y 227)

1. La inducción electromagnética consiste en la aparición de una corriente eléctrica en un circuito cuando varía el número de líneas de inducción magnética que lo atraviesan.

2. Para inducir una corriente eléctrica en un circuito es necesario variar el número de líneas de inducción magnética que lo atraviesan. Existen diferentes formas de conseguirlo. Por ejemplo, podemos mover un imán en las proximidades del circuito, o variar la intensidad de corriente en otro circuito próximo a aquél donde deseamos inducir la corriente.

3. No, no es necesario. Si mantenemos la espira fija, pero introducimos y extraemos sucesivamente un imán en la espira, también se induce una corriente eléctrica durante el movimiento del imán.

4. El físico inglés M. Faraday (1791-1867) observó experimentalmente que la intensidad de la corriente inducida aumentaba con la velocidad del movimiento del imán. Faraday interpretó que la corriente se induce cuando varía el número de líneas de inducción magnética que atraviesan el circuito. Al aumentar la velocidad con que se aproxima el imán al circuito, el número de líneas de inducción que atraviesan el circuito crece con mayor rapidez y la intensidad de la corriente inducida es mayor.

5. Algunas formas de producir una variación en el campo magnético pueden ser:

— Moviendo un imán en las cercanías de la espira.

— Moviendo la espira en las cercanías de un imán.

— Situando, en las cercanías de la espira, un circuito eléctrico de intensidad variable.

6. Si la inducción magnética $\vec{B}$ forma un ángulo α con el vector superficie $\vec{S}$ de la espira, el flujo magnético viene dado por la expresión:

$$\phi = B\,S\cos\alpha$$

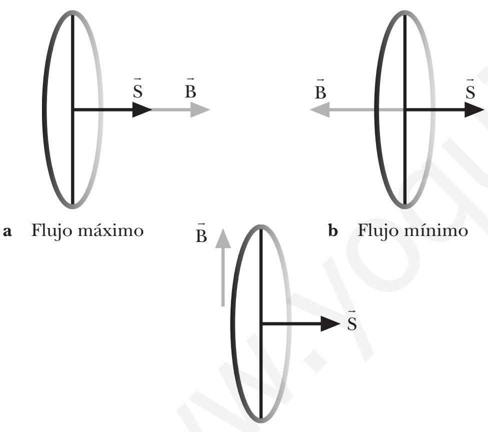
que, como vemos, depende directamente de cos α. Tenemos que, si cos α es máximo, mínimo o nulo, también lo será ϕ.

Por lo tanto:

a) Si el vector superficie $\vec{S}$ tiene la misma dirección y el mismo sentido que el campo $\vec{B}$, $\cos\alpha = 1$ y, por lo tanto, el flujo es máximo.

b) Si el vector superficie $\vec{S}$ tiene la misma dirección y sentido contrario al campo $\vec{B}$, $\cos\alpha = -1$ y, por lo tanto, el flujo es mínimo.

c) Si el vector superficie $\vec{S}$ es perpendicular al campo $\vec{B}$, $\cos\alpha = 0$ y, por lo tanto, el flujo es nulo.



7. El flujo magnético a través de una superficie cerrada S es negativo cuando existe una cantidad neta de líneas de inducción que entran en la superficie. De la misma manera, si hubiera una cantidad neta de líneas de inducción que salieran de la superficie, el flujo sería positivo.

8. Datos: N = 120; $S = 30\ \text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$; $B = 4 \cdot 10^{-3}$ T

a) $\alpha = 0°$; $\phi = N\,B\,S\cos\alpha$

$$\phi = 120 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cos 0°$$

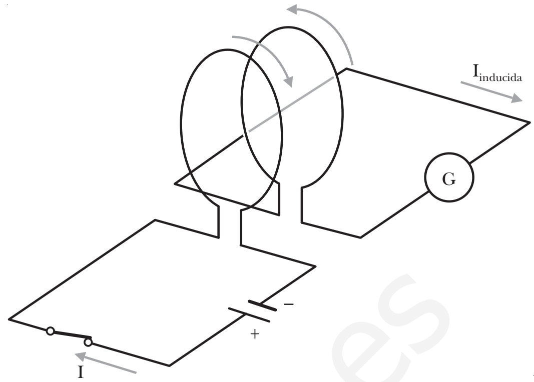
$$\phi = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

b) $\alpha = 60°$; $\phi = N\,B\,S\cos\alpha$

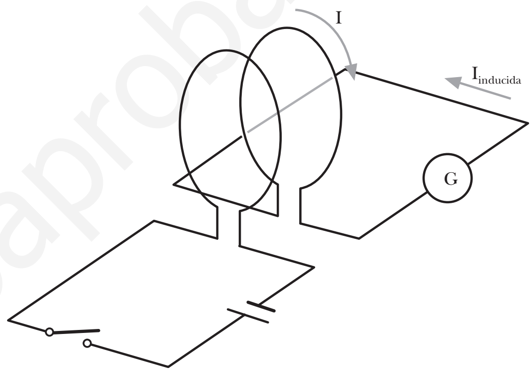
$$\phi = 120 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cos 60°$$

$$\phi = 7{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

9. Al cerrar el interruptor, el sentido de la corriente inducida en S_2 es contrario al que circula en S_1.



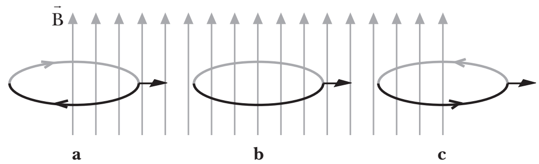
Al abrir el interruptor, el sentido de la corriente inducida en S_2 es contrario que en el caso anterior.



10. *a)* Sí que circula corriente por la espira, pues el número de líneas de inducción que la atraviesan está aumentando.

b) No circula corriente por la espira. Aunque la espira se mueve, el número de líneas de inducción que la atraviesan se mantiene constante.

c) Sí que circula corriente por la espira, pues el número de líneas de inducción que la atraviesan está disminuyendo.



11. La fuerza electromotriz de un generador es el trabajo que realiza el generador por unidad de carga, o lo que es lo mismo, la energía que proporciona a la unidad de carga.

Un campo magnético variable induce una corriente eléctrica en un circuito por el fenómeno de la inducción electromagnética. Tendremos, por consiguiente, en este caso, una fuerza electromotriz denominada fuerza electromotriz inducida, que es la que causa la aparición de esta corriente inducida.

12. La intensidad de la corriente inducida viene dada por la expresión:

$$I = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

a) Si doblamos la velocidad de giro de la bobina, la velocidad con la que varía el flujo, $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$, se multiplica por dos; en consecuencia, la intensidad de la corriente inducida aumenta al doble.

b) Si la inducción magnética B se reduce a la mitad, la velocidad con que varía el flujo, $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$, se divide por dos; en consecuencia, la intensidad de la corriente inducida se reduce a la mitad.

c) Si efectuamos los dos cambios anteriores simultáneamente, la intensidad de la corriente inducida permanece invariante.

13. Datos: B = 0,4 T; r = 5 cm = $5 \cdot 10^{-2}$ m; R = 15 Ω; Δt = 0,1 s

Inicialmente, el plano de la espira es perpendicular al campo magnético, por tanto, los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo $\alpha = 0°$. En la situación final, la espira ha dado un cuarto de vuelta, por tanto, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo $\alpha = 90°$.

La variación del flujo viene dada por:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = B\,S\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\Delta\phi = 0{,}4\ T \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2} m)^2\ (\cos 90° - \cos 0°)$$

$$\Delta\phi = -3{,}14 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

La fem en la espira es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{-3{,}14 \cdot 10^{-3}\ Wb}{0{,}1\ s} = 3{,}14 \cdot 10^{-2}\ V$$

Calculemos ahora la intensidad de la corriente inducida:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2}\ V}{15\ \Omega} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ A = 2{,}1\ mA$$

14. Datos: N = 200; S = 30 cm² = $3 \cdot 10^{-3}$ m²; α = 0°;
B = $(2t + 0{,}8) \cdot 10^{-3}$ T

El flujo magnético a través de la bobina varía en el tiempo según la expresión:

$$\phi(t) = N\,B\,S\cos\alpha = N\,B\,S\cos 0°$$

$$\phi(t) = 200\left(2t + 0{,}8\right) \cdot 10^{-3}\ T \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$\phi(t) = \left(12t + 4{,}8\right) \cdot 10^{-4}\ Wb$$

La fem inducida en la bobina es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -1{,}2 \cdot 10^{-3}\ V$$

15. En la experiencia de Henry se utiliza un conductor rectilíneo que se mueve perpendicularmente al campo magnético con objeto de que la fuerza magnética ejercida sobre las cargas del conductor tenga la dirección del propio conductor. De esta manera, las fuerzas eléctrica (que se opone a la separación de las cargas) y magnética que actúan sobre las cargas del conductor quedan compensadas y se obtiene:

$$F_m = F_e \Rightarrow e\,v\,B = e\,E$$

$$E = v\,B$$

$$\varepsilon = E\,l = v\,B\,l$$

Si el conductor se desplazara en una dirección diferente, deberíamos tener en cuenta el ángulo α que formarán los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ en el cálculo de la fuerza magnética:

$$F_m = e\,v\,B \operatorname{sen}\alpha$$

16. Cuando desplazamos el conductor paralelamente a las líneas de inducción magnética, no actúa ninguna fuerza magnética sobre las cargas del conductor, por ser $\vec{v}$ y $\vec{B}$ paralelos:

$$\vec{F}_m = e\,(\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

En consecuencia, no se produce una separación entre las cargas positivas y negativas del conductor, y no existe ninguna fem inducida.

17. Datos: l = 25 cm = 0,25 m; v = 6 m·s⁻¹; α = 90°; B = 0,3 T

a) La fuerza magnética que actúa sobre un electrón de la barra viene dada por la ley de Lorentz:

$$F_m = e\,v\,B \operatorname{sen} 90° = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 6\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 0{,}3\ T$$

$$F_m = 2{,}9 \cdot 10^{-19}\ N$$

b) El campo eléctrico en el interior del conductor es:

$$E = v\,B = 6\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}3\ T = 1{,}8\,\frac{V}{m}$$

c) Calculamos la diferencia de potencial o fem inducida entre los extremos de la barra:

$$\varepsilon = v\,B\,l = 6\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 0{,}3\ T \cdot 0{,}25\ m = 0{,}45\ V$$

2. APLICACIONES DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA (págs. 231, 233, 235 y 237)

18. La diferencia fundamental entre una dinamo y un alternador es que la dinamo es un generador que produce corriente eléctrica continua y el alternador es un generador que produce corriente alterna.

19. La fem inducida en un alternador se puede expresar: $\varepsilon = B\,S\,\omega \operatorname{sen}\omega t = \varepsilon_0 \operatorname{sen}\omega t$

a) Si duplicamos la velocidad de giro de la bobina, la nueva fem inducida se puede expresar:

$$\varepsilon' = B\,S\,\omega' \operatorname{sen}\omega' t = B\,S\,2\omega \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\varepsilon' = 2\,\varepsilon_0 \operatorname{sen} 2\omega t$$

Es decir, se duplican la amplitud y la frecuencia angular de la fem inducida.

b) Como la expresión de la frecuencia es:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}; \quad f'=\frac{\omega'}{2\pi}=2f$$

Es decir, la frecuencia de la corriente inducida también se duplica.

20. Datos: $N = 25$; $S = 60\ cm^2 = 6 \cdot 10^{-3}\ m^2$; $f = 50$ Hz; $B = 0,4$ T; $R = 75\ \Omega$

a) La fem inducida en la bobina es la suma de las fuerzas electromotrices inducidas en cada una de las espiras que la componen:

$$\varepsilon = N\ B\ S\ \omega \operatorname{sen} \omega t = N\ B\ S\ 2\pi\ f \operatorname{sen}(2\pi f t)$$

$$\varepsilon = 25 \cdot 0,4\ T \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot 2\pi \cdot 50\ Hz \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot 50\ Hz \cdot t)$$

$$\varepsilon = 6\pi \operatorname{sen}(100\pi t) \quad \text{(en unidades SI)}$$

b) La fem máxima inducida en la bobina es:

$$\varepsilon_0 = N\ B\ S\ \omega = N\ B\ S\ 2\pi\ f$$

$$\varepsilon_0 = 25 \cdot 0,4\ T \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot 2\pi \cdot 50\ Hz = 18,8\ V$$

c) Calculamos la intensidad máxima:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{18,8\ V}{75\ \Omega} = 0,25\ A$$

21. Respuesta sugerida:

Algunas de las ideas que se podrían exponer y desarrollar en el coloquio son las siguientes:

— La energía eléctrica es la forma de energía más consumida en la actualidad. Multitud de aparatos, en nuestros hogares y en la industria, funcionan con electricidad.

— El uso de la energía eléctrica está estrechamente relacionado con la mejora de la calidad de vida de un país.

— La energía eléctrica es muy versátil, pues se puede transformar en otros tipos de energía (mecánica, térmica, lumínica...) fácilmente y con un alto rendimiento.

— La energía eléctrica se puede producir y distribuir de forma económica y eficaz mediante líneas de alta tensión.

— La energía eléctrica no contamina ni produce residuos de ninguna clase.

Para la organización del coloquio se recomienda seguir estas pautas:

— **Determinar** los encargados de las distintas funciones:

- **Moderador.** Presentará a los participantes e introducirá el tema que se va a tratar. Además, concederá los turnos de palabra para que el coloquio se desarrolle de forma ordenada.
- **Participantes.** Darán sus opiniones sobre el tema elegido y escucharán las de los otros participantes. Generalmente, son un máximo de seis personas.

Todos los participantes deben investigar y documentarse sobre el tema con anterioridad.

- **Público.** Atenderá a las diversas opiniones. Podrá intervenir al final aportando sus propias opiniones o preguntando a los participantes alguna cuestión.

— **Iniciar** el coloquio. El moderador presentará a los participantes, introducirá el tema y planteará la primera pregunta a alguno de los participantes.

— **Desarrollar** y **concluir** el coloquio. Los distintos participantes desarrollarán sus argumentos conducidos por el moderador. Cada participante debe expresar sus opiniones y respetar las de los demás.

Al final del coloquio, el público podrá exponer sus opiniones y efectuar preguntas a los diferentes participantes. Por último, el moderador puede llevar a cabo un breve resumen de las intervenciones.

22. — Mientras el hilo está conectado a la pila, el clavo atrae a los clips cuando se acerca a ellos.

— Si el hilo se desconectara de la pila, el clavo dejaría de atraer a los clips cuando se acercara a ellos.

a) Sí, el campo magnético generado por el electroimán es más intenso que el que crea la bobina por sí sola, ya que el clavo es de hierro dulce y éste se imanta creando, así, su propio campo magnético, que se suma al de la bobina.

b) No, ya que desaparece el campo magnético, y puesto que el clavo actúa como un imán temporal, desaparecen sus propiedades magnéticas.

23. No, ambos procesos son manifestaciones distintas de un mismo fenómeno físico: la inducción de una fem en un circuito debido a la variación del flujo magnético a través de éste.

La diferencia estriba en que en la inducción electromagnética consideramos el inductor y el inducido como sistemas independientes, mientras que en el caso de la autoinducción estudiamos la creación de un campo magnético en un circuito debido a la variación de la corriente del propio circuito.

24. Un motor es un receptor que transforma algún tipo de energía con trabajo mecánico. Llamamos fuerza contraelectromotriz del motor al trabajo mecánico que realiza por unidad de carga.

$$\varepsilon' = \frac{W}{Q}$$

Su unidad es el voltio (V).

25. El coeficiente de autoinducción de una bobina viene dado por la expresión:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

Si tenemos una sola espira, $N = 1$, $L = \mu_0 \dfrac{S}{l}$

Si tenemos 50 espiras, $N = 50$, $L = \mu_0 \dfrac{2\,500}{l} S$

Es decir, el coeficiente de autoinducción es 2 500 veces mayor en el caso de una bobina formada por 50 espiras que en el de una sola espira.

26. Datos: $l = 20$ cm = 0,2 m; N = 200;
S = 40 cm² = $4 \cdot 10^{-3}$ m²; $I_0 = 4$ A; I = 0 A;
$\Delta t = 2$ ms = $2 \cdot 10^{-3}$ s

Calculamos primero el coeficiente de autoinducción de la bobina:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{(200)^2}{0{,}2\ m} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$L = 10^{-3}\ H$$

La fem inducida es:

$$\varepsilon = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -10^{-3}\ H \cdot \frac{(-4\ A)}{2 \cdot 10^{-3}\ s} = 2{,}0\ V$$

27. Puesto que el coeficiente de inducción mutua se define como el cociente entre el flujo magnético a través de un circuito y la intensidad de corriente a través de otro circuito:

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1}$$

En el SI tendrá unidades de: $\frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = H$

La unidad del coeficiente de inducción mutua en el SI es el henrio, H. Un henrio es la inductancia mutua entre dos circuitos tales que una variación de intensidad de un amperio por segundo en uno de los dos circuitos induce una fuerza electromotriz de un voltio en el otro circuito.

28. No, puesto que el transformador se basa en el fenómeno de inducción mutua, y éste sólo se puede producir si la corriente es variable en el tiempo.

29. Datos: $N_1 = 100$; $N_2 = 500$

La modificación de la tensión es:

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 = 5\ V_1$$

La tensión de salida es cinco veces mayor que la tensión de entrada, por lo que se trata de un transformador elevador.

Para el caso de la intensidad:

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = \frac{1}{5} I_1$$

La intensidad de salida es una quinta parte de la intensidad de entrada, por lo que, al contrario que en la tensión, la intensidad se reduce a la salida.

30. Para resolver este ejercicio utilizaremos la relación de transformación de un transformador:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

— Si 400 son las vueltas del circuito primario y 50 las del circuito secundario, tendremos:

$N_1 = 400$; $N_2 = 50$

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 = 0{,}125\ V_1$$

La tensión de salida disminuye.

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = 8\ I_1$$

La intensidad de salida aumenta.

— Si 50 son las vueltas del circuito primario y 400 las del circuito secundario, tendremos:

$N_1 = 50$; $N_2 = 400$

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 = 8\ V_1$$

La tensión de salida aumenta.

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 = 0{,}125\ I_1$$

La intensidad de salida disminuye.

31. Datos: $V_1 = 3\,000$ V; $I_1 = 2$ mA = $2 \cdot 10^{-3}$ A;
$N_1 = 900$; $N_2 = 30$

Para resolver este ejercicio utilizaremos la relación de transformación de un transformador:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Calculamos primero la tensión de salida:

$$V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1} = 3\,000\ V \cdot \frac{30}{900} = 100\ V$$

La intensidad de salida es:

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} = 2 \cdot 10^{-3}\ A \cdot \frac{900}{30} = 0{,}06\ A$$

32. Es debido a las ventajas que ésta presenta en relación a otras energías:

— Es fácilmente convertible en otras formas de energía.

— Se tiene acceso directo a ella desde nuestros hogares.

— Puede ser transportada a largas distancias desde su lugar de producción.

— No contamina ni produce residuos de ninguna clase.

33. La manera más económica de reducir las pérdidas de energía eléctrica en forma de calor por efecto Joule en los cables es disminuyendo la intensidad tanto como sea posible, para ello se transporta la corriente a alta tensión, de manera que la potencia transferida (P = V I) se mantenga constante.

34. **Centrales hidroeléctricas:**

— Su rendimiento energético es alto.

— No producen residuos tóxicos.

Centrales térmicas:

— Su rendimiento energético es bajo (solo un 30 % de calor pasa a energía eléctrica).

— Producen residuos tóxicos: óxidos de azufre, nitrógeno y carbono, y partículas sólidas de la combustión.

Centrales nucleares:

— Su rendimiento energético es alto.

— Generan residuos radiactivos difíciles de eliminar o almacenar. Además, existe el riesgo de contaminación radiactiva por accidente.

35. La energía eólica es la energía cinética que procede de la fuerza del viento. Para poder aprovecharla y transformarla en energía eléctrica se utilizan los aerogeneradores, constituidos por unas palas que giran alrededor de un eje. Éstos transforman la energía cinética del viento en energía cinética de rotación y están unidos a la parte móvil de un generador (rotor) que transforma la energía mecánica en eléctrica.

Las principales ventajas de la energía eólica son:

— Es una energía renovable, es decir, de reservas ilimitadas.

— No produce residuos tóxicos.

Sus principales inconvenientes son:

— Para poder instalar un parque eólico, se necesita que la velocidad promedio del viento, en esta zona, sea de $6\ m \cdot s^{-1}$.

— Tener una disponibilidad mínima de 2 500 h/año.

3. SÍNTESIS ELECTROMAGNÉTICA (pág. 239)

36. La unificación electromagnética de Maxwell consistió en reunir todas las leyes de la electricidad y el magnetismo en sólo cuatro ecuaciones que relacionan los campos eléctrico y magnético con sus fuentes: las cargas eléctricas, las corrientes eléctricas y las variaciones de los propios campos.

37. Una carga eléctrica en movimiento, además de crear un campo eléctrico, por el hecho de estar en movimiento también crea un campo magnético. Por lo que las perturbaciones que produce en el espacio son de tipo electromagnéticas.

38. Las fuentes o causas del campo eléctrico son las cargas eléctricas, ya estén en movimiento o en reposo, y los campos magnéticos variables. Por otro lado, el campo magnético puede ser producido por una corriente eléctrica o por un campo eléctrico variable.

39. El flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada no puede ser diferente de cero, puesto que tal y como se deduce de la segunda ecuación de Max-well, el número de líneas de inducción que entran en la superficie es igual al número de líneas que salen.

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada solo sería cero si en el interior de la superficie no hubiera cargas. En caso contrario, éste sería proporcional a la carga, tal y como se deduce de la primera ecuación de Maxwell.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 240)

a) Un micrófono es un dispositivo que transforma las vibraciones sonoras en señales eléctricas que reproducen fielmente el sonido original. A continuación, esta corriente eléctrica es amplificada y transportada hasta un receptor. De esta manera se puede captar un sonido para amplificarlo o para registrarlo y reproducirlo posteriormente.

La ventaja de los micrófonos electromagnéticos frente a los de variación de resistencia está en que los primeros no tienen el problema de ruido que presentan los últimos. Así pueden ser usados en aplicaciones que requieran una reproducción fiel del sonido en bandas amplias de frecuencia.

b) Como sabemos, el calor se disipa en el material por efecto Joule; por lo que la potencia disipada dependerá de la resistencia del material y de la intensidad de la corriente inducida ($P = R\ I^2$). A su vez, la resistencia, de un material, es inversamente proporcional a su conductividad eléctrica, y a su sección, de manera que a menor conductividad eléctrica y menor sección, mayor potencia disipada y, por lo tanto, obtenemos más calor. Además, la intensidad también depende de la frecuencia:

El campo magnético generado en el interior del conductor es variable y tiene la misma frecuencia que la corriente alterna:

$$B = B_0 \cos \omega t$$

Por tanto, el flujo magnético a través de una sección del conductor es:

$$\phi = B\ S = B_0\ S \cos \omega t$$

Según la ley de Faraday, la fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B_0\ S\ \omega \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$$

La intensidad de la corriente inducida tendrá una amplitud proporcional a la fem máxima ($\varepsilon_0 = B_0\ S\ \omega$), es decir, será proporcional a la frecuencia. Por tanto, la potencia ($P = R\ I^2$) y el calor disipados aumentarán con la frecuencia.

c) Respuesta sugerida:

Entre las varias aplicaciones del fenómeno de la inducción electromagnética, además del micrófono y los hornos de inducción que se mencionan en el libro del alumno, pueden proponerse para la redacción del informe:

— Los generadores eléctricos (dinamo y alternador).

— El motor eléctrico, que transforma energía eléctrica en energía mecánica.

— Dispositivos que utilizan las corrientes de Foucault, como frenos de emergencia para camiones.

— El betatrón, que es un dispositivo para acelerar electrones.

— La bobina o solenoide, un elemento de los circuitos eléctricos de corriente alterna donde tiene lugar el fenómeno de la autoinducción.

— Los transformadores, dispositivos esenciales en el transporte de la corriente alterna basados en el fenómeno de la inducción mutua.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 242 y 243)

40. Datos: $N = 240$; $S = 24\ cm^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2$; $R = 50\ \Omega$; $\alpha_0 = 0°$; $B = 0{,}5\ T$; $\Delta t = 4\ ms = 4 \cdot 10^{-3}\ s$; $\alpha = 180°$

a) Calculamos en primer lugar la variación del flujo magnético:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = N\ B\ S\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\Delta\phi = 240 \cdot 0{,}5\ T \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2\ (\cos 180° - \cos 0°)$$

$$\Delta\phi = -0{,}576\ Wb$$

La fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{-0{,}576\ Wb}{4 \cdot 10^{-3}\ s} = 144\ V$$

b) Hallamos la intensidad de la corriente inducida:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{144\ V}{50\ \Omega} = 2{,}88\ A$$

c) La carga total que circula por la bobina es:

$$Q = I\ \Delta t = 2{,}88\ A \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ s = 1{,}15 \cdot 10^{-2}\ C$$

41. Datos: $N = 240$; $S = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2$; $R = 50\ \Omega$; $\alpha_0 = 0°$; $\alpha = 180°$; $\Delta t = 4\ ms = 4 \cdot 10^{-3}\ s$; $B = 7 \cdot 10^{-5}\ T$

a) Calculamos en primer lugar la variación del flujo magnético:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = N\ B\ S\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\Delta\phi = 240 \cdot 7 \cdot 10^{-5}\ T \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2\ (\cos 180° - \cos 0°)$$

$$\Delta\phi = -8{,}06 \cdot 10^{-5}\ Wb$$

La fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{-8{,}06 \cdot 10^{-5}\ Wb}{4 \cdot 10^{-3}\ s}$$

$$\varepsilon = 2{,}02 \cdot 10^{-2}\ V = 20{,}2\ mV$$

b) Hallamos la intensidad de la corriente inducida:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2{,}02 \cdot 10^{-2}\ V}{50\ \Omega} = 0{,}40 \cdot 10^{-3}\ A = 0{,}40\ mA$$

c) La carga total que circula por la bobina es:

$$Q = I\ \Delta t = 0{,}40 \cdot 10^{-3}\ A \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ s = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ C$$

42. Datos: $l = 1\ m$; $R = 20\ \Omega$; $v = 1{,}5\ m{\cdot}s^{-1}$; $B = 0{,}6\ T$; $\alpha = 90°$

a) $\varepsilon = B\ l\ v = 0{,}6\ T \cdot 1\ m \cdot 1{,}5\ m{\cdot}s^{-1} = 0{,}9\ V$

b) $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{0{,}9\ V}{20\ \Omega} = 0{,}045\ A$

c) Como $\vec{l}$ es perpendicular a $\vec{B}$ ($\alpha = 90°$):

$$F = I\ l\ B\ \text{sen}\ \alpha = 0{,}045\ A \cdot 1\ m \cdot 0{,}6\ T$$

$$F = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ N$$

d) $W = F\ v\ t = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ N \cdot 1{,}5\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 15\ s = 0{,}61\ J$

43. Datos: $l = 1\ m$; $R = 15\ \Omega$; $v = 2\ m{\cdot}s^{-1}$; $\alpha_1 = 60°$; $B = 0{,}5\ T$

Si la velocidad del alambre $\vec{v}$ forma un ángulo $\alpha_1 = 60°$ con el campo magnético $\vec{B}$, el ángulo entre el vector superficie $\vec{S}$ (perpendicular al plano determinado por los conductores y el alambre) y el vector $\vec{B}$ serà:

$$\alpha = 90° - 60° = 30°.$$

a) $\varepsilon = B\ l\ v \cos 30° = 0{,}5\ T \cdot 1\ m \cdot 2\ m{\cdot}s^{-1} \cdot \cos 30°$

$$\varepsilon = 0{,}87\ V$$

b) $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{0{,}87\ V}{15\ \Omega} = 0{,}058\ A$

c) $F = I\ l\ B\ \text{sen}\ 60° = 0{,}058\ A \cdot 1\ m \cdot 0{,}5\ T \cdot \text{sen}\ 60°$

$$F = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ N$$

d) $W = F\ v\ t = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ N \cdot 2\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 15\ s = 0{,}75\ J$

44. Datos: $L = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ H$; $I_0 = 0\ A$; $I = 10\ A$;
$\Delta t = 0{,}5\ ms = 5 \cdot 10^{-4}\ s$

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ H\ \frac{(10\ A - 0\ A)}{5 \cdot 10^{-4}\ s} = -30\ V$$

El signo negativo indica que la fem se opone al aumento de la intensidad.

45. Datos: $r = 10\ cm = 0{,}1\ m$; $S = 10\ cm^2 = 10^{-3}\ m^2$; $\mu_r = 1\,500$; $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 20\ \dfrac{A}{s}$; $\varepsilon = 0{,}03\ V$

Calculamos en primer lugar el coeficiente de autoinducción:

$$L = \left|\frac{\varepsilon}{\Delta I/\Delta t}\right| = \frac{0{,}03\ V}{20\ \dfrac{A}{s}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ H$$

A continuación calculamos el número de vueltas que tiene el toroide:

$$L = \frac{\mu_r\ \mu_0\ N\ S}{2\pi\ r}; \quad N = \frac{2\pi\ r\ L}{\mu_r\ \mu_0\ S}$$

$$N = \frac{2\pi \cdot 0{,}1\ m \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ H}{1\,500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot A^{-1} \cdot m \cdot 10^{-3}\ m^2} = 500$$

46. Datos: $I = 10\ \text{sen}\ (100\ t)$ (SI); $a = 0{,}05\ m$; $b = 0{,}1\ m$;
$d = 0{,}05\ m$

Sustituimos la expresión de I en el flujo magnético a través de la espira:

$$\phi = \frac{\mu_0\ 10\ \text{sen}\ (100t)\ b}{2\pi} \ln\frac{d + a}{d}$$

Aplicamos la ley de Faraday para hallar la fem inducida:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0\ 10 \cos(100t) \cdot 100\ b}{2\pi} \ln\frac{d + a}{d}$$

$$\varepsilon = -\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot A^{-1}\cdot m}\cdot 10\cdot \cos(100t)\cdot 100\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\ \ln\frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}05\ \mathrm{m}} = -1{,}4\cdot 10^{-5}\cdot\cos(100t)\quad (\mathrm{SI})$$

47. Datos: I_0 = 1 A; I = 0 A; Δt = 1 ms = 1 · 10^{-3} s; a = 0,05 m; b = 0,1 m; d = 0,05 m

a) Sustituimos los datos del enunciado de la expresión del coeficiente de inducción mutua obtenida en el ejercicio resuelto D.

$$M = \frac{\mu_0\ b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$M = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot A^{-1}\cdot m}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}{2\pi}\ln\frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}05\ \mathrm{m}}$$

$$M = 1{,}4\cdot 10^{-8}\ \mathrm{H}$$

b) En la situación final la intensidad es nula (I = 0), por lo cual el flujo final es cero.

El flujo inicial es:

$$\phi = \frac{\mu_0\ I\ b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$\phi_0 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot A^{-1}\cdot m\cdot 1\ A}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}}{2\pi}\ln\frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}05\ \mathrm{m}}$$

$$\phi_0 = 1{,}4\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wb}$$

La fem inducida en la espira es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{0\ \mathrm{Wb} - 1{,}4\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wb}}{10^{-3}\ \mathrm{s}} = 1{,}4\cdot 10^{-5}\ \mathrm{V}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 244 y 245)

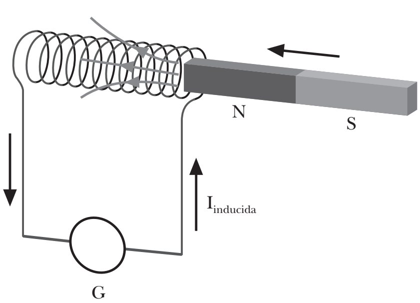
48. — **Movimiento de un imán en el interior de un bobina**

Si acercamos el imán a la bobina, aparece una corriente inducida durante el movimiento del imán, pues el flujo magnético a través de la bobina aumenta.

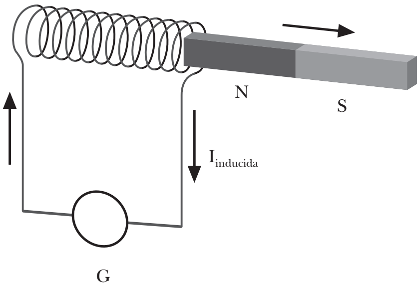
Si alejamos el imán, se invierte el sentido de la corriente inducida, pues el flujo magnético a través de la bobina disminuye.

Si la bobina y el imán están fijos, no se observa corriente inducida.

a



b



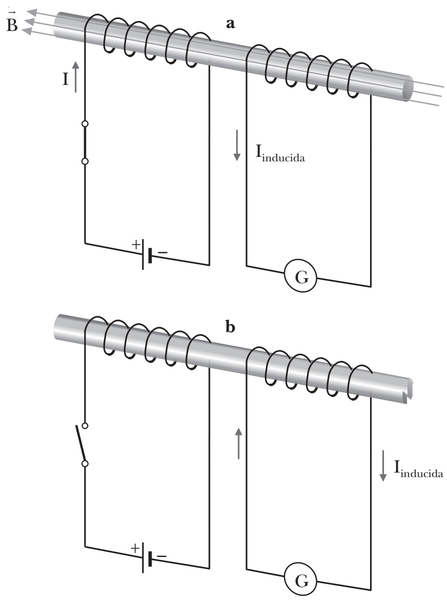
— **Cierre y apertura de un circuito eléctrico**

Disponemos de dos bobinas enrolladas alrededor de una misma barra de hierro: la primera formando parte de un circuito con generador e interruptor y la segunda conectada a un galvanómetro.

Al conectar el interruptor se induce una corriente eléctrica en la segunda bobina, de sentido contrario a la corriente de la primera, pues el campo magnético creado por la primera bobina hace aumentar el flujo magnético a través de la segunda bobina.

Al desconectar el interruptor se induce una corriente eléctrica en la segunda bobina, de sentido opuesto al caso anterior, pues el flujo magnético a través de la segunda bobina disminuye.

Sólo se induce corriente en la segunda bobina si hay variación de la intensidad de corriente de la primera bobina.



— **Movimiento de un circuito eléctrico alrededor de una bobina**

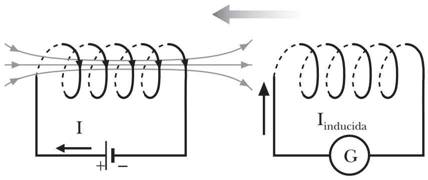
Disponemos de dos bobinas: una primera conectada a un generador y una segunda conectada a un galvanómetro. Ambas bobinas se colocan con sus ejes paralelos.

Al acercar y alejar la primera bobina, aparece una corriente eléctrica inducida en la segunda bobina, en un sentido u otro.

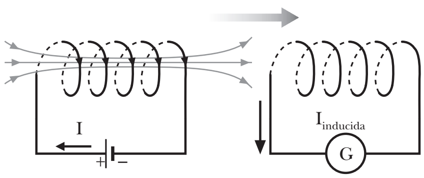
Si acercamos la primera bobina a la segunda, el flujo magnético a través de esta última aumenta, y se induce en ella una corriente eléctrica de sentido contrario a la que circula por la primera bobina.

Si alejamos la primera bobina de la segunda, el flujo magnético a través de esta última disminuye, y se induce en ella una corriente de igual sentido a la que circula por la primera bobina.

a



b



49. *a)* Falso.

La corriente inducida en un circuito se opone a la variación del flujo magnético que la produce. Si el flujo disminuye, la corriente inducida tiende a aumentarlo. En cambio, si el flujo aumenta, la corriente inducida tiende a disminuirlo.

b) Falso.

Según la ley de Faraday, la fem inducida es directamente proporcional a la variación del flujo magnético, y no al valor del flujo en sí.

50. El signo negativo nos indica que la fuerza electromotriz inducida se opone a la variación del flujo magnético (ley de Lenz).

51. Debe moverse perpendicularmente al campo magnético, de esta manera, según observó Henry, aparece una diferencia de potencial entre los extremos de la barra.

La diferencia de potencial se debe a que la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones del interior del conductor arrastra a éstos hasta un extremo de dicho conductor. La acumulación de carga negativa en un extremo y de carga positiva en el extremo opuesto genera un campo eléctrico y la diferencia de potencial correspondiente a lo largo del conductor.

52. Tanto el funcionamiento de un generador eléctrico como el de un motor eléctrico se basan en el fenómeno de inducción electromagnética. La diferencia está en que un generador transforma una determinada forma de energía en energía eléctrica, y un motor transforma energía eléctrica en trabajo mecánico.

53. Para generar una corriente alterna en la espira, hacemos girar a ésta sobre uno de sus diámetros en el interior del campo magnético, puesto que de esta manera conseguimos variar el flujo magnético en la espira, y por el fenómeno de la inducción electromagnética, se genera una corriente alterna en la espira.

54. Datos: 300 rpm

La velocidad angular en el sistema internacional es:

$$300\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}\cdot\frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}}=10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Como la velocidad angular es constante, el ángulo que forman el vector superficie $\vec{S}$ y el campo magnético $\vec{B}$ se puede escribir como ωt y, por tanto, el flujo magnético que atraviesa la espira y la fem inducida en ella son:

$$\phi = B\,S\cos\omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \varepsilon_0\ \text{sen}\ \omega t$$

Es decir, la fem es periódica y cambia alternativamente de polaridad. La frecuencia de la fuerza coincide con la del movimiento de la espira y viene dada por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\ \text{Hz}$$

Las leyes en las que nos hemos basado para determinar la frecuencia f son las de la inducción electromagnética:

— Ley de Lenz: El sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la causa que la produce.

— Ley de Faraday: La fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual a la velocidad con que varía el flujo magnético a través de dicho circuito cambiada de signo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

55. Al cerrar el circuito, la intensidad de corriente tarda un cierto tiempo en alcanzar su valor estacionario I y el flujo magnético a través de la bobina varía en este tiempo desde cero hasta su valor máximo. En consecuencia, se induce una fuerza electromotriz (llamada fuerza contraelectromotriz) que se opone al aumento instantáneo de la intensidad en el circuito.

De igual modo, al abrir el circuito, la intensidad tarda un cierto tiempo en anularse. En este caso, la fuerza electromotriz inducida se opone a que la intensidad caiga a cero de forma instantánea.

56. Un transformador es un dispositivo que modifica la tensión y la intensidad de corriente alterna.

Su funcionamiento se basa en el fenómeno de inducción mutua. Consta de dos bobinas de hilo conductor enrolladas alrededor de un núcleo de hierro dulce y aisladas entre sí. La bobina por la que se hace circular la corriente alterna de entrada recibe el nombre de circuito primario y la otra bobina, por la que circula la corriente transformada de salida, recibe el nombre de circuito secundario.

La corriente alterna que circula por el circuito primario produce un flujo magnético variable que origina una fem inducida alterna en el circuito secundario. La fuerza electromotriz inducida en la bobina secundaria tiene la misma frecuencia que la corriente alterna de entrada. Sin embargo, según las características de las bobinas, la tensión y la intensidad máximas de la corriente en los dos circuitos pueden ser distintas.

57. Datos: $V_2 = \frac{1}{100} V_1$

Aplicamos la relación de transformación del transformador para hallar la relación entre las intensidades de entrada y salida:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{100} \rightarrow I_2 = 100\, I_1$$

La intensidad de salida es de 100 veces mayor que la de entrada.

58. La diferencia estriba en la procedencia de la fuerza motriz que hace girar la turbina. Según la fuente de energía primaria que se transforma en energía eléctrica, tenemos distintos tipos de centrales:

— **Centrales hidroeléctricas.** Las turbinas son movidas por el agua que cae por un desnivel. La energía primaria es energía mecánica (energía potencial y gravitatoria del agua).

— **Centrales térmicas.** Las turbinas son movidas por vapor. El calor necesario para obtener vapor procede de la combustión de materiales fósiles, como carbón, petróleo o gas natural (energía química).

— **Centrales nucleares.** Las turbinas son movidas por vapor. El calor necesario para obtener vapor se obtiene de la fisión nuclear en un reactor (energía nuclear).

59. Las pérdidas son debidas a las corrientes de Foucault que aparecen en el núcleo de hierro del transformador cuando éste es atravesado por un flujo magnético variable. Estas corrientes se manifiestan en el calentamiento del metal con la consiguiente pérdida de energía y, además, obligan a disipar el calor que generan.

Para reducir estas corrientes se construye el núcleo del transformador mediante láminas finas de hierro unidas.

60. Datos: $N = 320$; $r = 4\text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2}$ m; $\alpha = 0°$; $B = 0{,}2$ T

$$\phi = N\,B\,S \cos\alpha = 320 \cdot 0{,}2\text{ T} \cdot \pi \cdot (4 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2$$

$$\phi = 0{,}32\text{ Wb}$$

61. Datos: $N = 220$; $S = 30\text{ cm}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2$; $B = 0{,}4$ T; $\alpha_0 = 0°$; $\alpha = 180°$; $\Delta t = 15\text{ ms} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ s

La variación del flujo es:

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 = N\,B\,S\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\Delta\phi = 220 \cdot 0{,}4\text{ T} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\text{ m}^2 \cdot (\cos 180° - \cos 0°)$$

$$\Delta\phi = -0{,}528\text{ Wb}$$

La fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{(-0{,}528\text{ Wb})}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\text{ s}} = 35{,}2\text{ V}$$

El valor positivo obtenido indica que la fem se opone a la disminución de flujo.

62. Datos: $L = 0{,}4$ H; $I_0 = 2$ A; $I = 0$ A; $\Delta t = 3 \cdot 10^{-3}$ s

Calculamos en primer lugar el flujo magnético a través de la bobina:

$$\phi = L\,I_0 = 0{,}4\text{ H} \cdot 2\text{ A} = 0{,}8\text{ Wb}$$

La fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{L\,(I - I_0)}{\Delta t} = -\frac{0{,}4\text{ H }(0\text{ A} - 2\text{ A})}{3 \cdot 10^{-3}\text{ s}} = 266{,}7\text{ V}$$

El signo positivo indica que la fem se opone a la disminución del flujo magnético.

63. Datos: $l = 5\text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $\alpha = 0°$; $B = 2t^2$ (SI); $t = 4$ s

a) $\phi = B\,S \cos\alpha = B\,l^2 \cos 0°$

$$\phi = 2t^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 0° = 5 \cdot 10^{-3}\,t^2 \text{ (SI)}$$

b) $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -10^{-2}\,t$ (SI)

$$\varepsilon(t = 4\text{ s}) = -4 \cdot 10^{-2}\text{ V}$$

El valor positivo obtenido indica que la fem se opone al aumento de flujo.

64. Datos: $l = 40\text{ cm} = 0{,}4$ m; $\alpha = 0°$; $B = 0{,}2$ T; $v = 14\text{ m·s}^{-1}$

La diferencia de potencial entre los extremos de la barra es igual a la fem inducida.

$$\varepsilon = B\,l\,v = 0{,}2\text{ T} \cdot 0{,}4\text{ m} \cdot 14\text{ m·s}^{-1} = 1{,}12\text{ V}$$

65. Datos: $N = 200$; $r = \frac{10}{2} = 5\text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $B = 0{,}3$ T;

$\omega = 3\,000\text{ rpm} = 100\pi\text{ rad·s}^{-1}$

a) El flujo magnético a través de la bobina es:

$$\phi = N\,B\,S \cos\omega t$$

La fem inducida es entonces:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = N\,B\,S\,\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$\varepsilon = 200 \cdot 0{,}3\text{ T} \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2 \cdot 100\,\pi\text{ rad·s}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen}(100\pi t) = 148{,}0 \operatorname{sen}(100\pi t)\text{ (SI)}$$

b) La fem inducida máxima es la amplitud de la función $\varepsilon(t)$: $\varepsilon_0 = N\,B\,S\,\omega$

$$\varepsilon_0 = 200 \cdot 0{,}3\text{ T} \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2 \cdot 100\,\pi\text{ rad·s}^{-1}$$

$$\varepsilon_0 = 148{,}0\text{ V}$$

66. Datos: I_0 = 24 A; I = 0 A; ε = 60 V; Δt = 1 ms = 10^{-3} s

$$\varepsilon = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t} \rightarrow L = -\frac{\varepsilon\,\Delta t}{\Delta I} = -\frac{60\ \text{V}\cdot 10^{-3}\ \text{s}}{0\ \text{A} - 24\ \text{A}} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{H}$$

67. Datos: N_1 = 2 400; V_1 = 220 V; I_1 = 4 A; V_2 = 10 V

a) Calculamos primero el número de vueltas del circuito secundario:

$$N_2 = \frac{V_2}{V_1}\,N_1 = \frac{10\ \text{V}}{220\ \text{V}}\cdot 2\,400 = 109$$

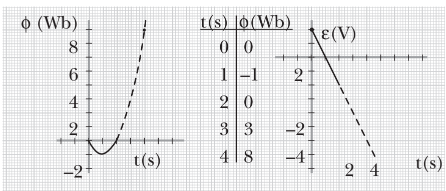
b) La intensidad de corriente de salida es:

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2}\,I_1 = \frac{2\,400}{109}\cdot 4\ \text{A} = 88\ \text{A}$$

68. Datos: $\phi = t^2 - 2t; \quad 0 \le t \le 2$ s

a) $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} = -2t + 2; \quad 0 \le t \le 2$

Representamos el flujo magnético y la fem inducida en función del tiempo.



b) $|\phi|$ será máximo si:

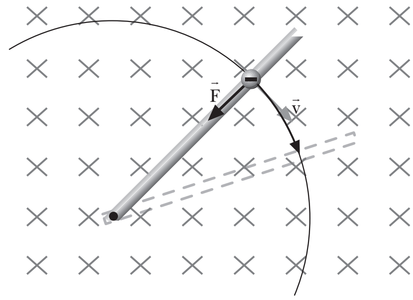
$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow t = 1\ \text{s}$$

c) ε = –2t + 2 es una recta comprendida entre 0 y 2, por lo que los dos máximos estarán en t = 0 s y t = 2 s.

El signo de ε sólo nos indica el sentido de la corriente.

d) El flujo magnético y la fem inducida no son máximos simultáneamente, puesto que la fuerza electromotriz inducida no se opone al flujo mag-nético sino a su variación.

69. Como sabemos, según la experiencia de Henry, si movemos un barra conductora dentro de un campo magnético uniforme, los electrones libres de la barra estarán sometidos a un fuerza que viene dada por la expresión: $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$, y por lo tanto, depende del ángulo que forma el campo con la velocidad lineal que lleva la barra, de modo que: F = q v B sen α. Como la barra describe un movimiento circular, la velocidad lineal siempre será perpendicular o normal a la trayectoria y, por lo tanto, al campo magnético, por lo el valor de la fuerza será en todo momento F = q v B, su dirección será la dirección de la barra y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha, como muestra la figura.



70. Datos: B = 0,6 T; I_0 = 2 A; N = 150; r = 3 cm = 3 · 10^{-2} m; R = 40 Ω.

Determinamos la frecuencia angular a partir de la intensidad máxima de la corriente inducida.

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{N\,B\,S\,\omega}{R} \rightarrow \omega = \frac{I_0\,R}{N\,B\,S}$$

$$\omega = \frac{2\ \text{A}\cdot 40\ \Omega}{150\cdot 0{,}6\ \text{T}\cdot\pi\cdot(3\cdot 10^{-2}\ \text{m})^2} = 314{,}38\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314{,}38\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi} = 50{,}0\ \text{Hz}$$

71. Datos: l = 30 cm = 0,3 m; N = 1 000; S = 60 cm² = 6 · 10^{-3} m²; μ_r = 1 500

Calculamos el coeficiente de autoinducción de la bobina:

$$L = \mu_0\,\frac{N^2}{l}\,S = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\,\frac{(1\,000)^2}{0{,}3\ \text{m}}\,6\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$L = 2{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{H}$$

Si introdujéramos un núcleo de hierro en su interior, el coeficiente de autoinducción de la bobina se vería modificado de esta manera:

$$L' = \frac{\mu_r\,\mu_0\,N^2\,S}{l}$$

$$L' = \mu_r\,L = 1\,500\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{H} = 37{,}5\ \text{H}$$

72. La fuerza contraelectromotriz de un motor es el trabajo mecánico que realiza por unidad de carga.

$$\varepsilon' = \frac{W'}{Q}$$

Los motores se caracterizan porque tienen una gran fuerza contraelectromotriz, ya que su función es transformar algún tipo de energía (por ejemplo, energía eléctrica) en trabajo mecánico.

73. Datos: I_0 = 2 A; ϕ = 22 Wb; I = –2 A; Δt = 2 ms = 2 · 10^{-3}s

Calculamos el coeficiente de autoinducción de la bobina.

$$\phi = L\,I \rightarrow L = \frac{\phi}{I_0} = \frac{22\ \text{Wb}}{2\ \text{A}} = 11\ \text{H}$$

Calculamos la fem inducida:

$$\varepsilon = -L\,\frac{\Delta I}{\Delta t} = -11\text{ H}\,\frac{(-2\text{ A} - 2\text{ A})}{2 \cdot 10^{-3}\text{ s}} = 2{,}2 \cdot 10^{4}\text{ V}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 245)

1. El coeficiente de autoinducción representa la fem autoinducida en un circuito cuando la intensidad de corriente varía un amperio en un segundo.

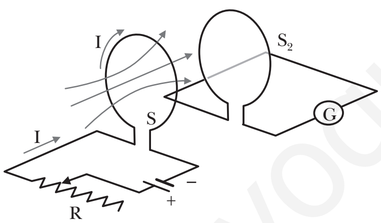
   La unidad del coeficiente de autoinducción en el SI de unidades es el henrio, H:

$$1\text{ H} = 1\,\frac{\text{V·s}}{\text{A}}$$

2. *a)* Si la corriente en la primera bobina aumenta, se incrementará también el flujo magnético en la segunda bobina, por lo que aparecerá en la segunda bobina una corriente inducida de sentido contrario al de la primera para contrarrestar este aumento del flujo magnético.

   b) Si en la primera bobina la corriente disminuye, también disminuirá el flujo magnético que atraviesa la segunda bobina, por lo que aparecerá una corriente inducida en esta segunda bobina del mismo sentido que en la primera para contrarrestar la disminución del flujo magnético.

   c) Si la corriente en la primera bobina se mantiene constante, no habrá variación de flujo en la segunda bobina y, por la tanto, no aparecerá ninguna corriente inducida en la segunda bobina.



3. La tensión a la salida queda disminuida 100 veces respecto a su valor a la entrada.

   La intensidad a la salida queda aumentada 100 veces respecto a la intensidad de entrada.

4. Datos: N = 500; r = 0,005 m; B_0 = 0,1 T

   a) Si B = 0,2 T en Δt = 0,02 s:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\phi - \phi_0}{\Delta t} = -\frac{N\,B\,S - N\,B_0\,S}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = -\frac{N\,S\,(B - B_0)}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = -\frac{500 \cdot \pi \cdot (0{,}005\text{ m})^2 \cdot (0{,}2\text{ T} - 0{,}1\text{ T})}{0{,}02\text{ s}} = -0{,}20\text{ V}$$

   El signo negativo indica que la fem se opone al aumento del flujo magnético.

   b) Si α = 180° en Δt = 0,02 s:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\phi - \phi_0}{\Delta t} = -\frac{N\,B_0\,S\cos 180° - N\,B_0\,S}{\Delta t}$$

$$\varepsilon = -\frac{N\,S\,B_0\,(\cos 180° - 1)}{\Delta t}$$

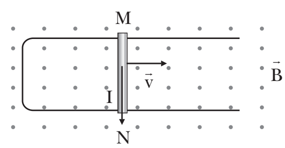
$$\varepsilon = -\frac{500\pi \cdot (0{,}005\text{ m})^2 \cdot 0{,}1\text{ T}\,(-1 - 1)}{0{,}02\text{ s}} = 0{,}39\text{ V}$$

   El signo positivo indica que la fem se opone a la disminución del flujo magnético.

5. Datos: B = 0,4 T; α = 90°; l = 1 m; R = 15 Ω; v = 2 m·s^{-1}

   a) ε = v B l = 2 m·s^{-1} · 0,4 T · 1 m = 0,8 V

   b) El sentido de la intensidad puede determinarse a partir de la ley de Lenz. Como el flujo magnético a través del circuito aumenta, la corriente inducida debe crear un campo magnético que contrarreste el aumento de flujo.



   Calculamos la intensidad de la corriente inducida:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0{,}8\text{ V}}{15\ \Omega} = 0{,}05\text{ A}$$

   c) Calculamos la fuerza magnética sobre la barra:

$$\vec{F}_m = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

$$F_m = I\,l\,B\,\text{sen}\,90° = 0{,}05\text{ A} \cdot 1\text{ m} \cdot 0{,}4\text{ T} = 0{,}02\text{ N}$$

10. La luz

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 247)

- Ecuación de las ondas armónicas:

$$y = A\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx)$$

  A: Amplitud de la onda. Es el valor máximo de la elongación de las partículas del medio en su oscilación. En el SI se expresa en metros, m.

  T: Período. Es el tiempo que emplea el movimiento ondulatorio en avanzar una distancia igual a una longitud de onda, o también el tiempo que emplea un punto cualquiera del medio afectado por la perturbación en efectuar una oscilación completa. Tiene dimensiones de tiempo y su unidad en el SI es el segundo, s.

  ω: Pulsación. Se relaciona con el período por la relación $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Su unidad en el SI es el $rad \cdot s^{-1}$.

  λ: Longitud de onda. Es la distancia mínima entre dos puntos consecutivos que se hallan en el mismo estado de vibración. Sus dimensiones son de longitud, y su unidad en el SI es el metro, m.

  k: Número de ondas. Se relaciona con la longitud de onda mediante $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. En el SI su unidad es el m^{-1}.

- La longitud de onda y la velocidad de propagación se relacionan a través del período. Dado que en un período la onda avanza una longitud de onda, la velocidad de la onda será:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

  También podemos expresar la misma relación mediante la frecuencia:

$$f = \frac{1}{T}; v = \lambda\, f$$

- **Frente de onda o superficie de onda:** es la superficie constituida por todos los puntos que en un momento dado vibran en corcondancia de fase. Las distintas superficies de onda, alejadas entre sí una distancia igual a la longitud de onda, reúnen todos los puntos del medio que se hallan en el mismo estado de vibración.

  Principio de Huygens: todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias, de igual velocidad y frecuencia que la onda inicial, cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

- Los rayos son las rectas que indican la dirección de propagación del movimiento ondulatorio. Son perpendiculares a los frentes de onda en cada uno de sus puntos. En un medio homogéneo e isótropo las ondas se propagan siguiendo trayectorias rectilíneas.

- La difracción es la desviación en la propagación rectilínea de las ondas, cuando éstas atraviesan una obertura o pasan próximas a un obstáculo.

- Una onda transversal se distingue de una onda longitudinal porque en la primera las partículas del medio oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación, mientras que en la segunda las oscilaciones se efectúan en la misma dirección de propagación de la perturbación.

- Un punto de un medio que es alcanzado simultáneamente por dos ondas que se propagan por él, experimenta una vibración que es suma de las que experimentaría si fuera alcanzado por cada una de las ondas por separado.

- Supongamos que en un punto se produce la interferencia de dos ondas armónicas coherentes de la misma frecuencia, amplitud, longitud de onda y velocidad.

  — Se producirá **interferencia constructiva** si la diferencia de recorrido de las ondas es cero o un número entero de longitudes de onda. Es decir, si las ondas están en fase.

  — Se producirá **interferencia destructiva** si la diferencia de recorrido de las ondas es un número impar de semilongitudes de onda. Es decir, si las ondas están en oposición de fase.

- *a)* $6\,500 \text{ nm} = 6\,500 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 6{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

  b) $3{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 36 \text{ nm}$

  c) $320 \text{ nm} = 320 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 3{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

1. NATURALEZA DE LA LUZ (págs. 249, 251, 252 y 253)

1. Características de la luz explicadas por cada una de las teorías:

	Propagación rectilínea	*Reflexión*	*Refracción*	*Doble refracción*	*Difracción*	*Interferencias*	*Polarización*	*Efecto fotoeléctrico*	*Propagación en el vacío*
Teoría corpuscular de Newton	Sí	Sí	No	No	No observada	No observada	No observada	No observado	Sí
Teoría ondulatoria de Huygens	Sí	Sí	Sí	Sí	No observada	No observada	No observada	No observado	No
Teoría ondulatoria de Fresnel	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No observado	No
Teoría electromagnética de Maxwell	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No observado	Sí
Naturaleza dual de la luz	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

La teoría corpuscular de Einstein fue propuesta para explicar el efecto fotoeléctrico.

2. La difracción de la luz no es fácilmente observable, debido a su pequeña longitud de onda. La difracción es observable cuando una onda es desviada por bordes de objetos u orificios de tamaño comparable a la longitud de la onda. En el caso de la luz, en la vida cotidiana no tenemos demasiados objetos de tamaño similar a la longitud de onda de la luz, de sólo unos nanómetros.

3. Datos: $E = 5{,}2 \cdot 10^{-18}$ J; $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s

   Determinamos la frecuencia del fotón utilizando la relación con la energía a través de la constante de Planck:

$$E = h\,f;\; f = \frac{E}{h} = \frac{5{,}2 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 7{,}85 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}$$

4. Las células fotoeléctricas convierten energía luminosa en energía eléctrica. Generalmente consisten en dos semiconductores, en cuya zona de unión existe un campo eléctrico. Cuando inciden fotones, se generan cargas positivas y negativas, que son aceleradas en sentidos opuestos por el campo de la unión. Esta separación de cargas crea un potencial eléctrico, de forma que la energía del fotón se convierte en energía eléctrica.

   Sus aplicaciones son muchísimas: barreras ópticas de detección para la protección frente a robos, sistemas de apertura automática, control de alumbrado interior y exterior, máquinas clasificadoras, detección de impurezas en el proceso de embotellamiento de bebidas, transmisión de imágenes, cine…

   Todas ellas se basan en que la interrupción de la luz que ilumina la célula provoca el cese de la producción de electricidad o, al contrario, al tener lugar la iluminación de la célula se inicia la producción de energía eléctrica.

5. *a)* **Verdadero.** Las fases de las ecuaciones de cada uno de los campos son iguales en todo momento y en cada punto del espacio.

   b) **Falso.** Los módulos de los campos eléctrico y magnético verifican la relación $\frac{E}{B} = c$, con c la velocidad de la onda. Por tanto, no son iguales.

6. Datos: $f_1 = 3 \cdot 10^{10}$ Hz; $f_2 = 5 \cdot 10^{13}$ Hz; $f_3 = 1{,}07 \cdot 10^{15}$ Hz

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{3 \cdot 10^{10}\ \text{Hz}}$$

$$\lambda_1 = 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}01\ \text{m};\ \text{Microondas}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{5 \cdot 10^{13}\ \text{Hz}}$$

$$\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-6}\ \text{m};\ \text{Infrarrojo}$$

$$\lambda_3 = \frac{c}{f_3} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}07 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}}$$

$$\lambda_3 = 2{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m};\ \text{Ultravioleta}$$

7. Datos: $\lambda_1 = 760$ nm $= 7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m;
   $\lambda_2 = 380$ nm $= 3{,}8 \cdot 10^{-7}$ m

   Determinamos las frecuencias correspondientes:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{7{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3{,}95 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{3{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 7{,}9 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

8. Datos: $E = 100\ \text{sen}\ (3 \cdot 10^{15}\, t - 1{,}0 \cdot 10^{7}\, x)$ (SI)

   Si comparamos la expresión del enunciado con la ecuación del campo eléctrico de una onda electromagnética, obtenemos:

$E_0 = 100$ N/C; $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ rad/s; $k = 1{,}0 \cdot 10^{7}$ m^{-1}

a) Determinamos la longitud de onda y la frecuencia a partir del número de ondas y la pulsación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1{,}0 \cdot 10^{7}\ \text{m}^{-1}} = 6{,}28 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\omega = 2\pi\, f;\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^{15}\ \text{rad/s}}{2\pi} = 4{,}77 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

b) Hallamos la amplitud del campo magnético a partir de la amplitud del campo eléctrico:

$$\frac{E}{B} = c;\ B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{100\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 3{,}33 \cdot 10^{-7}\ \text{T}$$

Entonces, la ecuación del campo magnético será, en unidades del SI:

$$B = B_0 \,\text{sen}\,(\omega t - kx);$$

$$B = 3{,}33 \cdot 10^{-7}\,\text{sen}\,(3 \cdot 10^{15}\, t - 1{,}0 \cdot 10^{7} x)$$

9. La sombra es la región no iluminada que aparece detrás de un cuerpo opaco cuando éste se ilumina con un foco puntual. Reproduce el contorno del objeto, definido por los rayos luminosos tangentes a éste.

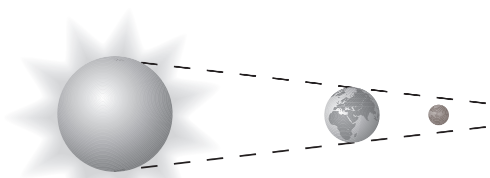
La penumbra es la región parcialmente iluminada que aparece detrás de un objeto cuando éste se ilumina con un foco no puntual. La aparición de la penumbra es debida a las dimensiones finitas del foco, ya que entonces algunos rayos de los emitidos en esa dirección llegan y otros no, siendo la penumbra una zona parcialmente iluminada.

10. Respuesta sugerida:

Un experimento posible para verificar la propagación rectilínea de la luz es la cámara oscura. Consiste en una caja con un pequeño orificio en una cara cuya cara opuesta es de material translúcido. Si situamos algún objeto, preferentemente luminoso, delante del orificio, observaremos su imagen invertida sobre la cara translúcida. Este fenómeno se explica atendiendo a la propagación rectilínea de los rayos de luz.

Eclipses de Sol (pág. 252)

Los eclipses de Luna se producen cuando ésta entra en la zona de sombra de la Tierra. Al dejar de estar iluminada por el Sol, veremos cómo se oscurece, produciéndose un eclipse lunar. Por lo tanto, en este caso, al contrario de lo que ocurre en los eclipses de Sol, es la Tierra la que se interpone entre el Sol y la Luna.



El fenómeno no se produce en cada órbita. El plano de la órbita de la Luna está inclinado respecto al plano de la órbita de la Tierra. Esto hace que la orientación relativa de los tres cuerpos vaya variando con el tiempo. En los momentos que coincidan los tres cuerpos alineados y que además la Luna pase por delante o por detrás de la Tierra, se producirá un eclipse de Sol o de Luna, según el caso. Cuando la Luna no llega a interceptar la sombra de la Tierra pero sí que pasa por su penumbra, se habla de un eclipse penumbral.

11. Respuesta sugerida:

Identificamos las etapas del método científico en el proceso seguido por Roemer y Fizeau para demostrar que la velocidad de la luz es finita y medir su valor:

— **Observación.** Roemer observó que el intervalo de tiempo transcurrido entre dos eclipses consecutivos de Io, uno de los satélites de Júpiter, era variable; se hacía mayor cuando la Tierra se alejaba de Júpiter y menor cuando la Tierra se acercaba a él.

— **Formulación de hipótesis.** Contra la opinión mantenida durante siglos, Roemer supone que la velocidad de la luz es finita y, por tanto, cuando la distancia entre la Tierra y Júpiter es mayor, tarda más tiempo en llegar hasta nosotros; de ahí la diferencia observada entre dos eclipses.

— **Experimentación.** Para comprobar que la velocidad de la luz es finita y calcular su valor de una forma directa, Fizeau diseña un experimento, el de la rueda dentada y el espejo. En el caso de Roemer no podemos hablar propiamente de experimentación, pues no se trata de ensayos controlados.

— **Organización de los datos experimentales.** Tanto Roemer como Fizeau repitieron sus observaciones para obtener un número suficiente de datos de los que extraer conclusiones.

— **Extracción de conclusiones.** Ambos llegaron a la conclusión de que la velocidad de la luz es finita y calcularon su valor.

— **Elaboración de una teoría.** Posteriormente, Albert Einstein (1879-1955) hizo de la conclusión anterior la base y el punto de partida de su teoría especial de la relatividad.

12. Datos: $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s $= 3 \cdot 10^{5}$ km/s

a) Calculamos los segundos que tiene un año y, con ellos, la distancia recorrida por la luz en un año:

$$\Delta t = 1\ \text{a} \cdot \frac{365\ \text{d}}{1\ \text{a}} \cdot \frac{24\ \text{h}}{1\ \text{d}} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 3{,}15 \cdot 10^{7}\ \text{s}$$

$$\Delta x = c\ \Delta t = 3 \cdot 10^{5}\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 3{,}15 \cdot 10^{7}\ \text{s} = 9{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{km}$$

b) Hallamos los años luz que nos separan de α-Centauri:

$$\Delta x = 4{,}085 \cdot 10^{13}\ \text{km} \cdot \frac{1\ \text{a.l.}}{9{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{km}} = 4{,}3\ \text{a.l.}$$

2. FENÓMENOS LUMINOSOS
(págs. 255, 257, 259, 260, 262)

13. *a)* **Verdadero.** La velocidad y la longitud de onda dependen del índice de refracción del medio.

b) **Falso.** La frecuencia sí es independiente del medio material.

c) **Verdadero.** El índice de refracción nos proporciona la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad en el medio.

14. Si un haz de luz láser pasa de un medio a otro de índice de refracción menor, $n_1 > n_2$, el ángulo de refracción será mayor que el de incidencia.

Según la ley de Snell, el ángulo de refracción r se relaciona con el de incidencia i por $\text{sen}\, r = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\, i$. Si $n_1 > n_2$, el cociente $\frac{n_1}{n_2} > 1$. Por tanto, sen r > sen i, lo que indica que r > i.

15. Datos: $n_1 = 1{,}52$; $n_2 = 1$; $i = 30°$

a) Determinamos el ángulo de refracción a partir de la ley de Snell:

$$n_1\, \text{sen}\, i = n_2\, \text{sen}\, r$$

$$\text{sen}\, r = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\, i; \text{sen}\, r = \frac{1{,}52 \cdot \text{sen}\, 30°}{1} = 0{,}76$$

$$r = 49°\, 28'$$

b) Calculamos el ángulo límite de la superficie de separación entre el vidrio y el aire:

$$\text{sen}\, L = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1{,}52}; L = 41°\, 8'$$

c) Si un rayo incide con un ángulo de 45°, al ser este ángulo mayor que el ángulo límite, se producirá reflexión total.

16. Datos: $f = 1{,}5$ MHz $= 1{,}5 \cdot 10^6$ Hz; $n = 1{,}2$

En el aire, con índice de refracción n = 1, la longitud de onda será:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}5 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 200 \text{ m}$$

Entonces, en el medio con n = 1,2, la longitud de onda es:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}; \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{200 \text{ m}}{1{,}2} = 166{,}7 \text{ m}$$

17. La luz azul se desvía más en un prisma óptico que la amarilla, ya que su longitud de onda es menor. Por tanto, el índice de refracción es mayor para el azul que para el amarillo. Como la velocidad de propagación en un medio es inversamente proporcional al índice de refracción, en el prisma se propaga a mayor velocidad la luz amarilla que la azul.

18. La formación del arco iris es debida a la dispersión de la luz por parte de las gotitas de agua en suspensión en la atmósfera. Cada una de ellas actúa como un pequeño prisma óptico, desviando la luz del Sol diferentes ángulos según la longitud de onda. De esta forma, la luz blanca del Sol es dispersada y observamos sus distintos colores separados. A diferencia del prisma óptico, en las gotas la luz sufre, además de dos refracciones, una reflexión. Por ello la luz que sufre más desviación es la roja.

19. Los espectros de emisión están formados por la luz emitida por una sustancia química.

En cambio, los espectros de absorción se observan en luz de espectro continuo después de que haya atravesado alguna sustancia química donde algunas de sus frecuencias son absorbidas. Por ello, los espectros de absorción presentan líneas oscuras sobre el espectro continuo de la luz incidente.

Visión del color (pág. 257)

Si una superficie iluminada con luz blanca se ve de color rojo es porque absorbe todas las frecuencias excepto la correspondiente al color rojo, que es reflejada. Si iluminamos la superficie con luz roja, ésta será totalmente reflejada y veremos la superficie roja. En cambio, si la iluminamos con luz violeta, la superficie roja absorberá totalmente la luz, por lo que la veremos de color negro.

20. Dos linternas que se mantienen encendidas muy próximas no producen un patrón de interferencia porque la luz que emiten es incoherente, los trenes de onda que emite cada una de ellas son independientes de los emitidos por la otra linterna. Para que se produzca interferencia es necesario que la luz emitida por los dos focos sea coherente, es decir, que mantengan una diferencia de fase constante y que sean monocromáticas.

21. En la experiencia de la doble rendija de Young, la franja central brillante no puede emplearse para la medición de la longitud de onda de la luz porque corresponde al orden cero, n = 0, y está centrada en y = 0. Entonces, la ecuación para la posición de las franjas brillantes, $y_{\text{brill}} = \frac{\lambda L}{d} n$, no nos puede decir nada sobre la longitud de onda de la luz.

22. Datos: $d = 0{,}020$ mm $= 2 \cdot 10^{-5}$ m; $L = 0{,}9$ m; $n = 1$; $y_{\text{brill}} = 22{,}5$ mm $= 2{,}25 \cdot 10^{-2}$ m

Determinamos la longitud de onda de la luz empleada:

$$y_{\text{brill}} = \frac{\lambda L}{d} n; \lambda = \frac{d\, y_{\text{brill}}}{L\, n} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0{,}9 \text{ m} \cdot 1}$$

$$\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

23. Datos: $d = 0{,}05$ mm $= 5 \cdot 10^{-5}$ m; $L = 1$ m; $n = 2$; $y_{\text{brill}} = 3$ cm $= 3 \cdot 10^{-2}$ m

a) Determinamos la longitud de onda de la luz monocromática empleada:

$$y_{brill} = \frac{\lambda L}{d} n; \lambda = \frac{d\, y_{brill}}{L\, n} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\ m \cdot 3 \cdot 10^{-2}\ m}{1\ m \cdot 2}$$

$$\lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\ m$$

b) La distancia entre dos franjas brillantes consecutivas será:

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda L}{d}(n+1) - \frac{\lambda L}{d} n = \frac{\lambda L}{d}$$

$$\Delta y = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-7}\ m \cdot 1\ m}{5 \cdot 10^{-5}\ m} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m$$

$$\Delta y = 1{,}5\ cm = 0{,}015\ m$$

24. Los fenómenos de interferencia aparecen cuando se superponen las ondas armónicas emitidas por dos focos puntuales, mientras que la difracción se debe a los efectos de un objeto o un orificio en una superficie que se interpone en el camino de las ondas luminosas.

En el caso de que el objeto sea una rendija, el patrón de difracción obtenido se asemeja al patrón de interferencia de dos fuentes puntuales coherentes. Esto puede interpretarse considerando que cada punto de la rendija actúa como una fuente puntual que emite ondas elementales que interfieren entre sí.

25. Datos: $\lambda = 600\ nm = 6 \cdot 10^{-7}\ m$; $L = 1{,}25\ m$
$d = 0{,}090\ mm = 9 \cdot 10^{-5}\ m$

a) La primera franja oscura corresponde a n = 1. Por tanto:

$$\text{sen}\ \alpha = n \frac{\lambda}{d} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-7}\ m}{9 \cdot 10^{-5}\ m} = 6{,}67 \cdot 10^{-3}$$

Si suponemos que el ángulo es muy pequeño, podemos considerar que $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha = \frac{y_1}{L}$

Por tanto, la posición del primer mínimo es:

$$y_1 = L\ \text{sen}\ \alpha = 1{,}25\ m \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$y_1 = 8{,}3 \cdot 10^{-3}\ m = 8{,}3\ mm$$

26. La luz del Sol es dispersada por las moléculas de aire, fenómeno que da origen al color azul del cielo. La luz dispersada está polarizada linealmente. En cambio, la luz solar reflejada por las nubes, al no ser éstas superficies planas, no está polarizada. Entonces, si colocamos un filtro polarizador en la lente de una cámara fotográfica, la luz del cielo será absorbida en su mayor parte, mientras que la luz reflejada por las nubes, al no ser luz polarizada, no será absorbida y éstas aparecerán blancas.

27. Datos: $n_{agua} = 1{,}33$

Hallamos el ángulo de Brewster, ángulo para el cual la luz reflejada estará totalmente polarizada:

$$\text{tg}\ i = n;\ \text{tg}\ i = 1{,}33;\ i = 53°\ 4'$$

28. Datos: $\lambda = 10^{-9}\ m$; $E_0 = 145\ N/C$; dirección de propagación OY en sentido negativo; plano de polarización YZ.

Como la dirección de propagación es OY, la onda será periódica respecto de la variable **y**. Al ser la propagación en sentido negativo, el término con la variable **y** irá sumado al término temporal. Si el campo eléctrico está polarizado en el plano YZ y la onda se propaga en la dirección OY, el campo será en todo momento paralelo al eje OZ. Por tanto:

$$\vec{E} = E_z\ \vec{k} = E_0\ \text{sen}\ (\omega t + ky)\vec{k};\ E_x = E_y = 0$$

El campo magnético es perpendicular en todo momento al campo eléctrico y a la dirección de propagación. Por tanto, será paralelo al eje OX:

$$\vec{B} = B_x\ \vec{i} = B_0\ \text{sen}\ (\omega t + ky)\vec{i};\ B_y = B_z = 0$$

Determinamos el número de ondas a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10^{-9}\ m} = 6{,}28 \cdot 10^{9}\ m^{-1}$$

Hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\ f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = kc;\ \omega = 6{,}28 \cdot 10^{9}\ m^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ m/s$$

$$\omega = 1{,}88 \cdot 10^{18}\ s^{-1}$$

Calculamos la amplitud del campo magnético:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{145\ N{\cdot}C^{-1}}{3 \cdot 10^{8}\ m/s} = 4{,}83 \cdot 10^{-7}\ T$$

Con esto, las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético se escriben:

$$\vec{E} = 145\ \text{sen}\ (1{,}88 \cdot 10^{18}\ t + 6{,}28 \cdot 10^{9}\ y)\vec{k}\ (SI)$$

$$\vec{B} = 4{,}83 \cdot 10^{-7}\ \text{sen}\ (1{,}88 \cdot 10^{18}\ t + 6{,}28 \cdot 10^{9}\ y)\vec{i}\ (SI)$$

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 265)

29. Datos: $E(x, t) = 10^{-3} \cos (5 \cdot 10^{10}\, t - 200x)$ (SI)

Si comparamos la ecuación del enunciado con la del campo eléctrico de una onda electromagnética expresada en función del coseno, $E = E_0 \cos (\omega t - kx)$, obtenemos:

$$E_0 = 10^{-3}\ N/C;\ \omega = 5 \cdot 10^{10}\ rad/s;\ k = 200\ m^{-1}$$

Determinamos la frecuencia y la longitud de onda a partir de la pulsación y del número de ondas:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f;\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5 \cdot 10^{10}\ rad/s}{2\pi} = 7{,}96 \cdot 10^{9}\ Hz$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{200\ m^{-1}} = 0{,}0314\ m$$

Hallamos la velocidad de propagación para determinar el índice de refracción del medio:

$$v = \lambda\ f;\ v = 0{,}0314\ m \cdot 7{,}96 \cdot 10^{9}\ Hz = 2{,}5 \cdot 10^{8}\ m/s$$

$$n = \frac{c}{v};\ n = \frac{3 \cdot 10^{8}\ m/s}{2{,}5 \cdot 10^{8}\ m/s} = 1{,}2$$

30. Datos: $\vec{E} = 0{,}5 \text{ sen } [2\pi (ct - x)] \vec{k}$ (SI)

Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión general del campo eléctrico de una onda electromagnética, obtenemos:

$$E_0 = 0{,}5 \text{ N/C}; \ \omega = 2\pi c; \ k = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

a) Determinamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi \text{ m}^{-1}} = 1 \text{ m}$$

b) La onda se propaga a lo largo del eje OX, ya que la oscilación depende de esta coordenada. Además, el campo eléctrico es paralelo en todo momento al eje OZ. Por lo tanto, la onda está polarizada en el plano XZ.

c) La onda se propaga a lo largo del eje OX y en sentido positivo, ya que la variable **x** está afectada por un signo negativo.

d) Hallamos la amplitud del campo magnético a partir de su relación con la amplitud del campo eléctrico:

$$\frac{E}{B} = c; B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{0{,}5 \text{ N·C}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ T}$$

Como la dirección de propagación es a lo largo del eje OX y el campo eléctrico es paralelo al eje OZ, el campo magnético debe ser paralelo al eje OY. Por tanto:

$$\vec{B} = 1{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ sen } [2\pi(ct - x)] \vec{j} \text{ (SI)}$$

31. Datos: $d = 0{,}1$ mm $= 1 \cdot 10^{-4}$ m; $L = 1{,}2$ m; $n = 2$; $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m

La distancia entre el máximo central y la tercera franja oscura será:

$$y_{osc} = \frac{\lambda L}{2d} (2n + 1) = \frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 1{,}2 \text{ m}}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}} \cdot (2 \cdot 2 + 1)$$

$$y_{osc} = 0{,}018 \text{ m}$$

32. Datos: $d = 0{,}03$ mm $= 3 \cdot 10^{-5}$ m; $L = 1{,}5$ m; $n = 3$; $\lambda_1 = 430$ nm $= 4{,}3 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda_2 = 500$ nm $= 5 \cdot 10^{-7}$ m

La distancia entre las franjas brillantes de tercer orden según se emplee una u otra luz será:

$$y_{brill} = \frac{\lambda L}{d} n$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{\lambda_2 L}{d} n - \frac{\lambda_1 L}{d} n = \frac{L}{d} n \ (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Delta y = \frac{1{,}5 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-5} \text{ m}} \cdot 3 \cdot (5 \cdot 10^{-7} \text{ m} - 4{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ m})$$

$$\Delta y = 0{,}0105 \text{ m} = 1{,}05 \text{ cm}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 266 y 267)

33. **Teoría corpuscular de Newton:** la luz está formada por diminutas partículas que se propagan en línea recta. Explica satisfactoriamente la propagación rectilínea y la reflexión, pero no puede explicar fenómenos típicamente ondulatorios como la refracción.

Teoría ondulatoria de Huygens: la luz consiste en la propagación de una perturbación ondulatoria del medio. Requiere, por tanto, la presencia de un medio material. Explica fácilmente la propagación rectilínea, la reflexión, la refracción y la doble refracción. Su mayor dificultad está en que todavía no se había observado la difracción, fenómeno típicamente ondulatorio.

Teoría ondulatoria de Fresnel: considera que la luz consiste en ondas transversales. Además de todos los anteriores, explica nuevos fenómenos observados, tales como la difracción, las interferencias y la polarización.

Teoría electromagnética de Maxwell: la luz no es una onda mecánica, sino una forma de onda electromagnética; consiste en la propagación, sin necesidad de medio material, de un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Explica todos los fenómenos observados hasta entonces.

Naturaleza de la luz según Einstein: la luz está formada por fotones, pequeños corpúsculos o cuantos de energía. Esto explica el efecto fotoeléctrico, cosa que no puede hacer ninguna de las teorías ondulatorias.

Naturaleza dual de la luz: la luz tiene una doble naturaleza: corpuscular (fotones) y ondulatoria (ondas electromagnéticas).

34. Datos: $B_0 = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ T; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Determinamos la amplitud del campo eléctrico:

$$\frac{E}{B} = c; \frac{E_0}{B_0} = c; E_0 = c\, B_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$B_0 = 1\,950 \text{ N/C}$$

35. Conocida la relación entre velocidad de una onda, longitud de onda y frecuencia, $v = \lambda f$, podemos expresar el número de ondas en la forma:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$$

36. Los rayos X y las ondas de radio son ondas electromagnéticas. Las dos consisten en el mismo tipo de onda que la luz y se propagan a la misma velocidad en el vacío, c. Lo que las diferencia es la frecuencia y, por tanto, también la longitud de onda y la energía que transportan.

37. Datos: $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

El tiempo que tardará la luz del Sol en alcanzar la Tierra será:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{d}{c} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

$$\Delta t = 500 \text{ s} = 8{,}3 \text{ min} = 8 \text{ min } 20 \text{ seg}$$

38. El rayo refractado se acerca a la normal cuando pasa de un medio a otro con mayor índice de refracción, ya que la velocidad en el nuevo medio es menor. En cambio, se

aleja de la normal cuando el nuevo medio es de índice de refracción menor que el primero.

39. La causa de la dispersión es la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda. Si un haz de luz blanca es refractado, cada componente de distinta longitud de onda se refractará con un ángulo distinto, dando origen a la dispersión.

40. Orden de la radiación del espectro visible:

    a) De menor a mayor frecuencia: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta.

    b) De menor a mayor longitud de onda: violeta, índigo, azul, verde, amarillo, naranja y rojo.

    c) De menor a mayor desviación en la dispersión: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta.

41. *a)* Vemos distintos objetos de diferentes colores porque cada material es capaz de absorber, reflejar o transmitir distintas longitudes de onda. Cuando iluminamos un objeto con luz blanca, recibimos sólo las frecuencias que ese material es capaz de reflejar, cuyo efecto en nuestra retina constituye el color del objeto.

    b) Como el color corresponde a las frecuencias reflejadas por los objetos, dependerá también de las frecuencias con las que los iluminemos. Por ejemplo, un objeto verde, iluminado con luz de otro color, sin la frecuencia verde, parecerá negro, ya que no reflejará luz alguna.

42. *a)* **Interferencia constructiva:** $\Delta r = n\,\lambda;\ n \in Z$

    b) **Interferencia destructiva:** $\Delta r = (2n + 1)\ \dfrac{\lambda}{2};\ n \in Z$

43. El ángulo bajo el que se observan las franjas del patrón de difracción y, por lo tanto, su tamaño sobre la pantalla aumenta con la longitud de onda. En el microscopio, y debido a la abertura del objetivo, también se produce difracción. Por ello se utiliza luz azul en la iluminación del microscopio, para minimizar los efectos de la difracción, ya que el azul es la radiación visible de menor longitud de onda.

44. Dos métodos para conseguir luz polarizada linealmente son:

    — **Polarización por reflexión.** Cuando la luz incide sobre una superficie pulimentada de vidrio, la luz reflejada está total o parcialmente polarizada. En concreto, si la tangente del ángulo de incidencia coincide con el valor del índice de refracción del medio, la luz reflejada está totalmente polarizada.

    — **Polarización por absorción selectiva.** Algunos materiales formados por láminas que contienen largas cadenas lineales de moléculas de hidrocarburos tienen la propiedad de transmitir a su través la luz sólo en un plano de polarización. Las componentes de la luz con el campo eléctrico perpendicular a las cadenas moleculares son transmitidas, mientras que si el campo es paralelo a la cadena, genera una corriente eléctrica y es absorbido.

45. El espectro de la luz del Sol es un espectro de absorción. Los gases de la atmósfera del Sol producen las líneas de Fraunhofer al absorber ciertas longitudes de onda del espectro continuo emitido por las capas interiores. Las líneas de absorción permiten identificar la composición química de la atmósfera solar.

46. Datos: $\lambda = 600$ nm $= 6 \cdot 10^{-7}$ m; $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s

    Determinamos la frecuencia y, a continuación, la energía del fotón:

$$c = \lambda\, f;\ f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$E = h\, f = 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

47. Datos: $\lambda_1 = 650$ nm $= 6{,}5 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda_2 = 480$ nm $= 4{,}8 \cdot 10^{-7}$ m

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}6 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \quad \text{Visible}$$

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{4{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 6{,}25 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \quad \text{Visible}$$

48. Datos: $f = 50$ MHz $= 5 \cdot 10^7$ Hz; $E_0 = 800$ N/C; dirección de propagación OX en sentido positivo; dirección de oscilación OY.

    a) Hallamos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{5 \cdot 10^7\ \text{m}} = 6\ \text{m}$$

    b) Determinamos el período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5 \cdot 10^7\ \text{Hz}} = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

    c) Calculamos la amplitud del campo magnético:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{800\ \text{N·C}^{-1}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

    d) Como la dirección de propagación es OX, la onda será periódica respecto de la variable **x**. Al ser la propagación en sentido positivo, el término con la variable **x** irá afectado por un signo negativo. Sabemos que el campo es en todo momento paralelo al eje OY. Por tanto:

$$\vec{E} = E_y\ \vec{j} = E_0\ \text{sen}\ (\omega t - kx)\vec{j};\ E_x = E_z = 0$$

    El campo magnético es perpendicular en todo momento al campo eléctrico y a la dirección de propagación. Por tanto, será paralelo al eje OZ:

$$\vec{B} = B_z\ \vec{k} = B_0\ \text{sen}\ (\omega t - kx)\vec{k};\ B_x = B_y = 0$$

    Hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\, f;\ \omega = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^7\ \text{Hz} = \pi \cdot 10^8\ \text{rad/s}$$

    Determinamos el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6\ \text{m}} = 1{,}05\ \text{m}^{-1}$$

Con esto, las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético serán:

$$\vec{E} = 800\ \text{sen}\ (\pi \cdot 10^8\ t - 1{,}05x)\vec{j}\ \text{(SI)}$$

$$\vec{B} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{sen}\ (\pi \cdot 10^8\ t - 1{,}05x)\vec{k}\ \text{(SI)}$$

49. Datos: 460 dientes; $\omega = 20{,}2$ rev·s^{-1}; d = 7 700 m

Determinamos primero el tiempo que transcurre desde que la luz atraviesa la rueda hasta que vuelve a alcanzarla, que coincide con el que tarda la rueda en avanzar la mitad del ángulo entre dos dientes consecutivos:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{(2\pi/920)\ \text{rad}}{2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\ 20{,}2\ \frac{\text{rev}}{\text{s}}} = 5{,}38 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$$

Entonces, la velocidad de la luz es:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 7\,700\ \text{m}}{5{,}38 \cdot 10^{-5}} = 2{,}86 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

50. Datos: $\lambda_0 = 500$ nm $= 5 \cdot 10^{-7}$ m; i = 42°; r = 25°; $n_1 = 1$

a) Aplicamos la ley de Snell para determinar el índice de refracción del material:

$$n_1\ \text{sen i} = n_2\ \text{sen r}; n_2 = \frac{n_1\ \text{sen i}}{\text{sen r}} = \frac{1 \cdot \text{sen } 42°}{\text{sen } 25°} = 1{,}58$$

b) Determinamos la velocidad de la luz en el medio a partir de la definición del índice de refracción:

$$n = \frac{c}{v}; v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}58} = 1{,}9 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Calculamos la longitud de onda en el medio:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}; \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{1{,}58} = 3{,}16 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

51. Datos: $n_1 = 2$; $n_2 = 1$

Calculamos el ángulo límite:

$$\text{sen L} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2} = 0{,}5; L = 30°$$

52. Datos: f = 20 MHz $= 2 \cdot 10^7$ Hz; $E_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ N/C; n = 1,52; dirección de propagación OX en sentido positivo

Determinamos la velocidad de propagación de la luz en el medio:

$$n = \frac{c}{v}; v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}52} = 1{,}97 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Hallamos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1{,}97 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2 \cdot 10^7\ \text{Hz}} = 9{,}85\ \text{m}$$

Determinamos el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{9{,}85\ \text{m}} = 0{,}64\ \text{m}^{-1}$$

Hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\ f; \omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^7\ \text{Hz} = 1{,}26 \cdot 10^8\ \text{rad/s}$$

Como la dirección de propagación es OX, la onda será periódica respecto de la variable **x**. Al ser la propagación en sentido positivo, el término con la variable **x** irá afectado por un signo negativo.

Con esto, la ecuación del campo eléctrico será:

$$E(x, t) = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{sen}\ (1{,}26 \cdot 10^8\ t - 0{,}64x)\ \text{(SI)}$$

53. Datos: n = 7; d = 0,4 mm $= 4 \cdot 10^{-4}$ m; $\lambda = 600$ nm $= 6 \cdot 10^{-7}$ m

Hallamos la posición angular de la franja brillante de orden 7 en el experimento de Young:

$$d\ \text{sen}\ \alpha = n\ \lambda; \text{sen}\ \alpha = \frac{n\ \lambda}{d} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}} = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$$

$$\alpha = 0{,}602° = 0°\ 36'$$

54. Datos: $\lambda = 420$ nm $= 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ m; $y_1 = 18$ cm = 0,18 m; L = 1 m

a) Calculamos el ángulo bajo el que se observa en la pantalla el primer mínimo:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{L}; \text{tg}\ \alpha = \frac{0{,}18\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 0{,}18; \alpha = 10°\ 12'$$

Determinamos ahora la anchura de la rendija a partir del seno del ángulo de la primera franja oscura, n = 1:

$$\text{sen}\ \alpha = n\ \frac{\lambda}{d}; d = \frac{n\ \lambda}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{0{,}18}$$

$$d = 2{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

b) El ángulo que determina la posición del segundo mínimo será:

$$\text{sen}\ \alpha = n\ \frac{\lambda}{d} = 2 \cdot \frac{4{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{2{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{m}} = 0{,}365; \alpha = 21°\ 25'$$

55. Datos: $\vec{E} = 25\ \text{sen}\ (3\pi \cdot 10^{11}\ t - \pi \cdot 10^3\ x)\vec{k}\ \text{(SI)}$

Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión general del campo eléctrico de una onda electromagnética, obtenemos:

$E_0 = 25$ N·C^{-1}; $\omega = 3\pi \cdot 10^{11}$ rad/s; $k = \pi \cdot 10^3$ m^{-1}

a) Determinamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 10^3\ \text{m}^{-1}} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

b) Hallamos la frecuencia a partir de la pulsación:

$$\omega = 2\pi\ f; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi \cdot 10^{11}\ \text{rad/s}}{2\pi} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{Hz}$$

c) Hallamos la amplitud del campo magnético a partir de la amplitud del campo eléctrico:

$$\frac{E}{B} = c; B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{25\ \text{N} \cdot \text{C}^{-1}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 8{,}33 \cdot 10^{-8}\ \text{T}$$

Entonces, la ecuación del campo magnético será:

$$B = B_0 \text{ sen } (\omega t - kx)$$

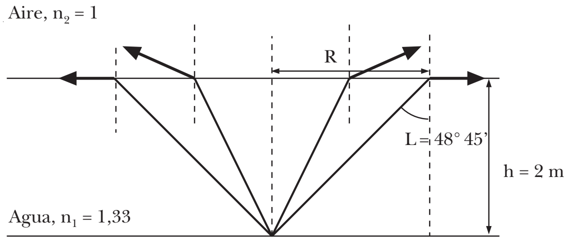
$$B = 8{,}33 \cdot 10^{-8} \text{ sen } (3\pi \cdot 10^{11}\, t - \pi \cdot 10^3 x)$$

El sentido de propagación de la onda es el eje OX, ya que depende de la variable **x**. Como el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación y al campo eléctrico, y este último es paralelo al eje OZ, el campo magnético será paralelo al eje OY.

$$\vec{B} = 8{,}33 \cdot 10^{-8} \text{ sen } (3\pi \cdot 10^{11}\, t - \pi \cdot 10^3 x)\vec{j} \text{ (SI)}$$

d) El plano de polarización del campo eléctrico, tal y como se deduce de la ecuación de la onda electromagnética, es el plano XZ.

56.



Determinamos el ángulo límite de la superficie del agua con el aire:

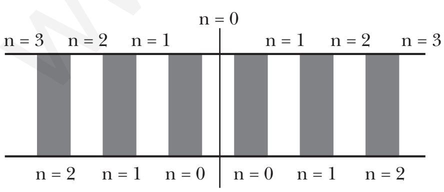
$$\text{sen } L = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1{,}33}; L = 48° \, 45'$$

Entonces, el radio del círculo de luz será:

$$\text{tg } L = \frac{R}{h}; R = h \text{ tg } L = 2 \text{ m} \cdot \text{tg } (48° \, 45') = 2{,}28 \text{ m}$$

57. Datos: y_{brill} = 1,50 cm = 0,015 m;
y_{osc} = 1,25 cm = 0,0125 m; d = 0,02 cm = $2 \cdot 10^{-4}$ m;
L = 2 m

a) Como se trata de un máximo y un mínimo consecutivos y, además, el máximo se encuentra más alejado del centro de la pantalla, si suponemos que el orden de la franja brillante es n, el de la franja oscura debe ser n – 1. Calculamos la longitud de onda a partir de la diferencia de las posiciones de ambas franjas:



$$y_{brill} = n \frac{\lambda L}{d}$$

$$y_{osc} = [2(n-1)+1]\frac{\lambda L}{2d} = (2n-1)\frac{\lambda L}{2d}$$

$$y_{brill} - y_{osc} = n\frac{\lambda L}{d} - (2n-1)\frac{\lambda L}{2d}$$

$$y_{brill} - y_{osc} = \frac{\lambda L}{2d}\left[(2n-(2n-1)\right] = \frac{\lambda L}{2d}$$

$$y_{brill} - y_{osc} = \frac{\lambda L}{2d}; \lambda = \frac{2d\,(y_{brill} - y_{osc})}{L}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m } (1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m} - 1{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{2 \text{ m}}$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$$

b) Hallamos el orden de la franja brillante:

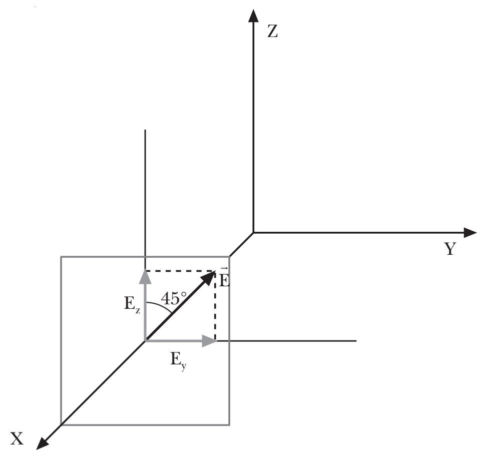
$$y_{brill} = n\frac{\lambda L}{d}; n = \frac{y_{brill}\, d}{\lambda L}$$

$$y_{brill} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 2 \text{ m}} = 3$$

Y, por tanto, el orden de la franja oscura es n – 1 = 2.

58. Datos: f = 10^7 Hz; $E_0 = 40\sqrt{2}$ N/C; dirección de propagación OX en sentido positivo; plano de polarización forma 45° con plano XZ.

Como la dirección de propagación es OX, la onda será periódica respecto de la variable **x**. Al ser la propagación en sentido positivo, la variable **x** irá afectada por un signo negativo. Si el campo eléctrico está polarizado en el plano que forma 45° con el plano XZ y la onda se propaga en la dirección OX, el campo cumple que:



$$E = E_0 \text{ sen } (\omega t - kx)$$

$$\vec{E} = E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \begin{cases} E_y = E \text{ sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}E \\[2ex] E_z = E \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}E \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0 \text{ sen } (\omega t - kx)\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0 \text{ sen } (\omega t - kx)\vec{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0 \text{ sen } (\omega t - kx)\,(\vec{j} + \vec{k})$$

Hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi f; \omega = 2\pi \cdot 10^7 \text{ Hz} = 6{,}28 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$$

Determinamos el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} = \frac{6{,}28 \cdot 10^7 \text{ rad/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0{,}21 \text{ m}^{-1}$$

Con esto, la ecuación del campo eléctrico será:

$$\vec{E} = 40 \text{ sen } (6{,}28 \cdot 10^7 \text{ t} - 0{,}21\text{x}) (\vec{j} + \vec{k}) \text{ (SI)}$$

59. Datos: d = 2 km; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

El tiempo que tardaría la luz en ir y volver sería:

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2 \cdot 2\,000 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}33 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

El experimento fracasó porque este tiempo es inferior al tiempo de reacción del ser humano. Es decir, el tiempo que tarda una persona en tomar conciencia de la imagen de la lámpara, que su cerebro transmita la orden correspondiente al brazo y que éste efectúe el movimiento de destapar la otra lámpara o cronometrar es muy superior al tiempo que la luz emplea en recorrer la distancia.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO
(pág. 267)

1. Leyes de la reflexión:

   1. El rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo reflejado están situados en el mismo plano.
   2. El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

   Leyes de la refracción:

   1. El rayo incidente, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo refractado están situados en el mismo plano.
   2. La razón entre el seno del ángulo de incidencia y el del ángulo de refracción es una constante igual a la razón entre las respectivas velocidades de propagación del movimiento ondulatorio.

$$\frac{\text{sen i}}{\text{sen r}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

   Principio de Huygens:

   Todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias, de igual velocidad y frecuencia que la onda inicial, cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

2. En una refracción se conserva la frecuencia de la onda incidente y el plano que forma ésta con la normal. Al entrar en otro medio, se modifican la dirección de propagación, la velocidad y la longitud de onda.

3. Datos: λ_1 = 760 nm = $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m;
   λ_2 = 380 nm = $3{,}8 \cdot 10^{-7}$ m

   a) Determinamos las frecuencias correspondientes:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{7{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ Hz}} = 3{,}95 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ Hz}} = 7{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

   b) Intervalo de energías de los fotones:

$$E_1 = h\, f_1 = 6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3{,}95 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E_1 = 2{,}62 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_2 = h\, f_2 = 6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 7{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E_2 = 5{,}23 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

   c) Si la velocidad del medio es $\frac{3}{4}$ de la velocidad de la luz en el vacío, $v = \frac{3}{4}$ c:

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{3c}{4f_1} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4 \cdot 3{,}95 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$\lambda_1 = 5{,}70 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 570 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{3c}{4f_2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4 \cdot 7{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$\lambda_2 = 2{,}85 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 285 \text{ nm}$$

4. Datos: $f = 7{,}96 \cdot 10^9$ Hz; $E_0 = 10^{-3}$ N/C; dirección de propagación OX en sentido positivo; campo eléctrico paralelo al eje OY.

   Como la dirección de propagación es OX, la onda será periódica respecto de la variable **x**. Al ser la propagación en sentido positivo, la variable **x** irá afectada por un signo negativo. El campo eléctrico será en todo momento paralelo al eje OY. Por tanto:

$$\vec{E} = E_y\, \vec{j} = E_0 \text{ sen } (\omega t - kx)\vec{j};\ E_x = E_z = 0$$

   El campo magnético es perpendicular en todo momento al campo eléctrico y a la dirección de propagación. Por tanto, será paralelo al eje OZ:

$$\vec{B} = B_z\, \vec{k} = B_0 \text{ sen } (\omega t - kx)\vec{k};\ B_x = B_y = 0$$

   Hallamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 7{,}96 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 5 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

   Determinamos el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} = \frac{5 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 166{,}67 \text{ m}^{-1}$$

   Calculamos la amplitud del campo magnético:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^{-3} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3{,}33 \cdot 10^{-12} \text{ T}$$

   Con esto, las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético serán:

$$\vec{E} = 10^{-3} \text{ sen } (5 \cdot 10^{10} \text{ t} - 166{,}67\text{x})\vec{j} \text{ (SI)}$$

$$\vec{B} = 3{,}33 \cdot 10^{-12} \text{ sen } (5 \cdot 10^{10} \text{ t} - 166{,}67\text{x})\vec{k} \text{ (SI)}$$

5. Datos: $d = 0{,}6 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-4}$ m;
   $L = 6$ m; $n = 25$;
   $y_{brill} = 15 \text{ cm} = 0{,}15$ m

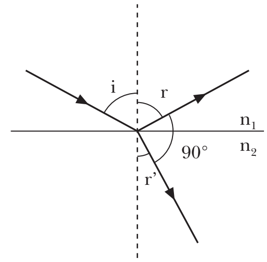
   Calculamos la longitud de onda de la luz:

$$y_{brill} = \frac{\lambda L}{d} n;$$

$$\lambda = \frac{d\, y_{brill}}{L\, n}$$

$$\lambda = \frac{6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot 0{,}15 \text{ m}}{6 \text{ m} \cdot 25} = 6$$

6. Si el rayo reflejado forma un ángulo de 90° con el rayo refractado, aplicando las leyes de la reflexión y de la refracción, tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} i = r \\ r' = 180° - r - 90° = 90° - r \end{array}\right\} r' = 90° - i$$

$$n_1 \text{ sen } i = n_2 \text{ sen } r'; n_1 \text{ sen } i = n_2 \text{ sen } (90° - i)$$

$$n_1 \text{ sen } i = n_2 \cos i; \text{ tg } i = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

11. Óptica geométrica

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 269)

- Se denomina espectro electromagnético a la clasificación de las ondas electromagnéticas según su longitud de onda o su frecuencia. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas con longitudes de onda comprendidas entre unos centímetros y unos centenares de metros reciben el nombre de ondas radio. En cambio, las de longitud de onda muy corta, de unos 10^{-12} m (equivalente a una frecuencia de 10^{20} Hz), son los rayos gamma. Entre medio, se encuentran, en orden de longitud de onda creciente, los rayos X, las ondas UV, el espectro visible, el infrarrojo y las microondas.

  — El espectro visible corresponde a las ondas electromagnéticas con longitudes de onda comprendidas entre $3{,}8 \cdot 10^{-7}$ m (380 nm) y $7{,}6 \cdot 10^{-7}$ m (760 nm). Sólo en este rango de longitudes de onda nuestro ojo es sensible a la radiación electromagnética.

  — La luz roja es la radiación del espectro visible con mayor longitud de onda (corresponde a los 700 nm), mientras que la luz violeta es la de longitud de onda más corta (400 nm). Como la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda, la luz roja es la de menor frecuencia y la violeta es la de frecuencia más elevada.

- Cuando afirmamos que la luz se propaga rectilíneamente queremos decir que la luz se propaga siguiendo trayectorias rectilíneas que llamamos rayos, que son perpendiculares en todo momento al frente de ondas.

  — El fenómeno de la reflexión comprueba la propagación rectilínea de la luz.

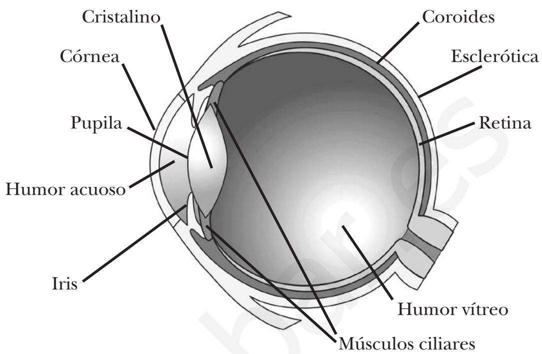
- Un medio es homogéneo si sus propiedades son las mismas en todos sus puntos. Un medio es isótropo si sus propiedades no dependen de la dirección considerada. La isotropía implica la homogeneidad, pero no al revés. Así, por ejemplo, un cristal perfecto es homogéneo, pero no es isótropo.

- Datos: $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}52$; $i = 30°$

  Aplicamos la ley de Snell para hallar el ángulo de refracción:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \text{sen } r = \frac{n_1}{n_2}\,\text{sen } i$$

$$\text{sen } r = \frac{1}{1{,}52}\,\text{sen } 30° = 0{,}33; \quad r = 19°\,12'$$

- 

Esclerótica. Es la cubierta externa del globo ocular y es la responsable de su consistencia.

Córnea. Constituye la parte anterior de la esclerótica. Es transparente, con índice de refracción n = 1,376, y permite la entrada de la luz. En ella tiene lugar la mayor parte de la refracción de la luz.

Coroides. Es la membrana intermedia del globo ocular.

Retina. Es una membrana que tapiza la parte interna del fondo del ojo y actúa como una pantalla sobre la que se proyecta la imagen de los objetos que vemos. Consta de varias capas de células, entre las que destacan las células sensibles a la luz, los conos (sensibles a los colores) y los bastones (más sensibles que los conos a la luz, pero incapaces de distinguir colores). Estas células no son más que terminaciones del nervio óptico, que transmite al cerebro la información recibida por el ojo.

Iris. Es un diafragma musculoso que regula la cantidad de luz que penetra en nuestros ojos. Es capaz de modificar el diámetro de su orificio central, la **pupila,** de 2 mm a 8 mm.

Cristalino. Éste es un cuerpo blando en forma de lente biconvexa deformable, capaz de modificar su distancia focal y enfocar objetos a distintas distancias, formando la imagen sobre la retina. Su índice de refracción varía de una zona a otra entre 1,4 y 1,37.

Humor acuoso. Fluido transparente que llena el espacio entre la córnea y el cristalino, con n = 1,336.

Humor vítreo. Líquido viscoso que llena la cavidad interior del globo ocular. Su índice de refracción es n = 1,337. Se encuentra a una presión ligeramente superior a la atmosférica, con la finalidad de mantener la retina adosada a la coroides. Si su presión disminuye, se produce un desprendimiento de retina.

Nervio óptico. Es el responsable de transmitir los impulsos nerviosos generados por las terminaciones de la retina al cerebro.

1. DEFINICIÓN DE ÓPTICA GEOMÉTRICA (pág. 271)

1. Los fenómenos de difracción, interferencia y polarización de la luz no son objeto de la óptica geométrica porque no pueden explicarse a partir de la propagación rectilínea de los rayos de luz.

2. La imagen del Sol que obtenemos a través de una lupa es una imagen real, ya que se forma sobre el papel, en la intersección de los rayos convergentes procedentes de la lupa.

3. Un espejo no es un dioptrio. Dioptrio es aquella superficie que separa dos medios (transparentes) de distinto índice de refracción y en la cual la luz se refracta. Sin embargo, un espejo es toda aquella superficie capaz de reflejar los rayos luminosos.

4. Deducimos los signos a partir del convenio establecido en la página 271 del libro del alumno:

   a) $s_1 < 0$; $s_2 > 0$; $r > 0$

   b) $\alpha < 0$; $\beta > 0$; $\gamma > 0$

   c) $i_1 > 0$; $i_2 > 0$

2. SISTEMAS ÓPTICOS SIMPLES (págs. 274, 275 y 278)

5. Sabemos que $f_2 = r\,\dfrac{n_2}{n_2 - n_1}$ y $f_1 = -r\,\dfrac{n_1}{n_2 - n_1}$.

   Entonces:

$$f_1 + f_2 = -r\,\frac{n_1}{n_2 - n_1} + r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1} = r\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_1} = r$$

6. Datos: $r = 10$ cm = 0,1 m; $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}5$; $y_1 = 4$ mm = 0,004 m; $s_1 = -30$ cm = –0,3 m

   Hallamos la posición de la imagen, s_2, a partir de la ecuación fundamental:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r};\quad \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$s_2 = \frac{n_2}{\dfrac{n_1}{s_1} + \dfrac{n_2 - n_1}{r}}$$

$$s_2 = \frac{1{,}5}{\dfrac{1}{-0{,}3\ \text{m}} + \dfrac{1{,}5 - 1}{0{,}1\ \text{m}}} = 0{,}9\ \text{m} = 90\ \text{cm}$$

   Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2};\quad y_2 = y_1\,\frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}$$

$$y_2 = 0{,}004\ \text{m} \cdot \frac{0{,}9\ \text{m} \cdot 1}{-0{,}3\ \text{m} \cdot 1{,}5} = -0{,}008\ \text{m} = -8\ \text{mm}$$

   Observamos que la imagen es mayor que el objeto. El signo menos indica que la imagen aparece invertida y, como $s_2 > 0$, se forma por intersección de los rayos refractados convergentes y es real.

7. Datos: $r = 5$ cm = 0,05 m; $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}5$; $y_1 = 1$ mm = 0,001 m; $s_1 = -20$ cm = –0,2 m

   a) Calculamos las distancias focales imagen f_2 y objeto f_1:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1} = 0{,}05\ \text{m} \cdot \frac{1{,}5}{1{,}5 - 1} = 0{,}15\ \text{m} = 15\ \text{cm}$$

$$f_1 = -r\,\frac{n_1}{n_2 - n_1} = -0{,}05\ \text{m} \cdot \frac{1}{1{,}5 - 1} = -0{,}1\ \text{m} = -10\ \text{cm}$$

   b) Hallamos la posición de la imagen, s_2, a partir de la ecuación de Gauss:

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{f_1}{s_1} = 1;\quad \frac{f_2}{s_2} = 1 - \frac{f_1}{s_1};\quad s_2 = \frac{f_2}{1 - \dfrac{f_1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{0{,}15\ \text{m}}{1 - \dfrac{-0{,}1\ \text{m}}{-0{,}2\ \text{m}}} = 0{,}3\ \text{m} = 30\ \text{cm}$$

   Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2};\quad y_2 = y_1\,\frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}$$

$$y_2 = 0{,}001\ \text{m} \cdot \frac{0{,}3\ \text{m} \cdot 1}{-0{,}2\ \text{m} \cdot 1{,}5} = -0{,}001\ \text{m} = -1\ \text{mm}$$

   Observamos que la imagen es del mismo tamaño que el objeto. El signo menos indica que la imagen aparece invertida y, como $s_2 > 0$, se forma por intersección de los rayos refractados convergentes y es real.

8. Datos: $r = -5$ cm = –0,05 m; $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}5$; $y_1 = 1$ mm = 0,001 m; $s_1 = -20$ cm = –0,2 m

   Si el dioptrio es cóncavo, el problema es análogo al anterior pero con el radio del dioptrio negativo.

   a) Calculamos las distancias focales imagen f_2 y objeto f_1:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1} = -0{,}05\ \text{m} \cdot \frac{1{,}5}{1{,}5 - 1} = -0{,}15\ \text{m} = -15\ \text{cm}$$

$$f_1 = -r\,\frac{n_1}{n_2 - n_1} = -(-\ 0{,}05\ \text{m}) \cdot \frac{1}{1{,}5 - 1} = 0{,}1\ \text{m} = 10\ \text{cm}$$

   b) Hallamos la posición de la imagen, s_2, a partir de la ecuación de Gauss:

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{f_1}{s_1} = 1;\quad \frac{f_2}{s_2} = 1 - \frac{f_1}{s_1};\quad s_2 = \frac{f_2}{1 - \dfrac{f_1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{-0{,}15\ \text{m}}{1 - \dfrac{-0{,}1\ \text{m}}{-0{,}2\ \text{m}}} = -0{,}1\ \text{m}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2\, n_1}{s_1\, n_2}; \quad y_2 = y_1 \frac{s_2\, n_1}{s_1\, n_2}$$

$$y_2 = 0{,}001\ \text{m} \cdot \frac{-0{,}1\ \text{m} \cdot 1}{-0{,}2\ \text{m} \cdot 1{,}5} = 0{,}00033\ \text{m}$$

$$y_2 = 0{,}33\ \text{mm}$$

Observamos que la imagen es menor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 < 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos refractados y es virtual.

9. Datos: $f_1 = -10$ cm $= -0{,}1$ m; $f_2 = 30$ cm $= 0{,}3$ m; $s_1 = -5$ cm $= -0{,}05$ m; $n_1 = 1$

a) Calculamos el radio de curvatura del dioptrio a partir de la fórmula para la distancia focal imagen y teniendo en cuenta que $\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}$:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}; \quad r = \frac{f_2}{n_2}(n_2 - n_1) = f_2\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$r = f_2\left(1 + \frac{f_1}{f_2}\right) = f_1 + f_2$$

$$r = -0{,}1\ \text{m} + 0{,}3\ \text{m} = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

Como el radio de curvatura del dioptrio es positivo, se trata de un dioptrio convexo.

b) Determinamos la posición de la imagen de un objeto situado en $s_1 = -5$ cm $= -0{,}05$ m:

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{f_1}{s_1} = 1; \quad \frac{f_2}{s_2} = 1 - \frac{f_1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{f_2}{1 - \frac{f_1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{0{,}3\ \text{m}}{1 - \frac{-0{,}1\ \text{m}}{-0{,}05\ \text{m}}} = -0{,}3\ \text{m} = -30\ \text{cm}$$

c) Hallamos el índice de refracción del segundo medio a partir de la relación entre las distancias focales, y el valor del índice de refracción del aire ($n_1 = 1$):

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}; n_2 = -n_1\,\frac{f_2}{f_1}; n_2 = -1 \cdot \frac{0{,}3\ \text{m}}{-0{,}1\ \text{m}} = 3$$

10. Si observamos un pez en el agua, como el índice de refracción del aire es menor que el del agua, la imagen virtual que vemos está más cerca de la superficie que el verdadero pez.

11. Datos: $s_1 = 1{,}2$ m; $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1$

Calculamos la profundidad aparente del objeto:

$$s_2 = \frac{n_2}{n_1}\,s_1; \quad s_2 = \frac{1}{1{,}33} \cdot 1{,}2\ \text{m} = 0{,}90\ \text{m}$$

12. Datos: $s_2 = 1{,}30$ m; $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1$

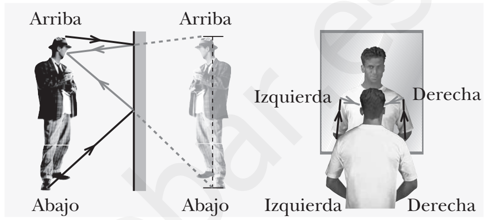
Calculamos la profundidad real del fondo del estanque a partir de la profundidad aparente:

$$s_2 = \frac{n_2}{n_1}\,s_1; \quad s_1 = \frac{n_1}{n_2}\,s_2$$

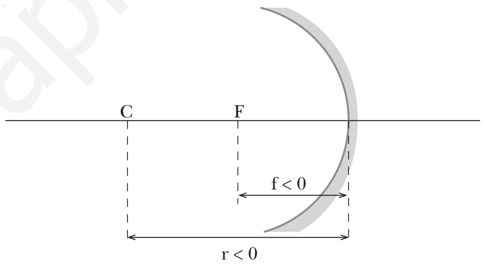
$$s_1 = \frac{1{,}33}{1} \cdot 1{,}30\ \text{m} = 1{,}73\ \text{m}$$

13. Si queremos ver nuestra imagen ampliada y derecha en un espejo, debemos emplear un espejo cóncavo y situarnos entre el foco y el espejo. Si nos situamos entre el centro de curvatura y el foco, veremos nuestra imagen aumentada pero invertida.

14. En la figura podemos observar cómo se forman las imágenes en un espejo :



15. Datos: $f = -10$ cm $= -0{,}1$ m (espejo cóncavo)



a) Si el objeto se sitúa en $s_1 = -25$ cm $= -0{,}25$ m, la imagen se situará en:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}1\ \text{m}} - \frac{1}{-0{,}25\ \text{m}}} = -0{,}167\ \text{m} = -16{,}7\ \text{cm}$$

Calculamos el aumento lateral:

$$A_L = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{-16{,}7\ \text{cm}}{-25\ \text{cm}} = -0{,}67$$

El signo negativo del aumento lateral significa que la imagen aparece invertida. Además, como su valor absoluto es menor que la unidad, la imagen es menor que el objeto. Al ser $s_2 < 0$, la imagen se forma por intersección de los rayos reflejados en el espejo y es real.

b) Si el objeto se sitúa en $s_1 = -10$ cm $= -0{,}10$ m, la imagen se situará en:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}1\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}10\text{ m}}} = \infty$$

Es decir, no se observa ninguna imagen. En general, siempre que el objeto se sitúe sobre el foco, no se forma imagen.

c) Si el objeto se sitúa en s_1 = –5 cm = –0,05 m, la imagen se situará en:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}1\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}05\text{ m}}} = 0{,}10\text{ m} = 10\text{ cm}$$

Calculamos el aumento lateral:

$$A_L = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{10\text{ cm}}{-5\text{ cm}} = 2$$

El signo positivo del aumento lateral significa que la imagen aparece derecha. Además, como su valor absoluto es mayor que la unidad, la imagen es mayor que el objeto. Al ser $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados y es virtual.

16. Datos: f = –50 cm = –0,5 m (espejo cóncavo); s_1 = –25 cm = –0,25 m; y_1 = 1 cm = 0,01 m

a) Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}5\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}25\text{ m}}}$$

$$s_2 = 0{,}50\text{ m} = 50\text{ cm}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = -y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

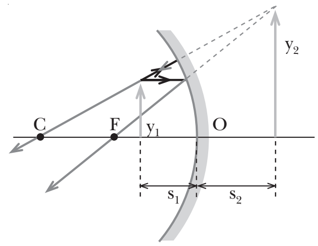
$$y_2 = -0{,}01\text{ m} \cdot \frac{0{,}50\text{ m}}{-0{,}25\text{ m}} = 0{,}02\text{ m} = 2\text{ cm}$$

b) Observamos que la imagen es mayor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados y es virtual.

c) Calculamos el radio de curvatura del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; r = 2f; r = 2 \cdot (-50\text{ cm}) = -100\text{ cm}$$

d)



e) Si el espejo es convexo, f = 50 cm = 0,5 m. Entonces:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}25\text{ m}}}$$

$$s_2 = 0{,}167\text{ m} = 16{,}7\text{ cm}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

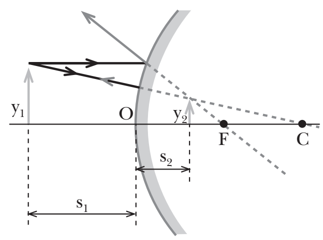
$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = -y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = -0{,}01\text{ m} \cdot \frac{0{,}167\text{ m}}{-0{,}25\text{ m}} = 0{,}007\text{ m} = 0{,}7\text{ cm}$$

Observamos que la imagen es menor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados y es virtual. Esto siempre es así para un espejo convexo.

Calculamos el radio de curvatura del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; \quad r = 2f; \quad r = 2 \cdot 50\text{ cm} = 100\text{ cm}$$



17. Datos: A_L = –2; s_2 = –150 cm = –1,5 m (imagen real)

a) Determinamos la posición del objeto a partir de la posición de la imagen y el aumento lateral:

$$A_L = -\frac{s_2}{s_1}$$

$$s_1 = -\frac{s_2}{A_L}; s_1 = -\frac{-1{,}5\text{ m}}{-2} = -0{,}75\text{ m} = -75\text{ cm}$$

b) Calculamos el radio del espejo a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{r}; \quad r = \frac{2}{\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1}}$$

$$r = \frac{2}{\dfrac{1}{-1{,}5\ \text{m}} + \dfrac{1}{-0{,}75\ \text{m}}} = -1\ \text{m} = -100\ \text{cm}$$

3. SISTEMAS ÓPTICOS COMPUESTOS (págs. 282 y 285)

18. *a)* La imagen formada por una lente delgada es **derecha:**

— Para una lente convergente si el objeto se sitúa a una distancia de la lente menor que la distancia focal.

— Siempre para lentes divergentes.

La imagen formada por una lente delgada es **invertida:**

— Para lentes convergentes cuando el objeto se sitúa a una distancia de la lente mayor que la distancia focal.

b) La imagen formada por una lente delgada es **mayor** que el objeto:

— Para lentes convergentes cuando el objeto se sitúa a una distancia de la lente mayor que la distancia focal pero menor que el doble de ésta.

— Para una lente convergente si el objeto se sitúa a una distancia de la lente menor que la distancia focal.

19. La imagen en una lente divergente no puede ser nunca real, porque los rayos emergentes siempre divergen y, por tanto, la imagen se forma por la intersección de las prolongaciones de los rayos.

20. Calculamos la expresión de la distancia focal objeto a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas con $s_1 = f_1$ y $s_2 = \infty$:

$$\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_1} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{1}{f_2}; \quad f_1 = -f_2$$

21. Datos: $n = 1{,}5$; $r_1 = 20$ cm; $r_2 = -20$ cm; $y_1 = 2{,}5$ cm; $s_1 = -10$ cm

a) Calculamos la distancia focal de la lente:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \quad f_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}$$

$$f_2 = \frac{1}{(1{,}5-1)\left(\dfrac{1}{20\ \text{cm}} - \dfrac{1}{-20\ \text{cm}}\right)} = 20\ \text{cm}$$

b) Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-10\ \text{cm}} + \dfrac{1}{20\ \text{cm}}} = -20\ \text{cm}$$

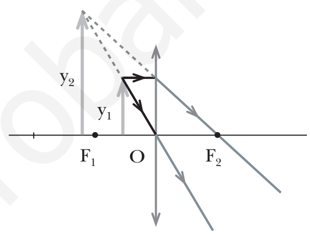
c) Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = 2{,}5\ \text{cm} \cdot \frac{-20\ \text{cm}}{-10\ \text{cm}} = 5\ \text{cm}$$

d) La imagen es mayor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 < 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos emergentes y es virtual.

e)



22. Datos: $f_2 = 10$ cm (lente convergente)

a) $s_1 = -30$ cm

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-30\ \text{cm}} + \dfrac{1}{10\ \text{cm}}} = 15\ \text{cm}$$

Determinamos el aumento lateral:

$$A_L = \frac{s_2}{s_1}; \quad A_L = \frac{15\ \text{cm}}{-30\ \text{cm}} = -0{,}5$$

El signo negativo del aumento lateral significa que la imagen aparece invertida. Además, como su valor absoluto es menor que la unidad, la imagen es menor que el objeto. Al ser $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de los rayos emergentes y es real.

b) $s_1 = -10$ cm

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-10\text{cm}} + \dfrac{1}{10\ \text{cm}}} = \infty$$

La imagen no se forma (se forma en el infinito), ya que el objeto está situado en el foco de la lente.

c) $s_1 = -5$ cm

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-5\text{ cm}} + \dfrac{1}{10\text{ cm}}} = -10\text{ cm}$$

Determinamos el aumento lateral:

$$A_L = \frac{s_2}{s_1}; \quad A_L = \frac{-10\text{ cm}}{-5\text{ cm}} = 2$$

Como el aumento lateral es mayor que la unidad y positivo, la imagen será mayor que el objeto y derecha. Al ser $s_2 < 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos emergentes y es virtual.

23. Datos: $f_2 = -20$ cm (lente divergente); $y_1 = 2{,}0$ cm; $s_1 = -30$ cm

a) Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-30\text{ cm}} + \dfrac{1}{-20\text{ cm}}} = -12\text{ cm}$$

b) Determinamos el aumento lateral:

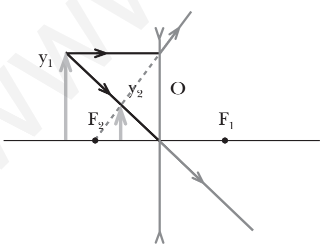
$$A_L = \frac{s_2}{s_1}; \quad A_L = \frac{-12\text{ cm}}{-30\text{ cm}} = 0{,}4$$

Calculamos el tamaño de la imagen:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1}; \quad y_2 = A_L\, y_1 = 0{,}4 \cdot 2{,}0\text{ cm} = 0{,}8\text{ cm}$$

c) Al ser $s_2 < 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos emergentes y es virtual, como siempre en lentes divergentes. Como el aumento lateral es menor que la unidad y positivo, la imagen será menor que el objeto y derecha.

d)



24. Datos: lente convergente, $P_M = 3{,}5$ dioptrías; lente divergente, $P_N = -4{,}8$ dioptrías

a) Calculamos la potencia total del sistema:

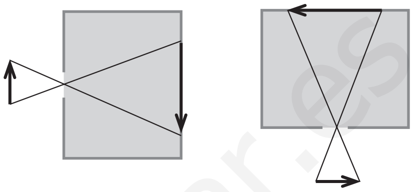
$$P = P_M + P_N = 3{,}5 - 4{,}8 = -1{,}3\text{ diop.}$$

b) Calculamos la distancia focal del sistema óptico:

$$P = \frac{1}{f_2}; \quad f_2 = \frac{1}{P} = \frac{1}{-1{,}3\text{ diop.}} = -0{,}77\text{ m}$$

25. Si observamos la imagen desde el exterior de la cámara oscura, por ejemplo a través de un vidrio deslustrado, veremos que tiene invertidas la derecha y la izquierda. El sistema tiene la misma simetría en el eje horizontal que en el vertical.

Sin embargo, si observamos desde el interior de la cámara oscura, como podría ser la habitación de paredes oscuras que utilizaban los astrónomos árabes para ver imágenes proyectadas, la imagen no tiene invertidas la derecha y la izquierda, al contrario que nuestra imagen en un espejo.



26. Datos: $f = 0{,}1$ m

Calculamos el aumento angular:

$$A_A = \frac{0{,}25\text{ m}}{f} = \frac{0{,}25\text{ m}}{0{,}1\text{ m}} = 2{,}5$$

27. Datos $f = 10$ cm; $y = 2$ mm $= 0{,}2$ cm; $s_2 = -25$ cm

La lupa no es más que una lente convergente. Por tanto, su distancia focal imagen es $f_2 = f = 10$ cm.

a) Determinamos la distancia s_1 a la que debemos situar el objeto:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{f_2}$$

$$s_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_2} - \dfrac{1}{f_2}}; \quad s_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{-25\text{ cm}} - \dfrac{1}{10\text{ cm}}} = -7{,}14\text{ cm}$$

b) Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = 0{,}2\text{ cm} \cdot \frac{-25\text{ cm}}{-7{,}14\text{ cm}} = 0{,}7\text{ cm} = 7\text{ mm}$$

28. Datos: $P_{ob} = 100$ dioptrías; $P_{oc} = 50$ dioptrías; $O_1O_2 = 24$ cm

a) Calculamos las distancias focales del objetivo y del ocular:

$$f_{oc} = P_{oc}^{-1} = (50\text{ dioptrías})^{-1} = 0{,}02\text{ m} = 2\text{ cm}$$
$$f_{ob} = P_{ob}^{-1} = (100\text{ dioptrías})^{-1} = 0{,}01\text{ m} = 1\text{ cm}$$

b) Hallamos el intervalo óptico:

$$\delta = 24\text{ cm} - (1\text{ cm} + 2\text{ cm}) = 21\text{ cm}$$

c) Calculamos el aumento total del microscopio:

$$A = -0{,}25\delta \cdot P_{ob} \cdot P_{oc}$$
$$A = -0{,}25\text{ m} \cdot 0{,}21\text{ m} \cdot 100\text{ m}^{-1} \cdot 50\text{ m}^{-1} = -262{,}5$$

29. Datos: f_{ob} = 1,6 cm = 0,016 m; f_{oc} = 1,8 cm = 0,018 m; O_1O_2 = 19 cm = 0,19 m

a) Calculamos la potencia del objetivo y del ocular:

$$P_{oc} = f_{oc}^{-1} = (0{,}018\ \text{m})^{-1} = 55{,}6\ \text{dioptrías}$$

$$P_{ob} = f_{ob}^{-1} = (0{,}016\ \text{m})^{-1} = 62{,}5\ \text{dioptrías}$$

b) Calculamos el intervalo óptico:

$$\delta = 19\ \text{cm} - (1{,}6\ \text{cm} + 1{,}8\ \text{cm}) = 15{,}6\ \text{cm}$$

c) Calculamos el aumento total del microscopio:

$$A = -0{,}25\delta \cdot P_{ob} \cdot P_{oc}$$

$$A = -0{,}25\ \text{m} \cdot 0{,}156\ \text{m} \cdot 62{,}5\ \text{m}^{-1} \cdot 55{,}6\ \text{m}^{-1} = -135{,}5$$

30. Respuesta sugerida:

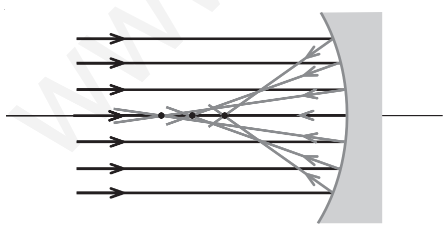
Las películas fotográficas están formadas por un material plástico de soporte y una capa de un componente sensible a la luz. Según la cantidad de luz recibida, lo que se denomina *exposición*, se produce un cambio en la estructura electroquímica del material sensible, formando la *imagen latente*. El proceso de revelado hace que las partes de la película con más exposición queden más oscuras y las menos expuestas queden más transparentes. Después de un fijado mediante un tratamiento químico, necesario para detener la sensibilidad de la película a la luz, se obtiene el negativo fotográfico.

Después del revelado y la obtención del negativo, es necesario invertir las relaciones claro-oscuro, ya que la parte más oscura del negativo corresponde a la región que ha recibido más luz. Para ello, se proyecta la imagen del negativo sobre un papel sensible, que una vez revelado da la imagen final.

4. DEFECTOS DE LAS IMÁGENES (pág. 286)

31. Un espejo no puede dar lugar a aberración cromática porque la luz en un espejo se refleja, pero no se refracta. La aberración cromática se debe a que el índice de refracción es diferente para las distintas longitudes de onda de la luz.

32.



FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 287)

a) Algunos alumnos no ven con claridad lo que se escribe sobre la pizarra del aula porque tienen miopía. En este caso, el punto remoto está más cercano que la pizarra y el cristalino no es capaz de enfocar la imagen de la pizarra sobre la retina. Puede corregirse mediante el uso de lentes divergentes.

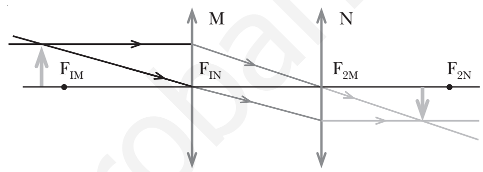
b) Las personas de edad avanzada llevan lentes para leer porque sufren presbicia o vista cansada. Este defecto del ojo es debido a que el cristalino ha perdido flexibilidad y no es capaz de enfocar objetos cercanos, de forma que su punto próximo se ha alejado más de lo normal (25 cm).

c) La presbicia se llama vista cansada porque consiste en la pérdida de facultades del cristalino debido a la avanzada edad de la persona.

d) Decimos que el miope es corto de vista porque su ojo sólo es capaz de enfocar correctamente sobre la retina los objetos cercanos.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 289)

33.



La imagen final es real, invertida y menor que el objeto.

34. Datos: f_{2M} = 10 cm; f_{2N} = 20 cm; O_1O_2 = 20 cm; s_{1M} = –15 cm

a) Calculamos dónde se forma la imagen debido a la primera lente:

$$\frac{1}{f_{2M}} = \frac{1}{s_{2M}} - \frac{1}{s_{1M}}; \quad \frac{1}{s_{2M}} = \frac{1}{s_{1M}} + \frac{1}{f_{2M}}$$

$$s_{2M} = \frac{1}{\dfrac{1}{s_{1M}} + \dfrac{1}{f_{2M}}}; \quad s_{2M} = \frac{1}{\dfrac{1}{-15\ \text{cm}} + \dfrac{1}{10\ \text{cm}}} = 30\ \text{cm}$$

Hallamos la posición de la imagen final teniendo en cuenta que la imagen producida por la primera lente es el objeto para la segunda lente:

$$s_{1N} = s_{2M} - 20\ \text{cm} = 30\ \text{cm} - 20\ \text{cm} = 10\ \text{cm}$$

$$\frac{1}{f_{2N}} = \frac{1}{s_{2N}} - \frac{1}{s_{1N}}; \quad \frac{1}{s_{2N}} = \frac{1}{s_{1N}} + \frac{1}{f_{2N}}$$

$$s_{2N} = \frac{1}{\dfrac{1}{s_{1N}} + \dfrac{1}{f_{2N}}}; \quad s_{2N} = \frac{1}{\dfrac{1}{10\ \text{cm}} + \dfrac{1}{20\ \text{cm}}} = 6{,}7\ \text{cm}$$

b) El aumento lateral del sistema será el producto del aumento lateral de cada lente:

$$A_L = A_{LM}\, A_{LN} = \frac{s_{2M}}{s_{1M}} \frac{s_{2N}}{s_{1N}}$$

$$A_L = \frac{30\ \text{cm}}{-15\ \text{cm}} \cdot \frac{6{,}7\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = -1{,}3$$

c) Como el aumento del sistema es negativo y mayor que la unidad en valor absoluto, la imagen final será invertida y mayor que el objeto. Además, como $s_{2N} > 0$, la imagen se forma por intersección de los rayos emergentes y es real.

35. Datos: punto remoto = 15 cm

a) Una persona de vista miope debe usar lentes divergentes.

b) Para poder ver objetos lejanos, la lente debe acercarlos hasta el punto remoto del ojo miope. Por tanto, la imagen respecto a la lente de un objeto en el infinito debe formarse en $s_2 = -15$ cm.

Calculamos con estos datos la distancia focal necesaria:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{-15\text{ cm}} - \frac{1}{-\infty}; \quad f_2 = -15\text{ cm}$$

c) Determinamos la potencia correspondiente:

$$P = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{-0{,}15\text{ m}} = -6{,}7\text{ diop.}$$

36. Datos: punto próximo = 50 cm

a) Una persona con presbicia debe usar lentes convergentes.

b) Para poder leer a una distancia de 25 cm, la imagen de un objeto situado a 25 cm debe formarse a una distancia de 50 cm por delante de la lente, en el punto próximo del ojo présbita. Determinamos la potencia necesaria para ello:

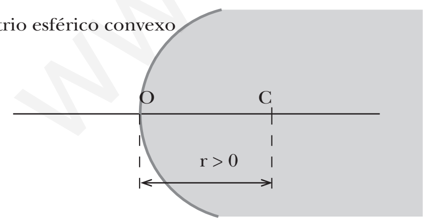
$$P = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}$$

$$P = \frac{1}{-0{,}50\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}25\text{ m}} = 2\text{ diop.}$$

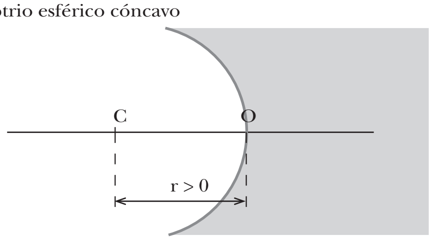
EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 290 y 291)

37. Según el convenio de signos establecido, las distancias en horizontal son positivas hacia la izquierda del polo del dioptrio, O, y negativas hacia la derecha. Por tanto, el radio de curvatura de un dioptrio esférico convexo es positivo, mientras que el dioptrio esférico cóncavo tiene radio de curvatura negativo.

Dioptrio esférico convexo



Dioptrio esférico cóncavo



38. La relación entre distancias focales, radio de curvatura e índices de refracción es:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}; \quad f_1 = -r\,\frac{n_1}{n_2 - n_1}$$

Es decir, el signo de las distancias focales depende del signo del radio de curvatura (dioptrio cóncavo o convexo) y de la diferencia entre los dos índices de refracción, $n_2 - n_1$.

r	$n_2 - n_1$	f_1	f_2
+	+	−	+
+	−	+	−
−	+	+	−
−	−	−	+

39. Para tratar el dioptrio plano como un caso particular del dioptrio esférico, suponemos que el dioptrio plano es un dioptrio esférico con radio de curvatura infinito.

40. La aproximación aparente que experimentan los objetos sumergidos en el agua se debe a que la superficie de contacto del agua con el aire constituye un dioptrio plano en el que $n_1 > n_2$.

En un dioptrio plano, la posición de la imagen es $s_2 = \frac{n_2}{n_1} s_1$. Por tanto, si $n_1 > n_2$, la imagen se formará más cerca de la superficie que la posición del objeto. En el caso de un objeto sumergido en el agua, n_1 es el índice de refracción del agua, $n_1 = 1{,}33$, y es mayor que el del aire, $n_2 = 1$.

41. El rayo incidente y el rayo emergente de una lámina de caras planas y paralelas son paralelos.

42. *a)* La imagen será real sólo en espejos cóncavos cuando el objeto esté situado a mayor distancia que la distancia focal.

b) La imagen es invertida en los mismos casos en que es real.

43. Si empleamos un espejo convexo, la imagen nunca es mayor que el objeto, siempre es menor.

Si empleamos un espejo cóncavo, la imagen es mayor que el objeto si éste se sitúa entre el centro de curvatura y el foco o entre el foco y el espejo.

44. El tamaño de la imagen formada por una lente delgada convergente es igual al tamaño del objeto si éste se sitúa a una distancia de la lente igual al doble de la distancia focal de la lente. Si $s_1 = -2f_2$:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{f_2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{-2f_2} + \dfrac{1}{f_2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2f_2}} = 2f_2$$

Entonces, el aumento lateral será:

$$A_L = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2f_2}{-2f_2} = -1$$

Por tanto, la imagen será real, del mismo tamaño que el objeto e invertida.

45. Sí es posible distinguir por el tacto una lente convergente de otra lente divergente. Las lentes convergentes son más gruesas en su parte central que en los extremos, mientras que las lentes divergentes tienen los extremos más gruesos que su parte central.

46. *a)* **Cierto.** La imagen de una lente divergente es siempre virtual.

    b) **Falso.** Lo que determina si una imagen es real o virtual es si ésta se forma por la intersección de los rayos luminosos o por la de sus prolongaciones. Un valor de $s_2 < 0$ en una lente indica que la imagen es virtual, sin embargo, en un espejo, indica que la imagen es real.

47. El objetivo de una cámara fotográfica no puede ser divergente, ya que la imagen que formaría sería virtual. El objetivo debe formar la imagen sobre la película, que se encuentra siempre detrás de la lente. Una lente divergente forma la imagen delante de ella, en el mismo lado de donde proceden los rayos del objeto (decimos que la imagen es virtual). Por tanto, nunca podría formar la imagen sobre la película fotográfica.

48. El aumento total de un microscopio compuesto es proporcional al intervalo óptico, distancia entre el foco posterior del objetivo y el foco anterior del ocular. Cuanto más largo sea el tubo, mayor será el intervalo óptico y, por tanto, mayor será el aumento.

49. La distancia focal de una lente con aberración cromática depende de la longitud de onda de la luz. Cuanto mayor es la longitud de onda, menor es la desviación y mayor la distancia focal. Por tanto, a la luz amarilla le corresponde una distancia focal mayor que a la luz azul, ya que su longitud de onda es mayor.

50. Un miope utiliza lentes divergentes porque su problema es que el punto lejano está a una distancia finita. Las lentes divergentes desvían los rayos procedentes de puntos lejanos de manera que la imagen que forma está más cerca que el objeto, y el ojo miope es capaz de enfocarla.

    En cambio, el hipermétrope y el présbita son incapaces de enfocar objetos cercanos. La lente convergente, al formar la imagen más lejos que la posición del objeto, aleja la imagen y permite que el ojo la enfoque.

51. Datos: $r = 20$ cm; $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}33$; $y_1 = 10$ cm;

    $s_1 = -100$ cm

    a) Calculamos las distancias focales imagen f_2 y objeto f_1:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}; \quad f_2 = 20\text{ cm} \cdot \frac{1{,}33}{1{,}33 - 1} = 80{,}6\text{ cm}$$

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}; \quad f_2 = 20\text{ cm} \cdot \frac{1{,}33}{1{,}33 - 1} = 80{,}6\text{ cm}$$

    b) Hallamos la distancia a la que se forma la imagen, s_2, a partir de la ecuación de Gauss:

$$\frac{f_2}{s_2} + \frac{f_1}{s_1} = 1; \quad \frac{f_2}{s_2} = 1 - \frac{f_1}{s_1}; \quad s_2 = \frac{f_2}{1 - \dfrac{f_1}{s_1}}$$

$$s_2 = \frac{80{,}6\text{ cm}}{1 - \dfrac{-60{,}6\text{ cm}}{-100\text{ cm}}} = 204{,}6\text{ cm}$$

    c) Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral del sistema:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}; \quad y_2 = y_1\,\frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}$$

$$y_2 = 10\text{ cm} \cdot \frac{204{,}6\text{ cm} \cdot 1}{-100\text{ cm} \cdot 1{,}33} = -15{,}4\text{ cm}$$

    d) Observamos que la imagen es mayor que el objeto. El signo menos indica que la imagen aparece invertida y, como $s_2 > 0$, se forma por intersección de los rayos refractados convergentes y es real.

52. Datos: $r = -8$ cm (dioptrio cóncavo); $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}5$;

    $y_1 = 4$ mm $= 0{,}4$ cm; $s_1 = -20$ cm

    a) Hallamos la distancia a la que se forma la imagen, s_2, a partir de la ecuación fundamental:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r}; \quad \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2 - n_1}{r}$$

$$s_2 = \frac{n_2}{\dfrac{n_1}{s_1} + \dfrac{n_2 - n_1}{r}}$$

$$s_2 = \frac{1{,}5}{\dfrac{1}{-20\text{ cm}} + \dfrac{1{,}5 - 1}{-8\text{ cm}}} = -13{,}3\text{ cm}$$

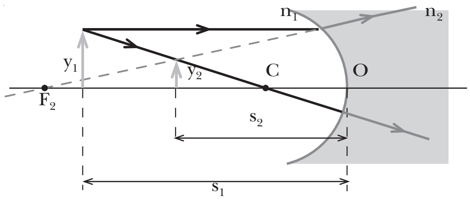
    Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral del sistema:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}; \quad y_2 = y_1\,\frac{s_2\,n_1}{s_1\,n_2}$$

$$y_2 = 0{,}4\text{ cm} \cdot \frac{-13{,}3\text{ cm} \cdot 1}{-20\text{ cm} \cdot 1{,}5} = 0{,}18\text{ cm} = 1{,}8\text{ mm}$$

    b) Para determinar gráficamente la posición de la imagen necesitamos calcular la distancia focal imagen del dioptrio:

$$f_2 = r\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}; \quad f_2 = -8\text{ cm}\,\frac{1{,}5}{1{,}5 - 1} = -24\text{ cm}$$



c) Como podemos observar en la figura, la imagen es virtual, menor que el objeto y derecha.

53. Datos: $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}33$; $s_1 = 250$ m

La superficie de separación del agua con el aire constituye un dioptrio plano, con $n_1 = 1$ y $n_2 = 1{,}33$. Por tanto:

$$s_2 = \frac{n_2}{n_1}s_1; \quad s_2 = \frac{1{,}33}{1}\cdot 250\ \text{m} = 332{,}5\ \text{m}$$

El buceador ve el avión a una altura de 332,5 m sobre el agua.

54. Datos: $d = 1{,}5$ m; $s_1 = 0{,}5$ m; $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1$

Calculamos la profundidad aparente del pez respecto la superficie:

$$s_2 = \frac{n_2}{n_1}s_1; \quad s_2 = \frac{1}{1{,}33}\cdot 0{,}5\ \text{m} = 0{,}38\ \text{m}$$

Entonces, nosotros lo vemos a una distancia de:

$$s_2 + d = 0{,}38\ \text{m} + 1{,}5\ \text{m} = 1{,}88\ \text{m}$$

55. Datos: $r = -40$ cm (espejo cóncavo); $s_1 = -15$ cm

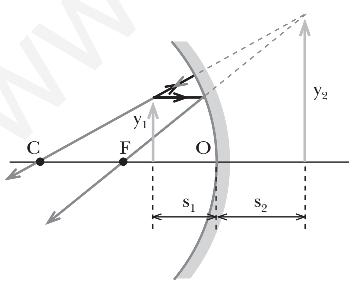
Calculamos la distancia focal del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; \quad f = \frac{-40\ \text{cm}}{2} = -20\ \text{cm}$$

Hallamos la posición de nuestra imagen:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{-20\ \text{cm}} - \dfrac{1}{-15\ \text{cm}}} = 60\ \text{cm}$$



56. Datos: $y_1 = 3$ cm; $r = 10$ cm (espejo convexo); $s_1 = -10$ cm

Calculamos la distancia focal del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; \quad f = \frac{10\ \text{cm}}{2} = 5\ \text{cm}$$

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_1}$$

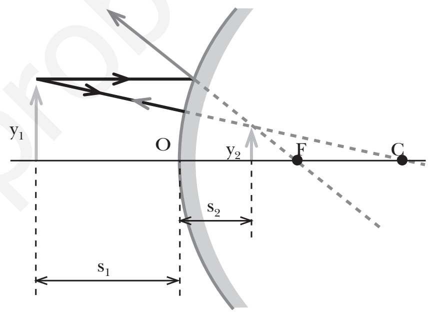
$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{5\ \text{cm}} - \dfrac{1}{-10\ \text{cm}}} = 3{,}33\ \text{cm}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = -y_1\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = -3\ \text{cm}\cdot\frac{3{,}33\ \text{cm}}{-10\ \text{cm}} = 1\ \text{cm}$$

Observamos que la imagen es menor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados y es virtual.



57. Datos: espejo cóncavo, $r < 0$; $A_L = -3$; $s_2 = -10$ cm (imagen real)

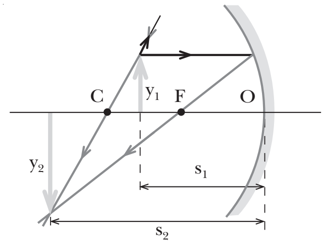
Determinamos la posición del objeto a partir del aumento lateral y la posición de la imagen:

$$A_L = -\frac{s_2}{s_1}; s_1 = -\frac{s_2}{A_L}; \quad s_1 = -\frac{-10\ \text{cm}}{-3} = -3{,}33\ \text{cm}$$

Hallamos ahora el radio de curvatura a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{r}$$

$$r = \frac{2}{\dfrac{1}{s_2} + \dfrac{1}{s_1}}; \quad r = \frac{2}{\dfrac{1}{-10\ \text{cm}} + \dfrac{1}{-3{,}33\ \text{cm}}} = -5\ \text{cm}$$



58. Datos: $f_2 = 8$ cm (lente convergente)

a) $s_1 = -32$ cm

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1};\quad \frac{1}{s_2}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{f_2}$$

$$s_2=\frac{1}{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{f_2}};\quad s_2=\frac{1}{\frac{1}{-32\text{ cm}}+\frac{1}{8\text{ cm}}}=10{,}7\text{ cm}$$

Determinamos el aumento lateral:

$$A_L=\frac{s_2}{s_1};\quad A_L=\frac{10{,}7\text{ cm}}{-32\text{ cm}}=-0{,}33$$

Por ser $s_2>0$, la imagen se forma por intersección de los rayos emergentes y es real. Como el aumento lateral es menor que la unidad en valor absoluto y negativo, la imagen será menor que el objeto e invertida.

b) $s_1=-6$ cm

Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1};\quad \frac{1}{s_2}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{f_2}$$

$$s_2=\frac{1}{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{f_2}};\quad s_2=\frac{1}{\frac{1}{-6\text{ cm}}+\frac{1}{8\text{ cm}}}=-24\text{ cm}$$

Determinamos el aumento lateral:

$$A_L=\frac{s_2}{s_1};\quad A_L=\frac{-24\text{ cm}}{-6\text{ cm}}=4$$

Por ser $s_2<0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos emergentes y es virtual. Como el aumento lateral es mayor que la unidad en valor absoluto y positivo, la imagen será mayor que el objeto y derecha.

59. Datos: lente planoconvexa, $r_1=12{,}5$ cm, $r_2=\infty$; $s_1=-50$ cm; $A_L=1$

a) En una lente convergente, la imagen es de igual tamaño que el objeto si éste se sitúa a una distancia igual al doble de la distancia focal. Por tanto:

$$f_1=\frac{s_1}{2}=\frac{-50\text{ cm}}{2}=-25\text{ cm};\quad f_2=-f_1=25\text{ cm}$$

b) Determinamos la potencia de la lente:

$$P=\frac{1}{f_2};\quad P=\frac{1}{0{,}25\text{ m}}=+4\text{ diop.}$$

c) Hallamos el índice de refracción del vidrio de la lente a partir de la ecuación del fabricante de lentes:

$$\frac{1}{f_2}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{n-1}{r_1}$$

$$\frac{r_1}{f_2}=n-1;\quad n=1+\frac{r_1}{f_2};\quad n=1+\frac{12{,}5\text{ cm}}{25\text{ cm}}=1{,}5$$

60. Datos: $y_1=2$ cm; $P=5$ dioptrías; $s_2=2$ m

a) Determinamos la posición del objeto, teniendo en cuenta que $P=\frac{1}{f_2}$:

$$P=\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1};\quad \frac{1}{s_1}=\frac{1}{s_2}-P$$

$$s_1=\frac{1}{\frac{1}{s_2}-P};\quad s_1=\frac{1}{\frac{1}{2\text{ m}}-5}=-0{,}222\text{ m}=-22{,}2\text{ cm}$$

b) Hallamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral del sistema:

$$A_L=\frac{y_2}{y_1}=\frac{s_2}{s_1};\quad y_2=y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2=2\text{ cm}\cdot\frac{200\text{ cm}}{-22{,}2\text{ cm}}=-18\text{ cm}$$

61. Datos: $f=8$ cm $=0{,}08$ m

Hallamos el aumento de la lupa cuando el ojo está relajado, sin acomodación:

$$A_A=\frac{0{,}25\text{ m}}{f};\quad A_A=\frac{0{,}25\text{ m}}{0{,}08\text{ m}}=3{,}1$$

62. Datos: punto remoto = 2,5 m

a) Si la persona no ve claramente los objetos situados más allá de 2,5 m, sufre miopía.

b) Debe usar lentes de forma que los objetos situados en el infinito, $s_1=-\infty$, tengan su imagen respecto a la lente en el punto remoto de la persona, $s_2=-2{,}5$ m. Imponemos esta condición para hallar la distancia focal de las lentes que debe usar esta persona:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}$$

$$f_2=\frac{1}{\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}};\quad f_2=\frac{1}{\frac{1}{-2{,}5\text{ m}}-\frac{1}{-\infty}}=-2{,}5\text{ m}$$

c) La distancia focal es negativa. Se trata, por tanto, de lentes divergentes.

d) Calculamos la potencia:

$$P=\frac{1}{f_2}=\frac{1}{-2{,}5\text{ m}}=-0{,}4\text{ diop.}$$

63. Datos: punto próximo = 80 cm

a) Si una persona tiene su punto próximo a 80 cm, no puede enfocar objetos situados más cerca de sus ojos que esta distancia. Por tanto, no podrá leer a 25 cm.

b) Para leer a 25 cm necesita unas lentes convergentes. La imagen de un objeto situado a 25 cm debe formarse a una distancia de 80 cm delante de la lente, en el punto próximo del présbita. Determinamos la potencia necesaria para ello:

$$P=\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}$$

$$P=\frac{1}{-0{,}80\text{ m}}-\frac{1}{-0{,}25\text{ m}}=+2{,}75\text{ diop.}$$

64. Datos: f_2 = 0,4 m; n_{aire} = 1; n = 1,52; n_1 = 1,33

Calculamos la longitud focal, f_2', de la lente en el agua a partir de la deducción de la ecuación fundamental de las lentes delgadas para este caso, en función de su distancia focal en el aire.

— La ecuación fundamental del dioptrio para el primero de los que componen la lente es:

$$\frac{n}{s'} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n - n_1}{r_1}$$

donde s' es la posición de la imagen respecto al primer dioptrio, s_1 la distancia objeto y r_1 el radio del dioptrio.

— La imagen respecto al primer dioptrio es objeto para el segundo. Por tanto, la ecuación fundamental del segundo dioptrio se escribe:

$$\frac{n_1}{s_2} - \frac{n}{s'} = \frac{n_1 - n}{r_2}$$

donde s_2 es distancia imagen, s' es la distancia objeto y r_2 el radio del dioptrio.

— Sumamos ambas ecuaciones:

$$\frac{n_1}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = (n - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$n_1\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right) = (n - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

— Para hallar f_2' imponemos que $s_2 = f_2$' cuando $s_1 = -\infty$:

$$n_1\left(\frac{1}{f_2'} - \frac{1}{-\infty}\right) = (n - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{n - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{n - n_1}{n_1\,(n-1)}(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{n - n_1}{n_1\,(n-1)}\,\frac{1}{f_2};\quad f_2' = \frac{n_1\,(n-1)}{n - n_1}\,f_2$$

$$f_2' = \frac{1{,}33 \cdot (1{,}52 - 1)}{1{,}52 - 1{,}33} \cdot 0{,}4\ \text{m} = 1{,}46\ \text{m}$$

65. Datos: lente biconvexa, n = 1,5; r_1 = 0,1 m; r_2 = –0,2 m

a) Hallamos la distancia focal de la lente:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);\quad f_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}$$

$$f_2 = \frac{1}{(1{,}5-1)\left(\dfrac{1}{0{,}1\ \text{m}} - \dfrac{1}{-0{,}2\ \text{m}}\right)} = 0{,}133\ \text{m} = 13{,}3\ \text{cm}$$

b) Si damos la vuelta a la lente, los radios cambiarán de signo, ya que mantendremos el mismo convenio. Pero además, cambiarán de orden, de forma que ahora r_1 = 0,2 m y r_2 = –0,1 m. Entonces:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);\quad f_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}$$

$$f_2 = \frac{1}{(1{,}5-1)\left(\dfrac{1}{0{,}2\ \text{m}} - \dfrac{1}{-0{,}1\ \text{m}}\right)} = 0{,}133\ \text{m} = 13{,}3\ \text{cm}$$

66. Datos: punto próximo = 10 cm; punto remoto = 6 m

a) Para ver el infinito sin acomodación necesita una lente que lo acerque hasta el punto remoto del ojo:

$$s_1 = -\infty \text{ y } s_2 = -6\ \text{m}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1};\quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{-6\ \text{m}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{-6\ \text{m}}$$

$$f_2 = -6\ \text{m}$$

Necesita una lente divergente (focal negativa) con una distancia focal de 6 m.

b) Calculamos el desplazamiento de la imagen si el objeto se mueve desde el infinito hasta 6 m del ojo:

$$s_1 = -\infty \Rightarrow s_2 = -6\ \text{m}$$

$$s_1' = -6\ \text{m} \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1'};\quad \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{s_1'}$$

$$s_2' = \frac{1}{\dfrac{1}{f_2} + \dfrac{1}{s_1'}};\quad s_2' = \frac{1}{\dfrac{1}{-6\ \text{m}} + \dfrac{1}{-6\ \text{m}}} = -3\ \text{m}$$

Por tanto, el desplazamiento de la imagen es desde los 6 m hasta los 3 m.

c) El punto próximo del ojo con la lente será aquella posición del objeto cuya imagen se forma sobre el punto próximo del ojo sin la lente; s_2 = –10 cm:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1};\quad \frac{1}{s_1} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{f_2};\quad s_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{s_2} - \dfrac{1}{f_2}}$$

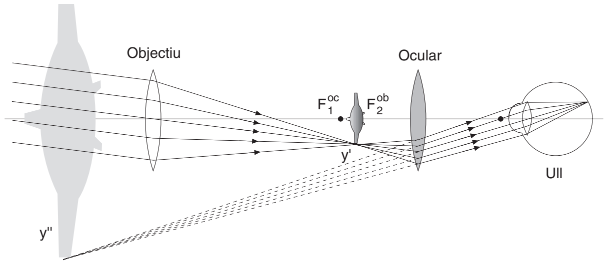
$$s_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{-10\ \text{cm}} - \dfrac{1}{-600\ \text{cm}}} = -10{,}2\ \text{cm} = -0{,}102\ \text{m}$$

El punto próximo del ojo con la lente se encuentra a 0,102 m del ojo. Casi no experimenta variación.

67. Los telescopios son instrumentos ópticos que se utilizan para observar objetos muy distantes, fundamentalmente estrellas y otros cuerpos celestes.

Existen dos tipos de telescopios: los telescopios de refracción y los telescopios de reflexión.

— El telescopio de refracción consta de dos lentes: el objetivo y el ocular. El objetivo debe ser una lente de gran tamaño para recoger la máxima cantidad de luz y de gran distancia focal. Los rayos paralelos procedentes de un objeto situado a distancia infinita se refractan en el objetivo produciendo una imagen real y' situada en el foco del objetivo F_2^{ob}, que está entre el ocular y su foco anterior F_1^{oc}. El ocular actúa como amplificador produciendo una imagen virtual y ampliada y".



— El telescopio de reflexión utiliza como objetivo un espejo cóncavo, generalmente parabólico, en lugar de una lente. Este tipo de telescopio es más utilizado que el de refracción porque es más fácil y económico fabricar grandes espejos que grandes lentes. Además, no presenta aberración esférica ni aberración cromática y, puesto que los rayos luminosos no tienen que atravesar ninguna lente, la absorción de radiación de longitudes de onda cortas es prácticamente nula. En cambio, su principal inconveniente es que la imagen resulta mal enfocada cuando el objeto no se encuentra en una dirección muy próxima al eje óptico, defecto llamado aberración de coma.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 291)

1. Convenio de signos para el dioptrio esférico:

   a) Las distancias objeto e imagen son positivas a la derecha del polo del dioptrio y negativas a su izquierda.

   b) El radio de curvatura del dioptrio es positivo cuando el centro de curvatura se encuentra a la derecha del dioptrio y negativo en caso contrario.

   c) El ángulo que forma un rayo con el eje del dioptrio o eje óptico es positivo si para hacerlo coincidir con el eje por el camino más corto ha de girar en sentido antihorario. Es negativo en caso contrario.

2. Ecuación fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

r: radio del dioptrio esférico.

n_1: índice de refracción del medio situado a la izquierda.

n_2: índice de refracción del medio situado a la derecha.

s_1: distancia objeto, distancia del objeto al polo del dioptrio.

s_2: distancia imagen, distancia de la imagen desde el polo del dioptrio.

La ecuación del dioptrio plano se deduce suponiendo que $r = \infty$:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_2 - n_1}{\infty} = 0; \quad \frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = 0$$

Para deducir la ecuación del espejo plano se impone $n_1 = n$ y $n_2 = -n$:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = 0; \quad \frac{n}{s_2} = -\frac{n}{s_1}; s_2 = -s_1$$

3. Si un sistema óptico tiene aumento lateral negativo, la imagen final está invertida. Si el aumento es positivo, la imagen está derecha. Si dicho aumento es menor que la unidad en valor absoluto, la imagen es menor que el objeto.

4. Ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

r_1: radio de la primera superficie de la lente.

r_2: radio de la segunda superficie de la lente.

n: índice de refracción del medio situado entre las dos superficies.

s_1: distancia objeto, distancia del objeto al centro óptico de la lente.

s_2: distancia imagen, distancia de la imagen al centro óptico de la lente.

La ecuación del fabricante de lentes se deduce imponiendo que para el objeto situado en $s_1 = -\infty$ la imagen se forma en el foco imagen, $s_2 = f_2$:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}$$

5. Datos: $|r| = 20$ cm; $s_1 = -15$ cm; $y_1 = 0{,}8$ cm

   a) Espejo cóncavo, r = –20 cm. Hallamos la posición de la imagen:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{r}; \quad \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\frac{2}{-20\text{ cm}} - \frac{1}{-15\text{ cm}}} = -30\text{ cm}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

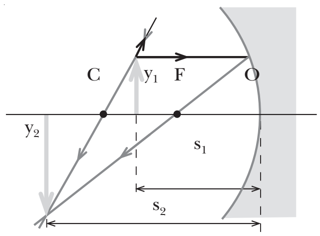
$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = -y_1\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = -0{,}8\text{ cm}\cdot\frac{-30\text{ cm}}{-15\text{ cm}} = -1{,}6\text{ cm}$$

La imagen es mayor que el objeto. El signo menos indica que la imagen aparece invertida y, como $s_2 < 0$, se forma por intersección de los rayos reflejados convergentes y es real.

Para dibujar el diagrama de rayos necesitamos calcular la distancia focal del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; \quad f = \frac{-20\text{ cm}}{2} = -10\text{ cm}$$



b) Si el espejo es convexo, r = 20 cm. Entonces:

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{r}$$

$$s_2 = \frac{1}{\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{\dfrac{2}{20\text{ cm}} - \dfrac{1}{-15\text{ cm}}} = 6\text{ cm}$$

Calculamos el tamaño de la imagen a partir del aumento lateral:

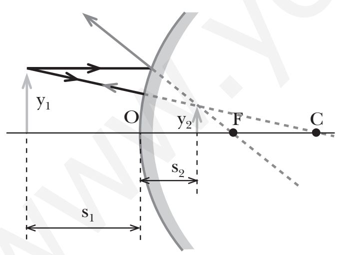
$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{s_2}{s_1}; \quad y_2 = -y_1\,\frac{s_2}{s_1}$$

$$y_2 = -0{,}8\text{ cm} \cdot \frac{6\text{ cm}}{-15\text{ cm}} = 0{,}32\text{ cm}$$

La imagen es menor que el objeto y del mismo signo, por lo tanto, se encuentra derecha. Además, como $s_2 > 0$, la imagen se forma por intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados y es virtual. Esto siempre es así en el espejo convexo.

Para dibujar el diagrama de rayos necesitamos calcular la distancia focal del espejo:

$$f = \frac{r}{2}; \quad f = \frac{20\text{ cm}}{2} = 10\text{ cm}$$



6. Datos: y_1 = 2 cm; d = 3 m; y_2 = –0,5 m = –50 cm

   a) Para obtener una imagen real sobre la pantalla debemos utilizar una lente convergente. Como, además, queremos que la imagen sea mayor, es necesario situar el objeto entre el foco y una distancia igual al doble de la distancia focal. En este caso la imagen siempre está invertida. Por tanto, y_2 = –50 cm.

   La lente se situará entre la diapositiva y la pantalla. Por tanto, si situamos la lente a una distancia x de la pantalla, $s_1 = x - d$ y $s_2 = x$. Entonces, si imponemos el aumento deseado:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2}{s_1}; \quad \frac{-50\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \frac{x}{x - 300\text{ cm}}$$

$$-25 \cdot (x - 300\text{ cm}) = x$$

$$26x = 7\,500\text{ cm}; \quad x = \frac{7\,500\text{ cm}}{26} = 287{,}5\text{ cm}$$

   Por tanto, debemos situar la lente a 287,5 cm de la pantalla.

   b) Calculamos la potencia de la lente:

$$s_2 = x = 287{,}5\text{ cm} = 2{,}875\text{ m}$$

$$s_1 = x - d;\ s_1 = 2{,}875\text{ m} - 3\text{ m} = -0{,}115\text{ m}$$

$$P = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}$$

$$P = \frac{1}{2{,}875\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}115\text{ m}} = +9\text{ diop.}$$

7. Datos: P = 10 dioptrías; s_1 = –2 m

   Los objetivos de las cámaras fotográficas deben ser lentes convergentes para que la imagen formada sea real. Por tanto, la potencia y la distancia focal son positivas.

   Determinamos la distancia a la que se forma la imagen:

$$P = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}; \quad \frac{1}{s_2} = P + \frac{1}{s_1}$$

$$s_2 = \frac{1}{P + \dfrac{1}{s_1}}; \quad s_2 = \frac{1}{10\text{ m}^{-1} + \dfrac{1}{-2\text{ m}}} = 0{,}105\text{ m} = 10{,}5\text{ cm}$$

   Debemos situar la película a 10,5 cm del centro óptico del objetivo.

12. Relatividad

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 295)

- Sí es posible, porque los estados de movimiento o reposo se determinan respecto a un sistema de referencia concreto. Por tanto, dependiendo del sistema de referencia, un cuerpo puede estar en movimiento o en reposo.

  Por ejemplo, una persona sentada en un tren está en reposo respecto del sistema de referencia del tren, pero está en movimiento respecto de un sistema de referencia situado en la estación.

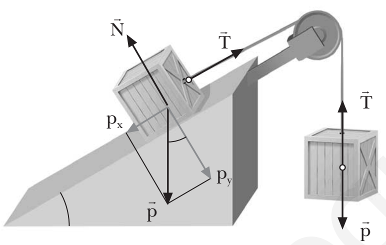
- $\vec{r}(t) = 15\,\vec{i} - 25t^2\,\vec{j} + (t^3 - 2t)\,\vec{k}$

  Derivamos respecto al tiempo para hallar la velocidad:

  $$\vec{v}(t) = -50t\,\vec{j} + (3t^2 - 2)\,\vec{k}$$

  Derivamos de nuevo para obtener la aceleración:

  $$\vec{a}(t) = -50\,\vec{j} + 6t\,\vec{k}$$

- 

  — La tercera ley de Newton o principio de acción y reacción.

  La fuerza que aparece es la *normal,* perpendicular a la superficie, que impide que el cuerpo se hunda.

  — Aplicamos la segunda ley de Newton a los cuerpos A y B para calcular su aceleración y saber si se moverán.

$$\begin{cases} T - m_A\,g = m_A\,a \\ m_B\,g \operatorname{sen}\alpha - T = m_B\,a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_A\,a + m_A\,g \\ T = m_B\,g \operatorname{sen}\alpha - m_B\,a \end{cases}$$

$$m_A\,a + m_A\,g = m_B\,g \operatorname{sen}\alpha - m_B\,a$$

$$m_B\,g \operatorname{sen}\alpha - m_A\,g = m_A\,a + m_B\,a$$

$$(m_A + m_B)\,a = (m_B \operatorname{sen}\alpha - m_A)\,g$$

$$a = \frac{m_B \operatorname{sen}\alpha - m_A}{m_A + m_B}\,g$$

$$a = \frac{25\text{ kg} \cdot \operatorname{sen} 30° - 10\text{ kg}}{25\text{ kg} + 10\text{ kg}} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

  El cuerpo A se moverá hacia arriba con una aceleración de 0,07 m/s^2.

  — La segunda ley de Newton.

- Datos: m = 25 g = 0,025 kg; $\vec{v} = 25\,000\,\vec{k}$ m/s

  Calculamos la cantidad de movimiento:

  $$\vec{p} = m\,\vec{v}; \quad \vec{p} = 0{,}025\text{ kg} \cdot 25\,000\,\vec{k}\text{ m/s} = 625\,\vec{k}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

  Calculamos la energía cinética:

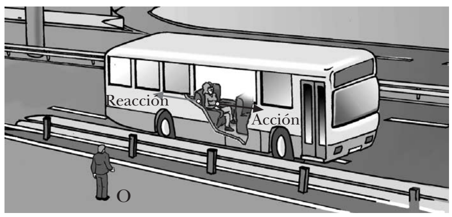
  $$Ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}025\text{ kg} \cdot (25\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

  $$Ec = 7{,}8125 \cdot 10^6\text{ J}$$

1. SISTEMAS DE REFERENCIA (pág. 296)

1. *a)* El autobús.

   Sí, la fuerza que los pasajeros ejercen sobre el autobús.



   b) Una fuerza ficticia que me impulsa hacia atrás.

   No aparece ninguna fuerza de reacción.

2. Un sistema de referencia inercial es aquel que cumple la primera ley de Newton o principio de inercia, al contrario de lo que ocurre en los sistemas no inerciales.

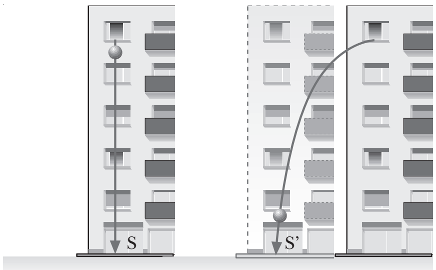
   Para distinguirlos es necesario observar si aparecen fuerzas ficticias, es decir, fuerzas que no tengan reacción. En este caso, estamos ante un sistema no inercial; en el caso contrario, se trata de un sistema inercial.

2. LA RELATIVIDAD EN LA MECÁNICA CLÁSICA
(págs. 298 y 299)

3. Ven la trayectoria igual que antes, ya que tanto el sistema de referencia del tren con MRU como el de la estación son sistemas de referencia inerciales.

4. *a)* El sistema S corresponde a la persona sentada en el banco y el S' al observador situado en el coche.

   b)



5. Utilizamos un sistema de referencia fijo en el suelo.

   — No, porque hemos cambiado el sistema de referencia. En el nuevo sistema, el primer coche está parado y el segundo circula a 38 km/h. Por tanto, el segundo coche circula a mayor velocidad que el primero.

6. Según las transformaciones de Galileo, la aceleración de un cuerpo es la misma en todos los sistemas inerciales; por tanto, la aceleración en S' es de 10 m/s^2.

7. Datos: v_2 = 80 km/h; v_1 = 90 km/h

   a) Calculamos la velocidad relativa:

   $$u = (v_1 - v_2) = 90 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h} = 10 \text{ km/h}$$

   b) Si circulan en sentidos contrarios, sus velocidades son:

   $$v_1 = 90 \text{ km/h}; \; v_2 = -80 \text{ km/h}$$

   $$u = (v_1 - v_2) = 90 \text{ km/h} - (-80 \text{ km/h}) = 170 \text{ km/h}$$

   c) Los dos observadores medirán la misma velocidad para un móvil en el caso de que la velocidad relativa entre ellos sea nula.

8. Datos: v = 349 m/s; v′ = 340 m/s

   a) La velocidad del viento respecto a la Tierra será la velocidad relativa entre el sistema de referencia Tierra y el sistema de referencia viento.

   $$u = (v - v') = 349 \text{ m/s} - 340 \text{ m/s} = 9 \text{ m/s}$$

   b) Primero hemos de calcular el tiempo transcurrido, que será el mismo en ambos sistemas. Para ello, suponemos $x_0 = x_0' = 0$ y aplicamos la ecuación del MRU en el sistema S:

   $$x = v\,t; \quad t = \frac{x}{v}; \quad t = \frac{20\,000 \text{ m}}{349 \text{ m/s}} = 57{,}3 \text{ s}$$

   A continuación, aplicamos la ecuación del MRU, en el sistema S:

   $$x' = v'\,t; \quad x' = 340 \text{ m/s} \cdot 57{,}3 \text{ s} = 19\,482 \text{ m}$$

   $$x' = 19\,482 \text{ km}$$

Cuadro del margen (pág. 297)

La Tierra puede considerarse un sistema inercial en un trayecto por carretera y en el ascenso al Everest. Pero no puede ser considerada como tal en el descenso y aterrizaje de una nave espacial y en el desplazamiento de una tormenta por Asia.

Transformaciones inversas (pág. 299)

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = y \\ t' = t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array}$$

3. LIMITACIONES DE LA FÍSICA CLÁSICA
(págs. 300 y 301)

9. Los físicos del siglo XIX suponían que el universo estaba lleno de éter porque creían que la luz necesitaba un medio material para propagarse. Y, como la luz llega a todo el universo, este medio, el éter, debía de llenarlo todo.

10. Las transformaciones de Galileo no afectan a las leyes de Newton. Pero la física clásica considera que sí afectan a las leyes de Maxwel, ya que éstas son válidas únicamente en un sistema en reposo absoluto o sistema del éter, el único sistema en que la velocidad de la luz es c.

11. Respuesta sugerida:

    El primer esfuerzo por medir la velocidad de la luz se debe a Galileo. Éste intentó medirla situando a dos personas, en dos colinas distantes 1 km, cada una con una linterna. En el momento en que destapaba la linterna, el otro debía destapar la suya. El primero debía medir el tiempo transcurrido entre estas dos acciones. Este método no dio un valor razonable de la velocidad de la luz, dada la gran celeridad de ésta.

    En 1676 Ole Römer calculó la velocidad de la luz observando los tiempos de ocultación de los satélites de Júpiter.

    Cuando la Tierra se acerca a Júpiter, el eclipse se produce antes de lo esperado y, cuando la Tierra se aleja, se produce después. Midiendo las diferencias de tiempo entre el primer caso y el segundo se puede determinar la velocidad de la luz.

    La primera medida no astronómica de la velocidad de la luz fue realizada por el físico francés A. Fizeau en 1849 (método de la rueda dentada). El también físico francés J. Foucault mejoró la medida de la velocidad de la luz en 1850 (método del espejo giratorio).

    Los dos métodos anteriores se basaron en dividir la luz en destellos, después de rebotar en un espejo lejano, y medir su desfase con los destellos incidentes.

El método actual se basa en principios similares, aunque los destellos los proporciona un oscilador eléctrico (método de la célula de Kerr).

12. **Observación.** La Tierra se mueve en el universo.

    Hipótesis. La Tierra se mueve con una velocidad determinada respecto de un sistema en reposo absoluto denominado sistema del éter.

    Experiencia. El experimento de Michelson-Morley intentó medir la variación de la velocidad de la luz debida al movimiento de la Tierra para, de esta manera, hallar la velocidad de la Tierra respecto al sistema del éter.

    Resultado. La velocidad de la luz respecto al éter no depende del movimiento de la Tierra.

    Nueva hipótesis, coherente con los resultados experimentales. La velocidad de la luz es constante e independiente del movimiento del observador y del movimiento de la fuente emisora. La comprobación experimental de las hipótesis permite descartar hipótesis falsas y elaborar otras nuevas coherentes con los datos experimentales.

13. El sistema de referencia S' corresponde a la Tierra.

    El sistema de referencia S' corresponde al éter.

    Por tanto, la velocidad de la luz respecto a S' se calcula de la siguiente manera:

    Recorrido $P \rightarrow M_1$:

    $$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = \vec{c} - \vec{u}$$

    Recorrido $M_1 \rightarrow P$:

    $$\vec{v}' = \vec{v} - (-\vec{u}) = \vec{c} + \vec{u}$$

14. *a)* No, no puede explicarse. Si la luz es una onda parecida al sonido, necesita un medio material de propagación y su velocidad se suma, o se resta, a la de este medio.

    b) No puede existir un sistema del éter, ya que la velocidad de la luz no depende del sistema de referencia en que se mida. Así, no es necesario un sistema de referencia privilegiado, el sistema del éter, y la luz no nos permite medir velocidades absolutas.

    c) Estos resultados permiten concluir que la hipótesis inicial no era correcta. Aunque puede ocurrir que la resolución de los instrumentos de medida sea insuficiente, que el éter se mueva con la Tierra, o que los objetos se contraigan en el sentido del movimiento, hay que estar abierto para aceptar nuevas hipótesis que sí estén de acuerdo con los resultados experimentales.

4. MECÁNICA RELATIVISTA: RELATIVIDAD ESPECIAL
(págs. 302, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 310 y 311)

15. Según las transformaciones de Galileo, si dos sistemas de referencia S' y S se mueven con una velocidad relativa v', cada uno mide una velocidad de la luz diferente: si el primero mide una velocidad c, el segundo mide una velocidad c + u. Por tanto, las transformaciones de Galileo no dejan invariante el valor de la velocidad de la luz.

16. **Postulado 1.** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

    Este postulado señala que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes en la descripción de cualquier fenómeno físico.

    Postulado 2. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, cualesquiera que sean las velocidades de la fuente y del observador.

    Este postulado nos indica que el valor de la velocidad de la luz, medido desde un sistema inercial, es siempre el mismo.

    Estos postulados no son compatibles con la teoría del éter, ya que considera equivalentes todos los sistemas de referencia inerciales y, por tanto, no cree en la existencia de ningún sistema de referencia absoluto.

    — El valor de la velocidad de la luz no cambia tanto si nos dirigimos hacia la fuente luminosa como si nos alejamos de ella (segundo postulado). Así pues, no podemos aplicar las transformaciones de Galileo a la velocidad de la luz.

17. Datos: u = 0,6c

    Calculamos las constantes β, $\frac{\beta}{c}$ y γ:

    $$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}6; \quad \frac{\beta}{c} = 2 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m}$$

    $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$$

    Transformaciones de Galileo:

    $$x' = x - 0{,}6c\ t$$
    $$y' = y$$
    $$z' = z$$
    $$t' = t$$

    Transformaciones de Lorentz:

    $$x' = 1{,}25\ (x - 0{,}6c\ t)$$
    $$y' = y$$
    $$z' = z$$
    $$t' = 1{,}25\ (t - 2 \cdot 10^{-9}\ x)$$

    No, las transformaciones no son equivalentes.

18. No es necesario utilizar las transformaciones de Lorentz en la vida cotidiana, ya que las velocidades a que nos movemos son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por tanto:

    $$\beta = \frac{u}{c} \approx 0 \quad y \quad \gamma \approx 1$$

Entonces, las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo.

19. Datos: x = 100 m; t = 10 s; u = 0,5c

$$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}5; \quad \frac{\beta}{c} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}155$$

Calculamos la nueva distancia y el tiempo gracias a las transformaciones de Lorentz:

$$x' = 1{,}155\ (x - 0{,}5c\ t)$$

$$x' = 1{,}155\ (100\ m - 0{,}5 \cdot c \cdot 10\ s)$$

$$x' = -1{,}73 \cdot 10^9\ m$$

La distancia recorrida es el valor absoluto del resultado: $1{,}73 \cdot 10^9$ m

Calculamos el tiempo:

$$t' = 1{,}155\left(10\,s - 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m} \cdot 100\,m\right) = 11{,}5\ s$$

20. *a)* Sí, ya que el tiempo es el mismo para todos los sistemas de referencia.

b) No, ya que el tiempo depende del sistema de referencia.

21. Si la velocidad del globo es cercana a la velocidad de la luz, desde la tierra no verán simultáneamente los relámpagos. Primero verán el que ha caído bajo el globo y, después, el que ha caído sobre el globo.

22. Datos: l' = 60 m; d = $\frac{l'}{2}$ = 30 m; u = 0,8c

a) El observador fijo en la Tierra ve los rayos simultáneamente, pues la velocidad de la luz es constante y ambos rayos recorren la misma distancia.

b) El vagón situado en el sistema de referencia S' se mueve hacia el relámpago anterior y se aleja del posterior. Por ello, verá antes el relámpago anterior. Ambos relámpagos no serán simultáneos para él.

Si el primer relámpago llega al pasajero cuando ha pasado un tiempo t', ha recorrido un espacio: x' = u t'; por tanto, el relámpago ha recorrido el espacio: $d - u\ t_1$

Calculamos el tiempo que tarda el relámpago en recorrer este espacio:

$$d - u\ t_1 = c\ t_1;\ d = c\ t_1 + u\ t_1;\ d = (c + u)\ t_1$$

$$t_1 = \frac{d}{c+u} = \frac{d}{c+0{,}8c} = \frac{30\ m}{1{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}$$

$$t_1 = 5{,}56 \cdot 10^{-8}\ s$$

En cambio, el relámpago posterior ha recorrido un espacio:

$$x + u\ t_2$$

siendo t_2 el tiempo que tarda en llegar el segundo relámpago.

Calculamos t_2 a partir de la expresión:

$$x + u\ t_2 = c\ t_2$$

$$t_2 = \frac{x}{c-u} = \frac{d}{c-0{,}8c} = \frac{30\ m}{0{,}2 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}$$

$$t_2 = 5 \cdot 10^{-7}\ s$$

La diferencia de tiempo que percibe O' es:

$$t_2 - t_1 = 5 \cdot 10^{-7}\ s - 5{,}56 \cdot 10^{-8}\ s$$

$$t_2 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ s$$

23. Datos: Δt = 5 min = 300 s; $\beta = \frac{u}{c} = 0{,}7$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}4$$

Calculamos Δt' para el viajero:

$$\Delta t' = \gamma\ \Delta t = 1{,}4 \cdot 300\,s = 420\,s$$

$$420\,s \cdot \frac{1\ min}{60\,s} = 7\ min$$

24. Datos: Δt' = 8,4 s; u = 0,8c; $\beta = \frac{u}{c} = 0{,}8$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos el período visto en la Tierra:

$$\Delta t = \gamma\ \Delta t'; \quad \Delta t = 1{,}67 \cdot 8{,}4\,s = 14\,s$$

b) El período propio se mide desde un sistema solidario con el péndulo; en nuestro caso, el tren. Por tanto, el período propio será de 8,4 s.

25. Datos: u = 0,6c; Δx' = 340 m; Δy' = 21 m

Calculamos las constantes β y γ:

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{0{,}6c}{c} = 0{,}6; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$$

Calculamos las longitudes que mediría un observador fijo en la Tierra:

$$\Delta y = \Delta y' = 21\ m\ \text{de alto}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\ \Delta x'; \quad \Delta x = \frac{1}{1{,}25}\ 340\ m = 272\ m\ \text{de largo}$$

26. Datos: u = 0,8c; Δx = 150 m; Δy = 18 m

Calculamos las constantes β y γ:

$$\beta = \frac{0{,}8c}{c} = 0{,}8; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}667$$

Calculamos las longitudes que mediría un observador fijo en la Tierra:

$$\Delta y' = \Delta y = 18\ m\ \text{de alto}$$

$$\Delta x' = \gamma\ \Delta x = 1{,}667 \cdot 150\ m = 250\ m\ \text{de largo}$$

27. *a)* Datos: $\vec{u} = (-0{,}9c, 0)$; $\vec{v} = (0{,}9c, 0)$

$$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}9 \text{ para las dos naves}$$

Calculamos v’ a partir de la fórmula relativista de adición de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - (-0{,}9c)}{1 - \frac{0{,}9c\,(-0{,}9c)}{c^2}}$$

$$v'_x = 0{,}994c$$

Por tanto: $\vec{v}' = (0{,}994c, 0)$

b) $\vec{u} = (-0{,}9c, 0)$; $\vec{v} = (0, 0{,}9c)$

Calculamos v’ a partir de la fórmula de la adición relativista de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - 0}{1 - \frac{0 \cdot 0{,}9c}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{1 - \frac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c\left(\sqrt{1-0{,}9^2}\right)}{1 - \frac{0 \cdot 0{,}9c}{c^2}}$$

$$v'_y = 0{,}392c$$

La velocidad de la nave A, vista desde B, será (0,9c, 0,392c).

28. Respuesta sugerida:

Aspectos sorprendentes de la mecánica relativista:

— La longitud de los cuerpos depende del sistema de referencia en que se miden.

— El tiempo también depende del sistema de referencia en que lo midamos.

— La suma de velocidades relativista no es una suma de las componentes de las velocidades iniciales.

— La simultaneidad depende del sistema de referencia desde el que miro los sucesos.

Simultaneidad

Mecánica clásica:

— La simultaneidad no depende del sistema de referencia desde el que observemos los sucesos, ya que el tiempo es el mismo para todos los observadores.

Mecánica relativista:

— Dos sucesos simultáneos en un sistema de referencia no tienen por qué serlo en otro.

Dilatación del tiempo

Mecánica clásica:

— El transcurso del tiempo es independiente del observador que lo mida.

Mecánica relativista:

— La dilatación del tiempo es consecuencia de las transformaciones de Lorentz.

Contracción de longitudes

Mecánica clásica:

— La longitud de un cuerpo no depende del observador que lo mida.

Mecánica relativista:

— Debido a las transformaciones de Lorentz, un cuerpo situado en un sistema inercial parece contraído si se observa desde otro sistema de referencia inercial en movimiento respecto al primero, aunque únicamente en la dirección del desplazamiento relativo.

Adición de velocidades

Mecánica clásica:

— La adición de velocidades se efectúa como suma vectorial de las velocidades iniciales. Por tanto, si tiramos una pelota con velocidad c desde un tren que viaja a la velocidad de la luz c, la pelota saldría disparada con velocidad 2c.

Mecánica relativista:

— A causa de las transformaciones de Lorentz, la adición de velocidades relativista no es suma vectorial de las velocidades iniciales. No podríamos, en este caso, tirar una pelota con velocidad c porque ningún cuerpo con masa puede alcanzarla.

29. Al acelerar 1 g de oro hasta una velocidad de 0,9c, la mecánica relativista determina que un observador en reposo que vea el oro moviéndose a 0,9c no lo verá con una masa de 1 g, sino con una de 2,3 g. Pero esto no significa que aumente su número de átomos, que seguirá siendo siempre el mismo, sino que la masa de cada átomo, vista en movimiento a esa velocidad, aumenta en un factor 2,3.

30. *a)* Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; v = 0,9c

Calculamos β y γ, y la masa vista desde el observador en reposo:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}9; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2{,}294$$

$$m = \gamma\, m_e = 2{,}294 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} = 2{,}09 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$$

b) Datos: v = 0,99c

Determinamos β y γ para hallar la masa relativista:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}99; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}089$$

$$m = \gamma\, m_e = 7{,}089 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} = 6{,}45 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$$

c) Datos: v = 250 m/s

Para calcular γ, tomaremos $c = 3 \cdot 10^8\ m{\cdot}s^{-1}$:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{250\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 8{,}33 \cdot 10^{-7}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1; \quad m \approx m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

La velocidad en este caso es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, por lo que los efectos relativistas son despreciables y la masa es prácticamente la misma que en reposo.

31. Datos: $m_0 = 270$ kg; $v = 0{,}8c$

a) Consideramos el Sol en reposo y el meteorito moviéndose respecto a él a $v = 0{,}8c$. Las constantes β y γ serán:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}8; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}667$$

y la masa del meteorito:

$$m = \gamma\, m_0 = 1{,}667 \cdot 270\ \text{kg} = 450\ \text{kg}$$

b) La masa propia del meteorito es su masa en reposo:

$$m_0 = 270\ \text{kg}$$

c) Si queremos que la masa en movimiento parezca el doble de la masa en reposo, debemos imponer $m = 2\ m_0$, de donde se deduce que $\gamma = 2$. Entonces, obtendremos la velocidad a partir de β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$$

Despejando β:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}} = 0{,}866$$

Como sabemos que $\beta = \frac{u}{c}$:

$$v = \beta\, c = 0{,}866c$$

Es decir, la masa parecerá el doble de la masa en reposo si se mueve a un 86,6 % de la velocidad de la luz.

32. Datos: $m_0 = 5\ 000$ kg; $u = 0{,}9c$; $\beta = \frac{u}{c} = 0{,}9$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29$$

Calculamos la masa relativista:

$$m = \gamma\, m_0 = 2{,}29 \cdot 5\ 000\ \text{kg} = 11\ 450\ \text{kg}$$

Calculamos el incremento de masa:

$$\Delta m = m - m_0 = 11\ 450\ \text{kg} - 5\ 000\ \text{kg} = 6\ 450\ \text{kg}$$

— Aplicamos la expresión de la energía cinética para hallar la energía suministrada:

$$Ec = \Delta m\, c^2 = 6\ 450\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$Ec = 5{,}8 \cdot 10^{20}\ \text{J}$$

33. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $u = 0{,}3c$; $\beta = 0{,}3$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}3^2}} = 1{,}048$$

Calculamos el incremento de masa:

$$m = \gamma\, m_0 = 1{,}048 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$m = 9{,}54 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$\Delta m = m - m_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-32}\ \text{kg}$$

El incremento de energía será:

$$E = \Delta m\, c^2 = 3{,}96 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

El incremento de energía cinética clásica será:

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}\, m_c\, v^2 = \frac{1}{2}\, m_c\, (0{,}3c)^2$$

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (0{,}3 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$\Delta Ec = 3{,}69 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

Las dos energías son parecidas debido a que la velocidad final del electrón es pequeña respecto a la velocidad de la luz.

34. La energía de un cuerpo en reposo no es nula desde el punto de vista relativista, ya que tiene una energía debida a su masa en reposo e igual a $m_0\, c^2$.

35. Al proporcionar energía a un cuerpo, éste la utiliza para aumentar su velocidad y su masa. Así, parece posible aumentar la masa de un cuerpo proporcionándole energía. Sin embargo, cada vez necesitará más energía para aumentar su masa y su velocidad:

$$m = \gamma\, m_0$$

36. $m_{01} = m_{02} = 0{,}003$ kg

$$v_1 = v_2 = 0{,}8c; \ \beta = \frac{v'}{c} = 0{,}8$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos la masa relativista antes del choque:

$$m_1 = m_2 = \gamma\, m_0 = 1{,}67 \cdot 0{,}003\ \text{kg}$$

$$m_1 = m_2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} = 5\ \text{g}$$

b) Calculamos la energía de las dos partículas antes del choque:

$$E_1 = \Delta m_1\, c^2 = 0{,}002\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$E_1 = 1{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{J}$$

$$E_2 = \Delta m_2\, c^2 = 1{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{J}$$

c) La masa final será la suma de las masas relativistas:

$$M_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{E_1 + E_2}{c^2} = \frac{m_1\, c^2 + m_2\, c^2}{c^2}$$

$$M_0 = m_1 + m_2 = 5\ \text{g} + 5\ \text{g} = 10\ \text{g}$$

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 312)

a) Respuesta sugerida:

El problema principal es que la idea puede ser falsa o parcialmente incorrecta y no ajustarse, por tanto, a la realidad.

b) Respuesta sugerida:

No, las teorías científicas de Newton fueron un gran avance para la ciencia y para la humanidad. De hecho, las teorías de Einstein son las únicas válidas para los cuerpos con velocidades próximas a la de la luz pero se reducen a las ecuaciones de Newton para velocidades más pequeñas.

c) Respuesta sugerida:

Es importante destacar que, por mucho que una teoría se ajuste a los hechos experimentales, siempre puede existir un nuevo experimento o descubrimiento que exija una teoría más completa. También ha de tenerse en cuenta que es necesario que esta teoría más completa incluya la anterior como caso particular.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 314 y 315)

37. Datos: $\vec{u} = (0{,}7c, 0)$; $\vec{v}' = (0{,}8c, 0)$

— Aplicamos la ley de adición de velocidades clásica:

$$v_x = v_x' + u_x = 0{,}7c + 0{,}8c = 1{,}5c$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} = (1{,}5c,\ 0)$$

Por tanto, el electrón saldría despedido a una velocidad mayor que la de la luz.

— Aplicamos la adición relativista de velocidades:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}}$$

$$v_x'\left(1 - \frac{v_x\, u}{c^2}\right) = v_x - u$$

$$v_x' - v_x \frac{v_x'\, u}{c^2} = v_x - u$$

$$v_x' + u = v_x + v_x \frac{v_x'\, u}{c^2}$$

$$v_x' + u = v_x\left(1 - \frac{v_x'\, u}{c^2}\right)$$

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \dfrac{v_x'\, u}{c^2}} = \frac{0{,}8c + 0{,}7c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot 0{,}7c}{c^2}} = 0{,}962c$$

Por tanto, la velocidad respecto al laboratorio es:

$$\vec{v} = (0{,}962c, 0)$$

38. Datos: $\vec{u} = (0{,}8c, 0)$; $\vec{v}' = (0, 0{,}4c)$; $\beta = \dfrac{u}{c} = 0{,}8$

Debemos hallar la velocidad v del módulo espacial respecto a la Tierra:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \dfrac{v_x'\, u}{c^2}} = \frac{0 + 0{,}8c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot 0}{c^2}} = 0{,}8c$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}}; \quad v_y'\left(1 - \frac{v_x\, u}{c^2}\right) = v_y\sqrt{1-\beta^2}$$

$$v_y = v_y' \frac{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0{,}4c \frac{1 - \dfrac{0{,}8c \cdot 0{,}8c}{c^2}}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = 0{,}24c$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (0{,}8c, 0{,}24c)$$

39. Datos: $\Delta t' = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s; v = 0,9c; u = v = 0,9 c; $\beta = 0{,}9$

a) Aplicamos la dilatación temporal:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \Delta t = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{s}}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} = 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

Calculamos la distancia recorrida:

$$x = v\,\Delta t = 0{,}9c \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

$$x = 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{s} = 16{,}2\ \text{m}$$

b) Desde el punto de vista del pion, el laboratorio se mueve a 0,9c. Para determinar la distancia recorrida por el pion en S' aplicamos la contracción de longitudes:

$$x' = x \cdot \sqrt{1-\beta^2} = 16{,}2\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - 0{,}9^2} = 7{,}1\ \text{m}$$

40. Datos: v = 0,95c; $\beta = 0{,}95$; $\Delta x = 2$ m; $\Delta y = 1$ m; $\Delta t = 6{,}4$ s

a) Aplicamos la fórmula de contracción de longitudes:

$$\Delta x' = \Delta x\ \sqrt{1-\beta^2} = 2\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - 0{,}95^2}$$

$$\Delta x' = 0{,}6\ \text{m de largo}$$

$$\Delta y' = \Delta y = 2\ \text{m de ancho}$$

b) Calculamos el tiempo visto desde un observador de la estación, Δt'. Tenemos en cuenta que éste habrá observado la contracción relativista del tiempo según la fórmula relativista:

$$\Delta t' = 6{,}4\ \text{s}$$

$$\Delta t = \Delta t'\ \sqrt{1-\beta^2} = 6{,}4\ \text{s} \cdot \sqrt{1 - 0{,}95^2} = 2\ \text{s}$$

41. Datos: E = 500 N/C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Calculamos el valor de la fuerza eléctrica:

$$\left|\vec{F}\right| = \left|Q\ E\right| = \left|-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 500\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\right|$$

$$\left|\vec{F}\right| = 8 \cdot 10^{-17}\ \text{N}$$

b) Aplicamos el teorema del impulso en la dirección del movimiento:

$$F\ t = \Delta p = m_0\ c - m_0\ v_0;\ F\ t = m_0\ c$$

$$t = \frac{m_0\ c}{F} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{8 \cdot 10^{-17}\ \text{N}}$$

$$t = 3{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

c) Aplicamos de nuevo el teorema del impulso, teniendo en cuenta que en la mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\ t = m\ v;\ \text{donde } v = c\ \beta \text{ y } m = \gamma\ m_0$$

$$F\ t = \frac{m_0\ c\ \beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \frac{F^2\ t^2}{m_0^{\ 2}\ c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

Despejamos β y sustituimos los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{m_0^{\ 2}\ c^2}{F^2\ t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})^2\ (3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1})^2}{(8 \cdot 10^{-17}\ \text{N})^2\ (3{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{s})^2}}} = 0{,}71$$

El electrón alcanza el 71 % de la velocidad de la luz.

42. $E = 1\,000$ N/C; $t = 1$ ms $= 10^{-3}$ s; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Calculamos el valor de la fuerza eléctrica:

$$F = Q\ E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1\,000\ \text{N/C}$$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

b) Para calcular la velocidad final del protón aplicamos de nuevo el teorema del impulso, teniendo en cuenta que en la mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\ t = m\ v,\ \text{donde } v = c\ \beta \text{ y } m = \beta\ m_0$$

$$F\ t = \frac{m_0\ c\ \beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \frac{F^2\ t^2}{m_0^{\ 2}\ c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

Despejamos β y sustituimos los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{m_0^{\ 2}\ c^2}{F^2\ t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg})^2\ (3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1})^2}{(1{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N} \cdot 10^{-3}\ \text{s})^2}}} = 0{,}3$$

Es decir, el cuerpo alcanza el 30 % de la velocidad de la luz.

43. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

a) La energía mínima se obtiene cuando todas las partículas quedan en reposo después del choque:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} = 4\ m_e\ c^2$$

$$E_{\text{inicial}} = 4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$E_{\text{inicial}} = 3{,}28 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

La energía relativista de cada electrón es:

$$E = \frac{E_{\text{inicial}}}{2} = \frac{3{,}28 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

b) Calculamos la masa relativista de un electrón a partir de su energía relativista:

$$E = m\ c^2$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{2\ m_e\ c^2}{c^2} = 2\ m_e = 1{,}82 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

Por lo tanto, es el doble de la masa en reposo.

c) Para hallar la velocidad del electrón, igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 2\ m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}5$$

de donde $\beta = 0{,}87$. Es decir, la velocidad de cada electrón es igual al 87 % de la velocidad de la luz.

44. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

a) La energía mínima se obtiene cuando las seis partículas quedan en reposo. Aplicando la conservación de la energía:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} = 6\ m_p\ c^2$$

$$E_{\text{inicial}} = 6 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$E_{\text{inicial}} = 9 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

La energía mínima ha de ser de $9 \cdot 10^{-10}$ J.

La energía mínima de cada protón ha de ser, por tanto:

$$E = \frac{6\ m_p\ c^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) Calculamos la masa relativista del protón a partir de su energía relativista: $E = m\ c^2$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{3\ m_p\ c^2}{c^2} = 5{,}01 \cdot 10^{-27}\ \text{J}$$

c) Hallamos la energía cinética de cada protón incidente a partir del incremento de masa:

$$\Delta Ec = \Delta m\ c^2 = (3\ m_p - m_p)\ c^2 = 2\ m_p\ c^2$$

$$\Delta Ec = 3 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

d) Para hallar la velocidad del protón igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 3\ m_p = \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{3}$$

de donde $\beta = 0{,}94$. Por tanto, $v = 0{,}94c$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 316 y 317)

45. Decimos que un coche se pone en marcha cuando se mueve respecto a un sistema de referencia fijo en el suelo. Como nosotros somos solidarios con este sistema de referencia por estar parados respecto a él, decimos que el otro coche es el que se mueve.

    No se vulnera el principio de relatividad, puesto que la afirmación que es el otro coche el que se mueve es cierta en el sistema de referencia fijo en el suelo.

46. Por el principio de relatividad de Einstein, la velocidad de la luz no depende del observador; por tanto, no depende de su dirección ni de la velocidad relativa entre fuente y receptor.

47. Las principales consecuencias de las transformaciones de Lorentz son la dilatación del tiempo, la contracción de longitudes y la relativización del concepto de simultaneidad.

48. Para que un cuerpo alcanzara la velocidad de la luz deberíamos aplicarle una fuerza infinita, según la mecánica relativista.

49. El principio de equivalencia entre la masa y la energía afirma que la masa y la energía son dos aspectos del mismo fenómeno y que, por tanto, la masa puede presentarse en forma de energía, y viceversa.

50. Datos: $\vec{u} = 100\ \text{km/h};\ \vec{v}_1' = 10\ \text{km/h}$

    $\Delta t = 10\ \text{s} = 2{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{h};\ \vec{v}_2' = 12\ \text{km/h}$

    a) Aplicamos las transformaciones de Galileo para calcular la velocidad de la motocicleta respecto a la autopista:

    $$\vec{v}_1' = \vec{v} - \vec{u}$$

    $$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{u} = 10\ \text{km/h} + 100\ \text{km/h}$$

    $$\vec{v}_1 = 110\ \text{km/h}$$

    La velocidad $\vec{v}_2'$ de la motocicleta 10 s después es:

    $$\vec{v}_2' = 12\ \text{km/h}$$

    $$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{u} = 12\ \text{km/h} + 100\ \text{km/h}$$

    $$\vec{v}_2 = 112\ \text{km/h}$$

    b) Calculamos la aceleración de la motocicleta respecto al automóvil:

    $$a' = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{12\ \text{km/h} - 10\ \text{km/h}}{2{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{h}} = 719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

    $$719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot \frac{1\ \text{h}^2}{(3\,600\ \text{s})^2} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 0{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

    Utilizamos las transformaciones de Galileo para hallar la aceleración respecto a la autopista:

    $$\vec{a} = \vec{a}' = 719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = 0{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

    c) Utilizamos las ecuaciones de la cinemática para calcular el tiempo que tarda en superar la velocidad límite de la autopista.

    $$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\ t$$

    $$t = \frac{v - v_0}{a};\ \text{en nuestro caso, } v = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

    $$v_0 = 112\ \text{km/h};\ a = 719\ \text{km/h}^2$$

    $$t = \frac{120\ \text{km/h} - 112\ \text{km/h}}{719\ \text{km/h}^2}$$

    $$t = 0{,}01\ \text{h} = 40\ \text{s}$$

51. Datos: m = 10 kg

    $\vec{r}(t) = (10\ t + t^2,\ 8\ t - t^2)$

    $\vec{u} = (10, 0)$ m/s

    Aplicamos las transformaciones de Galileo:

    $$x' = x - u\ t = 10\ t + t^2 - 10\ t = t^2$$

    $$y' = y = 8\ t - t^2$$

    Por tanto:

    $$\vec{r}(t) = (t^2,\ 8t - t^2)\ \text{m}$$

    Derivamos el vector posición para calcular la velocidad:

    $$\vec{v}(t) = (10 + 2t,\ 8 - 2t)\ \text{m/s}$$

    Calculamos v' utilizando las transformaciones de Galileo:

    $$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = (10 + 2t,\ 8 - 2t) - (10,\ 0)$$

    $$\vec{v}' = (2t,\ 8 - 2t)\ \text{m/s}$$

    Calculamos la aceleración, que será la misma para los dos sistemas de referencia:

    $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2, -2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

    $$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = (2, -2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

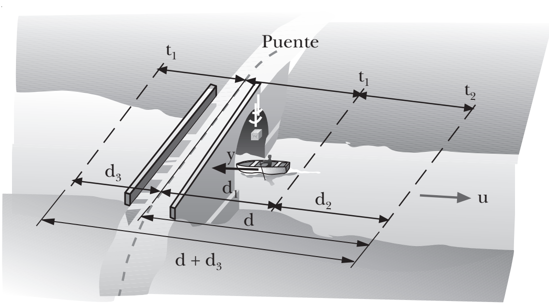
    Calculamos la fuerza, que será igual para los dos observadores:

    $$\vec{F}' = \vec{F} = m\ \vec{a} = 10\ \text{kg}\ (2, -2)\ \text{m/s}^2$$

    $$\vec{F}' = (20, -20)\ \text{N}$$

52. Datos: t_1 = 15 min = 900 s

    d = 1 km = 1000 m



$$\left.\begin{aligned} &d_1 = u\,t_1;\quad d = u\,t_2 \\ &d_3 = (v-u)\,t_1 \\ &d_3 + d = (v+u)\,(t_2 - t_1) \end{aligned}\right\}$$

$$(v-u)\,t_1 + u\,t_2 = (v+u)\,(t_2 - t_1)$$

$$v\,t_1 - u\,t_1 + u\,t_2 = v\,t_2 v\,t_1 + u\,t_2 - u\,t_1$$

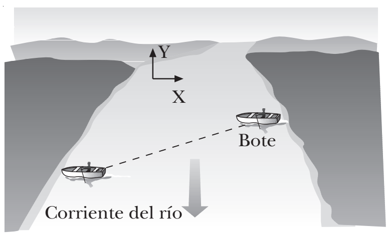
$$2v\,t_1 = v\,t_2$$

$$t_2 = 2t_1; t_2 = 2 \cdot 15 \text{ min};\quad t_2 = 30 \text{ min}$$

$$d = u\,t_2;\quad u = \frac{1\,000 \text{ m}}{30 \text{ min}\,\dfrac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}};\quad u = 0{,}55 \text{ m/s}$$

$$u = \frac{1 \text{ km}}{30 \text{ min}\,\dfrac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}} = 2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

53. Datos: $l = 2$ km; $\vec{v}_r = -3\vec{j}$ km/h; $\vec{v}_b = -4\vec{i}$ km/h



a) Calculamos la velocidad del bote visto desde la orilla:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_b = (4, -3) \text{ km/h}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \text{ km h}$$

$$|\vec{v}| = 5 \text{ km/h}$$

b) Utilizamos las leyes de la cinemática para calcular el tiempo que tarda en atravesar el río:

$$x = x_0 + v_{0x}\,t$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{2 \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ min}$$

54. Datos: $d = 9$ años luz $= 9c \cdot$ año; $v = 0{,}8c$;

$$\beta = 0{,}8;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos el tiempo que tarda para un observador de la Tierra:

$$v = \frac{d}{t};\quad t = \frac{d}{v} = \frac{9c \cdot a}{0{,}8c} = 11{,}25 \text{ a}$$

Calculamos el tiempo para un observador de la nave:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{11{,}25}{1{,}67} \text{ a} = 6{,}75 \text{ a}$$

Desde el punto de vista del astronauta, la distancia Tierra-Sirio será inferior a la distancia propia del sistema. Por ello, la distancia recorrida también será menor:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{9 \text{ a.l.}}{1{,}67} = 5{,}4 \text{ a.l.}$$

55. Datos: $\Delta x' = 115$ cm $= 1{,}15$ m; $\Delta y' = 89$ cm $= 0{,}89$ m; $v = 0{,}8c$; $\beta = 0{,}8$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos las dimensiones de la alfombra medidas por B:

$$\Delta y = \Delta y' = 0{,}89 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \frac{1{,}15 \text{ m}}{1{,}67} = 0{,}69 \text{ m}$$

b) Calculamos el tiempo que observa A si para B ha transcurrido 1 min:

$$\Delta t = 1 \text{ min}$$

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = 1{,}67 \cdot 1 \text{ min} = 1{,}67 \text{ min}$$

Por tanto, el genio A mide:

$$\frac{85 \text{ pulsaciones}}{1{,}67 \text{ min}} = 51\,\frac{\text{pul}}{\text{min}}$$

56. *a)* $\vec{u} = (0{,}8c, 0);\ \vec{v} = (0{,}9c, 0)$

Calculamos la velocidad de B medida desde A:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}9\,c^2}{c^2}} = 0{,}357c$$

b) $\vec{u} = (0{,}8c, 0);\ \vec{v} = (-0{,}9c, 0)$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{-0{,}9c - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0{,}8 \cdot (-0{,}9)\,c^2}{c^2}} = -0{,}988c$$

c) $\vec{v} = (0, 0{,}9c);\ \vec{u} = (0{,}8c, 0)$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0 - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0 \cdot 0{,}8\,c^2}{c^2}} = -0{,}8c$$

$$v'_y = \frac{v_y\,\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c\,\sqrt{1-0{,}8^2}}{1 - \dfrac{0 \cdot 0{,}8c}{c^2}} = 0{,}54c$$

El módulo de la velocidad será:

$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = c\,\sqrt{0{,}8^2 + 0{,}54^2} = 0{,}965c$$

57. Datos: $\vec{v}_x = (0{,}6c, 0;\ \vec{u} = (0{,}4c, 0)$

Aplicamos la fórmula de adición relativista de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}6c - 0{,}4c}{1 - \dfrac{0{,}6c \cdot 0{,}94c}{c^2}} = 0{,}26c$$

58. Datos: $m = 9m_0$

La expresión de la masa relativista es:

$$m = \gamma\, m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0$$

Por lo tanto, comparando con la expresión anterior:

$$m = 9m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{9}; \quad 1-\beta^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2} = 0{,}994$$

Esto significa que la velocidad ha de ser:

$$u = 0{,}994c$$

No, porque la masa inicial no se anula. Sólo depende del factor en que incrementemos la masa.

59. Datos: $E = 4\, m_p\, c^2$

Calculamos la energía cinética a partir del incremento de masa:

$$Ec = 4\, m_p\, c^2 - m_p\, c^2 = 3\, m_p\, c^2$$

$$Ec = 3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$Ec = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Calculamos la masa relativista a partir de su energía relativista:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{4\, m_p\, c^2}{c^2} = 4\, m_p$$

$$m = 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

60. La velocidad de un cuerpo en el sistema S' es:

$$v'_x = \frac{x'}{t'}$$

A partir de las ecuaciones de transformaciones de Lorentz sabemos que:

$$x' = \gamma(x - u\, t)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

La velocidad en S es, por lo tanto:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma\,(x - ut)}{\gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)}$$

Dividimos el numerador y el denominador por t:

$$v'_x = \frac{\frac{x}{t} - u\frac{t}{t}}{\frac{t}{t} - \frac{\beta}{c}\frac{x}{t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta}{c}v_x} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u\,v}{c^2}}$$

De la misma manera podemos deducir el valor de v' y a partir de las transformaciones de Lorentz:

$$y' = y$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$v'_x = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)} = \frac{\frac{y}{t}}{\gamma\,\frac{t}{t} - \frac{\beta}{c}\frac{x}{t}}$$

$$v'_x = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}v_x\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x\, u}{c^2}}$$

61. Datos: $p = m\, v = \gamma\, m_0 v$; $E = m\, c^2 = \gamma\, m_0\, c^2$

Elevamos al cuadrado la energía:

$$E^2 = m^2\, c^4 = \gamma^2\, m_0^2\, c^4$$

Como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$

$$E^2 = \frac{m_0^2\, c^4}{1-\beta^2}; \quad E^2 - E^2\beta^2 = m_0^2\, c^4$$

Sustituimos el valor de $E = \gamma\, m_0\, c^2$:

$$E^2 - \gamma^2\, m_0^2\, c^4\, \frac{v^2}{c^2} = m_0^2\, c^4$$

$$E^2 = \gamma^2\, m_0^2\, c^2\, v^2 + m_0^2\, c^4$$

Y recordamos la definición del momento, $p = \gamma\, m_0\, v$:

$$E^2 = p^2\, c^2 + m_0^2\, c^4$$

Ésta es la relación que buscábamos.

62. Datos: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

a) Consideramos que toda la energía proporcionada se utiliza en aumentar la velocidad:

$$E_{\text{proporcionada}} = Ec$$

$$|q|\,\Delta V = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Despejamos el incremento de potencial:

$$\Delta V = \frac{m\, v^2}{2\,|q|} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}$$

$$\Delta V = 2{,}6 \cdot 10^5\ \text{V}$$

b) Aplicamos la expresión relativista de la energía:

$$E = \gamma\, m_0\, c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0\, c^2$$

Despejamos β:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\, c^2}{E}\right)^2}$$

La energía es debida tanto a la masa en reposo como a la diferencia de potencial aplicada; por tanto:

$$E = m_0\, c^2 + |q|\,\Delta V$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\, c^2}{m_0\, c^2 + |q|\,\Delta V}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}559 \cdot 10^5}\right)^2}$$

$\beta = 0{,}745$, por tanto; $v = 0{,}745c$

c) Calculamos la masa relativista del electrón:

$$\frac{m}{m_e} = \frac{\gamma\, m_e}{m_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}745)^2}} = 1{,}5$$

Por lo tanto:

$$m = 1{,}5\ m_e$$

63. Datos: $\Delta V = 400\,000$ V

a) Calculamos la energía cinética relativista y observamos que el resultado coincide con la energía cinética clásica:

$$Ec = \Delta m\, c^2 = (q\, \Delta V + m_0\, c^2) - m_0\, c^2$$

$$Ec = q\, \Delta V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 400\,000\ \text{V}$$

$$Ec = 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

$$Ec = 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}\ \frac{1\ \text{eV}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 0{,}4\ \text{MeV}$$

b) Calculamos la velocidad que adquiere desde el punto de vista clásico:

$$Ec = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\, Ec}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$v = 3{,}75 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 1{,}250c$$

Efectuamos ahora los cálculos desde el punto de vista relativista:

$$m = \gamma\, m_0\, c^2 = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Despejamos β:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\, c^2}{E}\right)^2}$$

La energía es debida tanto a la masa en reposo como a la diferencia de potencial. Por tanto:

$$E = m_0\, c^2 + |q|\,\Delta V$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\, c^2}{m_0\, c^2 + |q|\,\Delta V}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 400\,000}\right)^2}$$

$$\beta = 0{,}828c$$

c) Calculamos la masa relativista:

$$m = \gamma\, m_0; \quad \frac{m}{m_0} = \gamma$$

$$\frac{m}{m_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}828^2}} = 1{,}783$$

Por tanto:

$$m = 1{,}783\ m_0$$

Calculamos la energía relativista:

$$E = \Delta m\, c^2 = 1{,}783\ m_0\, c^2 - m_0\, c^2$$

$$E = m_0\, c^2\ (1{,}783 - 1)$$

$$E = m\, c^2 = 1{,}783\ m_0\, c^2$$

$$E = 1{,}783 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$E = 1{,}46 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

$$E = 1{,}46 \cdot 10^{-13}\ \text{J}\ \frac{1\ \text{MeV}}{1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J}} = 0{,}912\ \text{MeV}$$

64. Datos: $E = 80$ V/m; $t = 5$ s; $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_0 = 2 \cdot 10^{-26}$ kg

a) Calculamos la fuerza aplicada al ion:

$$F = q\, E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 80\ \text{V/m} = 1{,}3 \cdot 10^{-17}\ \text{N}$$

b) Aplicamos el teorema del impulso para hallar la velocidad, teniendo en cuenta que en mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\, t = m\, v_1 \text{ donde } v = c\, \beta,\ m = \gamma\, m_0$$

$$F\, t = \frac{m_0\, c\, \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \frac{F^2\, t^2}{m_0^{\ 2}\, c^2} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

Despejando β y sustituyendo los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^{\ 2}\, c^2}{F^2\, t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2 \cdot 10^{-26}\ \text{kg})^2\ (3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{(1{,}3 \cdot 10^{-17}\ \text{N})^2\ (5\ \text{s})^2}}} = 0{,}996$$

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad v = 0{,}996c$$

c) Calculamos la masa relativista:

$$\frac{m}{m_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}996)^2}} = 11{,}2$$

Por lo tanto: $m = 11{,}2\ m_0$

$$m = 11{,}2 \cdot 2 \cdot 10^{-26}\ \text{kg} = 2{,}24 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}$$

Calculamos la energía cinética relativista:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = \gamma\ m_0\ c^2 - m_0\ c^2 = m_0\ c^2\ (\gamma - 1)$$

$$Ec = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

65. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;

Reacción: $(e^- + e^-) \rightarrow (e^- + e^-) + 3\ (e^- + e^+)$

a) La energía mínima relativista se obtiene cuando las partículas quedan en reposo después del choque. Aplicamos el principio de conservación de la energía relativista:

$$E_{inicial} = E_{final} = 8\ m_e\ c^2$$

$$E_{inicial} = 8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$E_{inicial} = 6{,}55 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Luego la energía relativista de cada electrón será:

$$E = \frac{E_{inicial}}{2} = \frac{8\ m_e\ c^2}{2} = 4\ m_e\ c^2$$

$$E = 3{,}28 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 2{,}05\ \text{Mev}$$

b) Calculamos la masa relativista de un electrón a partir de su energía relativista:

$$E = m\ c^2; \quad m = \frac{E}{c^2}; \quad m = \frac{4\ m_e\ c^2}{c^2} = 4\ m_e$$

$$m = 3{,}6 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

c) Hallamos la energía cinética de cada protón incidente a partir de su incremento de masa:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = (4\ m_e - m_e)\ c^2 = 3\ m_e\ c^2$$

$$Ec = 3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$Ec = 2{,}5 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}5\ \text{MeV}$$

Para hallar la velocidad del electrón igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 4\ m_e = \frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{4}$$

de donde $\beta = 0{,}97$. Por tanto, su velocidad será $v = 0{,}97c$.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 317)

1. *a)* Si el cohete se mueve a velocidad constante respecto de la Tierra, ambos pueden considerarse sistemas de referencia inerciales.

b) Las leyes de Newton se cumplen en el sistema S' únicamente si éste es un sistema inercial, es decir, si su velocidad es constante.

2. Datos: d = 6 km; t_s = 1 h; t_b = 36 min = 0,6 h

a) Aplicamos las leyes de la cinemática al subir:

$$d = (v - u)\ t_s$$

donde v es la velocidad del bote, y u es la velocidad del río.

Aplicamos las leyes de la cinemática al bajar:

$$d = (v + u)\ t_b$$

De esta manera, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del que despejamos u:

$$\begin{cases} d = (v - u)\ t_s \\ d = (v + u)\ t_b \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\ \text{km} = (v - u)\ 1\ \text{h} \\ 6\ \text{km} = (v + u)\ 0{,}6\ \text{h} \end{cases}$$

$$v = 6\ \text{km/h} + u$$

$$v = 10\ \text{km/h} - u$$

$$6\ \text{km/h} + u = 10\ \text{km/h} - u;\ 2\ u = 4\ \text{km/h}$$

$$u = 2\ \text{km/h}$$

b) Despejamos ahora la velocidad propia del bote, v:

$$v = 10\ \text{km/h} - u = 8\ \text{km/h}$$

3. El principio de relatividad de Galileo está de acuerdo con la invariabilidad de las leyes de la mecánica clásica entre sistemas inerciales; mientras que el de Einstein está de acuerdo también con la invariabilidad de las leyes electromagnéticas.

El primero sólo puede aplicarse en sistemas cuya velocidad sea muy inferior a la de la luz.

4. La teoría de la relatividad especial nació al estudiar las transformaciones de las leyes electromagnéticas entre sistemas inerciales. En concreto, el experimento de Michelson-Morley hizo necesarias la constancia de la velocidad de la luz y la no dependencia del sistema de referencia en que se mida.

5. Datos: $m = 2\ m_0$

La fórmula que relaciona la masa en reposo con la masa relativista es: $m = \gamma\ m_0$. Por tanto, $\gamma = 3$

Como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}}$

entonces:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = 0{,}942$$

La velocidad deberá ser de 0,866c.

6. — Veríamos los objetos cotidianos en movimiento más cortos, debido a la contracción de longitudes.

— Los movimientos de los objetos con una cierta velocidad se verían como a cámara lenta debido a la dilatación del tiempo.

— El concepto de simultaneidad no sería válido.

7. Datos: $m = 7m_0$

La energía relativista final ha de ser igual a la energía relativista inicial:

$$E_{inicial} = E_{final} = 7\ m_0\ c^2$$

Por tanto, la energía inicial de cada partícula ha de ser:

$$E = \frac{E_{final}}{2} = \frac{7}{2}\ m_0\ c^2$$

Para hallar la velocidad de la partícula, igualamos la energía obtenida con la definición de energía relativista:

$$E = \gamma\, m_0\ c^2 = \frac{7}{2}\ m_0\ c^2;\ \gamma = \frac{7}{2};\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}} = 0{,}958$$

La velocidad de choque necesaria es de 0,958c, y es independiente de las partículas que choquen.

La energía cinética sí cambia porque depende de las partículas que colisionan:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = (m - m_0)\ c^2 = (\gamma\, m_0 - m_0)\ c^2$$

$$Ec = (\gamma - 1\ )\ m_0\ c^2$$

13. Cuántica

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 319)

- Datos: m = 7 kg; v = 10 m·s^{-1}

  La cantidad de movimiento o momento lineal de un cuerpo es el producto de su masa por su velocidad lineal:

  $$p = m\,v = 7\text{ kg} \cdot 10\text{ m·s}^{-1} = 70\text{ kg·m·s}^{-1}$$

- Datos: m = 10 g = 0,01 kg; v = 300 m·s^{-1}

  Calculamos la energía cinética:

  $$Ec = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}01\text{ kg}\cdot(300\text{ m·s}^{-1})^2 = 450\text{ J}$$

- Datos: v_1 = v; v_2 = 2v

  Calculamos el cociente entre las energías del cuerpo en cada uno de los casos:

  $$Ec_1 = \frac{1}{2}m\,{v_1}^2 = \frac{1}{2}m\,v^2$$

  $$Ec_2 = \frac{1}{2}m_2\,{v_2}^2 = \frac{1}{2}m\,(2v)^2 = \frac{1}{2}m\,4v^2 = 2m\,v^2$$

  $$\frac{Ec_2}{Ec_1} = \frac{2m\,v^2}{\frac{1}{2}m\,v^2} = 4$$

  Así pues, la energía cinética aumenta cuatro veces al duplicar el valor de la velocidad.

- Una onda electromagnética es una onda transversal que consiste en la propagación, sin necesidad de soporte material alguno, de un campo eléctrico y de un campo magnético perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

  Como en cualquier onda, existe un transporte neto de energía sin que haya transporte neto de materia.

  Las ondas electromagnéticas son generadas por cargas eléctricas aceleradas. Los vectores de los campos eléctrico y magnético varían sinusoidalmente con el tiempo y la posición, y se encuentran en fase, es decir, ambas alcanzan el valor máximo y el mínimo al mismo tiempo.

  $$E = E_0\text{ sen }(\omega t - kx);\; B = B_0\text{ sen }(\omega t - kx)$$

  Además, el cociente de los módulos de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es igual a la velocidad de propagación de la onda, que en el vacío es c = 3 · 10^8 m/s, pero que, en general, depende del medio de propagación.

  $$\frac{E}{B} = c$$

- Datos: λ = 632 nm = 6,32 · 10^{-7} m; c = 3 · 10^8 m·s^{-1}

  Calculamos la frecuencia a partir de la relación entre la frecuencia de una onda y su longitud de onda:

  $$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^8\text{ m·s}^{-1}}{6{,}32\cdot 10^{-7}\text{ m}} = 4{,}75\cdot 10^{14}\text{ Hz}$$

- Tanto el protón, descubierto en 1914, como el neutrón, descubierto en 1932, se encuentran en el núcleo del átomo. El protón posee una carga +e = 1,602 · 10^{-19} C y el neutrón carece de carga. Sus masas son prácticamente iguales: m_p = 1,673 · 10^{-27} kg, m_n = 1,675 · 10^{-27} kg, y concentran el 99 % de la masa total del átomo, ya que la masa de los electrones, descubiertos en 1897 y con carga –e, es unas 2 000 veces menor que la de neutrones y protones: m_e = 9,110 · 10^{-31} kg. El radio nuclear típico se encuentra entre 10^{-14} y 10^{-15} m, y la distancia entre los electrones y el núcleo del átomo es aproximadamente del orden de 0,1 nm = 1 Å.

- El descubrimiento del electrón en 1897 condujo al físico inglés J. J. Thomson a establecer un modelo del átomo. Según este modelo, el átomo se encontraría formado por un conjunto de electrones incrustados en una masa esférica de densidad uniforme y carga positiva, de manera que el conjunto sería neutro y estable.

  Sin embargo, el descubrimiento del núcleo atómico por el físico británico E. Rutherford llevó a éste a establecer un nuevo modelo atómico. En este modelo, la mayor parte de la masa y toda la carga positiva del átomo se concentrarían en una minúscula zona central de gran densidad, el núcleo atómico. Por otro lado, el átomo, mucho mayor que el núcleo, incluye la corteza electrónica, que es la región donde los electrones describen órbitas circulares alrededor del núcleo. Finalmente, el átomo es neutro porque el número de electrones es igual al de protones.

1. LIMITACIONES DE LA FÍSICA CLÁSICA (pág. 327)

1. Llamamos cuerpos negros a aquellos cuerpos cuya radiación térmica depende únicamente de su temperatura, y no de su composición.

   Son cuerpos que absorben toda la radiación que incide sobre ellos y, debido a que la radiación térmica que emiten no es visible a temperaturas ordinarias, se ven de color negro. Sin embargo, como la radiación térmica emitida por un cuerpo negro depende de la temperatura, su color no siempre es negro. Así, un bloque de metal de color negro adquiere un color rojizo a medida que aumenta su temperatura, y posteriormente pasa a rojo vivo.

2. Respuesta sugerida:

La λ_{max} es la longitud de onda para la cual se emite una mayor cantidad de energía. Por lo tanto, es la radiación dominante en la radiación térmica emitida y determina el color del que vemos el cuerpo.

Para observar la variación de λ_{max} con la temperatura, podemos utilizar una barra de hierro y calentarla progresivamente al fuego, retirándola a intervalos para observar el «color» de la radiación que emite. Conforme aumenta la temperatura, la barra se ve de un color rojo opaco, después adquiere un color rojo brillante y, a muy altas temperaturas, toma un intenso color blanco azulado. A medida que aumenta la temperatura, la intensidad de la radiación térmica se incrementa y la longitud de onda máxima, λ_{max}, se hace menor.

3. Las teorías clásicas para explicar la emisión de radiación de un cuerpo negro predecían que la energía de la radiación aumentaba indefinidamente al disminuir la longitud de onda, mientras que experimentalmente se había comprobado cómo la energía tendía a cero para longitudes de onda muy cortas, como las correspondientes al ultravioleta.

4. Planck formuló dos hipótesis para explicar la radiación de un cuerpo negro:

— Los átomos que emiten la radiación se comportan como osciladores armónicos.

— Cada oscilador absorbe o emite energía de la radiación en una cantidad proporcional a su frecuencia de oscilación: $E_0 = h\ f$.

a) Esto quiere decir que la energía total emitida o absorbida por los osciladores está cuantizada, es decir, sólo puede tener unos valores determinados, múltiplos de E_0; $E = n\ E_0 = n\ h\ f$.

b) Así, Planck se limitó a cuantizar la energía de los osciladores armónicos y a suponer que los átomos se comportaban como osciladores, pero no a cuantizar propiamente los estados atómicos.

5. Datos: m = 20 kg; L = 1,5 m; y_{max} = 50 cm = 0,5 m: h = 6,62 · 10^{-34} J·s

a) Calculamos en primer lugar la frecuencia de oscilación del columpio, el cual se comporta como un péndulo, es decir, un oscilador armónico, y así obtenemos la energía de un cuanto:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}; \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m·s}^{-1}}{1{,}5\ \text{m}}} = 0{,}407\ \text{Hz}$$

$$E_0 = h\ f;\ E_0 = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot 0{,}407\ \text{Hz}$$

$$E_0 = 2{,}69 \cdot 10^{-34}\ \text{J}$$

La energía total del columpio es igual a la energía potencial en el punto más alto de su trayectoria:

$$E = m\ g\ y_{max} = 20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m·s}^{-2} \cdot 0{,}5\ \text{m} = 98\ \text{J}$$

Hallamos el número de cuantos de energía a partir del cociente entre la energía del columpio y la de un cuanto:

$$E = n\ E_0; \quad n = \frac{E}{E_0}$$

$$n = \frac{98\ \text{J}}{2{,}69 \cdot 10^{-34}\ \text{J}} = 3{,}64 \cdot 10^{35}\ \text{cuantos}$$

b) Calculamos la altura máxima que alcanzará el columpio con la energía de un cuanto:

$$E_0 = m\ g\ y_{max}; \quad y_{max} = \frac{E_0}{m\ g}$$

$$y_{max} = \frac{2{,}69 \cdot 10^{-34}\ \text{J}}{20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m·s}^{-2}} = 1{,}37 \cdot 10^{-36}\ \text{m}$$

6. Respuesta sugerida:

El efecto fotoeléctrico se produce al iluminar una superficie metálica con radiación electromagnética de una frecuencia determinada. Con un montaje experimental adecuado se puede observar cómo esta radiación es capaz de arrancar electrones de la superficie metálica y generar una corriente eléctrica. Si medimos la intensidad de esta corriente, podemos determinar el número de electrones arrancados, e incluso, su energía de enlace con el metal.

El efecto fotoeléctrico es la base de algunos dispositivos de tecnología actual, como la célula fotoeléctrica que controla las puertas de los ascensores o ciertos dispositivos de seguridad.

7. Existen tres hechos del efecto fotoeléctrico que no tenían explicación utilizando los argumentos de la física clásica. Estos hechos son:

— La emisión de electrones sólo tiene lugar si la frecuencia de la radiación incidente supera un determinado valor, denominado frecuencia umbral, f_u.

Según la teoría clásica, el efecto fotoeléctrico debía ocurrir para cualquier frecuencia siempre que la luz fuera lo suficientemente intensa.

— Si la frecuencia de la radiación es superior a esta frecuencia umbral, el número de fotoelectrones es proporcional a la intensidad de la radiación incidente. Sin embargo, su energía cinética máxima es independiente de la intensidad de la luz.

— No se observa ningún tiempo de retraso entre la iluminación del metal y la emisión de los fotoelectrones.

Estos tres aspectos quedaron explicados con la teoría cuántica de Einstein para el efecto fotoeléctrico. La teoría supone que la energía emitida por una fuente de luz está cuantizada en forma de paquetes de energía llamados fotones, en lugar de encontrarse repartida de forma continua a lo largo de toda la onda. Los electrones del metal son arrancados cuando un fotón incide sobre el electrón cediéndole toda su energía, y no por la acumulación de la energía de la onda sobre una zona del metal determinada.

— La mínima energía necesaria para arrancar un electrón, W_0, es igual a la energía de enlace del electrón más débilmente ligado al metal. Así, el fotón debe aportar una energía mínima de $E = h\,f_u = W_0$. Si la frecuencia del fotón es menor que f_u, ningún fotoelectrón podrá ser extraído.

— Duplicar la intensidad de la luz equivale a duplicar el número de fotones, y por lo tanto, a duplicar el número de electrones extraído, pero no a variar la energía cinética de dichos electrones.

— La energía necesaria para arrancar a los electrones se suministra en paquetes (fotones), por lo que los electrones no necesitan «acumular» energía suficiente para escapar del metal, y por lo tanto no existe un tiempo de retraso.

8. Si la frecuencia de la radiación incidente es inferior a la frecuencia umbral, no se producirá emisión de electrones. Por otro lado, si la frecuencia supera el valor umbral, entonces sí que el número de fotoelectrones emitidos será proporcional a la intensidad de dicha radiación. Ello es debido a que una mayor intensidad en la radiación implica una mayor energía por unidad de superficie y unidad de tiempo, y por tanto, un mayor número de fotones capaces de arrancar electrones del metal.

9. Respuesta sugerida:

   La confirmación experimental de la existencia de los fotones fue llevada a cabo por el físico norteamericano Arthur H. Compton en 1932, al analizar la colisión entre un haz de rayos X y una lámina de grafito. Compton observó que la radiación incidente se dividía tras la colisión en dos radiaciones de longitudes de onda diferentes, una igual a la longitud de onda de la radiación incidente y otra de longitud de onda mayor.

   Para explicar este hecho, Compton consideró la radiación electromagnética como un conjunto de partículas relativistas de masa en reposo nula, energía $E = h\,f$, y con un momento lineal $p = E\,c^{-1} = h\,\lambda^{-1}$. Los fotones que chocan con un electrón de la lámina de grafito ceden parte de su energía al electrón en el choque y, por tanto, su energía y su frecuencia son menores y su longitud de onda, mayor que antes de la colisión. Sin embargo, los fotones que no colisionan con los electrones de la lámina mantienen intactas su energía, frecuencia y longitud de onda.

10. La energía de un fotón es proporcional a su frecuencia, según la fórmula de Planck, y puesto que la frecuencia de los fotones ultravioleta, del orden de 10^{15} Hz – 10^{16} Hz, es superior a la de los fotones de luz verde, aproximadamente 10^{14} Hz, también lo será su energía.

11. Los fotones de la luz ultravioleta son más energéticos que los de la luz del espectro visible. Así, la energía que suministran estos últimos no es suficiente para romper los enlaces moleculares del plástico de las bolsas, pero sí lo es la energía proporcionada por los fotones ultravioleta.

12. Datos: $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1}; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

   a) Calculamos la frecuencia a partir de la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de una onda:

   $$f = \frac{c}{\lambda}; \quad f = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 6 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

   b) Calculamos la energía de los fotones mediante la expresión de Planck:

   $$E = h\,f;\ E = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot 6 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

   $$E = 3{,}97 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

13. Bohr formuló un modelo atómico basado en dos postulados fundamentales:

   1. El electrón se mueve en órbitas circulares estacionarias sin absorber ni emitir radiación. Estas órbitas sólo pueden tener ciertas energías y radios y se caracterizan por la cuantización del momento angular.

   2. El electrón sólo puede cambiar de órbita absorbiendo o emitiendo un fotón con una energía igual a la diferencia energética entre las órbitas entre las que se produce el salto. Ello justifica la discretización de los espectros.

   a) Un electrón en un estado estacionario no se encuentra en reposo, sino que se mueve en una determinada órbita alrededor del núcleo del átomo. Lo que ocurre es que las magnitudes físicas que lo caracterizan (radio de la órbita, energía, velocidad, momento angular...) no dependen del tiempo.

   b) Cuando el número cuántico n aumenta, también lo hace el radio de la órbita del electrón, y disminuye su energía. En el caso límite, el electrón quedaría desligado del átomo (ionización), lo que equivale a decir que su órbita es de radio infinito, y la energía de ligadura con el núcleo se anularía.

14. Datos: $m = 1$; $n = 4$; $n = 7$; $R_H = 1{,}097 \cdot 10^{7}$ m^{-1}; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1}; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

   Las longitudes de onda de la serie de Lyman pueden obtenerse a partir de la fórmula de Rydberg para m = 1.

   Esta serie corresponde a las transiciones electrónicas en el átomo de hidrógeno desde niveles o estados excitados con n > 1 hasta el nivel n = m = 1. La tercera línea de la serie corresponde al salto del nivel con n = 4 hasta el m = 1, y la sexta al salto desde el nivel n = 7. Calculamos la longitud de onda de estas dos líneas espectrales mediante la fórmula de Rydberg, y sustituimos este valor en la expresión para la energía de un fotón dada por Planck:

   $$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad \lambda = \left[R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\right]^{-1}$$

   $$\lambda_{4\to1} = \left[1{,}097 \cdot 10^{7}\ \text{m}^{-1}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1} = 9{,}72 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$$

$$E = h\,f = h\,\frac{c}{\lambda};\quad E_{4\to1} = 6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}\cdot\frac{3\cdot10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{9{,}72\cdot10^{-8}\ \text{m}}$$

$$E_{4\to1} = 2{,}04\cdot10^{-18}\ \text{J}$$

$$\lambda_{7\to1} = \left[1{,}097\cdot10^{7}\ \text{m}^{-1}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{7^2}\right)\right]^{-1} = 9{,}31\cdot10^{-8}\ \text{m}$$

$$E = h\,f = h\,\frac{c}{\lambda};\quad E_{7\to1} = 6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}\cdot\frac{3\cdot10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{9{,}31\cdot10^{-8}\ \text{m}}$$

$$E_{7\to1} = 2{,}13\cdot10^{-18}\ \text{J}$$

2. MECÁNICA CUÁNTICA (págs. 329, 330, 333, 334 y 335)

15. *a)* Utilizamos la fórmula de De Broglie, que relaciona la longitud de onda de una partícula con su momento lineal:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v}$$

Por lo tanto, a medida que aumenta la velocidad, disminuye la longitud de onda asociada a la partícula.

b) Calculamos la frecuencia a partir de la relación de Planck:

$$E = h\,f;\quad f = \frac{E}{h} = \frac{\frac{1}{2}m\,v^2}{h} = \frac{m\,v^2}{2h}$$

Es decir, aumentar la velocidad supone aumentar la frecuencia de la onda asociada al movimiento de la partícula.

16. Datos: Ec = 68 eV = $1{,}09\cdot10^{-17}$ J; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ J·s

a) Calculamos la frecuencia de los electrones a partir de la relación de Planck:

$$f = \frac{E}{h};\quad f = \frac{1{,}09\cdot10^{-17}\ \text{J}}{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}} = 1{,}65\cdot10^{16}\ \text{s}^{-1}$$

$$f = 1{,}65\cdot10^{16}\ \text{Hz}$$

b) Para calcular la longitud de onda de los electrones, primero calculamos su momento lineal:

$$Ec = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{p^2}{2m};\quad p = \sqrt{2m\,Ec}$$

$$p = \sqrt{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg}\cdot1{,}09\cdot10^{-17}\ \text{J}}$$

$$p = 4{,}45\cdot10^{-24}\ \text{kg·m·s}^{-1}$$

Utilizamos ahora la relación de De Broglie entre el momento y la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}}{4{,}45\cdot10^{-24}\ \text{kg·m·s}^{-1}} = 1{,}49\cdot10^{-10}\ \text{m} = 1{,}49\ \text{Å}$$

17. *a)* Utilizamos la fórmula de De Broglie y la relación entre la energía cinética y el momento lineal de una partícula para determinar la longitud de onda:

$$Ec = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{p^2}{2m};\ p = \sqrt{2m\,Ec}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\,Ec}}$$

De esta expresión se deduce que la partícula con menor masa será la que tenga asociada una longitud de onda mayor.

b) La frecuencia asociada a la partícula es:

$$E = h\,f;\quad f = \frac{E}{h}$$

Por tanto, a igual energía corresponde la misma frecuencia.

18. Datos: $v = 1\ \text{m·s}^{-1}$; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg; $m_n = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ J·s

Calculamos la frecuencia a partir de la relación E = h f y la longitud de onda mediante la relación de De Broglie:

$$E = h\,f;\quad f = \frac{E}{h} = \frac{m\,v^2}{2h}\qquad p = \frac{h}{\lambda};\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v}$$

a) Hallamos frecuencia y longitud de onda en el caso del electrón:

$$f = \frac{m_e\,v^2}{2h}$$

$$f = \frac{9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg}\cdot(1\ \text{m·s}^{-1})^2}{2\cdot6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}} = 687\ \text{Hz}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e\,v};\quad \lambda = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}}{9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg}\cdot1\ \text{m·s}^{-1}}$$

$$\lambda = 7{,}27\cdot10^{-4}\ \text{m} = 0{,}727\ \text{mm}$$

b) Hacemos lo mismo para el neutrón:

$$f = \frac{m_n\,v^2}{2h}$$

$$f = \frac{1{,}67\cdot10^{-27}\ \text{kg}\cdot(1\ \text{m·s}^{-1})^2}{2\cdot6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}} = 1{,}26\cdot10^{6}\ \text{Hz}$$

$$f = 1{,}26\ \text{MHz}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_n\,v};\quad \lambda = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{J·s}}{1{,}67\cdot10^{-27}\ \text{kg}\cdot1\ \text{m·s}^{-1}}$$

$$\lambda = 3{,}96\cdot10^{-7}\ \text{m} = 3{,}96\cdot10^{-4}\ \text{mm}$$

19. Datos: $\Delta p = 0$

a) Las indeterminaciones en el momento lineal y en la velocidad de una partícula se encuentran relacionadas según la expresión:

$$\Delta p = m\,\Delta v;\quad \Delta v = \frac{\Delta p}{m}$$

Por lo tanto, si $\Delta p = 0$, la velocidad también se encuentra bien definida.

b) El principio de indeterminación de Heisenberg fija el grado de determinación que podemos obtener en la medida de la posición y el momento lineal (o velocidad) de una partícula. Así, un grado de precisión alto en la velocidad implica un error muy alto en la medida de la posición, y a la inversa. En el caso que se nos presenta, la indeterminación en el momento lineal es nula, lo que implica una indeterminación total en la posición. El fijar la velocidad (o el momento lineal) de una partícula de forma exacta lleva a desconocer completamente su posición.

20. Datos: $v = 10^4$ m·s^{-1}; $\Delta v = 0{,}0005$ %; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

La imprecisión en la indeterminación de v es del 0,0005 por 100, lo que quiere decir que su incertidumbre es:

$$\Delta v = \frac{0{,}0005}{100}\, v = \frac{0{,}0005}{100} \cdot 10^4 \ \frac{m}{s} = 0{,}05 \ \frac{m}{s}$$

Por lo tanto, la incertidumbre en su momento es:

$$\Delta p = m\,\Delta v;\ \Delta p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0{,}05 \text{ m·s}^{-1}$$

$$\Delta p = 8{,}35 \cdot 10^{-29} \text{ kg·m·s}^{-1}$$

Calculamos la incertidumbre en la posición a partir del principio de indeterminación:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi};\quad \Delta x \geq \frac{h}{4\pi\, \Delta p}$$

$$\Delta x = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}}{4\pi \cdot 8{,}35 \cdot 10^{-29} \text{ kg·m·s}^{-1}} = 6{,}31 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

21. Respuesta sugerida:

A principios de los años veinte surgieron dos teorías que pretendían explicar el comportamiento de la materia y la energía de los sistemas microscópicos, incorporando las nuevas ideas que se habían expuesto hasta el momento para resolver los problemas presentados por la física clásica.

Así, por un lado encontramos la **mecánica cuántica matricial,** desarrollada por W. Heisenberg, M. Born y P. Jordan, que describe las variables físicas asociadas a una partícula (posición, momento lineal…) mediante matrices.

Por otro lado, el físico austríaco E. Schrödinger desarrolló la denominada **mecánica cuántica ondulatoria.** Esta teoría describe el comportamiento de la materia mediante funciones de onda. Estas funciones de onda son soluciones de la denominada ecuación de Schrödinger, y dependen de la posición y el tiempo.

Poco tiempo más tarde, el inglés Paul A. M. Dirac demostró que ambas teorías eran dos representaciones de una misma teoría, la denominada mecánica cuántica o teoría cuántica no relativista.

Según la mecánica cuántica, no tiene sentido decir que los electrones describen órbitas circulares fijas alrededor del núcleo, sino que existe una serie de zonas del espacio donde es más probable hallarlos. De este modo se introduce el concepto de orbital, que es una función de onda correspondiente a ese sistema, y cuyo cuadrado es una medida de la probabilidad de encontrar el electrón en cada punto del espacio.

22. Datos: $Z = 1$; $E_0 = -13{,}606$ eV; $n = 2$

Los orbitales con n = 2 son:

(2, 1, –1), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 0)

Calculamos ahora la energía en eV:

$$E_n = -E_0\, \frac{Z^2}{n^2};\ E_2 = -13{,}606 \text{ eV}\, \frac{1^2}{2^2} = -3{,}40 \text{ eV}$$

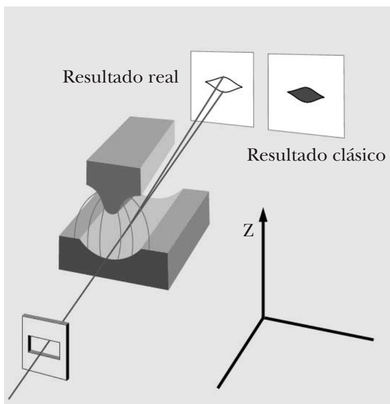
El módulo del momento angular es:

$$L^2 = l\,(l+1)\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2;\quad L = \sqrt{l\,(l+1)}\ \frac{h}{2\pi}$$

Así que para los orbitales con $l = 1$, el módulo de L es $L = \sqrt{1\,(1+1)}\ \frac{h}{2\pi} = \sqrt{2}\ \frac{h}{2\pi}$, mientras que para los orbitales con $l = 0$, el módulo de L es $L = 0$.

23. Respuesta sugerida:

El experimento de Stern-Gerlach pretendía medir el momento magnético dipolar de los átomos. Para ello se hacía penetrar un haz de átomos neutros en un campo magnético no uniforme, con dirección la del eje Z, que variaba en intensidad en esa misma dirección. Originalmente el experimento se efectuó con átomos de plata pero es mucho más clarificador en el caso de átomos de hidrógeno, tal como se repitió posteriormente.



Los átomos de hidrógeno poseen un único electrón. Por ello, el momento magnético dipolar del átomo es debido al giro de este único electrón en su órbita alrededor del núcleo (órbita que equivale a una espira de corriente) y, por lo tanto, es proporcional al aumento angular orbital del electrón. Como los átomos utilizados en el experimento son neutros, la única fuerza neta que actúa sobre ellos es la fuerza F_z proporcional a la componente z del momento angular del electrón, que está caracterizada por el número cuántico m_l. Así, mientras que clásicamente cualquier desviación del haz de átomos es posible porque cualquier valor de la componente z del momento angular lo es, cuánticamente el haz se dividirá en un número de haces divergentes igual al número posible de valores de la componente z del momento angular, m_l, que está cuantizada. El número m_l puede tomar un número impar de valores, $m_l = -l, -l+1, ..., 0, l-1, l$. Sin embargo, experimentalmente se observó que el haz de átomos se escindía en dos componentes: una componente se doblaba hacia el sentido positivo del eje Z y la otra en el sentido opuesto. Es más, los átomos se encontraban en su estado fundamental, en cuyo caso, $l = 0$ y $m_l = 0$, y se esperaba que el haz no fuera desviado por el campo magnético.

La explicación estaba en que el electrón posee un momento angular intrínseco llamado **espín,** de número cuántico $s = \frac{1}{2}$, cuya componente z está determinada por el número cuántico m_s y que, análogamente al momento angular orbital, puede tomar los valores $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Este momento angular intrínseco no está relacionado con el movimiento orbital del electrón y puede pensarse que es debido a un movimiento de rotación del electrón.

24. Respuesta sugerida:

El espín es una propiedad intrínseca del electrón y de otras partículas fundamentales y determina cómo la partícula se alinearía en presencia de un campo magnético externo, de forma paralela o antiparalela a dicho campo. Así pues, es un momento angular intrínseco que está cuantizado. El espín está caracterizado por el número cuántico de espín, s, propio de cada partícula microscópica. En el caso del electrón, el número cuántico de espín toma el valor de $s = \frac{1}{2}$. Otras partículas pueden tener distintos valores de s, por ejemplo, el fotón tiene $s = 1$.

25. — El principio de exclusión de Pauli nos dice que en un átomo multielectrónico nunca podrá existir más de un electrón en el mismo estado cuántico; es decir, los electrones en el átomo no pueden tener iguales sus cuatro números cuánticos.

— Clásicamente, es posible distinguir entre dos bolas de billar idénticas. Por ejemplo, podemos fijarnos en ambas bolas en un instante de tiempo determinado y marcarlas mentalmente con los números 1 y 2. Como ambas siguen trayectorias bien definidas, observándolas con atención puedo saber en todo momento cuál de ellas es la bola 1 y cuál es la bola 2. Sin embargo, cuánticamente, el principio de incertidumbre impide determinar al mismo tiempo la posición y la velocidad de las bolas. Así, no es posible determinar sus trayectorias. Por lo tanto:

a) Sí puedo identificar (marcar mentalmente) las dos bolas de billar cuánticas en un momento determinado antes del choque, por ejemplo, determinando exactamente su posición. Sin embargo, para cualquier otro instante de tiempo posterior no puedo distinguir entre ambas, puesto que no es posible conocer sus trayectorias.

b) No se puede determinar la trayectoria de cada una de las bolas.

26. Las partículas con espín semientero se denominan fermiones, como por ejemplo, el neutrino, el protón, el positrón, el antiprotón y la partícula Σ^-. Por otro lado, las partículas con espín cero o entero se denominan bosones, como por ejemplo, el fotón, el pión, el gravitón y el muón.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 337)

a) Respuesta sugerida:

Actualmente, mediante diferentes técnicas y procesos de fabricación, es posible obtener una amplia gama de transistores adecuados para las más dispares aplicaciones. Así, por ejemplo, se dispone de transistores capaces de funcionar a altas frecuencias y otros que soportan corrientes y potencias elevadas.

Desde el punto de vista del principio físico de su funcionamiento, podemos distinguir principalmente entre muchísimos tipos de transistores, los transistores bipolares y los de efecto de campo.

Los **transistores bipolares** son dispositivos compuestos por la unión de tres cristales semiconductores dopados con portadores de carga positivos (tipo P) y negativos (tipo N) en orden PNP o NPN. Cada una de las zonas dispone de un terminal conductor que se conecta al circuito exterior. Éstos reciben los nombres de colector, base y emisor. Mediante la aplicación de las diferencias de potencial adecuadas entre terminales (polarización del transistor) se puede conseguir que la corriente de salida del colector sea directamente proporcional a la corriente de entrada en la base y que el transistor actúe como un amplificador de corriente.

Los **transistores de efecto de campo** son dispositivos semiconductores en los que se puede obtener amplificación de corriente y de tensión haciendo variar la conductancia mediante un campo eléctrico exterior transversal aplicado al material semiconductor.

Las principales aplicaciones de los transistores son:

— Como amplificadores de corriente o tensión, por ejemplo, en los amplificadores de los equipos de música de alta fidelidad.

— Como interruptores electrónicos en los circuitos integrados que forman parte de las modernas computadoras electrónicas.

— Como interruptores de potencia para controlar las intensidades y potencias en motores y otros aparatos eléctricos.

b) Respuesta sugerida:

Muchos metales presentan resistividad cero por debajo de cierta temperatura crítica T_c, es decir, son superconductores. Algunos ejemplos son el mercurio (T_c = 4,2 K), el iridio (T_c = 0,1 K), el niobio (T_c = 9,2 K), el aluminio (T_c = 1,2 K) y el plomo (T_c = 7,2 K). Sin embargo, para obtener materiales superconductores a T_c mayores, es necesario recurrir a ciertas familias de aleaciones cerámicas.

Las principales aplicaciones de la superconductividad tienen que ver con la utilización de imanes superconductores. Son grandes bobinas superconductoras que permiten crear campos magnéticos muy intensos sin las pérdidas de energía debidas a la resistencia al paso de la corriente de las bobinas conductoras normales. Estos electroimanes se emplean en la obtención de imágenes médicas por resonancia magnética, en la aceleración y guiado de las partículas en las grandes instalaciones aceleradoras, en la investigación física básica, en el confinamiento magnético del plasma, en los reactores experimentales de fusión nuclear, en trenes que levitan sobre los raíles gracias a los campos magnéticos, en generadores y motores eléctricos...

Otras aplicaciones futuras de la superconductividad se darán en el campo de la electrónica, en la fabricación de componentes microelectrónicos de computadoras que serían de menor tamaño que los actuales, más veloces y disiparían menos energía en forma de calor.

c) Algunas ideas que se podrían expresar y desarrollar en el coloquio son las siguientes:

— La omnipresencia de la electrónica en nuestras vidas. Se pueden enumerar casos concretos en casa, en el instituto, en la calle, en los coches, en la medicina... de los usos de la electrónica.

— ¿Es posible concebir la vida actual sin la electrónica? ¿Qué ventajas nos ha traído?

— La creciente miniaturización de los dispositivos electrónicos. Ventajas para la vida diaria: comodidad, fiabilidad, precio...

— El imparable avance de la electrónica hace que muchos aparatos y tecnologías queden obsoletos con rapidez (por ejemplo, ordenadores y algunas tecnologías de audio y vídeo que no han tenido éxito). Este ritmo de aparición de nuevos productos nos obliga a consumir aparatos electrónicos y a renovar los que ya tenemos con más frecuencia de lo realmente necesario.

Para la organización del coloquio se recomienda seguir estas pautas:

— **Determinar** los encargados de las distintas funciones:

- **Moderador.** Presentará a los participantes e introducirá el tema que se va a tratar. Además, concederá los turnos de palabra para que el coloquio se desarrolle de forma ordenada.
- **Participantes.** Darán sus opiniones sobre el tema elegido y escucharán las de los otros participantes. Generalmente, son un máximo de seis personas. Todos los participantes deben investigar y documentarse sobre el tema con anterioridad.
- **Público.** Atenderá a las diversas opiniones. Podrá intervenir al final aportando sus propias opiniones o preguntando a los participantes alguna cuestión.

— **Iniciar** el coloquio. El moderador presentará a los participantes, introducirá el tema y planteará la primera pregunta a alguno de los participantes.

— **Desarrollar** y **concluir** el coloquio. Los distintos participantes desarrollarán sus argumentos conducidos por el moderador. Cada participante debe expresar sus opiniones y respetar las de los demás.

Al final del coloquio, el público podrá exponer sus opiniones y preguntar a los participantes. Por último, el moderador puede llevar a cabo un breve resumen de las intervenciones.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(pág. 339)

27. Datos: λ_1 = 434 nm = 4,34 · 10^{-7} m; V_{D1} = 0,862 V; V_{D2} = 0,469 V; λ_2 = 502 nm = 5,02 · 10^{-7} m; h = 6,62 · 10^{-34} J·s; c = 3 · 10^8 m·s^{-1}

a) Expresamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico en función de la longitud de onda, $Ec_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$, y como además $Ec_{max} = e\,V_D$, tenemos:

$$V_D = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W_0}{e};\quad V_D = a\,\frac{1}{\lambda} + b$$

Sustituimos las dos parejas de valores de λ y V_D para hallar los parámetros a y b:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}862\ \text{V} &= a\,\frac{1}{4{,}34\cdot 10^{-7}\ \text{m}} + b \\ 0{,}469\ \text{V} &= a\,\frac{1}{5{,}02\cdot 10^{-7}\ \text{m}} + b \end{aligned}\right\}$$

$$a = 1{,}26\cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

$$b = -2{,}04\ \text{V}$$

Del valor del parámetro b obtenemos la función trabajo del potasio:

$$b = -\frac{W_0}{e};\quad W_0 = -b\,e;\quad W_0 = 2{,}04\ \text{eV}$$

b) Calculamos la frecuencia umbral mediante la relación $W_0 = h\,f_u$, y con ella obtenemos la longitud de onda:

$$f_u = \frac{W_0}{h};\quad f_u = \frac{2{,}04\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{J·s}} = 4{,}93\cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f};\quad \lambda = \frac{3\cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{4{,}93\cdot 10^{14}\ \text{Hz}} = 6{,}09\cdot 10^{-7}\ \text{m} = 609\ \text{nm}$$

c) Calculamos ahora la velocidad máxima de los electrones:

$$Ec_{max} = e\, V_D = \frac{1}{2} m_e\, v_{max}^{\ 2};\quad v_{max} = \sqrt{\frac{2\, e\, V_D}{m_e}}$$

$$\text{Para } \lambda_1;\quad v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}862\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$v_{max} = 5{,}51 \cdot 10^5\ \text{m·s}^{-1}$$

$$\text{Para } \lambda_2;\quad v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}469\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$v_{max} = 4{,}06 \cdot 10^5\ \text{m·s}^{-1}$$

28. Datos: $m = 3$; $R_H = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s}$; $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1}$

a) Escribimos la fórmula de Rydberg para la serie de Paschen ($m = 3$):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_H \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Del estudio de esta expresión se ve que la longitud de onda más corta corresponde al valor más alto para n, es decir, a la transición desde el nivel más alto posible $n = \infty$. En este caso, la longitud de onda es:

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{9} - 0\right) = \frac{R_H}{9}$$

$$\lambda_\infty = \frac{9}{R_H};\quad \lambda_\infty = \frac{9}{1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}} = 8{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

Utilizamos la fórmula de Planck para hallar la energía del fotón:

$$E = h\, f = h\, \frac{c}{\lambda};\quad E = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1}}{8{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}$$

$$E = 2{,}42 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}51\ \text{eV}$$

b) Las tres longitudes de onda mayores de la serie corresponden a las transiciones desde los tres niveles más cercanos al nivel $m = 3$, es decir, $n = 4$, 5 y 6. Aplicamos la fórmula de Rydberg para hallar estas longitudes de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right);\quad \lambda_n = \left[R_H \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)\right]^{-1}$$

$$\lambda_4 = \left[1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1} = 1{,}88 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

$$\lambda_5 = \left[1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5^2}\right)\right]^{-1} = 1{,}28 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

$$\lambda_6 = \left[1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6^2}\right)\right]^{-1} = 1{,}09 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 340 y 341)

29. En el momento de extraer la barra del horno su temperatura es muy alta, y, por la ley de desplazamiento de Wien, la longitud de onda λ_{max} para la que se produce mayor emisión de energía corresponde al color rojo. A medida que la barra se enfría, su temperatura desciende, lo que implica un aumento de λ_{max} y una disminución de la energía emitida. Esto hace que varíe el color de la barra y disminuya su brillo, hasta que la temperatura es tal que la longitud de onda ya no corresponde a radiación del espectro visible.

30. Respuesta sugerida:

Una manera sería establecer una diferencia de potencial entre los extremos del metal y conectarlo a un circuito eléctrico, de modo que se generara una corriente eléctrica.

Otra forma sería iluminar el metal con una radiación de longitud de onda adecuada, de manera que obtuviéramos electrones por efecto fotoeléctrico.

Finalmente, una tercera forma sería mediante un proceso de electrólisis, donde el metal que actúa de cátodo cede electrones a la pila electrolítica.

31. La energía cinética máxima de los fotoelectrones se encuentra relacionada con la frecuencia de la radiación incidente según la expresión $Ec_{max} = h\, f - W_0$. Por lo tanto, triplicar la frecuencia de la radiación no equivale a triplicar la energía cinética de los electrones, ya que debemos tener en cuenta la energía que gastamos en desprender a los electrones del metal, que no varía en función de la frecuencia, sino que es característica del material.

32. La hipótesis de Planck para explicar la radiación del cuerpo negro se basa en dos puntos fundamentales: por un lado, considera que los átomos se comportan como osciladores armónicos y, por otra parte, supone que estos osciladores únicamente pueden absorber o emitir radiación de forma discreta, en cantidades proporcionales a su frecuencia de oscilación, $E = n\, E_0 = n\, h\, f$. A estos paquetes de energía los denomina cuantos, de modo que la energía de los osciladores se encuentra cuantizada.

33. La teoría cuántica de Einstein supone que toda radiación se encuentra formada por pequeños paquetes de energía denominados fotones, cuya energía es proporcional a la frecuencia de la radiación. La existencia de los fotones, partículas con masa en reposo nula pero con momento lineal, quedó comprobada experimentalmente gracias a las experiencias del físico norteamericano A. H. Compton, al estudiar la colisión de rayos X sobre una lámina de grafito.

Por lo tanto, la teoría cuántica de Einstein confirma la naturaleza corpuscular de la luz.

34. La ecuación básica del efecto fotoeléctrico es la expresión $Ec_{max} = h\, f - W_0$.

El primer término nos indica la energía cinética máxima que podrá alcanzar un fotoelectrón al ser arrancado del metal. Esta energía es igual a la diferencia entre la energía del fotón incidente h f y la función trabajo del metal W_0, que es el trabajo necesario para extraer del metal el electrón más débilmente enlazado.

35. La longitud de onda de la luz verde es de unos 550 nm, mientras que la de la luz amarilla se encuentra alrededor de los 590 nm. La luz naranja tiene una longitud de onda superior a los 590 nm, lo que quiere decir que su frecuencia será menor que la de la luz amarilla y, por lo tanto, no producirá efecto fotoeléctrico. Sin embargo, la luz azul tiene una longitud de onda menor que la de la luz verde, es decir, una frecuencia mayor, y por lo tanto, sí será capaz de producir efecto fotoeléctrico.

36. Si se produce efecto fotoeléctrico al incidir radiación de frecuencia f, esto significa que la frecuencia umbral del metal f_u es menor que f. Por lo tanto, si ahora incide una radiación de frecuencia 2f, también producirá efecto fotoeléctrico, pues su frecuencia será superior a la umbral.

37. El **espectro de emisión** lo componen las longitudes de onda de la luz que emite una sustancia química. Es un espectro discreto que presenta una serie de rayas brillantes de colores, cada una de distinta longitud de onda y frecuencia, sobre fondo oscuro.

    El **espectro de absorción** lo forman las longitudes de onda de la luz con que se ilumina una sustancia química que no han sido absorbidas por dicha sustancia al atravesarla. Es un espectro que presenta una serie de rayas oscuras sobre el espectro continuo de la luz incidente utilizada.

    Si colocamos ambos espectros para una misma sustancia uno junto al otro, se observa que son complementarios. Las líneas brillantes del espectro de emisión corresponden exactamente a las longitudes de onda que faltan en el de absorción. Ambos espectros son característicos de cada sustancia química y sirven como método de identificación de ésta.

38. *a)* En el modelo de Bohr los electrones giran alrededor del núcleo atómico describiendo órbitas circulares. Estas órbitas sólo pueden tener ciertos valores de la energía y ciertos radios, y en ellas los electrones se encuentran en estados estacionarios sin emitir ni absorber energía. Esta absorción o emisión únicamente se produce cuando el electrón salta de una órbita a otra, lo que equivale a modificar el nivel energético. Así pues, la órbita en la que se encuentra el electrón nos determina el valor de su energía.

    b) La cuantización de las energías de las diferentes órbitas posibles para el electrón indica que éste no podrá tener una energía arbitraria, sino que únicamente podrá tener unos valores determinados de energía, y que sólo podrá cambiar de una órbita a otra emitiendo o absorbiendo un fotón de una energía igual a la diferencia de energías entre ambas. Por ello los espectros atómicos son discretos.

39. La expresión dualidad onda–partícula se utiliza para describir el doble comportamiento que presentan la materia y la radiación. Así, en un experimento de doble rendija se puede observar cómo los electrones adquieren un comportamiento ondulatorio, mientras que el efecto Compton nos sirve de prueba del carácter corpuscular de la radiación electromagnética.

    a) La hipótesis de De Broglie extiende la conocida naturaleza dual de la radiación al comportamiento de la materia. De Broglie relaciona la energía tanto de la materia como de la radiación con la frecuencia de la onda asociada a su movimiento según la expresión: E = h f. Asimismo, relaciona el momento lineal con la longitud de onda $\lambda = \frac{h}{p}$.

    b) La comprobación experimental de este doble comportamiento fue realizada por los físicos norteamericanos Davisson y Germer al observar la difracción de los electrones. El resultado fue una figura de difracción igual a lo que se obtendría al difractar una onda con una longitud de onda como la predicha por De Broglie para los electrones del experimento.

40. En el experimento de la doble rendija se observa una figura de difracción después del impacto de muchos electrones sobre la pantalla. Pero un único electrón no produce el patrón de difracción, sino un único impacto. Por lo tanto, no es posible observar el comportamiento ondulatorio de la materia a partir del comportamiento de un único electrón.

41. El experimento llevado a cabo en 1932 por el físico norteamericano A. H. Compton fue la confirmación definitiva de la existencia de los fotones, así como una prueba del comportamiento corpuscular de la radiación. El experimento consistía en la observación de la colisión de un haz de rayos X de longitud de onda l sobre una lámina de grafito. La radiación dispersada aparecía dividida en dos haces, uno de longitud de onda menor a la de la onda incidente, y otro con la misma longitud de onda.

    Para explicar este resultado, Compton consideró la radiación electromagnética formada por un conjunto de partículas relativistas, los fotones, con masa en reposo nula, energía E = h f, y momento lineal $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$. Los fotones que chocaban con los electrones de los átomos de grafito cedían parte de su energía y, por lo tanto, emergían del material con una longitud de onda mayor.

42. El concepto de órbita del modelo atómico de Bohr es heredero del concepto clásico de órbita. Se trata de la trayectoria, en este caso circular, bien definida del electrón en su movimiento alrededor del núcleo. La novedad es que sólo algunas órbitas son posibles y que en ellas el electrón se encuentra en un estado estacionario, es decir, su energía se mantiene constante.

    Sin embargo, en el concepto de orbital el electrón ya no tiene una localización precisa. Un orbital es una función de onda, solución de la ecuación de Schrödinger, cuyo cuadrado es una medida de la probabilidad de hallar el electrón en cada punto del espacio y para cada instante de tiempo. No podemos hablar de la posición o de la trayectoria del electrón alrededor del núcleo sino que tan sólo podemos calcular en qué zonas del espacio es más probable hallar el electrón. Estas probabilidades pueden representarse mediante superficies imaginarias dentro de las cuales la probabilidad de encontrar el electrón con una determinada energía es elevada.

43. La diferencia fundamental se halla en el número de partículas (bosones o fermiones) que puede haber simultáneamente en un mismo estado cuántico. En el caso de los fermiones, que tienen espín semientero, este número viene determinado por el principio de exclusión de Pauli, que nos dice que no pueden existir dos fermiones en el mismo estado cuántico. Por otro lado, los bosones, con espín entero, se comportan de forma totalmente contraria, y su tendencia es a agruparse en un mismo estado, y así no existe un límite para el número de bosones que podemos encontrar en el mismo estado cuántico.

    Ejemplos de fermiones son el electrón, el protón y el neutrón, todos ellos con espín $s = \frac{1}{2}$. Bosones son el fotón (s = 1), la partícula α (s = 0) y el muón (s = 0).

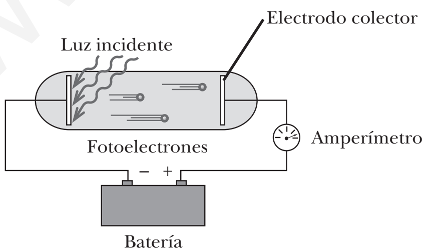
44. Respuesta sugerida:

    El esquema básico de una célula fotoeléctrica es el que se muestra en la figura. La luz incide sobre el cátodo y arranca electrones. El número de electrones que llegan al ánodo se mide gracias a la corriente que circula por el amperímetro, y modificando el valor de la polaridad del ánodo podemos variar la cantidad de fotoelectrones emitidos que llegan hasta él.

    Cuando el valor de V es positivo, los electrones son atraídos por el ánodo, y para valores suficientemente grandes, todos los electrones llegan al ánodo y la corriente alcanza un valor máximo.

    Interrumpiendo o permitiendo el paso de la luz hacia el cátodo hacemos lo propio con la corriente que circula por el circuito, lo que convierte a las células fotoeléctricas en unos útiles sensores.

    a)



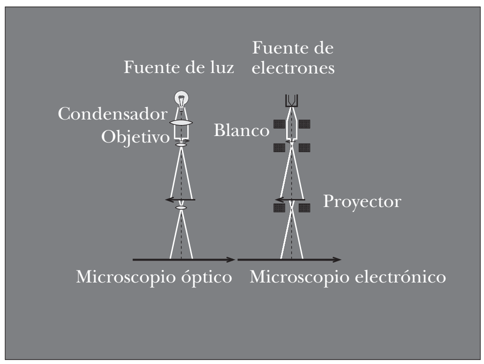
    b) Las aplicaciones de las células fotoeléctricas son variadas: control de la apertura y el cierre de puertas automáticas, en dispositivos de seguridad o recuento de unidades en cadenas de montaje.

45. Respuesta sugerida:

    a) El funcionamiento de un microscopio electrónico se basa en las propiedades ondulatorias de los electrones. Estos electrones provienen de un filamento previamente calentado (el cañón electrónico) y son acelerados por una diferencia de potencial muy elevada. Se orientan paralelamente formando un único haz mediante unas lentes magnéticas de enfoque (condensador). Estos electrones inciden contra un blanco (objeto) muy fino y a continuación son enfocados por una segunda lente magnética que equivale al objetivo de los microscopios convencionales. Finalmente, la tercera lente magnética hace de ocular y proyecta el haz de electrones sobre una pantalla fluorescente de modo que la imagen pueda ser observada.

    El microscopio electrónico es muy similar al microscopio compuesto ordinario. En el primero, la función de las lentes es efectuada por electroimanes diseñados específicamente para ello.

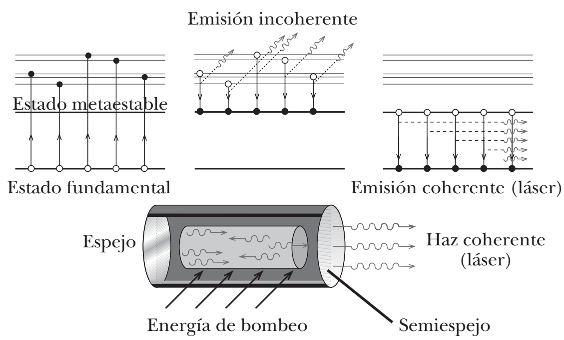
    Pero la diferencia más importante entre ambos es que la resolución del microscopio electrónico es mucho mayor que la del microscopio óptico. Ello es debido a que los microscopios son capaces de resolver detalles hasta un tamaño comparable a la longitud de onda de la radiación empleada para iluminar el objeto; más allá de este tamaño la difracción nos impide distinguir los detalles. Si aceleramos los electrones lo suficiente, obtendremos energías elevadas y longitudes de onda asociadas a éstos muy cortas, del orden de 1 000 veces menores a las del espectro visible. Por lo tanto, dispondremos de una resolución hasta 1 000 veces mayor que utilizando luz visible.



    b) La microscopía electrónica ha permitido poder observar la forma, la función y el comportamiento de diferentes formas de vida o estructuras microscópicas que no podían ser estudiadas con el microscopio óptico o, por lo menos, no con el suficiente detalle. Es el caso, por ejemplo, de los virus, cuyo tamaño está comprendido típicamente entre los 20 y los 300 nm, o del estudio de la actividad de las células cancerosas.

    Estos estudios han redundado en una mejor comprensión del cuerpo humano, de las enfermedades que lo atacan y de la forma de enfrentarse a ellas.

46. Respuesta sugerida:



a) Las características fundamentales del láser, y que lo diferencian de las fuentes de radiación convencionales, son tres: monocromaticidad, coherencia y direccionalidad. La primera de ellas hace referencia al hecho de que la radiación emergente de un láser posee únicamente una longitud de onda, al contrario de la de una bombilla, que emite luz blanca, formada por una infinidad de longitudes de onda. La coherencia es debida a que todos los átomos del láser radian en fase entre sí, mientras que en una bombilla cada átomo radia luz independientemente. Por otro lado, la bombilla emite en todas las direcciones del espacio, mientras que el haz láser es enfocado en haces muy estrechos en una sola dirección mediante espejos.

b) Actualmente, se utiliza el láser para leer automáticamente las etiquetas de los productos en los supermercados, para operar en los hospitales, en las impresoras, para leer discos compactos o para cortar piezas en la industria.

47. Datos: $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda_2 = 7 \cdot 10^{-7}$ m;
$E = 5{,}6$ eV $= 8{,}96 \cdot 10^{-19}$ J; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

a) Calculamos el intervalo de frecuencias y utilizamos la fórmula de Planck para hallar el de energías:

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1}; \quad f_1 = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2}; \quad f_2 = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{7 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E_1 = h\, f_1; \quad E_1 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E_1 = 4{,}96 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3{,}10 \text{ eV}$$

$$E_2 = h\, f_2; \quad E_2 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot 4{,}28 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E_2 = 2{,}83 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}77 \text{ eV}$$

Por lo tanto, el espectro visible corresponde a las frecuencias comprendidas entre $4{,}29 \cdot 10^{14}$ Hz y $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz, y a las energías fotónicas entre 1,77 eV y 3,10 eV.

b) Calculamos la longitud de onda de un fotón de 5,6 eV:

$$E = h\, f = h\, \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = h\, \frac{c}{E}; \quad \lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{8{,}96 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

$$\lambda = 2{,}22 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

c) El fotón pertenece a la región ultravioleta del espectro electromagnético.

48. Datos: $\lambda_1 = 300$ nm $= 3{,}00 \cdot 10^{-7}$ m;
$\lambda_2 = 450$ nm $= 4{,}50 \cdot 10^{-7}$ m; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s;
$W_0 = 3{,}70$ eV $= 5{,}92 \cdot 10^{-19}$ J; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

a) Para que la radiación produzca efecto fotoeléctrico, su energía debe ser superior al valor de la función trabajo del metal, así que calculamos la energía asociada a cada radiación mediante la fórmula de Planck:

$$E_1 = h\, \frac{c}{\lambda_1}; \quad E_1 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{3{,}00 \cdot 10^{7} \text{ m}}$$

$$E_1 = 6{,}62 \cdot 10^{-19} \text{ J} > W_0$$

$$E_2 = h\, \frac{c}{\lambda_2}; \quad E_2 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{4{,}50 \cdot 10^{7} \text{ m}}$$

$$E_2 = 4{,}41 \cdot 10^{-19} \text{ J} < W_0$$

Por lo tanto, sólo producirá efecto fotoeléctrico la radiación de longitud de onda de 300 nm.

b) Calculamos ahora la velocidad máxima de los electrones:

$$Ec_{max} = \frac{h\,c}{\lambda} - W_0; \quad \frac{1}{2}\, m\, v_{max}{}^2 = \frac{h\,c}{\lambda} - W_0$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{h\,c}{\lambda} - W_0\right)}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{3{,}00 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - 5{,}92 \cdot 10^{-19} \text{ J}\right)}$$

$$v_{max} = 3{,}9 \cdot 10^5 \text{ m·s}^{-1}$$

Variar la intensidad de la radiación incidente no modifica la velocidad de los electrones emitidos, ya que ésta sólo depende de la longitud de onda de la radiación.

49. Datos: $m = 140$ g $= 0{,}14$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s
$\lambda = 1{,}9 \cdot 10^{-24}$ Å $= 1{,}9 \cdot 10^{-34}$ m

Utilizamos la relación de De Broglie para calcular el momento lineal de la pelota y así obtener el valor de su velocidad:

$$p = m\, v = \frac{h}{\lambda}; \quad v = \frac{h}{m\, \lambda}$$

$$v = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}}{0{,}14 \text{ kg} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-34} \text{ m}} = 25 \text{ m·s}^{-1}$$

Es imposible medir esta longitud de onda, $\lambda = 1{,}9 \cdot 10^{-34}$ m, ya que es incluso menor que las dimensiones de los radios de los núcleos atómicos, que son del orden de 10^{-15} m.

50. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_m = 65$ kg; $v = 1{,}5$ m·s^{-1}; $\Delta v = 5 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

a) Calculamos la energía de ambos debida a su movimiento, es decir, la energía cinética:

$$Ec_e = \frac{1}{2} m_e v^2; \quad Ec_e = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg } (1{,}5 \text{ m·s}^{-1})^2$$

$$Ec_e = 1{,}02 \cdot 10^{-30} \text{ J}$$

$$Ec_m = \frac{1}{2} m_m v^2$$

$$Ec_m = \frac{1}{2} \cdot 65 \text{ kg } (1{,}5 \text{ m·s}^{-1})^2 = 73{,}1 \text{ J}$$

$$p_e = m_e v; \quad p_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1{,}5 \text{ m·s}^{-1}$$

$$p_e = 1{,}37 \cdot 10^{-30} \text{ kg·m·s}^{-1}$$

$$p_m = m_m v; \quad p_m = 65 \text{ kg} \cdot 1{,}5 \text{ m·s}^{-1} = 97{,}5 \text{ kg·m·s}^{-1}$$

b) Calculamos la indeterminación en el momento lineal a partir de la indeterminación en la velocidad:

$$\Delta p_e = m_e \Delta v; \quad \Delta p_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m·s}^{-1}$$

$$\Delta p_e = 4{,}55 \cdot 10^{-33} \text{ kg·m·s}^{-1}$$

$$\Delta p_m = m_m \Delta v; \quad \Delta p_m = 65 \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m·s}^{-1}$$

$$\Delta p_m = 0{,}325 \text{ kg·m·s}^{-1}$$

c) Utilizamos el principio de indeterminación de Heisenberg, $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$, para hallar la indeterminación mínima en la posición de ambos:

$$\Delta x_e \geq \frac{h}{4\pi \, \Delta p_e}$$

$$\Delta x_e \geq \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}}{4\pi \cdot 4{,}55 \cdot 10^{-33} \text{ kg·m·s}^{-1}} = 0{,}0116 \text{ m} = 11{,}6 \text{ mm}$$

$$\Delta x_m \geq \frac{h}{4\pi \, \Delta p_m}$$

$$\Delta x_m \geq \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}}{4\pi \cdot 0{,}325 \text{ kg·m·s}^{-1}} = 1{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

51. *a)* **Orbital 3f.** Su número cuántico principal es n = 3, lo que quiere decir que l puede tomar los valores l = 0, 1, 2, mientras que la letra f corresponde a l = 3. Por lo tanto, el orbital 3f no existe.

b) **Orbital 5p.** En este caso, n = 5, y l puede tomar los valores l = 0, 1, 2, 3, 4. La letra p corresponde a l = 1, así que sí es posible este orbital.

c) **Orbital 2s(–1).** Los números cuánticos de este orbital son n = 2, l = 0 y $m_l = -1$. Sin embargo, para l = 0, sólo es posible el valor $m_l = 0$, ya que para un l fijo, los valores de m_l oscilan entre –l y +l. Este orbital no es posible.

d) **Orbital 4f(+3).** Este orbital tiene n = 4, l = 3 y $m_l = 3$. Los tres valores son posibles, ya que para n = 4, l podrá tomar los valores l = 0, 1, 2, 3. Además, para l = 3, m_l podría tomar los valores m_l = –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. Por lo tanto, este orbital sí es posible.

52. Datos: $\lambda_1 = 1\,850$ nm $= 1{,}85 \cdot 10^{-6}$ m; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}; $\lambda_2 = 2\,536$ nm $= 2{,}536 \cdot 10^{-6}$ m; $V_{D1} = 4{,}732$ V; $V_{D2} = 2{,}919$ V; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

a) Expresamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico en función de la longitud de onda, $Ec_{max} = \frac{h\,c}{\lambda} - W_0$, y como además $Ec_{max} = e\,V_D$, tenemos:

$$V_D = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W_0}{e}; \quad V_D = a\,\frac{1}{\lambda} + b$$

Sustituimos las dos parejas de valores de λ y V_D para hallar los parámetros a y b:

$$\left.\begin{aligned} 4{,}732 \text{ V} &= a\,\frac{1}{1{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ m}} + b \\ 2{,}919 \text{ V} &= a\,\frac{1}{2{,}536 \cdot 10^{-6} \text{ m}} + b \end{aligned}\right\}$$

$$a = 1{,}24 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$b = -1{,}97 \text{ V}$$

Del valor del parámetro b obtenemos la función trabajo del mercurio: $b = -\frac{W_0}{e}$

$$W_0 = -b\,e = 1{,}97 \text{ eV}$$

b) Calculamos la frecuencia umbral mediante la relación $W_0 = h\,f_u$, y con ella obtenemos la longitud de onda umbral:

$$f_u = \frac{W_0}{h}; \quad f_u = \frac{1{,}97 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}} = 4{,}76 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda_u = \frac{c}{f_u}$$

$$\lambda_u = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1}}{4{,}76 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6{,}30 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 630 \text{ nm}$$

c) Calculamos ahora la velocidad máxima de los electrones:

$$Ec_{max} = e\,V_D = \frac{1}{2} m_e\, v_{max}^{\;2}; \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2\,e\,V_D}{m_e}}$$

$$\text{Para } \lambda_1; \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4{,}732 \text{ V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}}$$

$$v_{max} = 1{,}29 \cdot 10^6 \text{ m·s}^{-1}$$

$$\text{Para } \lambda_2; \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2{,}919 \text{ V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}}$$

$$v_{max} = 1{,}01 \cdot 10^6 \text{ m·s}^{-1}$$

53. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $\lambda = 1$ Å $= 10^{-10}$ m; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

Utilizamos la relación de De Broglie para calcular el momento del electrón y así obtener su energía cinética:

$$p = \frac{h}{\lambda}; \quad p = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s}}{10^{-10}\ \text{m}} = 6{,}62 \cdot 10^{-24}\ \text{kg·m·s}^{-1}$$

$$Ec = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{p^2}{2\,m}; \quad Ec = \frac{(6{,}62 \cdot 10^{-24}\ \text{kg·m·s}^{-1})^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$$

$$Ec = 2{,}41 \cdot 10^{-17}\ \text{J} = 150\ \text{eV}$$

Su energía proviene del potencial que lo ha acelerado, E = e V. Por lo tanto, lo aceleró una diferencia de potencial de 150 V.

54. Datos: $r_{Sol} = 6{,}96 \cdot 10^8$ m; $T_{superficial} = 5\,800$ K; $S = 4\pi r^2$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

a) La energía total emitida por el Sol en un segundo es igual a la potencia total emitida, que calculamos mediante la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma\, T^4\, S = \sigma\, T^4\, 4\pi r^2$$

$$P = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-4} \cdot (5\,800\ \text{K})^4 \cdot$$

$$\cdot\, 4\pi \cdot (6{,}96 \cdot 10^8\ \text{m})^2 = 3{,}91 \cdot 10^{26}\ \text{W}$$

$$P = 3{,}91 \cdot 10^{26}\ \text{J·s}^{-1}$$

b) Calculamos la energía emitida en un año a partir de la energía emitida en un segundo y del número de segundos en un año:

$$E = P\, t;\ E = 3{,}91 \cdot 10^{26}\ \text{W} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \text{s}$$

$$E = 1{,}23 \cdot 10^{34}\ \text{J}$$

Obtenemos la masa perdida mediante la ecuación relativista que nos relaciona masa y energía:

$$E = m\, c^2; \quad m_{perdida} = \frac{E}{c^2}$$

$$m_{perdida} = \frac{1{,}23 \cdot 10^{34}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2} = 1{,}37 \cdot 10^{17}\ \text{kg}$$

55. La longitud de onda de De Broglie para una partícula de masa relativista m viene dada por:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\, v} = \frac{h}{\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\, v} = \frac{h\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{m_0\, v}$$

Por otro lado, la longitud de onda Compton es $\lambda_C = \dfrac{h}{m_0\, c}$.

Por lo tanto:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_C} = \frac{\dfrac{h\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{m_0\, v}}{\dfrac{h}{m_0\, c}} = \frac{c\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{v} = \sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2 - 1}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 341)

1. Datos: $\lambda_1 = 75$ pm $= 7{,}5 \cdot 10^{-11}$ m; $\lambda_2 = 750$ nm $= 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda_3 = 7{,}5$ mm $= 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ m; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}

a) Utilizamos la ley de desplazamiento de Wien para hallar la temperatura de la cavidad:

$$\lambda_{max}\, T = 2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m·K}$$

$$T = \frac{2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m·K}}{\lambda_{max}}$$

$$T_1 = \frac{2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m·K}}{7{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{m}} = 3{,}86 \cdot 10^7\ \text{K}$$

$$T_2 = \frac{2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m·K}}{7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3\,864\ \text{K}$$

$$T_3 = \frac{2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m·K}}{7{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 0{,}386\ \text{K}$$

b) Para calcular la potencia emitida por unidad de área utilizaremos la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma\, T^4\, S;\ \frac{P}{S} = \sigma\, T^4$$

$$\frac{P_1}{S} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-4} \cdot (3{,}86 \cdot 10^7\ \text{K})^4$$

$$\frac{P_1}{S} = 1{,}26 \cdot 10^{23}\ \text{W·m}^{-2}$$

$$\frac{P_2}{S} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-4} \cdot (3\,864\ \text{K})^4$$

$$\frac{P_2}{S} = 1{,}264 \cdot 10^7\ \text{W·m}^{-2}$$

$$\frac{P_3}{S} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-4} \cdot (0{,}386\ \text{K})^4$$

$$\frac{P_3}{S} = 1{,}26 \cdot 10^{-9}\ \text{W·m}^{-2}$$

2. Si la radiación incidente es capaz de extraer electrones del metal, esto significa que su frecuencia f es superior a la frecuencia umbral f_u. La energía cinética de los electrones arrancados se relaciona con esta frecuencia mediante la expresión: $Ec_{max} = h\, f - W_0 = \dfrac{h\, c}{\lambda} - W_0$. Por lo tanto, a medida que aumenta la longitud de onda de la radiación incidente, disminuye la energía cinética de los electrones emitidos. Sin embargo, si la longitud de onda sigue aumentando, llegará a ser mayor que la correspondiente a la frecuencia umbral, momento en el que cesará la emisión de fotoelectrones, pues la energía de la radiación será inferior a la necesaria para arrancarlos del metal.

3. Datos: $\lambda = 560$ nm $= 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ m; $I_m = 10^{-10}$ W·m^{-2}; $\varnothing_{pup} = 8$ mm $= 8 \cdot 10^{-3}$ m; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ m; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

a) Utilizamos la fórmula de Planck expresada en función de la longitud de onda para hallar la energía del fotón de $\lambda = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ m:

$$E = h\,f = h\frac{c}{\lambda};\quad E = 6{,}62\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{5{,}6\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

$$E = 3{,}55\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

b) Calculamos el número de fotones por segundo necesarios para que el ojo detecte la radiación. Para ello comparamos la energía de un fotón con la que atraviesa la superficie de la pupila en un segundo correspondiente a una radiación de intensidad (energía por unidad de superficie y tiempo) igual a la mínima que el ojo es capaz de detectar:

$$E = I_m\,S\,t = I_m\,\pi r^2\,t$$

$$E = 10^{-10}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}\cdot\pi\cdot(4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2\cdot 1\ \mathrm{s}$$

$$E = 5{,}03\cdot 10^{-15}\ \mathrm{J}$$

$$E = n\,E_{\text{fotón}};\quad n = \frac{E}{E_{\text{fotón}}}$$

$$n = \frac{5{,}03\cdot 10^{-15}\ \mathrm{J}}{3{,}55\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 14\,169\ \frac{\text{fotones}}{\mathrm{s}}$$

4. Datos: $E = 10^{20}$ eV $=16$ J; $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ J·s; $c = 3\cdot 10^{8}$ m·s^{-1}

   Calculamos la longitud de onda del fotón gamma a partir de la fórmula de Planck expresada en función de la longitud de onda:

$$E = h\,f = h\frac{c}{\lambda};\quad \lambda = h\frac{c}{E}$$

$$\lambda = 6{,}62\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{16\ \mathrm{J}} = 1{,}24\cdot 10^{-26}\ \mathrm{m}$$

5. Datos: $W_0 = 1$ eV $= 1{,}6\cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ J·s; $Ec_{max} = 1{,}5$ eV $= 2{,}4\cdot 10^{-19}$ J

   Podemos calcular la frecuencia de los fotones incidentes a partir de la expresión de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$Ec_{max} = h\,f - W_0;\quad f = \frac{Ec_{max} + W_0}{h}$$

$$f = \frac{2{,}4\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} + 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}} = 6\cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

6. Datos: $n_i = 4$; $n_f = 2$; $R_H = 1{,}096776\cdot 10^{7}$ m^{-1}; $c = 3\cdot 10^{8}$ m·s^{-1}

   a) Utilizamos la expresión de Bohr para calcular la energía estacionaria de un electrón del átomo de hidrógeno en un nivel n:

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{n^2}$$

$$E_4 = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{4^2} = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{16} = -0{,}85\ \mathrm{eV}$$

$$E_2 = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{2^2} = -\frac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{4} = -3{,}40\ \mathrm{eV}$$

   b) Calculamos la frecuencia del fotón emitido mediante la fórmula de Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right);\quad \lambda = \left[R_H\left(\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right)\right]^{-1}$$

$$\lambda_{4\to 2} = \left[1{,}096776\cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1}$$

$$\lambda_{4\to 2} = 4{,}86\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

$$f = \frac{c}{\lambda};\quad f = \frac{3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{4{,}86\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 6{,}17\cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

7. En 1927, los físicos norteamericanos C. Davisson y L. A. Germer comprobaron experimentalmente la hipótesis de De Broglie sobre la dualidad onda-partícula de la materia. Esta comprobación se llevó a cabo al observar de forma casual la difracción de un haz de electrones al incidir sobre una placa donde se habían practicado dos pequeñas incisiones. El patrón de difracción coincidía con el que se obtendría al difractar fotones de la misma longitud de onda que la predicha por De Broglie para los electrones.

8. Datos: $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; $m_b = 30$ g $= 0{,}03$ kg; $\Delta v = 10^{-3}$ m·s^{-1}; $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ J·s

   a) Calculamos la indeterminación en el momento lineal a partir de la indeterminación en la velocidad:

$$\Delta p_e = m_e\,\Delta v;\ \Delta p_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$\Delta p_e = 9{,}1\cdot 10^{-34}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$$

$$\Delta p_b = m_b\,\Delta v;\ \Delta p_b = 0{,}03\ \mathrm{kg}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

$$\Delta p_b = 3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$$

   Calculamos la indeterminación en la posición a partir del principio de incertidumbre de Heisemberg $\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$:

$$\Delta x_e \geq \frac{h}{4\pi\,\Delta p_e};\quad \Delta x_e \geq \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}}{4\pi\cdot 9{,}1\cdot 10^{-34}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}}$$

$$\Delta x_e \geq 0{,}06\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x_b \geq \frac{h}{4\pi\,\Delta p_b};\quad \Delta x_b \geq \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}}{4\pi\cdot 3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}}$$

$$\Delta x_b \geq 1{,}76\cdot 10^{-30}\ \mathrm{m}$$

9. **n = 1.** El único orbital posible es el (1, 0, 0). Así que hay $1 = 1^2$ orbitales.

   n = 2. Los orbitales posibles son (2, 1, –1), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 0), es decir, $4 = 2^2$ orbitales.

   n = 3. Le corresponden los siguientes orbitales: (3, 2, –2), (3, 2, –1), (3, 2, 0), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 1, –1), (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 0, 0). En total son $9 = 3^2$ orbitales.

   n = 4. En este caso tenemos los orbitales: (4, 3, –3), (4, 3, –2), (4, 3, –1), (4, 3, 0), (4, 3, 1), (4, 3, 2), (4, 3, 3), (4, 2, –2), (4, 2, –1), (4, 2, 0), (4, 2, 1), (4, 2, 2), (4, 1, –1), (4, 1, 0), (4, 1, 1), (4, 0, 0). En total $16 = 4^2$ orbitales.

   n = 5. En este caso tenemos los siguientes orbitales: (5, 4, –4), (5, 4, –3), (5, 4, –2), (5, 4, –1), (5, 4, 0), (5, 4, 1), (5, 4, 2), (5, 4, 3), (5, 4, 4), (5, 3, –3), (5, 3, –2), (5, 3, –1), (5, 3, 0), (5, 3, 1), (5, 3, 2), (5, 3, 3), (5, 2, –2), (5, 2, –1), (5, 2, 0), (5, 2, 1), (5, 2, 2), (5, 1, –1), (5, 1, 0), (5, 1, 1), (5, 0, 0). En total $25 = 5^2$ orbitales.

14. Núcleos y partículas

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 343)

- Los elementos químicos correspondientes a los distintos números atómicos son: Z = 2: helio (He); Z = 13: aluminio (Al); Z = 26: hierro (Fe); Z = 48: cadmio (Cd); Z = 62: samario (Sm); Z = 84: polonio (Po); y Z = 92: uranio (U).

- Un megaelectronvoltio (MeV) es una unidad de energía igual a 10^6 electronvoltios (eV). A su vez, un electronvoltio es el valor absoluto de la energía que adquiere un electrón cuando es acelerado a lo largo de una diferencia de potencial eléctrico de un voltio. Es decir:

$$1\text{ eV} = \left| -1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 1\text{ V} \right| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

  Esto es, un electronvoltio equivale a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ julios (J).

  Por tanto, un megaelectronvoltio equivale a:

$$10^6\text{ eV} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ J}/1\text{ eV}) = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\text{ J.}$$

1. RADIACTIVIDAD (págs. 345 y 346)

1. Las sustancias radiactivas pueden emitir radiaciones capaces de penetrar en cuerpos opacos, ionizar el aire haciéndolo conductor, impresionar placas fotográficas y excitar la fluorescencia de ciertas sustancias. Las sustancias radiactivas, además, pueden producir cambios químicos en la materia orgánica.

2. Tanto la radiación α como la radiación β están asociadas a partículas materiales, mientras que la radiación γ es una forma de radiación electromagnética.

   — La radiación α está formada por núcleos de helio 4 (es decir, conjuntos de dos neutrones y dos protones que reciben el nombre de partículas alfa). Por tanto, cada partícula α posee la carga eléctrica correspondiente a dos protones, $Q = +2e = +3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C, y la masa de un núcleo de helio 4, $m = 6{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg.

   — La radiación β está formada por electrones rápidos procedentes de la desintegración de neutrones del núcleo. Así pues, cada partícula β posee la carga eléctrica y la masa de un electrón ($Q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg).

   — La radiación γ es una radiación electromagnética de mayor frecuencia (y menor longitud de onda) que los rayos X. Las partículas asociadas a la radiación γ son fotones con la correspondiente frecuencia. Por tanto, el valor de su masa y su carga eléctrica es nulo ($Q = 0$; $m = 0$).

3. Datos: $N = 7/8\ N_0$; t = 1,54 días

   a) Primero pasamos el tiempo de días a segundos:

$$t = 1{,}54\text{ d} \cdot \frac{24\text{ h}}{1\text{ d}} \cdot \frac{3\,600\text{ s}}{1\text{ h}} = 133\,056\text{ s}$$

   Ahora sustituimos los datos en la ley de emisión radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{7}{8} N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 133\,056\text{ s}}$$

   Y tomando logaritmos neperianos, resulta:

$$\ln\frac{7}{8} = -\lambda \cdot 133\,056\text{ s} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{133\,056\text{ s}} \ln\frac{8}{7}$$

$$\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ s}^{-1}$$

   b) El período de semidesintegración T se relaciona con la constante radiactiva λ según:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ s}^{-1}} = 693\,147\text{ s}$$

   Su valor en días es:

$$T = 693\,147\text{ s} \cdot \frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}} \cdot \frac{1\text{ d}}{24\text{ h}} = 8{,}0\text{ d}$$

4. Para fuentes externas al organismo, la más peligrosa es la radiación γ, le sigue la radiación β, y la menos peligrosa de las tres es la radiación α.

   Para fuentes internas al organismo, la más peligrosa es la radiación α, le sigue la radiación β, y la menos peligrosa de las tres es la radiación γ.

   Para prevenir los peligros de la radiación hay que minimizar la exposición del organismo a la radiación. Esto se consigue aumentando la distancia de separación entre la fuente radiactiva y el organismo, reduciendo el tiempo de exposición a la radiación y utilizando pantallas o escudos protectores que eviten que la radiación penetre en el organismo.

5. Respuesta sugerida:

   Los principales usos de las radiaciones ionizantes son:

   — En el campo de la **medicina,** se utilizan en el tratamiento y la diagnosis del cáncer, el examen de órganos y la esterilización de material médico.

   — En el campo de la **industria,** se emplean en radiografías para detectar fracturas y defectos en planchas de acero, en soldaduras y en materiales de construcción.

— En el campo de la **química,** se utilizan para fabricar productos químicos y para estudiar los mecanismos de reacción.

— En otros campos, se utilizan para esterilizar especies nocivas **(agricultura),** para datar muestras orgánicas **(paleontología)** y para la fabricación de relojes atómicos de precisión y generadores auxiliares para satélites artificiales **(ingeniería)**.

6. Respuesta sugerida:

   Los radicales libres son moléculas químicas neutras con un electrón desapareado que no forma parte de un enlace químico. Por esta razón son moléculas muy activas, ya que intentan aparear su electrón libre. Al atraer electrones de otras moléculas, provocan la oxidación de estas últimas.

   Las partículas α provocan la formación de radicales libres procedentes de moléculas de agua del organismo; y estos radicales libres reaccionan con moléculas complejas de tejidos.

2. EL NÚCLEO ATÓMICO (pág. 348)

7. El núcleo atómico está formado por protones y neutrones. Ambos tipos de partículas reciben el nombre de nucleones.

	Protones	*Neutrones*
Masa	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg
Carga	$+e = +1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C	0 C

8. La energía de enlace por nucleón es el cociente entre la energía de enlace del núcleo y el número total de nucleones que forman el núcleo (número másico).

   El orden de magnitud de la energía de enlace por nucleón es de varios MeV. Su valor medio es aproximadamente de 8,3 MeV.

9. Datos: A(Ra) = 226; A_r(Ra) = 226,0254 u; Z(Ra) = 88; m_p = 1,0073 u; m_n = 1,0087 u

   a) El defecto de masa Δm vale:

   $$\Delta m = (Z\, m_p + (A - Z)\, m_n) - M_N$$

   Sustituimos los valores para el radio 226, tomando como masa nuclear M_N, la masa atómica A_r:

   $$\Delta m = \left[88 \cdot 1{,}0073\ \text{u} + (226 - 88) \cdot 1{,}0087\ \text{u}\right] - 226{,}0254\ \text{u}$$

   $$\Delta m = 1{,}8176\ \text{u}$$

   b) Calculemos primero la energía de enlace ΔE, teniendo en cuenta que la energía asociada a una masa de 1 u es de 931 MeV:

   $$\Delta E = 1{,}8176\ \text{u} \cdot \frac{931\ \text{MeV}}{1\ \text{u}} = 1\,692{,}18\ \text{MeV}$$

   El valor de la energía de enlace por nucleón es, por tanto:

   $$\frac{\Delta E}{A} = \frac{1\,692{,}18\ \text{MeV}}{226} = 7{,}5\ \text{MeV}$$

3. REACCIONES NUCLEARES (págs. 349 y 351)

10. La reacción nuclear asociada a la emisión de partículas α es:

    $${}^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

    Esta reacción indica que cuando un núcleo padre (de símbolo N) con número atómico Z y número másico A emite una partícula $\alpha\left({}^{4}_{2}He\right)$, se transforma en un núcleo hijo (de símbolo Y). El número atómico del núcleo hijo es dos unidades inferior al del núcleo padre; y el número másico del núcleo hijo es cuatro unidades inferior al del núcleo padre.

    La reacción nuclear asociada a la emisión de partículas β es:

    $${}^{A}_{Z}N \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e$$

    Esta reacción indica que cuando un núcleo padre (de símbolo N) con número atómico Z y número másico A emite una partícula $\beta\left({}^{0}_{-1}e\right)$, se transforma en un núcleo hijo (de símbolo Y). El número atómico del núcleo hijo es una unidad superior al del núcleo padre; y el número másico del núcleo hijo es igual al del núcleo padre.

    En ambos tipos de reacciones nucleares, la suma de los números atómicos y la suma de los números másicos son iguales en uno y otro miembro de la reacción.

11. Datos: Z = 92

    Las reacciones sucesivas que tienen lugar son:

    $${}^{238}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{93}Np + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{239}_{94}Pu + {}^{0}_{-1}e$$

12. La fisión nuclear consiste en la división de un núcleo de gran masa en otros dos núcleos más ligeros cuando el núcleo pesado es bombardeado con neutrones. En este proceso se libera gran cantidad de energía y más neutrones. Los neutrones liberados pueden fisionar otros núcleos pesados dando lugar a una reacción en cadena. En las centrales nucleares se produce fisión nuclear en cadena controlada. La explosión de las bombas atómicas de fisión es un ejemplo de fisión nuclear en cadena fuera de control.

    La fusión nuclear consiste en la unión de dos núcleos ligeros para formar otro más pesado. En este proceso se libera gran cantidad de energía (superior a la reacción de fisión). Las reacciones de fusión en cadena se producen en las estrellas gracias a las altas temperaturas y presiones de su interior. El ser humano aún no ha conseguido producir de forma rentable la fusión nuclear en cadena controlada. La explosión de las bombas atómicas de hidrógeno es un ejemplo de fusión nuclear en cadena fuera de control.

13. Datos: P = 1 200 MW; t = 1 año = $3{,}1536 \cdot 10^7$ s; $A_r(U) = 235{,}0439$ u; $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$

Calculemos primero la energía E liberada en un año (suponiendo que el reactor funciona sin interrupciones):

$$E = P\, t = 1{,}2 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$E = 3{,}7843 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

El valor de esta energía en megaelectronvoltios es:

$$E = 3{,}7843 \cdot 10^{16} \text{ J} \frac{1 \text{ eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

$$E = 2{,}3652 \cdot 10^{35} \text{ eV} = 2{,}3652 \cdot 10^{29} \text{ MeV}$$

Calculamos la masa de uranio 235 que se precisa para obtener esta energía, teniendo en cuenta que en la fisión de un núcleo de uranio 235 se liberan 200 MeV:

$$m = 2{,}3652 \cdot 10^{29} \text{ MeV} \cdot \frac{1 \text{ nucl.}}{200 \text{ MeV}} \cdot \frac{235{,}0439 \text{ g}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ nucl.}}$$

$$m = 4{,}616 \cdot 10^5 \text{ g} = 461{,}6 \text{ kg}$$

14. La principal dificultad técnica que presenta la fusión nuclear controlada es la del confinamiento del material que se debe fusionar. Este material ha de llevarse a muy altas temperaturas para conseguir la energía de activación necesaria para la fusión. El problema es que a estas temperaturas los reactivos se encuentran en estado de plasma y es difícil su confinamiento en un recipiente o espacio como el reactor de fusión.

15. Respuesta sugerida:

La fusión nuclear controlada, cuando se logre explotar de forma rentable, presentará frente a la fisión las ventajas de que sus productos de reacción no son contaminantes y, además, se dispone de enormes reservas de combustible para la fusión controlada (el hidrógeno del agua de los océanos). Además, en la fusión se obtiene (a partir de la misma cantidad de masa de reactivos) una energía más de tres veces superior que en la fisión.

4. PARTÍCULAS SUBATÓMICAS Y FUERZAS FUNDAMENTALES (pág. 353)

16. Respuesta sugerida:

Las partículas subatómicas más conocidas son el electrón (cuya antipartícula es el positrón), el protón (cuya antipartícula es el antiprotón), el neutrón (cuya antipartícula es el antineutrón) y el fotón (cuya antipartícula es el mismo fotón).

17. Los seis tipos de leptones que existen son: el electrón, el muón, el tauón, el neutrino del electrón, el neutrino del muón y el neutrino del tauón.

Los seis tipos de quarks que existen son: up, down, strange, charmed, bottom y top.

18. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s; $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

La energía mínima que debe tener un fotón para generar un par protón-antiprotón es la energía asociada a la masa de las dos partículas. Teniendo en cuenta que las dos tienen la misma masa:

$$E_{min} = 2\, m_p\, c^2 = 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg } (3 \cdot 10^8 \text{ m·s}^{-1})^2$$

$$E_{min} = 3{,}01 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Así pues, la frecuencia mínima del fotón es:

$$f_{min} = \frac{E_{min}}{h} = \frac{3{,}01 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}} = 4{,}5 \cdot 10^{23} \text{ Hz}$$

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 354)

a) El período de semidesintegración del carbono 14 es de 5 730 años. Así, en un período de tiempo mucho mayor, por ejemplo, de treinta mil años, transcurren: 30 000/5 730 = = 5,24 períodos de semidesintegración.

Es decir, treinta mil años equivale a más de cinco veces el período de semidesintegración. Al cabo de 5 períodos de semidesintegración, la cantidad de carbono 14 del resto orgánico se ha reducido a $(1/2)^5 = 1/32$ partes de su valor inicial, ya de por sí pequeño. En estas condiciones, la técnica del carbono 14 es poco recomendable por la poca cantidad de carbono 14 presente en la muestra y porque el error en la medida es comparable al valor medido.

b) El cobalto 60 es una fuente de rayos γ. Dado que ésta es el tipo de radiación más penetrante, se usa como fuente externa para penetrar en el organismo y llegar hasta los tejidos y órganos afectados de cáncer.

El yodo 131 emite rayos β y rayos γ. En este caso debe usarse como fuente interna ya que los rayos β no tienen tanto poder de penetración como los rayos γ. Por tanto, la fuente de radiación β debe de situarse cerca del órgano o tejido que se va a tratar. Usando el yodo 131 como fuente interna, gran parte de la radiación γ emitida atraviesa el cuerpo humano sin interactuar, pero, a cambio, casi toda la radiación β puede actuar en las células cancerígenas.

c) Respuesta sugerida:

Para organizar el debate, puede procederse de la siguiente manera:

— **Determinar** los encargados de las diferentes funciones:

- **Ponentes.** Defenderán una determinada postura exponiéndola y argumentándola.
- **Oponentes.** Rebatirán las opiniones de los ponentes con sus propios argumentos y opiniones.

Tanto los ponentes como los oponentes deben investigar y documentarse sobre el tema con anterioridad al debate.

- **Moderador.** Presentará el tema y las opiniones de ambos grupos. Además, concederá los turnos de palabra para que el debate se desarrolle de forma ordenada. Guiará el debate para que no se produzcan desórdenes y todos tengan las mismas oportunidades de participar.

- **Secretario.** Tomará nota de las diversas opiniones expuestas y resumirá los argumentos presentados y las conclusiones al final del debate.

- **Público.** Atenderá a las diversas opiniones. Podrá intervenir al final del debate exponiendo sus propios argumentos y valorando qué grupo ha sido más convincente y cuál ha defendido mejor su postura.

Los ponentes defenderán la postura de que la radiactividad presenta más beneficios que peligros. Pueden apoyarse en las múltiples aplicaciones de la energía nuclear, principalmente como fuente de energía alternativa a los combustibles fósiles. Gracias a su desarrollo, los países que no cuentan con reservas de carbón y petróleo no han tenido que depender de las demandas arbitrarias de los países productores de éstos. Además, con pocas excepciones, las centrales nucleares garantizan la seguridad de la población por la gran cantidad de medidas de seguridad y control que poseen.

Los oponentes rebatirán las opiniones anteriores afirmando que la radiactividad presenta más peligros que beneficios. Se pueden apoyar en los efectos de las explosiones de bombas atómicas y de los accidentes nucleares. También se opondrán a las centrales nucleares por los desechos radiactivos que producen, que conllevan un importante problema de almacenamiento. Además, la rápida proliferación de centrales de fisión a partir de la década de 1970 ha perjudicado al desarrollo e investigación de otras fuentes de energía alternativas.

El moderador del debate puede intentar un acercamiento de ponentes y oponentes introduciendo la discusión sobre la fusión nuclear. Se puede considerar tanto la fusión natural (es decir, la que tiene lugar en el Sol y permite la vida en la Tierra) como la fusión artificial controlada (aún no conseguida).

— **Iniciar** el debate. El moderador presentará el tema y dará la palabra en primer lugar a alguno de los ponentes.

— **Desarrollar** y **concluir** el debate. Los distintos ponentes y oponentes desarrollarán sus argumentos, conducidos por el moderador.

Al final del debate, el público podrá expresar sus opiniones. Por último, el secretario resumirá las conclusiones.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 356)

19. Datos: $M = 222{,}0175$; $m_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ g; $m = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ g

$$T = 3{,}82\ \text{d} \cdot \frac{24\ \text{horas}}{1\ \text{d}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{hora}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 330\,048\ \text{s}$$

a) La ley de emisión radiactiva es:

$$N = N_0\ e^{-\lambda t}$$

Hallamos primero la constante radiactiva λ a partir del período de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{330\,048\ \text{s}} = 2{,}10 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$$

Teniendo en cuenta que las masas m y m_0 se relacionan con el número de núcleos en el instante t (N) y en el instante inicial (N_0) según:

$m = \dfrac{N\,M}{N_A}$; $\quad m_0 = \dfrac{N_0\,M}{N_A}$; donde M es la masa molar y N_A la constante de Avogadro, la ley de emisión radiactiva se puede escribir como:

$$m = m_0\ e^{-\lambda t}$$

Sustituyendo valores y tomando logaritmos neperianos hallamos el valor de t:

$$0{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{g} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{g} \cdot e^{-2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{0{,}25}{2} = -2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln \dfrac{2}{0{,}25}}{2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}} = 990\,210\ \text{s}$$

Es decir, t = 990 210 s = 11,46 días.

En este caso concreto, se habría podido obtener el resultado de una manera más directa a partir del valor del cociente entre m_0 y m:

$$\frac{m_0}{m} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{g}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{g}} = 0{,}125 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Esto significa que la masa se ha reducido a la mitad tres veces sucesivas. Por tanto, ha transcurrido un tiempo t que es tres veces el período de semidesintegración:

$$t = 3\ T = 3 \cdot 3{,}82\ \text{d} = 11{,}46\ \text{d}$$

b) Calculamos el número de núcleos iniciales, N_0, y finales, N.

$$N_0 = \frac{m_0\,N_A}{M} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{g} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{222{,}0175\ \text{g}} = 5{,}42 \cdot 10^{18}$$

$$N = \frac{m\,N_A}{M} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{g} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{222{,}0175\ \text{g}} = 6{,}78 \cdot 10^{17}$$

Calculamos ahora los valores de la actividad inicial, A_0, y final A.

$$A_0 = \lambda\,N_0 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot 5{,}42 \cdot 10^{18}$$

$$A_0 = 1{,}14 \cdot 10^{13}\ \text{Bq}$$

$$A = \lambda\,N = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1} \cdot 6{,}78 \cdot 10^{17} = 1{,}42 \cdot 10^{12}\ \text{Bq}$$

20. Datos: M = 209,9829 u; $m_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ g; $m = 5 \cdot 10^{-4}$ g

$$t = 276\ \text{d} \cdot \frac{24\ \text{horas}}{1\ \text{d}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{hora}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 2{,}38 \cdot 10^7\ \text{s}$$

a) Sustituimos los datos del enunciado en la ley de emisión radiactiva para hallar la constante radiactiva λ:

$$m = m_0\, e^{-\lambda t}$$

$$5 \cdot 10^{-4}\ \text{g} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{g} \cdot e^{-\lambda \cdot 2{,}38 \cdot 10^7\ \text{s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5 \cdot 10^{-4}\ \text{g}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{g}} = -\lambda \cdot 2{,}38 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$\lambda = 5{,}82 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1}$$

El período de semidesintegración vale:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{5{,}82 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1}} = 1{,}19 \cdot 10^7\ \text{s}$$

$$T = 1{,}19 \cdot 10^7 \text{s} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{60\ \text{min}} \cdot \frac{1\ \text{d}}{24\ \text{horas}} = 138\ \text{d}$$

El resultado que obtenemos es muy similar al valor real del período de semidesintegración del polonio 210, que se puede consultar en las tablas y es de 139 días.

b) Calculamos el número de núcleos iniciales, N_0, y finales, N.

$$N_0 = \frac{m_0\, N_A}{M} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{g} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{209{,}9829\ \text{g}} = 5{,}73 \cdot 10^{18}$$

$$N = \frac{m\, N_A}{M} = \frac{5 \cdot 10^{-4}\ \text{g} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{209{,}9829\ \text{g}} = 1{,}43 \cdot 10^{18}$$

Calculamos ahora los valores de la actividad inicial, A_0, y final A.

$A_0 = \lambda\, N_0 = 5{,}82 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1} \cdot 5{,}73 \cdot 10^{18} = 3{,}3 \cdot 10^{11}$ Bq

$A = \lambda\, N = 5{,}82 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{18} = 8{,}3 \cdot 10^{10}$ Bq

21. *a)* ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{A}_{Z}\text{X} + {}^{1}_{0}\text{n}$

Toda reacción nuclear debe cumplir que la suma de los números atómicos y la suma de los números másicos en ambos miembros de la reacción sean iguales. Esto es:

Suma de números atómicos:

$$13 + 2 = Z + 0 \Rightarrow Z = 15$$

Suma de números másicos:

$$27 + 4 = A + 1 \Rightarrow A = 30$$

El elemento de número atómico 15 es el fósforo. Además, como su número másico es 30, se trata del fósforo 30. La reacción es, pues:

$${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\text{P} + {}^{1}_{0}\text{n}$$

Se trata de una reacción de emisión de neutrones inducida por el bombardeo de núcleos de aluminio con partículas α.

b) ${}^{14}_{7}\text{N} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{A}_{Z}\text{X}$

Análogamente al caso anterior, tenemos:

Suma de números atómicos:

$$7 + 1 = 2 + Z \Rightarrow Z = 6$$

Suma de números másicos:

$$14 + 1 = 4 + A \Rightarrow A = 11$$

El elemento de número atómico 6 es el carbono. Además, como su número másico es 11, se trata del carbono 11. La reacción es, pues:

$${}^{14}_{7}\text{N} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{11}_{6}\text{C}$$

Se trata de una reacción de emisión de partículas α inducida por el bombardeo de núcleos de nitrógeno con protio (hidrógeno 1).

22. Datos: $M\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) = 1{,}0078$ u; $M\left({}^{3}_{1}\text{H}\right) = 3{,}0160$ u;
$M\left({}^{4}_{2}\text{H}\right) = 4{,}0026$ u

a) La reacción nuclear dada: ${}^{1}_{1}\text{H} + {}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He}$, es una reacción de fusión nuclear.

b) Hallamos el defecto de masa Δm asociado a la reacción nuclear anterior:

$$\Delta m = (M({}^{1}_{1}\text{H}) + M({}^{3}_{1}\text{H})) - M({}^{4}_{2}\text{He})$$

$$\Delta m = (1{,}0078\ \text{u} + 3{,}0160\ \text{u}) - 4{,}0026\ \text{u} = 0{,}0212\ \text{u}$$

Es decir, al producirse la reacción tiene lugar una pérdida de masa de 0,0212 u por cada átomo de $\left({}^{1}_{1}\text{H}\right)$ reaccionante; por tanto, se libera una energía E de valor:

$$E = 0{,}0212\ \text{u} \cdot \frac{931\ \text{MeV}}{1\ \text{u}} = 19{,}7\ \text{MeV}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 357 y 358)

23. La radiactividad consiste en la emisión de radiaciones ionizantes procedentes de los núcleos atómicos inestables de ciertas sustancias denominadas radiactivas.

Las radiaciones ionizantes pueden ser de tres tipos: radiación α (son núcleos de helio), radiación β (son electrones de gran energía cinética, del orden del MeV, procedentes de la desintegración de neutrones del núcleo) y radiación γ (es una radiación electromagnética de frecuencia superior a la de los rayos X).

24. El individuo B corre mayor peligro que el individuo A porque, dentro del organismo, una fuente radiactiva emisora de radiación α es más peligrosa que una fuente radiactiva emisora de radiación γ.

25.

	átomo	*núcleo*
masa	$M_{\text{átomo}}$ La masa atómica es del orden de la unidad de masa atómica, u. 1 u = 1,661 · 10^{-27} kg	$M_{\text{núcleo}} \geq 0{,}99\ M_{\text{átomo}}$
volumen	$V_{\text{átomo}}$ El átomo tiene un radio aproximado de 10^{-10} m.	$V_{\text{núcleo}} \approx 10^{-5}\ V_{\text{átomo}}$ El núcleo tiene un radio aproximado de 10^{-15} m.
niveles energéticos	Son del orden del eV.	Son del orden del MeV.

26. Existen dos tipos de fuerzas nucleares:

— La *fuerza nuclear fuerte* es una fuerza de atracción entre cualquier tipo de nucleones (ya sean protones o neutrones). Es la responsable de la cohesión del núcleo.

— La *fuerza nuclear débil* es una fuerza que actúa en todo tipo de partículas, aunque sus efectos son más apreciables en las partículas no sometidas a la interacción nuclear fuerte. Es la responsable de la emisión β.

Estas fuerzas son de muy corto alcance: la fuerza nuclear fuerte es nula para distancias superiores a 10^{-15} m, y la fuerza nuclear débil es nula para distancias superiores a 10^{-17} m.

A las distancias donde las fuerzas nucleares no se anulan, la fuerza nuclear fuerte es superior en intensidad a la fuerza electromagnética, mientras que la fuerza nuclear débil es inferior en intensidad a la fuerza electromagnética.

27. La masa de un núcleo es siempre inferior a la suma de las masas que tienen los protones y neutrones aislados que se unen para formar el núcleo. La diferencia de masas recibe el nombre de defecto de masa (Δm).

La energía liberada al formarse un núcleo se denomina energía de enlace y proviene del defecto de masa; es decir, de la masa que pierden sus nucleones al enlazarse para formar el núcleo. La energía de enlace ΔE se relaciona con el defecto de masa Δm mediante la fórmula de Einstein:

$$\Delta E = \Delta m\ c^2$$

28. Una reacción nuclear es un proceso mediante el cual núcleos atómicos se transforman en otros distintos.

Las diferentes emisiones radiactivas que dan lugar al fenómeno de la radiactividad se deben a reacciones nucleares en núcleos atómicos que son inestables:

— En el caso de la emisión α, un núcleo atómico inestable $\left({}^{A}_{Z}\mathrm{N}\right)$ se transforma en otro más estable $\left({}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}\right)$ y emite una partícula α $\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)$.

— En el caso de la emisión β, un núcleo atómico inestable $\left({}^{A}_{Z}\mathrm{N}\right)$ se transforma en otro más estable $\left({}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}\right)$ y emite una partícula β $\left({}^{0}_{-1}\mathrm{e}\right)$.

— En el caso de la emisión γ, un núcleo que se halla en un nivel energético excitado pasa a otro nivel menos energético y emite la diferencia de energía en forma de radiación electromagnética.

29. La fisión nuclear es una reacción nuclear en la que un núcleo pesado se divide en dos núcleos más ligeros al ser bombardeado con neutrones. En el proceso se liberan más neutrones y gran cantidad de energía.

El ejemplo típico de reacción de fisión es la fisión del uranio 235:

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\ {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

En esta reacción se liberan 200 MeV por átomo de uranio 235.

En las centrales nucleares, la energía se obtiene mediante fisión nuclear en cadena controlada de uranio 235 o plutonio 239. En la fisión en cadena dentro del reactor de la central, los neutrones liberados en la fisión de un átomo pueden fisionar a más átomos. Todo el proceso se controla mediante un controlador que sirve para capturar el exceso de neutrones en caso de que la velocidad de reacción sea muy rápida y haya riesgo de explosión nuclear.

30. La fusión nuclear es una reacción nuclear en la que dos núcleos ligeros se unen para formar otro más pesado. En este proceso se libera gran cantidad de energía.

Un ejemplo de reacción de fusión es la fusión del protio y el tritio:

$${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

En esta reacción se liberan 19,8 MeV de energía por átomo de helio 4.

La fusión nuclear en cadena controlada aún no se utiliza como fuente de energía porque no se ha conseguido llevar a cabo de forma rentable, debido a la dificultad técnica que supone confinar los reactivos, que, a temperaturas tan elevadas, están en estado de plasma.

31. Las partículas elementales son aquéllas que no pueden ser descompuestas en otras más simples. Algunas partículas elementales pueden unirse para formar partículas más complejas.

Las antipartículas se definen en relación con las partículas, de forma que la antipartícula de una partícula dada es otra partícula de masa y espín iguales que la primera pero con carga eléctrica y momento angular de signo contrario a los de la partícula.

Las partículas elementales se clasifican en leptones (no están sometidas a la interacción nuclear fuerte) y quarks (sí están sometidas a la fuerza nuclear fuerte). Los quarks no existen aislados, sino que se combinan para formar otras partículas, los hadrones.

Las antipartículas se clasifican en leptones (no sometidas a la fuerza nuclear fuerte) y en mesones (partículas sí sometidas a la fuerza nuclear fuerte).

32. Las fuerzas fundamentales de la naturaleza son: la fuerza gravitatoria, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil.

Tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza electromagnética son de largo alcance (sus efectos se perciben a escalas astronómicas). En cambio, las fuerzas nucleares son de corto alcance (sus efectos se perciben sólo a escalas nucleares: a una distancia menor de 10^{-15} m para la nuclear fuerte y a una distancia menor de 10^{-17} m para la débil).

A distancias menores de 10^{-17} m donde la fuerza nuclear débil no es nula, la *intensidad* de los distintos tipos de fuerza decrece en este orden: fuerza nuclear fuerte, fuerza electromagnética, fuerza nuclear débil y fuerza gravitatoria.

33. Datos: $N = N_0\, e^{-2{,}1\cdot 10^{-6}\, t}$ en unidades SI

Comparando con la ley de emisión radiactiva: $N = N_0\, e^{-\lambda t}$, se deduce el valor de la constante radiactiva λ de la muestra: $\lambda = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$

Por tanto, el período de semidesintegración T vale:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{2{,}1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}} = 3{,}3 \cdot 10^{5}\ s$$

34. Datos: $m_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ g;

$$T = 8\ d \cdot \frac{24\ \text{horas}}{1\ d} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \text{hora}} \cdot \frac{60\ s}{1\ \text{min}} = 6{,}91 \cdot 10^{5}\ s$$

a) Hallamos la constante radiactiva del yodo 131, λ, y conocida ésta, aplicamos la ley de emisión radiactiva para halla el tiempo t que tarda la muestra en reducirse a 0,5 g:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{6{,}91 \cdot 10^{5}\ s} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$$

$$m = m_0\, e^{-\lambda t}$$

$$5 \cdot 10^{-4}\ g = 3 \cdot 10^{-3}\ g \cdot e^{-10^{-6}\ s^{-1}\ t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-3}} = -10^{-6} s^{-1} t \Rightarrow t = 1{,}79 \cdot 10^{6}\ s$$

$$t = 1{,}79 \cdot 10^{6}\ s \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ s} \cdot \frac{1\ \text{hora}}{60\ \text{min}} \cdot \frac{1\ d}{24\ \text{horas}} = 20{,}7\ d$$

b) Para que la actividad A se reduzca a la cuarta parte de su valor inicial, el número de núcleos debe reducirse en la misma proporción:

$$A = \frac{A_0}{4} \Rightarrow N = \frac{N_0}{4}$$

puesto que la actividad y el número de núcleos se relacionan según: $A = \lambda N$.

El tiempo t necesario para que el número de núcleos se reduzca a la cuarta parte del valor inicial es, pues, de dos períodos de semidesintegración T, ya que el número de núcleos ha de reducirse a la mitad dos veces sucesivas:

$$t = 2\ T = 2 \cdot 8\ d = 16\ d$$

35. Datos: $m = (9/10)\ m_0$; $t_1 = 20$ s

a) Sustituimos los datos del enunciado en la ley de emisión radiactiva escrita en términos de las masas m y m_0, para hallar la constante radiactiva λ de la muestra:

$$m = m_0\, e^{-\lambda t_1} \Rightarrow \frac{9}{10} m_0 = m_0\, e^{-\lambda \cdot 20\ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{9}{10} = -\lambda \cdot 20\ s \Rightarrow \lambda = 5{,}27 \cdot 10^{-3}\ s$$

Y ahora calculamos el período de semidesintegración T de la muestra radiactiva:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{5{,}27 \cdot 10^{-3}\ s} = 132\ s$$

b) A partir de la ley de emisión radiactiva: $N = N_0\, e^{-\lambda t}$, y teniendo en cuenta la relación entre actividad y número de núcleos en los distintos instantes de tiempo: $A_0 = \lambda\, N_0$; $A = \lambda\, N$, la ley de emisión radiactiva se puede escribir en términos de las actividades:

$$A = A_0\, e^{-\lambda t}$$

Y sustituyendo los datos del enunciado en la ecuación anterior, hallamos el tiempo t_2 necesario para que la actividad se reduzca a una tercera parte de su valor inicial:

$$\frac{A_0}{3} = A_0 \cdot e^{-5{,}27 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}\ t_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 3 = 5{,}27 \cdot 10^{-3}\ s^{-1} \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 208\ s$$

36. Datos: $A(t) = A_0/8$; t = 7,5 min

a) En nuestro caso, el cociente de actividades es un múltiplo entero de (1/2). Por tanto, el tiempo transcurrido es un múltiplo entero del período de semidesintegración T del radioisótopo:

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow t = 3T$$

$$T = \frac{t}{3} = \frac{7{,}5\ \text{min}}{3} = 2{,}5\ \text{min}$$

Se obtiene el mismo resultado si se sustituyen los datos del enunciado en la ley de emisión radiactiva escrita en términos de las actividades, aunque este último procedimiento es más largo.

b) Calculamos la vida media τ del radioisótopo a partir de su relación con el período de semidesintegración T:

$$\tau = \frac{T}{\ln 2} = \frac{2{,}5\ \text{min}}{0{,}693} = 3{,}6\ \text{min}$$

37. Datos: $A_r(^{16}O) = 15{,}9949$ u; A = 16; Z = 8; $m_p = 1{,}0073$ u; $m_n = 1{,}0087$ u

a) Tomamos como valor de la masa nuclear del oxígeno 16 el valor de su masa atómica por el pequeño valor de la masa de los electrones: $M_N(^{16}O) \approx A_r(^{16}O)$, y sustituimos los datos del enunciado en la expresión para el defecto de masa Δm:

$$\Delta m = (Zm_p + (A - Z)m_n) - M_N$$

$$\Delta m = (8 \cdot 1{,}0073\ u + (16 - 8) \cdot 1{,}0087\ u) - 15{,}9949\ u$$

$$\Delta m = 0{,}1331\ u$$

b) La energía de enlace ΔE puede calcularse a partir de la relación $\Delta E = \Delta m\ c^2$, o bien de forma más directa a partir del equivalente energético de la unidad de masa atómica (1 u = 931 MeV):

$$\Delta E = 0{,}1331\ u \cdot \frac{931\ \text{MeV}}{1\ u} = 123{,}9\ \text{MeV}$$

c) La energía de enlace por nucleón es:

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{123{,}9\ \text{MeV}}{16} = 7{,}74\ \text{MeV}$$

38. Datos: A = 234; Z = 90

a) Al emitirse la primera partícula β, el torio 234 se transforma en protactinio 234, ya que su número atómico Z se incrementa en una unidad y su número másico A no varía:

$$^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e$$

Análogamente, al emitirse la segunda partícula β, el protactinio 234 pasa a ser uranio 234:

$$^{234}_{91}Pa \rightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{0}_{-1}e$$

Al emitirse la primera partícula α, el uranio 234 se convierte en torio 230, ya que su número atómico Z = 92 se reduce en dos unidades y su número másico A = 234 se reduce en cuatro unidades:

$$^{234}_{92}U \rightarrow {}^{230}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

Análogamente, al emitirse la segunda partícula α, el torio 230 se transforma en radio 226:

$$^{230}_{90}Th \rightarrow {}^{226}_{88}Ra + {}^{4}_{2}He$$

La reacción global es:

$$^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{226}_{88}Ra + 2\,{}^{0}_{-1}e + 2\,{}^{4}_{2}He$$

b) El isótopo resultante es el radio 226.

39. Datos: $^{12}_{6}C + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{13}_{6}C$; E = 2,71 MeV;
$A_r(^{12}C)$ = 12 u; $A_r(^{1}H)$ = 1,0078 u; $A_r(^{2}H)$ = 2,0141 u

Hallamos primero el defecto de masa Δm asociado a la reacción a partir de la energía liberada:

$$\Delta m = 2{,}71\ \text{MeV} \cdot \frac{1\ u}{931\ \text{MeV}} = 0{,}0029\ u$$

Calculamos ahora la masa atómica del carbono 13 a partir de la expresión del defecto de masa:

$$\Delta m = (M(^{12}C) + M(^{2}H)) - (M(^{1}H) + M(^{13}C));$$

$$0{,}0029\ u = (12\ u + 2{,}0141\ u) - 1{,}0078\ u - M(^{13}C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(^{13}C) = 13{,}0034\ u$$

El valor obtenido coincide con el valor real de la masa atómica del carbono 13, que podemos consultar en las tablas.

40. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

a) La masa total del par electrón-positrón vale: $m = 2m_e = 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} = 18{,}2 \cdot 10^{-31}$ kg

La energía E asociada a esta masa total es la energía total de los dos fotones:

$$E = m\,c^2 = 18{,}2 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$E = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Los dos fotones tienen la misma energía E_f de valor la mitad de la energía total E:

$$E_f = \frac{1{,}64 \cdot 10^{13}\ \text{J}}{2} = 8{,}2 \cdot 10^{14}\ \text{J}$$

Por tanto, la frecuencia f de cada fotón es:

$$f = \frac{E_f}{h} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot \text{J·s}} = 1{,}24 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

41. Datos: T = 5 730 años = $1{,}807 \cdot 10^{11}$ s;
$A_r(^{14}C)$ = 14,0032 u; t = 10^{10} s;

$$A_0 = 4{,}93 \cdot 10^9\ \frac{\text{desintegraciones}}{\text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 8{,}217 \cdot 10^7\ \text{Bq}$$

a) Calculamos primero la constante radiactiva λ del carbono 14:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{1{,}807 \cdot 10^{11}\ \text{s}} = 3{,}829 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1}$$

Calculamos ahora la masa inicial de la muestra:

$$m_0 = \frac{N_0\ M}{N_A}; \quad N_0 = \frac{A_0}{\lambda}$$

$$m_0 = \frac{M\ A_0}{N_A\ \lambda} = \frac{14{,}0032\ \text{g} \cdot 8{,}217 \cdot 10^7\ \text{s}^{-1}}{6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}829 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1}}$$

$$m_0 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{g}$$

b) Hallamos la actividad A al cabo de 10^{10} s haciendo uso de la ley de emisión radiactiva en términos de las actividades:

$$A = A_0\ e^{-\lambda t}$$

$$A = 8{,}217 \cdot 10^7\ \text{Bq} \cdot e^{-3{,}829 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1} \cdot 10^{10}\ \text{s}}$$

$$A = 7{,}9 \cdot 10^7\ \text{Bq}$$

c) Hallamos la masa m de carbono 14 al cabo de 10^{10} s haciendo uso de la ley de emisión radiactiva en términos de las masas:

$$m = m_0\ e^{-\lambda t}$$

$$m = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{g} \cdot e^{-3{,}829 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1} \cdot 10^{10}\ \text{s}} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{g}$$

42. Datos: $N_{A0} = N_{B0}$; t = 1 350 s; $N_A = 2\ N_B$; T_A = 150 s

Escribimos las leyes de emisión radiactiva de los dos radioisótopos A y B:

$$N_A = N_{A0}\, e^{-\lambda_A t}$$
$$N_B = N_{B0}\, e^{-\lambda_B t}$$

Ahora dividimos las dos ecuaciones:

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{N_{A0}}{N_{B0}} \cdot e^{-(\lambda_A - \lambda_B)\, t}$$

Y sustituimos los datos del enunciado en esta última expresión:

$$\frac{2N_B}{N_B} = \frac{N_{B0}}{N_{B0}} \cdot e^{(\lambda_B - \lambda_A)\, 1\,350\ s}$$

Tomando logaritmos neperianos, resulta:

$$\ln 2 = (\lambda_B - \lambda_A) \cdot 1\,350\ s$$

Teniendo en cuenta la relación entre la constante radiactiva λ y el período T para cada radioisótopo $\left(\lambda = \frac{\ln 2}{T}\right)$, la expresión anterior puede escribirse en términos de los períodos:

$$\ln 2 = \ln 2\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right)\cdot 1\,350\ s$$

$$1 = \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{150 s}\right)\cdot 1\,350\ s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1\,350\ s} + \frac{1}{150\ s} = \frac{1}{T_B} \Rightarrow T_B = 135\ s$$

43. Datos: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb$

En esta reacción nuclear el valor del número atómico pasa de $Z_0 = 92$ a $Z = 82$; mientras que el valor del número másico cambia de $A_0 = 238$ a $A = 206$.

Sabemos que cada partícula α emitida reduce en 2 unidades el valor de Z y reduce en 4 unidades el valor de A. A su vez, cada partícula β emitida aumenta el número atómico Z en una unidad y deja invariante el número másico A.

Así pues, el cambio global en el número másico es debido solamente a las partículas α emitidas. Sea x el número de partículas α emitidas, se cumple:

$$A - A_0 = -4x; \quad A_0 - A = 4x$$

En nuestro caso es: $A_0 - A = (238 - 206) = 32$

Por tanto, se tiene: $32 = 4x \Rightarrow x = 8$; es decir, se emiten 8 partículas α.

El cambio global en el número atómico se debe tanto a las partículas α emitidas como a las partículas β emitidas. Llamando *y* al número de partículas β emitidas, se cumple:

$$Z - Z_0 = -2x + 1y$$
$$Z_0 - Z = 2x - y$$

En nuestro caso es:

$$Z_0 - Z = (92 - 82) = 2 \cdot 8 - y$$

Por tanto, se tiene: $10 = 16 - y \Rightarrow y = 6$; es decir, se emiten 6 partículas β.

44. Datos: $E_c(\alpha) = 9{,}5$ MeV; $A_r({}^4He) = 4{,}0026$ u; $A_r({}^1H) = 1{,}0078$ u

a) La reacción producida al bombardearse el litio 7 con un protón y emitirse una partícula α es:

$${}^7_3Li + {}^1_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^4_2He$$

b) De la reacción anterior, observamos que en realidad el litio 7 emite dos partículas α, cada una de ellas con una energía cinética de 9,5 MeV. Por tanto, la energía total E liberada en la reacción vale: $E = 2 \cdot 9{,}5$ MeV = 19 MeV

Hallamos ahora el defecto de masa Δm asociado a esta reacción:

$$\Delta m = 19\ MeV \cdot \frac{1\ u}{931\ MeV} = 0{,}0204\ u$$

Calculamos finalmente la masa atómica del litio 7 a partir de la expresión del defecto de masa de la reacción:

$$\Delta m = (M({}^7Li) + M({}^1H)) - (M({}^4He) + M({}^4He));$$
$$0{,}0204 = M({}^7Li) + 1{,}0078u - (2 \cdot 4{,}0026\ u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M({}^7Li) = 7{,}0178\ u$$

El valor obtenido es muy similar al valor real de la masa atómica del litio 7, que se puede consultar en las tablas y es de 7,0160.

45. Datos: E = 200 MeV; $A_r({}^{235}U) = 235{,}0439$ u; m = 100 g; Potencia = 700 MW = $7 \cdot 10^8$ W

$$t = 1\ d \cdot \frac{24\ horas}{1\ d} \cdot \frac{60\ min}{1\ hora} \cdot \frac{60\ s}{1\ min} = 8{,}64 \cdot 10^4\ s$$
$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$$

a) Calculamos el número de núcleos de uranio 235 fisionables, N, de una muestra de 100 g de uranio 235:

$$N = 100\ g \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ nucl.}{235{,}0439\ g} = 2{,}56 \cdot 10^{23}$$

Cada núcleo fisionable proporciona una energía de 200 MeV, por tanto, la energía total, E, que se puede obtener con 100 g de uranio 235 es:

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{23}\ nucl. \frac{200\ MeV}{1\ nucl.} = 5{,}12 \cdot 10^{25}\ MeV$$

b) Calculamos la energía consumida en un día por una central nuclear de 700 MW de potencia, suponiendo que funciona ininterrumpidamente:

$$8{,}64 \cdot 10^4\ s \cdot 7 \cdot 10^8\ W = 6{,}048 \cdot 10^{13}\ J$$

Calculamos la masa de uranio necesaria para proporcionar esta energía, sabiendo que 100 g de uranio dan una energía de $5{,}12 \cdot 10^{31}$ eV y que un electronvoltio equivale a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J:

$$6{,}048 \cdot 10^{13}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \cdot \frac{100\ \text{g}}{5{,}12 \cdot 10^{31}\ \text{eV}} = 738\ \text{g}$$

46. Datos: $\lambda = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ m; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s

La frecuencia f del fotón es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{m}} = 1{,}875 \cdot 10^{21}\ \text{Hz}$$

Su energía asociada E_f vale:

$$E_f = h\,f = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot 1{,}875 \cdot 10^{21}\ \text{s}^{-1}$$
$$E_f = 1{,}24 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

La energía en reposo E_0 (asociada a la masa) del par electrón-positrón vale:

$$E_0 = 2\ m_e\ c^2 = 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{m·s}^{-1})^2$$
$$E_0 = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

La energía del fotón se convierte en la energía total del par electrón-positrón; esto es, en la suma de la energía en reposo E_0 y la energía cinética Ec:

$$E_f = E_0 + Ec \Rightarrow 1{,}24 \cdot 10^{-12}\ \text{J} = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{J} + Ec \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ec = 1{,}08 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

El valor de la energía cinética expresado en MeV es:

$$Ec = 1{,}08 \cdot 10^{-12}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \cdot \frac{1\ \text{MeV}}{10^{6}\ \text{eV}} = 6{,}75\ \text{MeV}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 358)

1. La ley de emisión radiactiva establece que, en una muestra radiactiva, el número de emisiones radiactivas que se producen por unidad de tiempo es proporcional al número de núcleos N sin desintegrar presentes en la muestra.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$ λ = constante radiactiva, característica de cada isótopo radiactivo.

Como consecuencia, el número de núcleos N disminuye de forma exponencial con el tiempo.

$$N = N_0\ e^{-\lambda t}$$ N_0 = número de núcleos sin desintegrar en el instante inicial.

El período de semidesintegración, T, de una sustancia radiactiva es el tiempo que debe transcurrir para que la masa de cualquier muestra de dicha sustancia se reduzca a la mitad.

La constante radiactiva, λ, es una característica de cada isótopo radiactivo igual a la constante de proporcionalidad entre el número de emisiones por unidad de tiempo y el número de núcleos presentes en la muestra.

La vida media, τ, de un radioisótopo es el tiempo medio que tarda en desintegrarse un núcleo de dicha sustancia tomado al azar.

2. La exposición a altas dosis de radiación en los seres vivos provoca un aumento de la tasa de cáncer y otros trastornos de tipo genético que se manifiestan en las generaciones posteriores.

— Algunos de los radioisótopos más peligrosos para el ser humano son el estroncio 90, el potasio 40 y el carbono 14.

— La radiactividad no siempre es perjudicial. Utilizada en las dosis y forma correctas presenta muchos beneficios, como la detección y el tratamiento del cáncer y diversas aplicaciones tecnológicas e industriales.

3. Datos: $\lambda = 1{,}7 \cdot 10^{5}\ \text{s}^{-1}$

a) La vida media τ del radioisótopo es:

$$\tau = 1/\lambda = 1/(1{,}7 \cdot 10^{5}\ \text{s}^{-1}) = 5{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

b) Si una muestra del radioisótopo se reduce a una cuarta parte de su masa inicial, se tiene:

$$m = \frac{m_0}{4} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Para que esto ocurra debe transcurrir un tiempo t igual a dos veces el período de semidesintegración T. Por tanto:

$$t = 2T = 2\,\frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}693}{1{,}7 \cdot 10^{5}\ \text{s}^{-1}} = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

4. Los núcleos atómicos están formados por protones y neutrones. Los protones y neutrones tienen una masa similar, que es aproximadamente 10^4 veces la del electrón. Los protones tienen carga eléctrica positiva de igual valor absoluto que la del electrón; mientras que los neutrones no poseen carga eléctrica. Los protones y neutrones se mantienen unidos gracias a la fuerza nuclear fuerte.

El núcleo posee más del 99% de la masa del átomo, sin embargo, su volumen es de sólo 10^{-5} veces el volumen atómico.

El número atómico, Z, es el número de protones en un núcleo y es característico de cada elemento químico. El número másico, A, es el número de nucleones (protones y neutrones) de un núcleo, y varía para cada isótopo distinto de un mismo elemento.

Al emitir una partícula α, un núcleo atómico se transforma en otro distinto de número atómico dos unidades inferior y número másico cuatro unidades inferior. Esto es debido a que el núcleo padre emite un núcleo de helio 4 (pierde dos protones y dos neutrones).

Al emitir una partícula β, un núcleo atómico se transforma en otro distinto de número atómico una unidad superior y del mismo número másico. Esto es debido a que un neutrón del núcleo padre se desintegra dando lugar a un protón y un electrón.

Al emitir radiación γ, un núcleo atómico pierde energía y pasa de un estado excitado a otro menos energético. Sin embargo, sus números atómico y másico no se alteran.

5. Datos: $A_r(^{138}Ba) = 137,9050$ u; A = 138; Z = 56; $m_p = 1,0073$ u; $m_n = 1,0087$ u

   a) Tomamos como valor de la masa nuclear del bario 138 el valor de su masa atómica por el pequeño valor de la masa de los electrones: $M_N(^{138}Ba) \approx A_r(^{138}Ba)$, y sustituimos los datos del enunciado en la expresión para el defecto de masa Δm:

$$\Delta m = (Z\,m_p + (A - Z)m_n) - M_N$$
$$\Delta m = (56 \cdot 1,0073 \text{ u} + (138 - 56) \cdot 1,0087 \text{ u}) - 137,9050 \text{ u}$$
$$\Delta m = 1,2172 \text{ u}$$

   b) La energía de enlace ΔE puede calcularse a partir de la relación: $\Delta E = \Delta m\, c^2$, o bien de forma más directa a partir del equivalente energético de una unidad de masa atómica (1 u = 931 MeV):

$$\Delta E = 1,2172 \text{ u} \cdot \frac{931 \text{ MeV}}{1 \text{ u}} = 1\,133,2 \text{ MeV}$$

   c) La energía de enlace por nucleón es:

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{1133,2 \text{ MeV}}{138} = 8,21 \text{ MeV}$$

6. Datos: ${}^A_Z X + {}^1_1 H \rightarrow 3\,{}^4_2 He$; E = 11,47 MeV; $A_r(^1H) = 1,0078$ u; $A_r(^4He) = 4,0026$ u

   a) Toda reacción nuclear debe cumplir que la suma de los números atómicos y la suma de los números másicos en ambos miembros de la reacción sean iguales. Esto es:

   Suma de números atómicos:

$$Z + 1 = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow Z = 5$$

   Suma de números másicos:

$$A + 1 = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow A = 11$$

   El elemento de número atómico 5 es el boro. Además, como su número másico es 11, se trata del boro 11. La reacción es, pues:

$${}^{11}_5 B + {}^1_1 H \rightarrow 3\,{}^4_2 He$$

   b) Hallamos el defecto de masa Δm asociado a la reacción a partir de la energía liberada:

$$\Delta m = 11,47 \text{ MeV} \cdot \frac{1 \text{ u}}{931 \text{ MeV}} = 0,0123 \text{ u}$$

   Calculamos ahora la masa atómica del boro 11 a partir de la expresión del defecto de masa:

$$\Delta m = (M(^{11}B) + M(^1H)) - (3\,M(^4He));$$

$$0,0123 \text{ u} = M(^{11}B) + 1,0078 \text{ u} - 3 \cdot 4,0026 \text{ u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(^{11}B) = 11,0123 \text{ u}$$

   El valor obtenido es muy similar al valor real de la masa atómica de boro 11, que se puede consultar en las tablas y es de 11,0093.

7. Respuesta sugerida:

   Las reacciones de fisión y fusión son reacciones nucleares en las que se libera gran cantidad de energía (del orden de 10 o 10^2 MeV por núcleo reaccionante). Esta energía proviene del defecto de masa asociado a la reacción. Ambas reacciones necesitan de una cierta energía de activación para producirse.

   Las reacciones de fisión consisten en la rotura de un núcleo pesado para formar otros dos núcleos más ligeros de masa similar. La fisión se induce de forma artificial cuando se bombardean núcleos pesados con neutrones lentos. La captura del neutrón por parte del núcleo pesado le proporciona la energía de activación necesaria.

   Las reacciones de fusión consisten en la unión de dos núcleos ligeros para formar otro núcleo más pesado. La fusión se produce de forma natural en las estrellas. Las altas temperaturas y presiones de su interior proporcionan la energía de activación necesaria.

   Como fuentes de energía a gran escala, la fisión presenta la ventaja de que su uso es económicamente rentable y la técnica necesaria se conoce desde hace más de 50 años. En cambio, presenta el grave riesgo de un accidente nuclear. Otro inconveniente de la fisión es el problema del almacenamiento y eliminación de los residuos contaminantes que produce.

   La fusión, en cambio, presenta el inconveniente de que su uso hoy en día no es aún económicamente rentable. Se requiere todavía una gran inversión para su estudio y desarrollo. No obstante, cuando se logre la fusión en cadena controlada y económicamente rentable, constituirá una fuente de energía limpia (no produce residuos contaminantes) y sin problemas de escasez de combustible.

8. Las cuatro fuerzas fundamentales son: la fuerza gravitatoria, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil.

   La unificación de las fuerzas fundamentales consiste en suponer que los cuatro tipos de fuerzas fundamentales son distintas manifestaciones de un único campo de fuerzas. Hasta la fecha se ha conseguido la unificación de la fuerza electromagnética y la fuerza nuclear débil (campo electrodébil), y las predicciones han sido comprobadas.

Propuestas de pruebas finales

En las páginas siguientes se ofrecen ocho modelos de pruebas finales. Con ellos pretendemos dar al profesor/a un material útil para repasar la materia de Física y preparar a los alumnos y alumnas para una prueba global de la materia.

Al final de estos ocho modelos ofrecemos la solución detallada de todos ellos.

Para favorecer la autoevaluación, el profesor/a puede fotocopiar las páginas correspondientes del solucionario y proporcionarlas a los alumnos y alumnas.

Modelos de pruebas finales e índice de contenidos

Modelo de prueba final	*Dinámica*	*Interacción gravitatoria*	*Vibraciones y ondas*	*Óptica*	*Interacción electromagnética*	*Mecánica moderna*
1	Cuestión 1: Momento angular	Ejercicio 1: Satélite artificial alrededor de la Tierra	Cuestión 2: Ondas sonoras			Ejercicio 2: Efecto fotoeléctrico
2	Ejercicio 1: Explosión	Cuestión 1: Velocidad de escape		Cuestión 2: Ojo humano y defectos	Ejercicio 2: Protón en campos eléctrico y magnético	
3		Cuestión 2: Leyes de Kepler	Ejercicio 2: Onda transversal		Ejercicio 1: Campo y potencial eléctricos de tres cargas	Cuestión 1: Efecto fotoeléctrico
4		Ejercicio 1: Variación de la gravedad en Marte	Ejercicio 2: Onda estacionaria		Cuestión 1: Generador de corriente alterna	Cuestión 2: Defecto de masa. Fusión y fisión
5		Cuestión 2: Variación de la gravedad en la Tierra y validez de la expresión Ep = m g h		Ejercicio 2: Lente de un proyector de diapositivas	Cuestión 1: Creación del campo eléctrico y del campo magnético	Ejercicio 1: Masa y energía relativistas
6			Ejercicio 1: MAS de un muelle	Ejercicio 2: Longitud de onda e índice de refracción. Cuestión 1: Radiaciones electromagnéticas. Frecuencia y color		Cuestión 2: Hipótesis de De Broglie
7		Ejercicio 1: Gravedad en la Luna por comparación con la gravedad en la Tierra	Cuestión 2: Energía mecánica de un MAS y su variación	Cuestión 1: Reflexión, refracción y sus leyes	Ejercicio 2: Fuerza entre corrientes paralelas y campo magnético creado por ellas	
8		Cuestión 1: Comparación de los campos gravitatorio, eléctrico y magnético	Cuestión 2: Ondas estacionarias		Ejercicio 1: Generador de corriente alterna Cuestión 1: Comparación de los campos gravitatorio, eléctrico y magnético	Ejercicio 2: Energía media de enlace por nucleón

MODELO NÚMERO 1

EJERCICIO 1

Un satélite artificial de 500 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 8 000 km de radio. Determina: *a)* ¿qué velocidad posee?; *b)* ¿cuánto vale la aceleración de la gravedad en los puntos por los que pasa?; *c)* ¿cuánto tarda en dar una vuelta completa?; *d)* ¿cuánto vale su energía mecánica?; *e)* ¿qué velocidad deberíamos comunicarle para que escapara de la atracción terrestre a partir de la posición en que está?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

EJERCICIO 2

Sobre una lámina de cobre incide una onda electromagnética de 250 nm de longitud de onda. Sabiendo que la longitud de onda umbral del cobre es de 320 nm, calcula: *a)* la energía de los fotones incidentes, en julios y en electronvoltios; *b)* el trabajo de extracción del cobre, en julios y en electronvoltios; *c)* la velocidad máxima de los electrones que se emiten.

Datos: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

CUESTIÓN 1

Define *momento angular de un sólido rígido* y enuncia el principio de conservación de éste. ¿Qué condiciones deben darse para que se cumpla?

CUESTIÓN 2

Explica si en las ondas sonoras se producen los fenómenos de interferencias, difracción y polarización.

MODELO NÚMERO 2

EJERCICIO 1

Una bomba en reposo explota en tres fragmentos de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg. Los dos primeros trozos salen despedidos perpendicularmente entre sí con velocidades de 3 m/s y 5 m/s. Calcula: *a)* la cantidad de movimiento total del sistema antes y después de la explosión; *b)* el vector velocidad del tercer fragmento; *c)* la energía generada a consecuencia de la explosión. ¿De qué tipo es?

EJERCICIO 2

Un protón atraviesa un campo eléctrico en el que se ve sometido a una tensión de $5 \cdot 10^4$ V. A continuación penetra en un campo magnético perpendicular al campo eléctrico anterior, y se observa que el protón describe una trayectoria circular de 20 cm de radio. Calcula: *a)* el valor de la energía cinética adquirida por el protón dentro del campo eléctrico; *b)* la velocidad que adquiere; *c)* la fuerza que experimenta el protón dentro del campo magnético; *d)* el valor de dicho campo magnético.

Datos: masa del protón = $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg; carga del protón = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

CUESTIÓN 1

Explica qué es y cómo se calcula la velocidad de escape.

CUESTIÓN 2

Explica el funcionamiento del ojo humano. ¿Qué son la miopía y la hipermetropía?, ¿cómo se corrigen?

MODELO NÚMERO 3

EJERCICIO 1

En tres de los cuatro vértices de un cuadrado de 1 m de lado se encuentran tres cargas iguales de 5 mC cada una. Calcula: *a)* el vector campo eléctrico que crean en el cuarto vértice; *b)* el potencial que crean en ese mismo punto.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²/C²

EJERCICIO 2

En una cuerda se establece la siguiente onda transversal y unidimensional:

$$y\ (x, t) = 20 \text{ sen } (0{,}1\pi t - 2\pi x), \text{ en unidades SI}$$

Calcula: *a)* su amplitud, período, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación; *b)* la diferencia de fase entre dos puntos situados en $x_1 = 0{,}5$ m y $x_2 = 2$ m; *c)* la velocidad del punto que se encuentra a 0,5 m del origen en el instante t = 10 s; *d)* la aceleración máxima.

CUESTIÓN 1

Un metal emite electrones si lo iluminamos con luz de color azul, pero no los emite si la luz es de color amarillo. ¿Los emitirá con luz violeta? ¿Y con luz roja? Explica por qué.

CUESTIÓN 2

Enuncia las leyes de Kepler y demuestra la tercera de ellas.

MODELO NÚMERO 4

EJERCICIO 1

¿Hasta qué altura sobre la superficie de Marte debemos elevar un objeto para que la aceleración de la gravedad disminuya en un 20 %? Calcula, a dicha altura, la masa y el peso de ese objeto, sabiendo que su peso sobre la superficie terrestre es de 50 N y que la aceleración en la superficie de Marte es de 3,8 m/s².

Datos: radio de Marte: 3 380 km

EJERCICIO 2

Una cuerda oscila de acuerdo con la ecuación:

$$y(x, t) = 5 \text{ sen} \left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos 40\pi t \text{ (SI)}$$

Calcula: *a)* la amplitud, el período, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de las ondas cuya superposición da lugar a esta vibración; *b)* la distancia entre los nodos; *c)* el número de nodos y de vientres que hay en esta cuerda si tiene 12 m de longitud y está atada por los dos extremos; *d)* la frecuencia fundamental y los armónicos en dicha cuerda.

CUESTIÓN 1

Explica en qué consiste un generador de corriente alterna. Describe los cambios energéticos que tienen lugar en una central hidroeléctrica.

CUESTIÓN 2

Explica qué es el *defecto de masa* y su relación con las reacciones de fusión y fisión.

MODELO NÚMERO 5

EJERCICIO 1

Un electrón es acelerado hasta llegar a una velocidad de $2,5 \cdot 10^8$ m/s. Calcula: *a)* la masa que tendrá a esta velocidad; *b)* su energía cinética relativista; *c)* la energía relativista total que posee el electrón.

Datos: masa en reposo del electrón: $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

EJERCICIO 2

Se desea proyectar una diapositiva de 1,5 cm de altura sobre una pantalla situada a 3 m de distancia, de forma que la imagen tenga 1 m de altura. Determina: *a)* el tipo de lente que ha de tener el proyector; *b)* la distancia a la que debe estar esta lente respecto a la diapositiva; *c)* la potencia de la lente.

CUESTIÓN 1

Explica si son ciertas o no las afirmaciones siguientes acerca de una carga eléctrica en reposo:

a) Crea un campo eléctrico.

b) Crea un campo magnético.

c) Crea un campo magnético y uno eléctrico.

Haz lo mismo para una carga eléctrica en movimiento.

CUESTIÓN 2

Explica la variación de la aceleración de la gravedad con la altura y en qué condiciones es válida la expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre: Ep = m g h.

MODELO NÚMERO 6

EJERCICIO 1

Dado un muelle de constante recuperadora K = 2 N/cm, situado en vertical y del que cuelga una masa de 500 g, calcula: *a)* la fuerza necesaria para producir un alargamiento de 5 cm; *b)* el período y la frecuencia del movimiento armónico simple que efectuará como consecuencia de dicha deformación; *c)* la ecuación del MAS que seguirá si en el instante de tiempo inicial $x = +5$ cm.

EJERCICIO 2

Una onda luminosa de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz tiene una longitud de onda de $2 \cdot 10^{-7}$ m dentro de cierto líquido. Calcula: *a)* la velocidad de la luz en ese líquido; *b)* la longitud de onda en el vacío; *c)* el índice de refracción del líquido.

CUESTIÓN 1

Clasifica en orden creciente de energías las radiaciones electromagnéticas siguientes: rayos X, microondas, ondas de radio, rayos infrarrojos, rayos ultravioleta, luz visible y rayos gamma.

Explica, razonándolo, qué característica (amplitud, intensidad o frecuencia) hace que una radiación del espectro visible sea azul y que otra sea roja.

CUESTIÓN 2

¿Qué establece la hipótesis de De Broglie y qué motivos le llevaron a plantearla? ¿Tiene comprobación experimental?

MODELO NÚMERO 7

EJERCICIO 1

Sabiendo que el radio de la Luna es 0,273 veces el de la Tierra y su masa es 0,0123 veces la masa terrestre, calcula: *a)* la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna; *b)* el peso y la masa en la superficie lunar de un objeto que pesa 250 N sobre la superficie terrestre; *c)* la velocidad con que este objeto llegará a la superficie lunar si se deja caer desde una altura de 300 m.

EJERCICIO 2

Dos hilos conductores muy largos, rectilíneos y paralelos, por los que circulan corrientes de 3 A y 5 A en el mismo sentido, están separados una distancia de 5 cm. Determina: *a)* la fuerza que se ejercen mutuamente por unidad de longitud; *b)* si la fuerza es atractiva o repulsiva; *c)* el campo magnético en un punto situado entre los dos hilos, en el plano definido por ambos y a 2 cm del primero.

CUESTIÓN 1

Describe los fenómenos de la reflexión y la refracción de las ondas, y enuncia las leyes que cumplen.

CUESTIÓN 2

Determina cuánto vale la energía mecánica que posee un objeto de masa *m* que describe un MAS. Razona cómo varía dicha energía si: *a)* la amplitud se reduce a la mitad; *b)* la frecuencia se reduce a la mitad; *c)* la amplitud se duplica y la frecuencia se reduce a la mitad.

MODELO NÚMERO 8

EJERCICIO 1

Calcula la fem máxima que genera un bobinado de 1 000 espiras al girar con un MCU de 50 Hz de frecuencia dentro de un campo magnético de 5 T, si las espiras son rectangulares de 10 cm de largo por 5 cm de ancho. Calcula, asimismo, la fem eficaz generada.

EJERCICIO 2

Calcula la energía media de enlace por nucleón para el sodio $^{23}_{11}Na$, sabiendo que la masa real de su núcleo es de 22,9898 u y que la masa de un protón es de 1,00714 u y la de un neutrón es de 1,00853 u.

CUESTIÓN 1

Analiza las semejanzas y las diferencias entre el campo gravitatorio, el campo eléctrico y el campo magnético. Compara: las fuentes de éstos, la forma de las líneas de campo, si son conservativos o no...

CUESTIÓN 2

Responde acerca de las ondas estacionarias: cómo se forman, ecuación, características...

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 1

EJERCICIO 1

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $m = 500$ kg; $r = 8 \cdot 10^6$ m

a) Determinamos la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{8 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7,1 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) El valor de la aceleración de la gravedad es:

$$g = \frac{G\,M_T}{r^2};\quad g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(8 \cdot 10^6)^2} = 6,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa es el período de revolución:

$$T = \frac{2\pi r}{v};\quad T = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^6}{7,1 \cdot 10^3} = 7,1 \cdot 10^3 \text{ s}$$

d) La energía mecánica es la suma de la cinética más la potencial:

$$Em = Ec + Ep$$

$$Em = \frac{1}{2} m\, v^2 - G\,\frac{M_T\, m}{r}$$

$$Em = -\frac{1}{2} G\,\frac{M_T\, m}{r}$$

$$Em = -\frac{1}{2}\, 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{8 \cdot 10^6} = -1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

e) La velocidad de escape es:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G\,M_T}{r}}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{8 \cdot 10^6}} = 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EJERCICIO 2

Datos: $\lambda = 250$ nm $= 2,5 \cdot 10^{-7}$ m; $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s; $\lambda_u = 320$ nm $= 3,2 \cdot 10^{-7}$ m

a) Calculamos la energía de los fotones incidentes:

$$E = h\,f;\quad E = h\,\frac{c}{\lambda}$$

$$E = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^{-7}} = 7,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E = 7,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 4,94 \text{ eV}$$

b) Calculamos el trabajo de extracción:

$$W_0 = h\,f_u;\quad W_0 = h\,\frac{c}{\lambda_u}$$

$$W_0 = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 6,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$W_0 = 3,87 \text{ eV}$$

c) Calculamos la energía cinética máxima de los electrones emitidos:

$$Ec_{max} = E - W_0 = 7,9 \cdot 10^{-19} - 6,2 \cdot 10^{-19} = 1,7 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$Ec_{max} = 4,94 - 3,87 = 1,07 \text{ eV}$$

Como $Ec = \frac{1}{2} m\, v^2$, la velocidad máxima de esos electrones será:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Ec_{max}}{m}};\quad v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 6,1 \cdot 10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CUESTIÓN 1

El momento angular de una partícula respecto a un punto O es igual al momento de su cantidad de movimiento: $\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$. El momento angular de un sólido rígido o sistema de partículas respecto de un eje es igual a la suma de los momentos angulares de todas sus partículas: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i = I\,\vec{\omega}$, donde I es el momento de inercia del sólido, y $\vec{\omega}$ es un vector cuyo módulo es la velocidad angular del sólido respecto del eje de giro, cuya dirección es la de dicho eje y cuyo sentido lo da la regla del sacacorchos.

El principio de conservación del momento angular establece que, si la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido es igual a cero, el momento angular se mantiene constante.

La condición de que la suma de los momentos sea cero se da en los siguientes casos:

— Si no actúan fuerzas exteriores. Por ejemplo: una patinadora que gira y, acercando los brazos al cuerpo, aumenta su velocidad de giro.

— Si actúan fuerzas, pero sus momentos son nulos; esto ocurre cuando las fuerzas son radiales, es decir, perpendiculares al eje de giro, o cuando son paralelas a dicho eje. Por ejemplo: en el caso del movimiento de los planetas alrededor del Sol, la fuerza es radial, por eso las órbitas de los planetas son planas, o en el caso de un disco que sin girar cae coaxialmente sobre otro que gira haciéndole disminuir su velocidad. En este caso, la fuerza es el peso, paralela al eje.

CUESTIÓN 2

Las interferencias y la difracción son fenómenos que se dan en cualquier tipo de ondas, sean longitudinales o transversales, por lo tanto, se producen también en las ondas sonoras, que son ondas longitudinales.

La polarización, sin embargo, como es propia de ondas transversales, no se da en el sonido.

— Además, para completar la respuesta, convendría efectuar una breve explicación de los tres fenómenos.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 2

EJERCICIO 1

Datos: $m_1 = 1$ kg; $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 3$ kg; $\vec{v}_1 = 3\,\vec{i}$ m/s;
$\vec{v}_2 = 5\,\vec{j}$ m/s

a) La cantidad de movimiento total es cero antes y después de la explosión. Antes de la explosión es cero porque la bomba está en reposo y después de ésta continúa siendo cero, puesto que la cantidad de movimiento total se conserva en la explosión.

b) Aplicamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento por componentes:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = m_1\, v_{1x} + m_2\, v_{2x} + m_3\, v_{3x} = 1 \cdot 3 + 0 + 3v_{3x} \\ 0 = m_1\, v_{1y} + m_2\, v_{2y} + m_3\, v_{3y} = 0 + 2 \cdot 5 + 3v_{3y} \end{array}\right\}$$

$$v_{3x} = -1\,\frac{m}{s}; \quad v_{3y} = -\frac{10}{3}\,\frac{m}{s}$$

$$v_3 = \left(-\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}\right)\frac{m}{s}; \quad v_3 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 3{,}5\,\frac{m}{s}$$

El ángulo que forma esta velocidad con el eje de las x negativas es:

$$\alpha = \text{arctg}\,\frac{10}{3} = 73{,}3°$$

c) La energía que ha sido generada es la energía cinética adquirida por los tres fragmentos:

$$Ec_f = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 + \frac{1}{2}\,m_3\,v_3^2$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3{,}5^2 = 47{,}9\ \text{J}$$

EJERCICIO 2

Datos: $V = 5 \cdot 10^4$ V; $R = 20$ cm $= 0{,}2$ m; $m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) La energía adquirida por el protón al atravesar el campo eléctrico es igual al trabajo efectuado sobre él por el campo:

$$Ec = W = q\,V; \quad Ec = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

b) Calculamos la velocidad adquirida por el protón:

$$v = \sqrt{\frac{2Ec}{m_p}}; \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-15}}{1{,}6 \cdot 10^{-27}}} = 3{,}2 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$$

c) La fuerza magnética que experimenta el protón es igual a la fuerza centrípeta que le hace describir la circunferencia:

$$F_c = \frac{m_p\,v^2}{R} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot (3{,}2 \cdot 10^6)^2}{0{,}2} = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{N}$$

d) Calculamos el campo magnético a partir de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza magnética, fuerza de Lorentz, en el supuesto de que la velocidad del protón y el campo magnético son perpendiculares:

$$F_c = F_m = q\,v\,B; \quad B = \frac{F_c}{q\,v} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}2 \cdot 10^6} = 0{,}16\ \text{T}$$

CUESTIÓN 1

La velocidad de escape en la Tierra es la velocidad mínima que debe tener un objeto para escapar de la atracción gravitatoria terrestre. Análogamente se define la velocidad de escape en la Luna o en otros planetas.

Para calcularla hemos de aplicar la condición de que la energía mínima que debe alcanzar dicho objeto tiene que ser cero, ya que con energías mecánicas iguales o superiores a cero las órbitas son abiertas (parábolas o hipérbolas), lo cual hace que éste se pueda alejar infinitamente de la Tierra.

Sabiendo que la energía mecánica de un objeto situado dentro del campo gravitatorio terrestre es:

$$E = Ec + Ep; \quad E = \frac{1}{2}m\,v^2 - G\,\frac{M_T\,m}{r}$$

Esta diferencia se hará cero cuando Ec = Ep:

$$\frac{1}{2}m\,v_{min}^2 = G\,\frac{M_T\,m}{r}$$

Por tanto, la velocidad de escape es:

$$v_{esc} = v_{min} = \sqrt{\frac{2G\,M_T}{r}}$$

CUESTIÓN 2

En el ojo humano las partes más importantes son el iris, la pupila, el cristalino y la retina. La luz entra en el ojo por la pupila a través de la córnea. El iris regula la cantidad de luz que entra. El cristalino es una lente convergente que focaliza los rayos de luz que proceden de los objetos y forma la imagen de éstos sobre la retina, donde están las terminaciones nerviosas que transmiten la señal al cerebro.

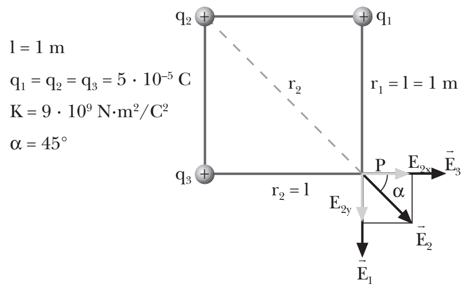
La lente del cristalino debe modificar su potencia y, por tanto, su forma, para enfocar tanto los objetos lejanos, como los intermedios y los cercanos, sobre una zona concreta y muy sensible de la retina, la mancha amarilla. El cambio de forma del cristalino se consigue mediante unos músculos que lo rodean, los músculos ciliares, y se denomina acomodación.

La miopía es un defecto del ojo que no permite enfocar correctamente los objetos lejanos. Esto es debido a que el globo del ojo es más alargado de lo normal o a que la córnea tiene más curvatura de lo debido, por lo que la imagen de objetos lejanos se forma detrás de la retina. Se corrige con lentes o lentillas divergentes, que compensan estos defectos aproximando la imagen hasta llevarla al punto correcto.

La hipermetropía es un defecto opuesto al anterior; no permite enfocar correctamente los objetos cercanos. Las imágenes de éstos se forman por delante de la retina. La corrección se efectúa mediante lentes convergentes, que atrasan la imagen hasta el punto correcto.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 3

EJERCICIO 1



a) Determinamos los módulos de los vectores intensidad de campo:

$$E_1 = E_3 = K\,\frac{q_1}{r_1^{\,2}} = K\,\frac{q_3}{r_3^{\,2}} = K\,\frac{q}{l^2}$$

$$E_1 = E_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1^2} = 4{,}5 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = K\,\frac{q_2}{r_2^{\,2}} = K\,\frac{q}{2l^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}\,C}{2 \cdot 1^2} = 2{,}25 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}$$

Sumamos los vectores por componentes:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = E_2 \cos 45° + E_3$$

$$E_x = 2{,}25 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4{,}5 \cdot 10^7 = 6{,}1 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = -E_2 \operatorname{sen} 45° - E_1$$

$$E_y = -2{,}25 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4{,}5 \cdot 10^7 = -6{,}1 \cdot 10^7\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = 6{,}1 \cdot 10^7\ \vec{i} - 6{,}1 \cdot 10^7\ \vec{j} = 6{,}1 \cdot 10^7\ (\vec{i} - \vec{j})\ N/C$$

b) El potencial total es la suma de los tres potenciales:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K\,\frac{q_1}{r_1} + K\,\frac{q_2}{r_2} + K\,\frac{q_3}{r_3}$$

$$V = K\,\frac{q}{l} + K\,\frac{q}{\sqrt{2l^2}} + K\,\frac{q}{l}; \quad V = K\,q\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\sqrt{2l^2}} + \frac{1}{l}\right)$$

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}\text{m}} + \frac{1}{1}\right) = 1{,}22 \cdot 10^8\ V$$

EJERCICIO 2

Datos: $y(x, t) = 20 \operatorname{sen}\ (0{,}1\pi t - 2\pi x)$;
$x_1 = 0{,}5$ m; $x_2 = 2$ m
$x = 0{,}5$ m ($t = 10$ s)

a) De la ecuación del enunciado obtenemos:

$$A = 20 \text{ m};\ \omega = 0{,}1\pi \text{ rad/s};\ k = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20\ s$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ m\ ;\quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{20} = 0{,}05\ \frac{m}{s}$$

b) Calculamos la diferencia de fase entre x_1 y x_2:

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = k\ (x_1 - x_2)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\ (0{,}5 - 2) = -3\pi \text{ rad}$$

c) Derivamos la ecuación de la onda para obtener la velocidad en el punto x = 0,5 m para t = 10 s:

$$v = \frac{dy}{dt} = 20 \cdot 0{,}1\pi \cos(0{,}1\pi t - 2\pi x) = 2\pi \cos(0{,}1\pi t - 2\pi x)$$

$$v(0{,}5,\ 10) = 2\pi \cos 0 = 2\pi\ m/s$$

d) Hallamos la expresión de la aceleración y su valor máximo: $a = \dfrac{dv}{dt}$

$$a = -2\pi \cdot 0{,}1\pi \operatorname{sen}(0{,}1\pi t - 2\pi x)$$

$$a = = -0{,}2\pi^2 \operatorname{sen}(0{,}1\pi t - 3\pi x) \quad \text{(SI)}$$

$$a_{max} = \left|-0{,}2\pi^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0{,}2\pi^2 = 1{,}97\ \frac{m}{s^2}$$

CUESTIÓN 1

Se trata del efecto fotoeléctrico, en el cual una radiación electromagnética extrae electrones de un metal si sus fotones tienen una energía igual o superior al trabajo de extracción del metal.

El orden creciente de energías de los colores del espectro visible va del rojo al violeta, pasando por el anaranjado, el amarillo, el verde, el azul y el añil. Si la luz azul arranca electrones del metal, también lo hará la luz violeta, por tener una energía mayor. En cambio, si la luz amarilla no arranca electrones, tampoco lo hará la luz roja, por tener una energía menor.

CUESTIÓN 2

Primera ley: Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.

Segunda ley: La recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley: El cuadrado del período del movimiento de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.

Suponiendo órbitas circulares, tenemos las siguientes relaciones para el período, T:

$$T = \frac{2\pi R}{v}; \quad T = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\,\dfrac{M_S}{R}}}$$

v: velocidad orbital del planeta
M_s: masa del Sol
R: radio de la órbita

Elevando al cuadrado la expresión anterior, resulta:

$$T^2 = \frac{2\pi R^3}{G\,M_S}$$

Esta relación es igualmente aplicable a los satélites en el movimiento alrededor de sus planetas, y de esta relación puede deducirse la masa de un planeta conociendo el período y el radio de la órbita de uno de sus satélites.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 4

EJERCICIO 1

Datos: $p = 50$ N; $g_0 = 3{,}8$ m/s²; $R_M = 3\,380$ km

La gravedad a la altura h en función de la gravedad en la superficie de Marte es: $g = g_0 - 0{,}2g_0 = 0{,}8g_0$

La relación entre la gravedad y la distancia al centro del planeta es:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{0{,}8\,g_0}{g_0}; \quad \frac{g}{g_0} = \frac{R_0{}^2}{(R_0 + h)^2}$$

Calculamos la altura: $R_M + h = \sqrt{\frac{1}{0{,}8}} \cdot R_M$

$$R_M + h = \sqrt{\frac{1}{0{,}8}} \cdot 3{,}4 \cdot 10^6 = 3{,}8 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = (3{,}8 - 3{,}4) \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Calculamos la masa a partir del peso en la Tierra:

$$p_T = m\,g_T;\ 50 = m \cdot 9{,}8;\ m = 5{,}1 \text{ kg}$$

Calculamos el peso a esa altura en Marte:

$$p = m\,g;\ p = 5{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}8 = 15{,}1 \text{ N}$$

EJERCICIO 2

Datos: $y(x, t) = 5 \text{ sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) \cos 40\pi t \text{ (SI)};\ l = 12 \text{ m}$

a) Se trata de una onda estacionaria; comparando esta expresión con la ecuación de las ondas estacionarias deducimos las características de las ondas cuya superposición da lugar a esta vibración.

$$A = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ m};\ \omega = 40\pi \text{ rad/s};\ k = \frac{\pi}{3} \text{ m}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega};\ T = \frac{2\pi}{40\pi} = 0{,}05 \text{ s};\ f = \frac{1}{T};\ f = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k};\ \lambda = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \text{ m}$$

La velocidad de las onda es:

$$u = \frac{\lambda}{T};\ u = \frac{6}{0{,}05} = 120\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La distancia entre los nodos es $\frac{\lambda}{2}$, esto es, 3 m.

c) Ya que la cuerda está atada por ambos extremos, cada uno es un nodo. Como la cuerda mide 12 m y cada 3 m hay un nodo, habrá 5 nodos y 4 vientres.

d) Las longitudes de onda de las ondas estacionarias que pueden establecerse en una cuerda de longitud l cumplen la condición: $\lambda = \frac{2l}{n}$.

La frecuencia fundamental y los armónicos son:

$$f = \frac{u}{\lambda} = n\,\frac{u}{2l};\ f = \frac{120\,n}{2 \cdot 12} = \frac{60\,n}{12} = 5\,n \text{ v} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

La frecuencia fundamental es: $f_1 = 5$ Hz, y los armónicos: $f_2 = 10$ Hz; $f_3 = 15$ Hz; $f_4 = 20$ Hz...

CUESTIÓN 1

El generador de corriente alterna es una aplicación de la inducción electromagnética.

La inducción es el efecto por el cual se genera corriente eléctrica en un circuito debido a la variación del flujo magnético que lo atraviesa. El flujo puede variar porque varíe el campo magnético B, porque varíe la superficie del circuito S, o porque varíe la dirección de B respecto de S. En el generador de corriente alterna ocurre esto último.

Un generador de corriente alterna consiste en una espira o un bobinado de N espiras que gira con MCU en un campo magnético fijo, creado por un imán o un electroimán, que atraviesa las espiras. El flujo que atraviesa las espiras es $\phi(t) = N\,B\,S \cos \omega t$, donde N es el número de espiras, S el área de cada una, y ω la velocidad angular.

La ley de Faraday establece que la fem inducida es:

$$\varepsilon_{ind} = N\,B\,S\,\omega \text{ sen } \omega t = \varepsilon_0 \text{ sen } \omega t$$

donde se aprecia que esta fem es variable según una función sinusoidal. Esta corriente inducida toma el nombre de corriente alterna, siendo su frecuencia la misma que la del giro de las espiras.

En las centrales hidroeléctricas los cambios energéticos que tienen lugar son: la energía potencial del agua embalsada se transforma en energía cinética de traslación cuando esta agua se deja caer sobre la turbina, pasando a ser energía cinética de rotación de ésta; el giro de la turbina se transmite al sistema de espiras produciéndose energía eléctrica.

CUESTIÓN 2

El defecto de masa es la pérdida de masa, con su consiguiente transformación en energía, que tiene lugar al formarse un núcleo a partir de sus nucleones y en las reacciones nucleares, como las de fusión y fisión.

Se ha comprobado experimentalmente que la masa de los núcleos es inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo constituyen. Esta pérdida de masa de los núcleos se llama *defecto de masa.* Según la mecánica relativista, un cambio de masa Δm está asociado a un cambio de energía ΔE. Esto significa que el núcleo es más estable (menos energético) que el conjunto de sus nucleones aislados, ya que al formarse se libera energía. La energía liberada cuando varios nucleones aislados se unen para formar el núcleo se denomina energía de enlace. Dividiendo la energía de enlace de cada núcleo entre en número de nucleones que lo forman se obtiene la *energía media de enlace por nucleón*, que es directamente proporcional a la estabilidad del núcleo.

Los núcleos ligeros tienen tendencia a fusionarse para formar núcleos más pesados y conseguir una mayor estabilidad; por el contrario, los núcleos pesados tienen tendencia a fisionarse para formar núcleos más ligeros y conseguir también una mayor estabilidad. Esto hace que los procesos de fusión y fisión sean exotérmicos, desprendiendo al exterior grandes cantidades de energía que pueden aprovecharse con fines prácticos.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 5

EJERCICIO 1

Datos: $v = 2{,}5 \cdot 10^8$ m/s; $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

a) Calculamos la masa del electrón a una velocidad de $2{,}5 \cdot 10^8$ m/s:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad m = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-\frac{(2{,}5 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}} = 16{,}5 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

b) Calculamos la energía cinética relativista: $Ec = \Delta m\, c^2$

$$Ec = (16{,}5 \cdot 10^{-31} - 9{,}1 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 6{,}7 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

c) Calculamos la energía relativista total que posee el electrón:

$$E = m\, c^2 = 16{,}5 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

EJERCICIO 2

Datos: $y_1 = 1{,}5$ cm; $d = 3$ m $= 300$ cm; $y_2 = -1$ m $= -100$ cm

a) Para poder obtener una imagen real de la diapositiva sobre la pantalla, la lente ha de ser una lente convergente. Además, para que la imagen sea mayor que el objeto, éste debe situarse a una distancia mayor que la distancia focal y menor que el doble de ésta. En ese caso la imagen resulta invertida, $y_2 < 0$.

b) Calculamos la distancia entre la lente y la diapositiva, que coincide con la distancia objeto s_1, a partir del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y_2}{y_1} = \frac{s_2}{s_1}; \quad s_1 = s_2 \frac{y_1}{y_2}$$

Como $s_1 < 0$, $s_2 = d + s_1$. Por tanto:

$$s_1 = (d + s_1)\frac{y_1}{y_2}; \quad s_1\left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right) = d\frac{y_1}{y_2}$$

$$s_1 = d\frac{y_1}{y_2\left(1-\frac{y_1}{y_2}\right)} = d\frac{y_1}{y_2 - y_1}$$

$$s_1 = 300 \cdot \frac{1{,}5}{-100 - 1{,}5} = -4{,}4 \text{ cm}$$

c) Calculamos la potencia como la inversa de la distancia focal en metros:

$$P = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{(d+s_1)} - \frac{1}{s_1}$$

$$P = \frac{1}{(3-0{,}044)} - \frac{1}{(-0{,}044)} = 23{,}1 \text{ dioptrías}$$

CUESTIÓN 1

Carga eléctrica en reposo.

a) **Cierto.** Una carga eléctrica en reposo crea un campo eléctrico, que se llama electrostático. Su expresión, en función de la carga que lo crea es $E = K\frac{q}{r^2}$.

b) **Falso.** Las cargas eléctricas en reposo no crean campo magnético.

c) **Falso.** Una carga eléctrica en reposo sólo crea un campo eléctrico.

Carga eléctrica en movimiento.

a) **Cierto.** Una carga eléctrica en movimiento crea un campo eléctrico, puesto que es una carga.

b) **Cierto.** Las cargas eléctricas en movimiento crean un campo magnético precisamente por estar en movimiento.

c) **Cierto.** Como hemos visto, una carga eléctrica en movimiento crea tanto un campo eléctrico como uno magnético.

CUESTIÓN 2

La aceleración de la gravedad en la Tierra es la aceleración que hace caer los objetos sobre la superficie terrestre; es consecuencia de la fuerza con que la Tierra los atrae. Esta fuerza se conoce también como peso de los objetos y su módulo tiene la siguiente expresión:

$$F = p = G\frac{m\,M_T}{d^2} = G\frac{m\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

donde m es la masa del objeto correspondiente, d es la distancia desde el punto en que se encuentra la masa m hasta el centro de la Tierra y h es la altura a la que se encuentra el objeto desde la superficie de la Tierra.

La relación entre el peso de los objetos y la aceleración de la gravedad es: $p = m\,g$, por lo que la expresión de la aceleración de la gravedad en la Tierra es:

$$g = G\frac{M_T}{d^2} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

que coincide con la de la intensidad del campo gravitatorio terrestre.

Para puntos sobre la superficie terrestre ($h = 0$):

$$g = G\frac{M_T}{R_T{}^2} = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

Se puede utilizar este valor de g siempre que el objeto estudiado esté sobre la superficie terrestre o a alturas pequeñas comparadas con el radio de la Tierra.

La energía potencial gravitatoria terrestre tiene la siguiente expresión: $Ep = -G\frac{M_T}{d} = -G\frac{M_T}{R_T + h}$

Ep es negativa por corresponder a un campo de atracción.

La expresión $Ep = m\,g\,h$ no corresponde en realidad a la energía potencial gravitatoria terrestre, pero se comprueba que puede usarse para cuerpos situados cerca de la superficie de la Tierra, de manera que g no varíe apreciablemente. Sin embargo, en los casos en los que la distancia a la superficie de la Tierra aumente de manera considerable (unos cuantos kilómetros), debemos utilizar la expresión: $Ep = -G\frac{M_T}{R_T + h}$

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 6

EJERCICIO 1

Datos: $K = 2\ N/cm = 200\ N/m$; $m = 500\ g = 0,5\ kg$;
$x = +5\ cm = +0,05\ m\ (t = 0\ s)$

a) Calculamos la fuerza a partir de la ley de Hooke:

$$F = K\,x$$

$$F = 200 \cdot 0,05 = 10\ N$$

b) Hallamos el período y la frecuencia del MAS que efectuará como consecuencia de la deformación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{200}} = 0,1\pi\ s$$

$$f = \frac{1}{T};\quad f = \frac{1}{0,1\pi} = \frac{10}{\pi}\ Hz$$

c) El MAS que seguirá tiene por amplitud 0,05 m y como pulsación $\omega = 2\pi f = 20$ rad/s. Por tanto, si para $t = 0$ s, $x = 0,05\ m = A$, la ecuación de este MAS será:

$$x(t) = A\ \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t = 0) = A\ \text{sen}\ \varphi_0 = A \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 0,05\ \text{sen}\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,05\cos 20t\quad (SI)$$

EJERCICIO 2

Datos: $f = 5 \cdot 10^{14}$ Hz; $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ m

a) Calculamos la velocidad de la luz en el líquido:

$$v = \lambda f = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 10^8\ m/s$$

b) Calculamos la longitud de onda en el vacío:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f};\quad \lambda_0 = \frac{3\cdot 10^8}{5\cdot 10^{14}} = 6\cdot 10^{-7}\ m$$

c) Hallamos el índice de refracción del líquido:

$$n = \frac{c}{v};\quad n = \frac{3\cdot 10^8}{10^8} = 3$$

CUESTIÓN 1

Estas radiaciones electromagnéticas se sitúan en orden creciente de energías de esta manera:

Ondas de radio, microondas, rayos infrarrojos, luz visible, rayos ultravioleta, rayos X y rayos gamma.

La característica que hace que una radiación del espectro visible sea azul y otra sea roja es la frecuencia.

La visión del color es una respuesta fisiológica y psicológica al estímulo de la radiación que incide en nuestros ojos. El color de un objeto depende de la luz que incide sobre él y de la naturaleza del propio objeto. El color observado es el resultado de la absorción selectiva de algunas de las frecuencias que pertenecen al espectro visible. Las demás frecuencias llegan a nuestros ojos después de haber sido reflejadas o transmitidas por el objeto. Así, por ejemplo, un cuerpo de color negro es aquél que absorbe toda la radiación incidente. Por el contrario, un objeto que refleja toda la luz que incide sobre él se ve del color de la luz con la que ha sido iluminado (blanco si utilizamos luz blanca).

CUESTIÓN 2

La hipótesis de De Broglie establece que las partículas en movimiento llevan una onda asociada, cuya longitud de onda tiene la siguiente expresión: $\lambda = \dfrac{h}{m\,v}$, siendo h la constante de Planck y $p = m\,v$ la cantidad de movimiento de la partícula. Los motivos que le llevaron a establecerla fueron los éxitos de la teoría corpuscular de la radiación de Einstein, que explicaba el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton.

Según dicha teoría, las ondas electromagnéticas llevan asociados los fotones a modo de partículas que tienen una energía dada por la siguiente expresión:

$$E = h\,f, \text{ siendo f la frecuencia de la radiación}$$

y una cantidad de movimiento que se puede expresar de las formas siguientes:

$$p = \frac{E}{c};\quad p = h\,\frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

De Broglie se planteó si no podría ser también cierto que las partículas en movimiento llevaran asociada una onda. Las ecuaciones anteriores tendrían que adaptarse a una velocidad v:

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

de donde resulta la expresión del principio: $\lambda = \dfrac{h}{m\,v}$

El experimento de Davisson y Germer confirmó dicha hipótesis mediante la difracción de electrones a grandes velocidades. Actualmente estas ondas asociadas a los electrones se emplean en el microscopio electrónico, ya que la longitud de onda de De Broglie que tienen es muy pequeña, con lo cual la apreciación de este microscopio es muy grande.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 7

EJERCICIO 1

Datos: $R_L = 0{,}273\ R_T$; $M_L = 0{,}0123\ M_T$; $p_T = 250$ N;
$h_1 = 300$ m; $h_2 = 1\ 000$ km $= 10^6$ m

a) Calculamos la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna por comparación con su valor en la superficie de la Tierra:

$$g_{L0} = G\frac{M_L}{{R_L}^2};\ g_{T0} = G\frac{M_T}{{R_T}^2}$$

$$\frac{g_{L0}}{g_{T0}} = \frac{G\dfrac{M_L}{{R_L}^2}}{G\dfrac{M_T}{{R_T}^2}};\quad \frac{g_{L0}}{g_{T0}} = \frac{\dfrac{0{,}0123\ M_T}{0{,}273^2\ {R_T}^2}}{\dfrac{M_T}{{R_T}^2}} = \frac{0{,}0123}{0{,}273^2} = 0{,}165$$

$$g_{L0} = 0{,}165 g_{T0} = 0{,}165 \cdot 9{,}8 = 1{,}6\ \frac{m}{s^2}$$

b) Calculamos la masa del objeto a partir de su peso en la superficie terrestre:

$$p_T = m\ g_{T0};\quad m = \frac{p_T}{g_{T0}};\quad m = \frac{250}{9{,}8} = 25{,}5\ kg$$

Calculamos el peso en la superficie de la Luna:

$$p_L = m\ g_{L0};\quad p_L = 25{,}5 \cdot 1{,}6 = 40{,}8\ N$$

c) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica para hallar la velocidad con que el objeto llega a la superficie lunar. Suponemos que la aceleración de la gravedad es constante y su valor 1,6 $m{\cdot}s^{-2}$:

$$Em_1 = Em_2;\ 0 + Ep_1 = Ec_2 + 0;\ m\ g_{L0}\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

$$v = \sqrt{2 g_{L_0}\ h}\ ;\ v = \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 300} = 30{,}99\ m/s$$

EJERCICIO 2

Datos: $I_1 = 3$ A; $I_2 = 5$ A; d = 5 cm = 0,05 m;
$x_1 = 2$ cm = 0,02 m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T{\cdot}m{\cdot}A^{-1}$

a) Calculamos la fuerza que se ejercen mutuamente por unidad de longitud:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0\ I_1\ I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 5}{2\pi \cdot 0{,}05} = 6 \cdot 10^{-5}\ \frac{N}{m}$$

b) La fuerza es atractiva porque las corrientes circulan en el mismo sentido.

c) Determinamos el campo magnético que crea cada corriente en un punto situado a 2 cm de la primera:

$$B_1 = \frac{\mu_0\ I_1}{2\pi\ x_1};\quad B_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 0{,}02} = 6 \cdot 10^{-5}\ T$$

$$B_2 = \frac{\mu_0\ I_2}{2\pi\ x_2};\quad B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0{,}03} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}\ T$$

El campo magnético resultante es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$. Su módulo se calcula restando ambos campos magnéticos por tener sentidos contrarios:

$$B = B_1 - B_2;\ B = 6 \cdot 10^{-5} - 3{,}3 \cdot 10^{-5} = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ T$$

CUESTIÓN 1

Reflexión: fenómeno por el cual, al llegar una onda a la superficie de separación de dos medios, es devuelta al primero de ellos junto con una parte de la energía del movimiento ondulatorio, cambiando su dirección de propagación. Las leyes de la reflexión son:

— El rayo incidente, la normal a la superficie de separación en el punto de incidencia y el rayo reflejado están situados en el mismo plano.

— Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

Refracción: fenómeno por el cual, al llegar una onda a la superficie de separación de dos medios, penetra y se transmite en el segundo de ellos junto con una parte de la energía del movimiento ondulatorio, cambiando su dirección de propagación. Las leyes de la refracción son:

— El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano.

— La razón entre el seno del ángulo de incidencia y el del ángulo de refracción es una constante igual a la razón entre las respectivas velocidades de propagación del movimiento ondulatorio. Esta cantidad constante n_{21} se denomina índice de refracción relativo del segundo medio respecto al primero.

CUESTIÓN 2

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial. La energía mecánica que posee un objeto de masa m que describe un MAS es la suma de la energía cinética que tiene a causa de la velocidad que lleva, $\frac{1}{2}m\ v^2$, y la energía potencial elástica, $\frac{1}{2}K\ x^2$; donde m es la masa del objeto que realiza el MAS y K es la constante de elasticidad del muelle.

La ecuación general del MAS es: $x(t) = A\ sen\ (\omega t + \varphi_0)$.

La expresión de su velocidad es: $v(t) = A\ \omega\ cos\ (\omega t + \varphi_0)$ siendo $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$.

Por tanto, la energía mecánica es: $Em = \frac{1}{2} m\ v^2 + \frac{1}{2} K\ x^2$

$$Em = \frac{1}{2}\ m\ A^2\ \omega^2\ cos^2\ (\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}\ K\ A^2\ sen^2\ (\omega t + \varphi_0)$$

$$Em = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ A^2\ [cos^2\ (\omega t + \varphi_0) + sen^2\ (\omega t + \varphi_0)]$$

$$Em = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ A^2$$

a) Si la amplitud se reduce a la mitad, la energía mecánica se reduce a la cuarta parte.

b) Si la frecuencia se reduce a la mitad, la energía mecánica también se reduce a la cuarta parte.

c) Si la amplitud se duplica y la frecuencia se reduce a la mitad, la energía mecánica no varía.

SOLUCIÓN MODELO NÚMERO 8

EJERCICIO 1

Datos: N = 1 000; f = 50 Hz; B = 5 T; l = 10 cm = 0,1 m; a = 5 cm = 0,05 m; S = 0,1 · 0,05 = 5 · 10^{-3} m^2

Deducimos la fem inducida a partir de la ley de Faraday:

$$\phi(t) = N\ B\ S \cos \omega t$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{d(N\ B\ S \cos \omega t)}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = N\ B\ S\ \omega \operatorname{sen} \omega t$$

El valor máximo de la fem es:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{max} = N\ B\ S\ \omega = N\ B\ S\ 2\pi f$$

$$\varepsilon_0 = 1\,000 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50; \quad \varepsilon_0 = 7\,854\ V$$

Calculamos su valor eficaz:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}; \quad \varepsilon_{ef} = \frac{7\,854}{\sqrt{2}} = 5\,554\ V$$

EJERCICIO 2

Datos: M_N = 22,9898 u; m_p = 1,00714 u; m_n = 1,00853 u

La masa de las partículas que forman el núcleo es:

$$Z\ m_p + (A - Z)\ m_n = 11 \cdot 1{,}00714 + 12 \cdot 1{,}00853$$

$$Z\ m_p + (A - Z)\ m_n = 23{,}1809\ u$$

El defecto de masa es:

$$\Delta m = [Z\ m_p + (A - Z)\ m_n] - M_N$$

$$\Delta m = 23{,}1809 - 22{,}9898 = 0{,}1911\ u$$

La energía de enlace es:

$$\Delta E = \Delta m\ c^2$$

$$\Delta E = 0{,}1911\,u \cdot \frac{931\,MeV}{1\,u} = 178\,MeV$$

Finalmente, la energía media de enlace por nucleón es:

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{178\ MeV}{23\,nucl.} = 7{,}74\ \frac{MeV}{nucl.}$$

CUESTIÓN 1

— El campo gravitatorio creado por una masa puntual y el campo eléctrico creado por una carga puntual son campos centrales. Sus líneas de campo son abiertas y tienen simetría radial.

Las líneas de inducción magnética, en cambio, son líneas cerradas. Así, en un imán, las líneas de inducción salen del polo norte del imán, recorren el espacio exterior, entran por el polo sur y continúan por el interior del imán hasta su polo norte.

— El campo gravitatorio y el campo eléctrico son conservativos, por lo que tienen una energía potencial y un potencial asociados. El trabajo realizado contra el campo se almacena en forma de energía potencial, de modo que puede recuperarse íntegramente. El campo magnético, en cambio, no es conservativo. No existen una energía potencial ni un potencial magnéticos.

— La intensidad del campo es directamente proporcional a la magnitud física que es fuente del campo: a la masa en el caso del campo gravitatorio, a la carga en el caso del campo eléctrico y a la carga o a la intensidad de la corriente en el caso del campo magnético. Además, la intensidad del campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la fuente del campo y el punto donde lo calculamos. Si bien, en el caso del campo magnético depende además de la dirección del movimiento de la carga eléctrica o de la corriente.

— El campo eléctrico y el campo magnético dependen del medio en el que actúan, pues la constante de Coloumb, K, y la permeabilidad, m, varían de un medio a otro. El campo gravitatorio, en cambio, no depende del medio en el que actúa, pues la constante G es universal.

CUESTIÓN 2

Las ondas estacionarias son el resultado de la superposición de una onda armónica con otra de las mismas características que se propague en la misma dirección y sentido contrario.

$$y_r = y_1 + y_2 = A \cos (\omega t - kx) + A \cos (\omega t + kx)$$

$$y_r = 2\ A \cos kx \cos \omega t = A_r\ (x)\ \cos \omega t; \quad A_r(x) = 2\ A \cos kx$$

La amplitud varía con la abscisa x. Todos los puntos de la onda oscilan armónica y verticalmente respecto al eje OX y alcanzan a la vez la posición de equilibrio, excepto los puntos de amplitud nula. Estos puntos de amplitud nula, los nodos, se encuentran siempre en reposo y la onda estacionaria permanece fija sobre la dirección de propagación, no viaja y no transporta energía. Por tanto, las ondas estacionarias no son ondas en sentido estricto, sino que se trata de un MAS con amplitudes variables. Los puntos de amplitud máxima se llaman vientres y los de amplitud mínima, nodos. La distancia entre nodos o vientres es de $\frac{\lambda}{2}$.

Las demás características de la onda estacionaria, frecuencia y longitud de onda, son iguales a las de las ondas que interfieren para formarla.

— Además, para completar la respuesta, convendría tratar las ondas estacionarias en cuerdas y tubos, es decir, en instrumentos musicales, y las series armónicas.