PROBLEMAS RESUELTOS MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Una onda transversal se propaga en una cuerda según la ecuación (unidades en el S.I.)

$$y = 0{,}4\cos(100t - 0{,}5x)$$

Calcular la velocidad de propagación de la onda y el estado de vibración de una partícula a 20 cm del foco en el instante 0,5 s.

2. La ecuación de una onda es

$$y(x,t) = 0{,}5\cos 4\pi(10t - x) \qquad (S.I.)$$

Calcular la velocidad de propagación de la misma y la diferencia de fase entre dos puntos separados 0,5 m.

3. Una onda armónica sinusoidal, transversal y polarizada se propaga por una cuerda en sentido de las x positivas. Su amplitud es de 10 cm, la frecuencia de 25 Hz, la velocidad de 10 m/s. Encontrar la ecuación de la onda y el instante en que la vibración de un punto a 50 cm del foco es máxima.

4. En una cuerda tensa de 16 m de longitud, con sus extremos fijos, se ha generado una onda de ecuación:

$$y\,(x,t) = \;0{,}02\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\,x\right)\cos(8\pi\,t) \qquad (S.I.)$$

a) Calcule la velocidad en función del tiempo de los puntos de la cuerda que se encuentran a 4 m y a 6 m, respectivamente de uno de los extremos y comente los resultados.
b) Calcule la distancia entre nodos dos nodos consecutivos. ¿A qué modo de vibración corresponde a la ecuación anterior?

5. La función de onda correspondiente a una onda armónica en una cuerda es Y(x, t) = 0,001 sen(314t+62,8x), escrita en el SI. a) ¿En qué sentido se mueve la onda? b) ¿Cuál es su velocidad? c) ¿Cuál es la longitud de onda, frecuencia y periodo? d) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de un segmento cualquiera de la cuerda? e) ¿Cuál es la ecuación de la velocidad y aceleración de una partícula de la cuerda que se encuentre en el punto x = – 3 cm?

6. Escribir una función para la propagación de una onda que se mueve hacia la derecha a lo largo de una cuerda con velocidad de 10 ms-1, frecuencia de 60 hercios y amplitud 0,2 m.

7. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda viene dada por y(x, t) =10 sen(2πt – πx/0,10), escrita en el SI. Hallar: a) La velocidad de propagación de la onda. b) La velocidad y aceleración máxima de las partículas de la cuerda.

8. Dos ondas que se propagan en una cuerda en la misma dirección tienen una frecuencia de 100 hercios, longitud de onda de 0,01 m y amplitud de 2 cm. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante si las ondas originales están desfasadas en π/3?

9. Una cuerda con ambos extremos fijos vibra con su modo fundamental. Las ondas tienen una velocidad de 32 m/s y una frecuencia de 20 Hz. la amplitud de la onda estacionaria en su antinodo es 1,20 cm a) Calcular la amplitud del movimiento de los puntos de la cuerda a distancias de a) 80 cm b) 40 cm y c) 20 cm del extremo izquierdo de la cuerda.

10. Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación y = *5* senπx/3 sen 40πt (x en m *y* t en s). a) Hallar la amplitud *y* velocidad de fase de las ondas cuya superposición puede dar lugar a dicha vibración. b) Distancia entre nodos. c) Velocidad de una partícula de la cuerda situada en x = 1,5 m cuando t = 9/8 s.

SOLUCIONES

1. La ecuación de la onda transversal indica que se trata de una onda armónica unidimensional que se propaga en el sentido positivo del eje x. La ecuación general de este tipo de ondas es:

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Comparando obtenemos:

$$A = 0{,}4\, m$$

$$k = 0{,}5\, m^{-1}$$

$$\omega = 100\, rad/s$$

$$\varphi = 0$$

A partir de la frecuencia angular podemos conocer la frecuencia de la onda. A partir del número de onda podemos conocer la longitud de onda:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi}\ Hz$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}5}\ m$$

En cuanto a la velocidad de propagación de la onda,

$$v = f \cdot \lambda = \frac{100}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{0{,}5} = 200\ m/s$$

El estado de vibración de una partícula concreta del medio viene dado por la elongación de la misma en un instante determinado. Los datos del problema indican que se trata de la partícula situada a 20 cm (0,2 m) del foco emisor en el instante 0,5 s. Sustituimos estos valores en la ecuación de la onda para conocer el estado de vibración,

$$y(0'2, 0'5) = 0{,}4\cos(100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}2)$$

$$y(0'2, 0'5) = 0{,}4\cos(49{,}9)$$

$$y = 0{,}374\, m$$

Para obtener este resultado debemos tener en cuenta que la cantidad que resulta dentro del coseno (fase de la onda) viene dada en radianes.

El estado de vibración de una partícula del medio queda mejor especificado si, además, indicamos su velocidad y aceleración. En general, la velocidad y aceleración de esta onda vienen dadas por las expresiones:

$$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Sustituyendo los valores conocidos, la posición de la partícula y el instante considerado,

$$v(0'2, 0'5) = -0{,}4 \cdot 100 \operatorname{sen}(100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 14{,}3\, m/s$$

$$a(0'2, 0'5) = -0{,}4 \cdot 100^2 \cos(100 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}2) = -3740\, m/s^2$$

2. En primer lugar hay que reescribir la ecuación de la onda para que así pueda ser comparada con la ecuación general,

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$y(x,t) = 0{,}5\cos(40\pi t - 4\pi x)$$

Por tanto, identificando términos,

$$Amplitud, A = 0{,}5\ m$$

$$Frecuencia\ angular, \omega = 40\pi\ \ rad/s$$

$$Número\ de\ onda, k = 4\pi\ \ m^{-1}$$

$$Fase\ inicial, \varphi = 0$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{4\pi} = 10\, m/s$$

La fase de la onda es, en radianes,

$$40\pi t - 4\pi x$$

El problema pide la diferencia de fase entre dos puntos separados 0,5 m. Se supone que esta diferencia de fase se demanda para un mismo instante concreto en ambos puntos, es decir, el tiempo es el mismo. En este caso, la diferencia de fase entre dos puntos cualesquiera del medio, x_1 y x_2, es

$$\delta_{x_2-x_1} = (40\pi t - 4\pi x_2) - (40\pi t - 4\pi x_1) = 4\pi(x_1 - x_2)$$

Si la distancia que separa ambos puntos es 0,5 m, entonces,

$$\delta_{x_2-x_1} = 4\pi \cdot 0{,}5 = 2\pi \ rad$$

3. Los datos necesarios para encontrar la ecuación de la onda son, utilizando unidades del S.I.:

$$\mathit{Onda\ armónica\ sinusoidal, transversal\ y\ polarizada}$$

$$\mathit{Se\ desplaza\ en\ sentido\ de\ las\ x\ positivas}$$

$$A = 10\ cm = 0{,}1\ m$$

$$f = 25\ Hz$$

$$v = 10\ m/s$$

El primer dato indica que la ecuación de onda se puede expresar con la función seno. Si la onda es transversal y se desplaza por el eje *x*, entonces los puntos del medio vibran en el eje *y*. La información sobre la polarización de la onda indica que la vibración de los puntos del medio sólo se produce en una dirección, el eje *y* según hemos dicho. Con estos datos podemos escribir la ecuación general de la onda de la siguiente forma:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t \pm kx + \varphi)$$

Si la onda se desplaza en el sentido positivo del eje *x*, entonces los puntos situados en dicho eje vibran con retraso respecto a como lo está haciendo el origen de coordenadas, por tanto,

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

Por otra parte, el enunciado no informa nada acerca de la posición del foco emisor en el instante inicial, por lo que supondremos que se encuentra en la posición de equilibrio:

$$y(0{,}0) = 0$$

En estas condiciones la fase inicial es cero y la ecuación general de la onda queda:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

La frecuencia angular de la onda es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25 = 50\pi\, rad/s$$

Para calcular el número de onda, *k*, determinamos primero la longitud de onda, a través del dado de la velocidad de propagación,

$$v = f \cdot \lambda \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{10}{25} = 0{,}4\, m$$

El número de onda es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi\ rad/m$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general de la onda tenemos:

$$y(x,t) = 0{,}1\,\mathrm{sen}(50\pi t - 5\pi x)$$

O también,

$$y(x,t) = 0{,}1\,\mathrm{sen}\, 5\pi(10t - x)$$

Para conocer el instante en que la vibración de un punto situado a 50 cm (0,5 m) del foco emisor es máxima, debemos sustituir en la ecuación de onda los siguientes valores:

$$x = 0{,}5\, m \quad \rightarrow \quad y = 0{,}1\, m$$

Por tanto,

$$0{,}1 = 0{,}1\, \mathrm{sen}(50\pi t - 5\pi \cdot 0{,}5)$$

$$1 = \mathrm{sen}(50\pi t - 2{,}5\pi)$$

Los valores de la fase de la onda que cumplen la condición, que el seno sea igual a la unidad (±1), son:

$$50\pi t - 2{,}5\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots.$$

$$50\pi t - 2{,}5\pi = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$$

Donde n es un número cuyos valores pueden ser 0, 1, 2, 3, …..

Dando valores a n se obtienen los siguientes tiempos:

$$n = 0 \;\rightarrow\; 50\pi t - 2{,}5\pi = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; t = 0{,}06\, s$$

$$n = 1 \;\rightarrow\; 50\pi t - 2{,}5\pi = \frac{3\pi}{2} \;\rightarrow\; t = 0{,}08\, s$$

$$n = 2 \;\rightarrow\; 50\pi t - 2{,}5\pi = \frac{5\pi}{2} \;\rightarrow\; t = 0{,}10\, s$$

El primer valor indica el primer instante en que el punto situado a 50 cm de la vibra con amplitud máxima (tiempo transcurrido desde el inicio de tiempo, cuando el foco emisor empieza a vibrar). En el segundo instante, 0,02 s después, la partícula vuelve a vibrar con amplitud máxima, aunque en el extremo de vibración opuesto (A = -0,1 m). El tercer instante cierra un ciclo completo pues ha transcurrido 0,04 segundos desde el primer instante, tiempo que corresponde al periodo de vibración.

4. Datos:
- Longitud de la cuerda, L = 16 m
- Puntos de la cuerda a tener en cuenta, a 4 y 6 metros del extremo.
- Se trata de una onda estacionaria cuya ecuación es:

$$y\ (x,t) = \ 0{,}02\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\ x\right)\cos(8\pi\ t)$$

La ecuación general de esta onda es:

$$y\ (x,t) = 2A \cdot \mathrm{sen}\ kx \cdot \cos \omega t$$

Por tanto,

- Amplitud del movimiento ondulatorio que da lugar a la onda estacionaria, A = 0,01 m
- Número de onda, k = π/4 rad/m
- Frecuencia angular, ω = 8π rad/s

a) La velocidad de vibración de los diferentes puntos de la cuerda viene dada por el ritmo de cambio de la posición de los mismos (y) respecto del tiempo, es decir,

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \mathrm{sen}(8\pi t)$$

$$v = -0{,}16\pi \cdot \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \mathrm{sen}(8\pi t)$$

En la ecuación de velocidad podemos sustituir x por 4 ó 6 m y obtener así la velocidad de dichos puntos de la cuerda en función del tiempo. Así,

$$v(4,t) = -0{,}16\pi \cdot \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) \cdot \mathrm{sen}(8\pi t) = 0$$

$$v(6,t) = -0{,}16\pi \cdot \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{4} \cdot 6\right) \cdot \mathrm{sen}(8\pi t) = 0{,}16\pi \cdot \mathrm{sen}(8\pi t)$$

Comentarios
- El punto situado en x = 4 m es un nodo, es decir, no vibra y por eso su velocidad es cero.
- El punto situado en x = 6 m tiene la máxima velocidad de las posibles ya que en este caso

$$\mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{4} \cdot 6\right) = 1$$

que es su valor máximo. Se trata, por tanto, de un vientre.

b) La ecuación de la onda estacionaria corresponde a la ecuación general de un movimiento armónico simple de amplitud (A_r) variable según las siguientes expresiones:

$$A_r = 0{,}02 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}x\right) \qquad\qquad y = A_r \cdot \cos(8\pi t)$$

Los nodos son puntos que no vibran, es decir, puntos donde A_r = 0. Para que esto ocurra

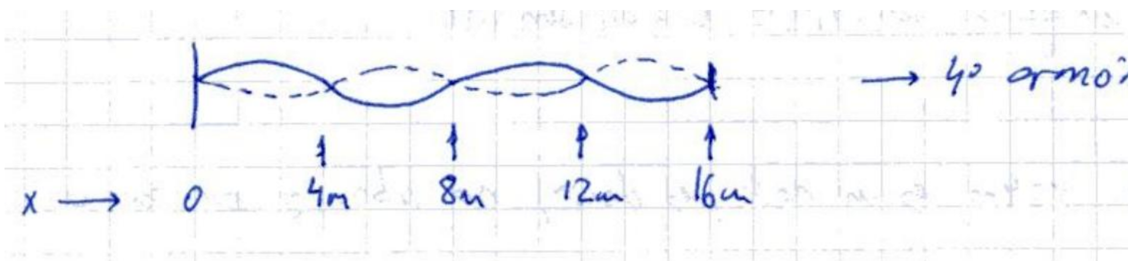
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4}x = 0, \pi, 2\pi, \ldots = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{\pi}{4}x = n\pi \quad \rightarrow \quad x = 4n$$

Si n = 0, x = 0, tenemos el primer nodo situado en el origen de la cuerda. Si n = 1, x = 4 m, tenemos el segundo nodo. Por tanto, la distancia entre el primer nodo y el segundo es de 4 m.
En cuanto al modo de vibración, se nos dice que la cuerda mide 16 m. Si hacemos x igual a este valor en la condición de nodo veremos que,

$$x = 4n \rightarrow \; 16 = 4n \; \rightarrow n = 4 \quad \rightarrow 4^{\underline{o}}\ arm\acute{o}nico$$

Esto se hace así porque la cuerda está sujeta por los dos extremos, es decir, los extremos x = 0 y x = 16 m son nodos.
El cuarto armónico corresponde a una onda estacionaria de 4 vientres y 5 nodos. En el apartado anterior se ha visto que la distancia entre dos nodos es de 4 m. Si la cuerda mide 16 metros y debemos empezar y terminar con un nodo,



5. El sentido en que se propaga una onda de función: 0,001 sen(314t±62,8x) es, debido al signo+, el sentido negativo del eje X.

   El período, frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda se obtienen de dicha función:

   De k = 2p/l =62,8

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{62{,}8} = 0{,}1\,\text{m}.$$

$$\text{De } \omega = \frac{2\pi}{T} = 314 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{314} = 0{,}02 \text{ s.}$$

$$\text{De } \nu = 1/T \quad \Rightarrow \quad \nu = 1/{,}02 = 50 \text{ Hz (hertz).}$$

$$\text{y al ser } v = \lambda / T \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}1/0{,}02 = 5 \text{ ms}^{-1.}$$

El desplazamiento máximo de un segmento cualquiera de la cuerda viene dado por la amplitud de la función Y(x, t). Es decir: A = 0,001 m.

La función de onda de una partícula de la cuerda que se encuentra en el punto x = 0,03 m es:

$$\Psi(0{,}03, t) = \Psi(t) = 0{,}001 \cdot 314 \text{ sen } (314t - 62{,}8 \cdot 0{,}03) = 0{,}001 \text{ sen } (314t - 1{,}89).$$

La ecuación de su velocidad:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0{,}001 \cdot 314 \ \cos\ (314t - 1{,}89) = 0{,}314 \ \cos(314t - 1{,}89).$$

y la de su aceleración:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = -0{,}314 \cdot 314 \text{ sen } (314t - 1{,}89) = -98{,}60 \text{ sen } (314t - 1{,}89).$$

6. La función de onda, en general, viene dada por: y(z, t) = A sen (wt – kz) siendo en este caso:

   w = 2pn = 120p rad×s-1 = 377 rad×s-1

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6{,}28}{10/60} = \frac{60 \cdot 6{,}28}{10} = 37{,}68 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

   A = 0,2 m.

   Sustituyendo estos valores en y(z, t) resulta:

   y(z, t) = 0,2 sen (377t – 37,68z).

7. Considerando la ecuación general de la cuerda:

$$\Psi(x, t) = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

   e identificando términos se obtiene:

$$\text{De } \frac{2\pi}{T} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 1 \text{ s.}$$

8.
9.
$$\text{De } \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}2 \text{ m.}$$

La velocidad de propagación de la onda resulta entonces igual a:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,2}{1} = 0,2 \text{ ms}^{-1}$$

La velocidad con que se mueve una partícula cualquiera de la cuerda es:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 20\pi \cos\left(2\pi t - \frac{\pi x}{0,1}\right)$$

siendo su valor máximo cuando el coseno se haga la unidad. Es decir: 20p ms^{-1}.

En cuanto a la aceleración es:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = -40\pi^2 \operatorname{sen}\left(2\pi t - \frac{\pi x}{0,1}\right)$$

y su valor máximo: 40p2 ms-2

8. La amplitud de la onda resultante de la interferencia viene dada por:

$$\text{Amplitud} = 2A\cos\frac{\varphi}{2} = 2A\cos\frac{\pi}{6} = 2A\sqrt{3}/2 = 2\cdot 10^{-2}\sqrt{3} = 3{,}46\cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

9. La onda resultante es:

$$y = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t$$

La amplitud en un antinodo es la máxima A = 1,20

$$\lambda = v\cdot T = \frac{v}{f} = \frac{3200}{20} = 160 \text{ cm}$$
$$\omega = 2\pi\cdot 20 = 40\pi = 125{,}6 \text{ s}^{-1}$$

y la ecuación de la onda

$$y = 2\cdot 1{,}20 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{160}x \cos 125{,}6t$$

La amplitud es:

$$x = 80 \text{ cm} \quad y_0 = 2\cdot 1{,}20 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{160}\cdot 80 = 2{,}40 \operatorname{sen}\pi = 0 \text{ cm}$$

$$x = 40 \text{ cm} \quad y_0 = 2{,}40 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{160}\cdot 40 = 2{,}40 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2{,}40 \text{ cm}$$

$$x = 20\ \text{cm} \quad y_0 = 2{,}40\ \text{sen}\frac{2\pi}{160}\cdot 20 = 2{,}40\ \text{sen}\frac{\pi}{4} = 2{,}40\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}69\ \text{cm}$$

10. a) Una onda de este tipo resulta de la superposición de dos movimientos ondulatorios:

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx) \qquad y_2 = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

de igual frecuencia, amplitud y vector k, propagándose en sentidos opuestos.

Teniendo en cuenta que la forma general de la ecuación de la onda resultante de la superposición es:

$$y_1 = 2A\ \text{sen}\ kx\ \cos\omega t$$

identificando, resulta:

$$k = \pi / 3\ \text{m}^{-1} \qquad \omega = 40\pi\ \text{s}^{-1}$$

Por otra parte, desarrollando la expresión:

$$y = y_1 + y_2$$

e identificando es:

$$A = 5/2\ \text{m} \qquad \varphi = \pi$$

La velocidad de fase será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{\pi/3} = 120\ \text{ms}^{-1}.$$

b) La distancia entre nodos es:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{2k} = 3\ \text{m}.$$

c) La velocidad de las partículas de la cuerda se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación de la onda. Es decir:

$$\frac{dy}{dt} = 5\ \text{sen}\frac{\pi x}{3}\cos 40\pi t\cdot 40\pi$$

La velocidad de la partícula considerada en el instante t = 9/8 s es entonces:

$$\frac{dy}{dt}_{(x=1{,}5,\ t=9/8)} = 200\pi\ \text{sen}\frac{\pi\cdot 1{,}5}{3}\cos 40\pi\frac{9}{8} = 200\pi\ \text{ms}^{-1}.$$