Ondas

1.1. Movimiento armónico simple.

1.1.1. Concepto de movimiento armónico simple: Su ecuación.

Supongamos un muelle que cuelga verticalmente, y de cuyo extremo libre pende una masa m. Si tiramos de la masa y soltamos a continuación, veremos que la masa, junto con el muelle, experimenta un movimiento de oscilación alrededor de una posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina movimiento vibratorio armónico simple (abreviadamente MAS), y se caracteriza, además del movimiento de oscilación alrededor de una posición de equilibrio anteriormente indicado, por la existencia de una fuerza recuperadora que tiende a devolver el cuerpo a la posición de equilibrio y que depende de la posición de dicho cuerpo y por que tiene lugar *en una dimensión*.

Supongamos el movimiento de una pelota que rebota verticalmente contra el suelo. Este movimiento cumple con alguna de las condiciones del MAS, como es el que se produzca en una dimensión, y que la pelota oscile alrededor de una posición de equilibrio. No obstante, no se cumple la condición de que sobre la pelota actúe una fuerza recuperadora dependiente de la posición: en efecto, la fuerza que actúa sobre la pelota es siempre la misma, mg, es decir su peso.

Para obtener la ecuación del MAS, supondremos una partícula que describa un movimiento circular uniforme de radio A. Consideraremos la proyección de la posición de la partícula, respecto del eje X, como se puede ver en la siguiente figura:

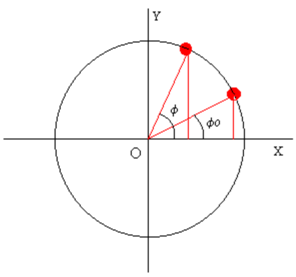


Figura 1.1: Proyección sobre un eje

Si tenemos en cuenta la ecuación del movimiento circular uniforme y suponemos $t_0 = 0$:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad \text{de donde se deduce} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

www.yoquieroaprobar.es

tendremos que las proyecciones de la posición de la partícula sobre los ejes X e Y serán, respectivamente:

$$x = A\,\mathrm{sen}\,\varphi = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$
$$y = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Si tenemos en cuenta que ambos ejes son intercambiables, podemos tomar como ecuación de la proyección de la partícula sobre un eje, cualquiera de las dos anteriores.

La ecuación $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ es representativa de un movimiento de oscilación en una dimensión, entre dos posiciones +A y -A y, como veremos posteriormente, con una aceleración dependiente de la posición.

1.1.2. Parámetros del movimiento armónico simple.

Elongación (x): distancia de la partícula a la posición de equilibrio para un momento dado. Se mide en unidades de longitud.

Amplitud (A): máxima distancia a la posición de equilibrio (máxima elongación). Se mide en unidades de longitud.

Frecuencia (ν): número de oscilaciones que describe la partícula por unidad de tiempo. Se mide en unidades de tiempo^{-1}.

Periodo (T): tiempo necesario para describir una oscilación. Se relaciona con la frecuencia mediante la expresión $\nu = \frac{1}{T}$. Se mide en unidades de tiempo.

Pulsación (ω): Está relacionada con la frecuencia de la forma $\omega = 2\pi\nu$. Se mide en las mismas unidades que la frecuencia.

Fase inicial (φ_0): Magnitud relacionada con la elongación de la partícula en el instante inicial. Así, a partir de la ecuación x = A sen (ωt + φ_0),veremos que para t = 0, tendremos x = A sen φ_0.

1.1.3. Cinemática del movimiento armónico simple.

Si tenemos en cuenta que la velocidad viene dada por la expresión: $v = \frac{dx}{dt}$, veremos que, al aplicarla a la expresión $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, nos dará como resultado:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0))}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Como podemos ver, la velocidad de la partícula es una función periódica del tiempo. Si por otra parte, aplicamos la definición de aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0))}{dt} = -A\,\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Con lo cual, veremos que la aceleración del MAS depende de la posición, tal y como habíamos comentado en el apartado anterior.

En resumen, las ecuaciones que representan la cinemática del MAS son las siguientes:

$$\boxed{\begin{gathered} x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \\ v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \\ a = -A\,\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \end{gathered}}$$

En la siguiente imagen podemos ver los vectores velocidad y aceleración correspondientes a la proyección sobre el eje X de la posición de una partícula que describe un movimiento circular uniforme.

www.yoquieroaprobar.es

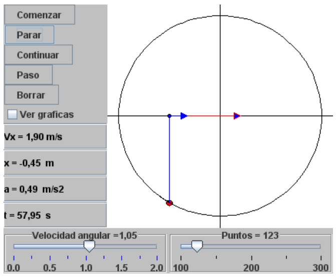


Figura 1.2: Velocidad y aceleración en un MAS

1.1.4. Dinámica del movimiento armónico simple.

1.1.4.1. Oscilaciones de un resorte.

Si sujetamos un muelle del techo y colgamos una masa de su extremo libre, observaremos que se produce un alargamiento, que dependerá directamente del valor de la masa. Al soltarla del muelle, éste tiende a recuperar su longitud inicial, de donde se deduce que al deformar un muelle, aparecerá sobre el mismo una fuerza recuperadora, que será tanto más fuerte cuanto mayor sea la deformación experimentada. La expresión matemática de este comportamiento es:

$$F = -Kx$$

siendo x la deformación experimentada por el resorte y K una constante característica del mismo. Esta expresión matemática se conoce como Ley de Hooke.

Si suponemos un muelle del que cuelga una masa y estiramos de la misma hasta separarla de su posición de equilibrio para , posteriormente, dejar que el sistema oscile libremente, al aplicar el segundo principio de la dinámica, F = ma, teniendo en cuenta que el sistema experimentará un MAS, tendremos:

$$F = ma = -Kx$$

Por otra parte, la aceleración se define como la derivada de la velocidad respecto al tiempo, o la segunda derivada de la posición respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{con lo cual} \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

lo que constituye la ecuación diferencial del movimiento para un muelle. Esta ecuación tiene como soluciones $x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_o)$o bien $x = A\,cos\,(\omega t + \varphi_0)$. Si tomamos la primera expresión y derivamos dos veces con respecto al tiempo, tendremos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

con lo que, al sustituir en la ecuación diferencial:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = -m\,A\,\omega^2\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) + K\,A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = 0$$

De la igualdad anterior se deduce que:

$$-m\omega^2 + K = 0 \quad \text{de donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

www.yoquieroaprobar.es

El periodo de oscilación del resorte se obtendrá de la igualdad $\omega = 2\pi/T$. De la misma forma, podemos obtener la frecuencia despejando de la igualdad $\omega = 2\pi\nu$. Al despejar T, nos queda:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

mientras que la frecuencia tendrá la expresión:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

1.1.4.2. Oscilaciones de un péndulo.

Un péndulo que oscila alrededor de una posición de equilibrio puede considerarse, como aproximación, que describe un MAS, a condición de que las oscilaciones sean de pequeña amplitud (el ángulo de separación del hilo del péndulo respecto a la vertical debe ser pequeño). En estas condiciones, y teniendo en cuenta el siguiente diagrama de fuerzas:

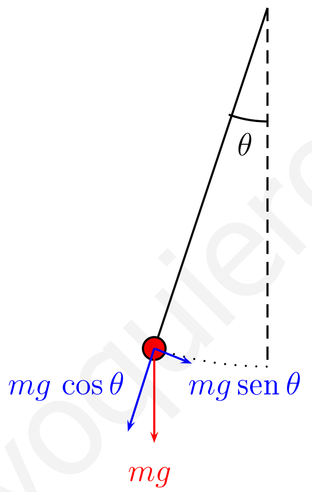


Figura 1.3: Diagrama de fuerzas para un péndulo simple

considerando además que $mg\,\mathrm{sen}\theta$ es una fuerza recuperadora, es decir, tiende a devolver la masa del péndulo a su posición de equilibrio, podemos plantear la siguiente ecuación para el movimiento del péndulo:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

Si tenemos en cuenta que las oscilaciones son pequeñas, podremos utilizar la aproximación $\mathrm{sen}\ \theta \simeq \theta$, con lo cual, tendremos:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\theta = 0$$

Considerando además que $\theta = x/L$, donde L es la longitud del péndulo y x el arco descrito por la masa (para oscilaciones pequeñas, el arco puede considerarse como un segmento), podemos poner:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + mg\,\frac{x}{L} = 0$$

La soluciones a esta ecuación diferencial son del mismo tipo que las consideradas en el caso de un resorte. Por semejanza con la anterior deducción, podremos escribir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

De donde pueden deducirse las expresiones para el periodo y la frecuencia de oscilación del péndulo:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

1.1.5. Energía del movimiento armónico simple.

La energía mecánica de un oscilador es la suma de sus energía cinética y potencial. Será necesario, en primer lugar, obtener la expresión de la energía potencial para dicho oscilador. Para ello, sabiendo que la fuerza recuperadora para un resorte que experimenta una deformación,x, es F = -kx, por aplicación de la ley de Hooke, y teniendo en cuenta que el trabajo viene dado por

$$W = \int_0^x -kx dx = 0 - \frac{kx^2}{2} = U_0 - U$$

Al ser conservativa la fuerza recuperadora, el trabajo realizado por dicha fuerza es igual al incremento negativo de la energía potencial. Comparando esta expresión con la obtenida anteriormente, podremos concluir que la energía potencial de un resorte que se ha deformado una longitud x es U= -$\frac{kx^2}{2}$.

La suma de las energías cinética y potencial para un oscilador será, pues:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kx^2}{2}$$

Si sustituimos los valores de x y de v por los obtenidos con anterioridad, $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$, tendremos:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{kA^2\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$$

Si, por otra parte, consideramos que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, al sustituir nos quedará:

$$E = \frac{1}{2}\,kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{kA^2\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{1}{2}\,kA^2\left[\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0) + \cos{}^2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

Si tenemos en cuenta la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, nos quedará:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\,kA^2}$$

www.yoquieroaprobar.es

Basándonos en esta expresión, podremos obtener fácilmente la energía cinética de un oscilador, sin más que tener en cuenta que la suma de energía cinética y potencial es igual a la expresión anterior, por lo que, despejando:

$$E_c = E - U = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

En la siguiente imagen, podemos ver la captura de pantalla de una simulación en que se representa la oscilación de un resorte y la representación gráfica de sus energías cinética y potencial.

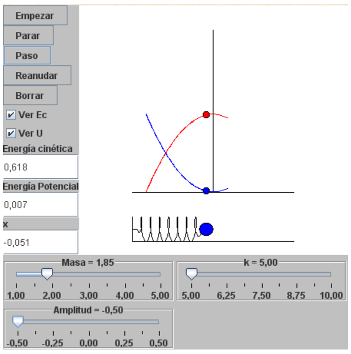


Figura 1.4: Energías cinética y potencial

1.2. Movimiento ondulatorio

1.2.1. Concepto de onda: Parámetros de una onda.

Supongamos una piedra que cae sobre la superficie de un estanque. La perturbación que se produce en el punto de caída de la piedra se transmite a lo largo de la superficie del estanque en forma de circunferencias concéntricas. Si existe un objeto flotando en dicha superficie, veremos que no se desplaza a derecha o izquierda, sino que efectúa un movimiento vertical de oscilación, es decir, un MAS. La propagación de esta perturbación transmite energía y cantidad de movimiento, pero no materia, de un punto a otro. Diremos entonces que la propagación de una perturbación a lo largo de un determinado medio constituye una onda.

Cada una de las circunferencias concéntricas del ejemplo constituye un frente de onda, es decir, el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran en un mismo estado de vibración.

Los parámetros que caracterizan la onda son los siguientes:

- Amplitud: es la máxima elongación para cualquiera de las partículas del medio.
- Longitud de onda (λ): Es la distancia que ha recorrido la onda en un tiempo igual al período.
- Frecuencia (ν): Es el número de oscilaciones que describe una partícula en un tiempo de un segundo.
- Período (T): Es el tiempo necesario para que una partícula del medio describa una oscilación completa.

www.yoquieroaprobar.es

1.2.2. Clasificación de las ondas.

1. Las ondas pueden ser clasificadas atendiendo a diversos criterios que a continuación enumeramos:

- En función de la necesidad o no de un medio material para su propagación: a) Mecánicas: necesitan de un medio material para su propagación. b) Electromagnéticas: no precisan de un medio material para su propagación.
- En función del movimiento de las partículas del medio: a) Longitudinales: Las partículas oscilan en la dirección de propagación de la onda. b) Transversales: Las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.
- En función del número de dimensiones en que se propaga la onda: a) Unidimensionales. b) Bidimensionales. c) Tridimensionales.
- En función de la ecuación que representa al movimiento ondulatorio: a) Armónicas: la elongación viene dada en función de la posición y el tiempo por una función seno o coseno. b) No armónicas: la elongación no viene expresada por una función seno o coseno (aunque una onda no armónica puede considerarse como una superposición de ondas armónicas, utilizando la síntesis de Fourier)

1.2.3. Ecuación de las ondas armónicas.

Tal y como hemos visto anteriormente, todo punto de un medio por el que se propaga una onda, está sometido a un MAS, cuya ecuación es $y = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, suponiendo que la onda se propaga a lo largo del eje X, mientras que la vibración se produce a lo largo del eje Y. Si suponemos que la perturbación se propaga de izquierda a derecha con una velocidad v, dicha perturbación tardará un tiempo t_1 en alcanzar un punto distante x unidades de longitud, con lo que, el estado de vibración de ese punto podrá ser representado por:

$$y = A\,\mathrm{sen}\left[\omega(t - t_1) + \varphi_0)\right]$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de la onda es constante, podremos poner que $t_1 = x/v$, por lo cual, la anterior ecuación podrá escribirse como:

$$y = A\,\mathrm{sen}\,\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0)\right] = A\,\mathrm{sen}\,\left[\omega t - \frac{2\pi x}{vT} + \varphi_0\right]$$

ya que la pulsación, $\omega = 2\pi/T$. Si tenemos en cuenta que el espacio recorrido por la onda en un tiempo igual al periodo, T, es la longitud de onda, λ, podremos poner la ecuación anterior en la forma:

$$\boxed{y = A\,\mathrm{sen}\,\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right] = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

Hay que distinguir entre la velocidad de propagación, v, y la velocidad de vibración. Esta última se obtendrá derivando y con respecto al tiempo, quedando entonces:

$$v_v = \frac{dy}{dt} = A\,\omega\cos\,(\omega t - kx + \varphi_0)$$

www.yoquieroaprobar.es

De la misma forma, podremos obtener la aceleración de un punto, derivando su velocidad de vibración con respecto al tiempo, obteniendo la expresión:

$$a_v = \frac{dv_v}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\,\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Si por otra parte, derivamos dos veces y *con respecto a x*, tendremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\,k^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

con lo que podremos poner, teniendo en cuenta que $k = \omega/v$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

1.2.4. Energía e intensidad de una onda.

Como hemos mencionado anteriormente, un punto de un medio material sometido a una perturbación, se moverá con un MAS. Si tenemos en cuenta la energía de dicho movimiento, $E = 1/2\,KA^2$, y que $K = m\omega^2$,podremos poner:

$$E = \frac{1}{2}\,KA^2 = \frac{1}{2}\,m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,m \cdot 4\pi^2\nu^2 A^2$$

Supondremos que esta energía se emite en forma de ondas esféricas. Si no se produce pérdida de energía, (por ejemplo, por rozamiento), la energía contenida por las partículas de dos superficies esférica de radios respectivos r_1 y r_2 y espesor dr, serán:

$$E_1 = 2m_1\pi^2\nu^2 A_1^2 \quad \text{y} \quad E_2 = 2m_2\pi^2\nu^2 A_2^2$$

Al conservarse la energía, $E_1 = E_2$, con lo que podremos poner $m_1 A_1^2 = m_2 A_2^2$. Si, por otra parte, tenemos en cuenta la expresión $m = V \cdot \sigma$, donde V es el volumen y σ, la densidad, podremos poner:

$$4\,\pi r_1^2 dr \cdot \sigma \cdot A_1^2 = 4\,\pi r_2^2 dr \cdot \sigma \cdot A_2^2$$

de donde se deduce que:

$$r_1^2 A_1^2 = r_2^2 A_2^2 \text{ o bien } A \cdot r = C$$

siendo C una constante. Al ser constante el producto de la amplitud por el radio, veremos que la amplitud disminuye de forma inversamente proporcional al valor del mismo, es decir:

$$\boxed{A = \frac{C}{r}}$$

Definimos intensidad de una onda como la energía emitida por unidad de tiempo y unidad de área, es decir:

$$I = \frac{dE}{S \cdot dt} = \frac{P}{S}$$

www.yoquieroaprobar.es

ya que la energía por unidad de tiempo es la potencia, P. Si, al igual que anteriormente, suponemos frentes de onda esféricos, podremos poner:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

Al dividir I_1 entre I_2,nos quedará:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \text{ o, lo que es igual } I \cdot r^2 = C$$

siendo C una constante. De esta forma, podemos escribir:

$$\boxed{I = \frac{C}{r^2}}$$

1.2.5. Absorción de una onda.

La variación de la intensidad de una onda con la distancia es un fenómeno que se produce aunque no haya pérdida de energía, y se debe a razones geométricas. No obstante, si se produce una pérdida de energía, la intensidad de la onda disminuye en mayor medida de la que lo haría sin que se produjera dicha pérdida. A este fenómeno se le denomina *absorción*, y conviene no confundirlo con la disminución de intensidad por razones puramente geométricas, proceso que se conoce con el nombre de *atenuación*.

La disminución de la intensidad, -dI, depende de la intensidad en cada momento, I, del espesor del medio material que se atraviese, dx, y de un coeficiente α, característico del medio, denominado coeficiente de absorción. De esta forma, podremos poner:

$$-dI = I\alpha dx$$

Separando variables e integrando, nos quedará:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^x -\alpha\, dx \Rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\alpha\, x$$

con lo que finalmente, obtendremos:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\alpha x}}$$

1.2.6. Principio de superposición e interferencias.

Supongamos dos ondas de la misma amplitud, A, y frecuencia, ν, que se propagan a lo largo de un medio material, como puede ser una cuerda. Las ecuaciones que describen a los dos movimientos ondulatorios son las siguientes:

$$y_1 = A\,\text{sen}(\omega t - Kx_1)$$

$$y_2 = A\,\text{sen}(\omega t - Kx_2)$$

Siendo y_1 e y_2 las elongaciones de un punto situado a unas distancias x_1 y x_2 de los respectivos orígenes de las ondas. Cuando ambas perturbaciones coincidan en un punto,

www.yoquieroaprobar.es

se producirá el fenómeno de la *interferencia*, y la elongación resultante será la suma de y_1 e y_2 , lo que constituye el **Principio de Superposición**, que podemos enunciar así:

> *"Cuando dos perturbaciones coinciden en un punto, la elongación resultante en dicho punto será la suma de las elongaciones que produciría, individualmente, cada una de las perturbaciones."*

De esta forma, la elongación resultante sería:

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\text{sen}(\omega t - Kx_1) + \text{sen}(\omega t - Kx_2)]$$

donde, como puede verse, hemos sacado la amplitud A como factor común. Si tenemos en cuenta la igualdad trigonométrica:

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{ sen } \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

sustituyendo sen $(\omega t - Kx_1)$ por a y sen $(\omega t - Kx_1)$ por b, tendremos, finalmente:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \text{ sen } \left(\omega t + K\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cos K \, \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Si ponemos esta ecuación de la forma:

$$y = 2A \cos K \, \frac{x_2 - x_1}{2} \text{ sen } \left(\omega t + K\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = A_r \text{ sen } \left(\omega t + K\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Siendo:

$$\boxed{A_r = 2A \cos K \, \frac{x_2 - x_1}{2}}$$

Veamos ahora las consecuencias de la aplicación de este principio. La amplitud resultante de la interferencia de las dos ondas dependerá de la diferencia de caminos seguidos por ambas, x_2- x_1. Dado que el término:

$$\cos K\frac{x_2 - x_1}{2}$$

tendrá valores comprendidos entre 0 y 1 (valor absoluto), veremos que la amplitud resultante variará entre 0 (interferencia destructiva) y 2 A (interferencia constructiva). Veamos ahora para que valores de x_2- x_1 se darán estas condiciones.

Interferencia destructiva: Al cumplirse que $\cos K \, \frac{x_2 - x_1}{2} = 0$, y, sustituyendo el valor de K por $\frac{2\pi}{\lambda}$, tendremos:

$$\cos \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{2\lambda} = 0$$

lo que sucede para ángulos que sean múltiplos enteros de π radianes. Por tanto:

$$\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = n\pi$$

por lo que, despejando la diferencia de caminos, tendremos:

$$x_2 - x_1 = n\lambda = 2n\,\frac{\lambda}{2}$$

es decir, se producirá interferencia destructiva cuando la diferencia de caminos seguidos por las dos ondas sea un número par de semilongitudes de onda.

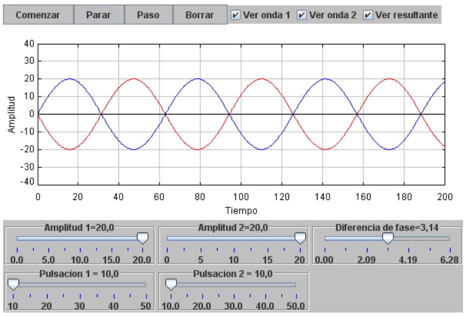


Figura 1.5: Interferencia destructiva

Podemos ver en la anterior imagen, el resultado de la interferencia de dos ondas con una diferencia de caminos de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Las ondas que interfieren (mostradas en rojo y en azul), dan lugar a la anulación (línea negra).

Interferencia constructiva: En este caso, la amplitud resultante valdrá 2 A, por lo que podremos poner:

$$\cos\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{2\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$$

con lo cual nos quedará:

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}$$

o, lo que es lo mismo, se producirá interferencia constructiva cuando la diferencia de caminos sea un número impar de semilongitudes de onda.

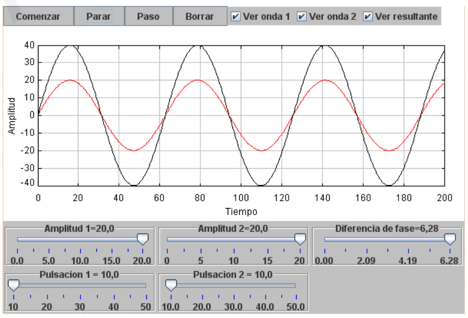


Figura 1.6: Interferencia constructiva

En este caso, las ondas que interfieren están superpuestas, al tener la misma amplitud y frecuencia, por lo que no se puede apreciar la representación de la onda en azul. Al ser cero la diferencia de caminos, la amplitud resultante será 2 A.

Como es lógico, entre estas dos situaciones extremas de interferencia, se pueden dar todos los valores intermedios, con lo que la amplitud resultante cumplirá: $0 \leq A_r \leq 2A$.

www.yoquieroaprobar.es

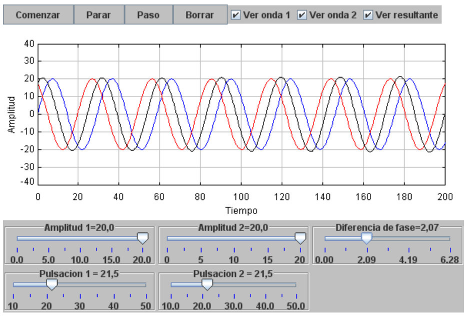


Figura 1.7: Amplitud resultante comprendida entre 0 y 2 A

Otra forma de plantear el fenómeno de las interferencias es, en lugar de explicarlas mediante la diferencia de caminos, hacerlo mediante la diferencia de fases. La ecuación de las dos ondas puede ponerse de la siguiente forma:

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(\omega t - Kx)$$
$$y_2 = A\,\mathrm{sen}(\omega t - Kx + \varphi)$$

siendo φ la diferencia de fase entre las dos ondas. Si aplicamos la igualdad trigonométrica vista anteriormente, tendremos que:

$$y = y_1 + y_2 = A\ [\mathrm{sen}\ (\omega t - K\ x) + \mathrm{sen}\ (\omega t - Kx + \varphi)] = 2\ A\ \mathrm{sen}\left(\omega t - Kx + \frac{\varphi}{2}\right)\ \cos\frac{\varphi}{2}$$

Al igual que anteriormente, llamaremos amplitud resultante a:

$$A_r = 2A\cos\frac{\varphi}{2}$$

y, mediante un tratamiento semejante, podemos poner:

Interferencia destructiva: $\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ y $\varphi = (2n+1)\pi$. De esta forma, podemos afirmar que se producirá interferencia destructiva cuando la diferencia de fase entre ambas ondas sea un número impar que multiplica a π.

Interferencia constructiva: $\cos\frac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = n\pi$ y $\varphi = 2n\pi$, es decir, se producirá interferencia constructiva cuando la diferencia de fase sea un número par que multiplique a π.

1.2.6.1. Interferencia de ondas de distinta amplitud e igual frecuencia.

En el caso de las ondas de distinta amplitud e igual frecuencia, podemos calcular la amplitud de la onda resultante por un método vectorial. Si las ecuaciones de ambas ondas son, $y_1 = A_1 sen(\omega t - kx)$ e $y_2 = A_2 sen(\omega t - kx + \varphi)$, representaremos las amplitudes de ambas por dos vectores de amplitudes respectivas A_1 y A_2, formando un ángulo de φ radianes entre sí, tal y como indica la siguiente representación gráfica:

Supondremos que los dos vectores giran alrededor del origen con la misma velocidad angular, ω, que corresponde a la pulsación, que es la misma para ambas ondas. De esta forma, la diferencia de fase entre las dos ondas será a su vez el ángulo formado entre los vectores A_1 y A_2, por lo que la amplitud resultante se podrá obtener aplicando el teorema del coseno:

$$A_r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi}$$

www.yoquieroaprobar.es

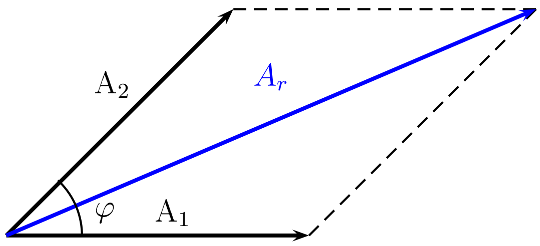


Figura 1.8: Método vectorial para hallar la amplitud resultante

De esta forma, podemos afirmar que la onda resultante tendrá por ecuación:

$$\boxed{y = A_r \text{sen}(\omega t - kx + \varphi_1)}$$

donde φ_1 se podrá obtener de las siguientes igualdades:

$$A_r \cos\varphi_1 = A_1 + A_2 \cos\varphi \quad \text{y} \quad A_r \,\text{sen}\varphi_1 = A_2 \,\text{sen}\varphi$$

Dividiendo la segunda igualdad entre la primera, obtendremos:

$$\boxed{\text{tg}\varphi_1 = \frac{A_2 \,\text{sen}\varphi}{A_1 + A_2 \cos\varphi}}$$

En la siguiente imagen podemos ver una aplicación de lo explicado anteriormente. En la simulación hacemos interferir dos ondas de diferente amplitud e igual frecuencia, observándose que la onda resultante es sinusoidal, con una amplitud A_r.

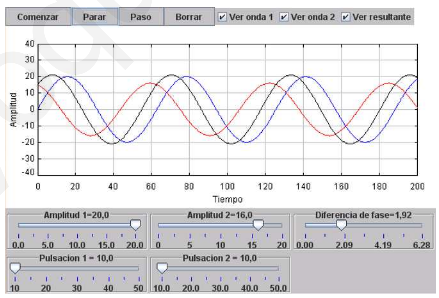


Figura 1.9: Interferencia de ondas de distinta amplitud e igual frecuencia

Las ondas representadas en colores azul y rojo son las que interfieren, mientras que la representada en color negro es la resultante. Nótese que la onda resultante posee la misma frecuencia que la de cada una de las anteriores.

1.2.7. Naturaleza y propiedades del sonido.

La característica de cualquier sonido es que se forma a partir de la vibración de un objeto: así, al pulsar una cuerda de guitarra, se produce una vibración que, transmitida al aire, da lugar a un sonido. Si se oprime la cuerda, al cesar la vibración de la misma, cesa también el sonido.

www.yoquieroaprobar.es

Si producimos un sonido dentro de un recipiente en el que pueda hacerse el vacío, observaremos que el sonido es audible mientras en el interior del recipiente hay aire. Al extraerlo, el sonido desaparece. Esto demuestra que el sonido necesita de un medio material para propagarse, es decir, se trata de una onda mecánica.

Si consideramos la propagación del sonido, veremos que la vibración de un objeto produce una compresión en el aire que lo rodea, compresión que se va propagando a las capas de aire inmediatas. El resultado es que el aire (o el medio material que consideremos) está sometido a compresiones y enrarecimientos periódicos, que constituyen la onda sonora. Esta onda es longitudinal, es decir, la dirección de propagación es paralela a la de vibración de las partículas del medio.

La velocidad de propagación del sonido en un gas depende de su temperatura, su masa molecular y su coeficiente de dilatación adiabática. La expresión matemática de dicha velocidad es:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}}$$

donde γ es el coeficiente de dilatación adiabática antes mencionado, R es la constante de los gases y T la temperatura absoluta. En el caso de los sólidos, la velocidad viene dada por:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$$

donde Y es el módulo de Young del sólido, que se relaciona con su elasticidad, y ρ la densidad de dicho sólido.

Por último, en el caso de los líquidos, la velocidad es:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$$

siendo K el módulo de compresibilidad y ρ la densidad.

El sonido, al igual que otras ondas, puede experimentar fenómenos de reflexión, difracción, interferencias, pero no la polarización, característica de las ondas transversales.

En lo que se refiere a las cualidades del sonido, podemos enumerar las siguientes:

- Intensidad: relacionada con la potencia emitida y también con la amplitud. Un sonido fuerte posee una elevada intensidad, mientras que uno débil tiene baja intensidad.

- Tono: relacionado con la frecuencia. Un sonido es agudo cuando su frecuencia es elevada, mientras que es grave si su frecuencia es baja.

- Timbre: relacionado con los armónicos que acompañan a la frecuencia fundamental. De esta forma, podemos distinguir la misma nota musical producida por dos instrumentos diferentes.

www.yoquieroaprobar.es

1.2.7.1. Intensidad y nivel de intensidad.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la intensidad de una onda - en el caso que nos ocupa, el sonido - se define como la energía por unidad de área y unidad de tiempo, o, lo que es igual, la potencia emitida por unidad de tiempo.

Se define *intensidad umbral* de un sonido como la mínima intensidad que puede ser percibida por el oído humano. Dicha intensidad tiene un valor $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$.

El nivel de intensidad sirve para comparar la intensidad de un sonido con el valor de la intensidad umbral, que acabamos de definir. La expresión matemática del nivel de intensidad es la siguiente:

$$\boxed{\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

siendo β el nivel de intensidad, I, la intensidad del sonido e I_0, la intensidad umbral. El nivel de intensidad se mide en decibelios.

1.2.8. Ondas estacionarias.

Un caso particular de interferencia es el que se produce entre una onda incidente y la onda reflejada. Supongamos una onda armónica que se propaga a través de un medio material, como puede ser una cuerda. La ecuación de la onda es la siguiente:

$$y = A \text{ sen}(\omega t - kx)$$

Si esta onda llega a un extremo fijo de la cuerda, se reflejará, siendo la ecuación de la onda reflejada:

$$y = -A \text{ sen}(\omega t + kx)$$

Esta onda interferirá con la primera, obteniéndose, por aplicación del principio de superposición, la siguiente ecuación:

$$y = 2A \cos \omega t \text{ sen } kx$$

lo que constituye la ecuación de una onda estacionaria. Esta ecuación puede también ponerse de la forma $y = A_r \,\text{sen}\, kx$, donde $A_r = 2A\, cos\, \omega t$.

La onda estacionaria se caracteriza porque existen puntos del medio en los que la amplitud de vibración es nula (nodos) y otros en los que la amplitud de vibración es máxima (antinodos o vientres). Este tipo de ondas se produce en cuerdas vibrantes con uno o los dos extremos fijos, y en tubos abiertos por uno o por los dos extremos.

La determinación de la posición de los nodos y antinodos se hará a partir de las siguientes igualdades:

$$2A\,\text{sen} kx = 0 \qquad \text{condición de nodo}$$

$$2A\,\text{sen} kx = 2A \qquad \text{condición de antinodo}$$

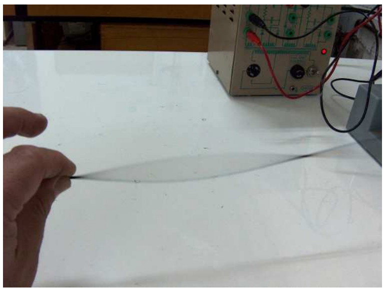
Si la cuerda, de longitud L, tiene los dos extremos fijos, se cumplirá que, para x = L, tendremos un nodo, es decir:

$$2A \text{ sen } kL = 0 \quad \text{ por lo cual } \quad \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi$$

despejando la longitud de onda de la igualdad anterior, obtendremos:

$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

Es decir, la longitud de onda fundamental y los armónicos se obtendrán dividiendo el doble de la longitud de la cuerda por un número natural. El número de nodos estará relacionado con n por la expresión: nº nodos = n+1.



(a) Onda estacionaria en una cuerda

(b) Onda estacionaria en un muelle

Figura 1.10: Nodos y antinodos

Si suponemos una cuerda con un extremo libre, este punto tendrá una máxima amplitud, es decir, tendrá la condición de antinodo. Si la longitud de la cuerda es L, podremos poner:

$$2A\, \mathrm{sen} kL = 2A$$

por lo que:

$$\mathrm{sen}\ kL = \mathrm{sen}\frac{2\pi\ L}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi\ L}{\lambda} = (2n+1)\ \frac{\pi}{2}$$

con lo que, al despejar, obtenemos la longitud de onda en función del número impar 2 n + 1. Al igual que en el caso de la cuerda con los dos extremos fijos, el número de nodos vendrá dado por n + 1.

$$\boxed{\lambda = \frac{4L}{2n+1}}$$

es decir, las longitudes de onda vienen dadas por el cociente de cuatro veces la longitud de la cuerda entre un número impar (1, 3, 5...), es decir, aparecen los armónicos impares.

La frecuencia de la onda estacionaria se obtendrá mediante la relación:

$$\nu = \frac{v}{\lambda}$$

www.yoquieroaprobar.es

por lo que, en el caso de una cuerda con un extremo libre, tendremos:

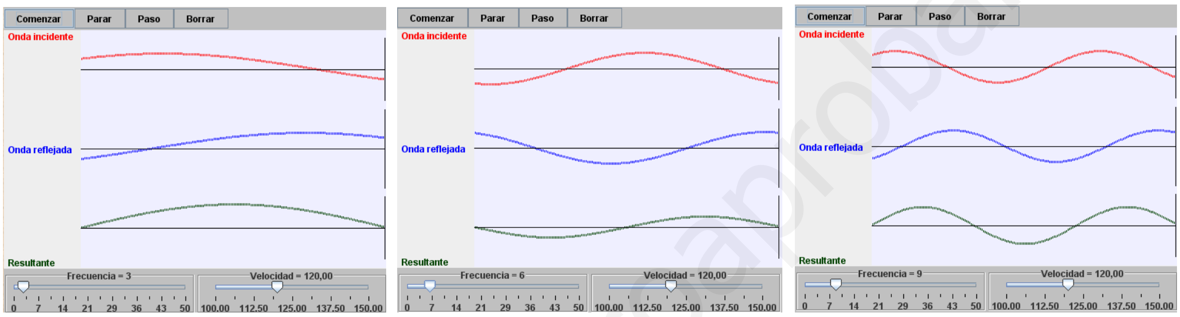
$$\nu = \frac{(2n+1)v}{4L}$$

mientras que para una cuerda con los dos extremos fijos, tendremos:

$$\nu = \frac{nv}{2L}$$

Como consecuencia de lo anterior, veremos que las frecuencias a las que se producen ondas estacionarias son, para una cuerda fija por ambos extremos, múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$\nu_0 = \frac{v}{2L}$$



(a) Frecuencia 3 Hz. Dos nodos (b) Frecuencia 6 Hz. Tres nodos (c) Frecuencia 9 Hz. Cuatro nodos

Figura 1.11: Ondas estacionarias

Como puede verse, la frecuencia depende de la velocidad de la onda, siendo dicha velocidad función de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal, de la forma:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

siendo T, la tensión y σ, la densidad lineal de la cuerda.

1.3. El efecto Doppler.

Consideremos una fuente sonora que emite una frecuencia ν y que se desplaza respecto a un observador en reposo. Al pasar por delante del observador (momento en que la fuente sonora pasa de acercarse a alejarse respecto del observador), éste percibirá un cambio en la frecuencia del sonido, pasando éste de un tono más agudo a uno más grave. De la misma forma, si es el observador el que se dirige a la fuente, supuesta ésta en reposo, apreciará una disminución de la frecuencia cuando pase por delante de la fuente (el observador pasa, en ese momento, de acercarse a alejarse con respecto a la fuente).

Analicemos en primer lugar el caso de una fuente móvil y un observador en reposo. Como se puede ver en la siguiente representación gráfica, la longitud de onda disminuye cuando la fuente se acerca al observador, y aumenta si aquella se aleja de éste.

www.yoquieroaprobar.es

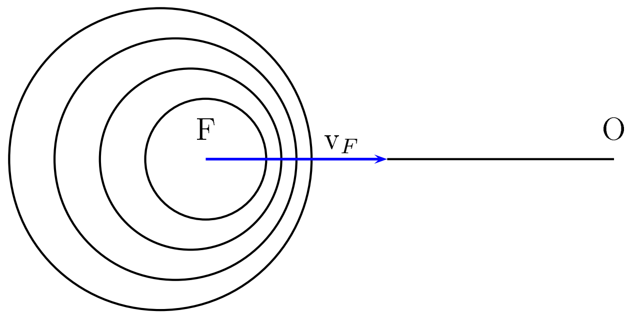


Figura 1.12: Fuente móvil y observador en reposo

Llamaremos v_F a la velocidad de la fuente y v a la velocidad de la onda. Si para t = 0 se emite el primer frente de ondas, cuando haya transcurrido un tiempo igual al periodo, T, se emitirá el segundo frente de ondas. El primero de ellos habrá recorrido una distancia vT, mientras que la fuente habrá recorrido una distancia $v_F t$. La separación entre ambos frentes de ondas, que corresponde a la longitud de onda percibida por el observador, será $\lambda_F = vT - v_F T$. La frecuencia percibida por el observador será entonces:

$$\nu_o = \frac{v}{\lambda_F} = \frac{v}{vT - v_F T} = \frac{v}{(v - v_F)T} = \nu_F \frac{v}{v - v_F}$$

Si dividimos numerador y denominador por v, tendremos:

$$\nu_o = \frac{\nu_F}{1 - \frac{v_F}{v}}$$

Como puede verse, la frecuencia percibida por el observador será mayor que la emitida por la fuente cuando ésta se acerque a aquel. Si la fuente se aleja del observador, la expresión quedará así:

$$\nu_o = \frac{\nu_F}{1 + \frac{v_F}{v}}$$

de forma que, como expresión general, podremos poner la siguiente:

$$\boxed{\nu_o = \frac{\nu_F}{1 \mp \frac{v_F}{v}}}$$

Veamos ahora el caso de una fuente en reposo y un observador móvil con velocidad v_o. Como podemos ver en el la representación gráfica, la longitud de onda percibida por el observador no varía con respecto a la de la fuente, aunque podemos considerar que la velocidad de propagación de la onda es $v + v_o$, por lo que:

$$\nu_o = \frac{v + v_o}{\lambda} \quad \text{y} \quad \nu_F = \frac{v}{\lambda}$$

por lo que dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{\nu_o}{\nu_F} = \frac{v + v_o}{v} \quad \text{por lo que} \quad \nu_o = \nu_F \left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

Como es lógico, si el observador se aleja de la fuente, la velocidad de la onda respecto al observador será v - v_o, con lo que la frecuencia percibida por el observador será:

$$\nu_o = \nu_F \left(1 - \frac{v_o}{v}\right)$$

con lo que la expresión general queda de la forma:

$$\boxed{\nu_o = \nu_F \left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)}$$

www.yoquieroaprobar.es