INTERACCIÓN GRAVITATORIA

TEMA 2.

2º Bachillerato. Física

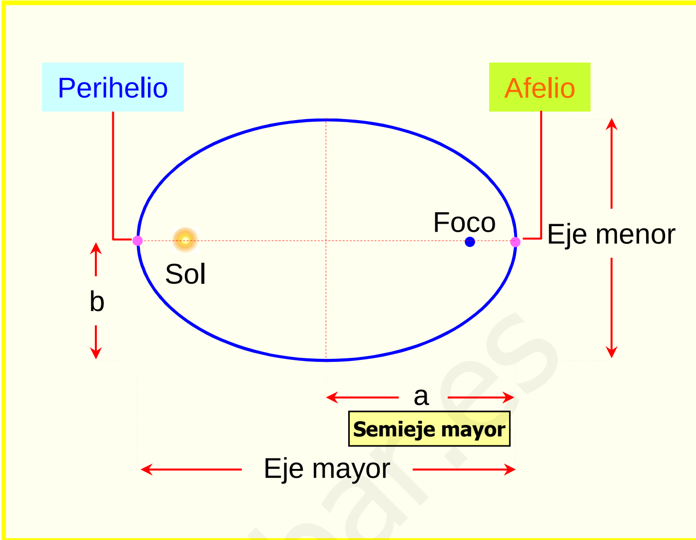
ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. LAS LEYES DE KEPLER.**
- **2. NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.**
- **3. CAMPO GRAVITATORIO.**
- **4. ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO.**
- **5. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS.**

1 LAS LEYES DE KEPLER

Las leyes de Kepler. Primera ley

- Tras cuatro años de observaciones sobre Marte, llegó a la conclusión de que los datos colocaban las órbitas ocho minutos de arco fuera del esquema circular de Copérnico
- Comprobó que este hecho se repetía para todos los planetas
- Descubrió que la elipse era la curva que podía definir el movimiento planetario
- La posición del extremo del semieje mayor más alejada del Sol se llama afelio
- La posición más cercana, es el perihelio



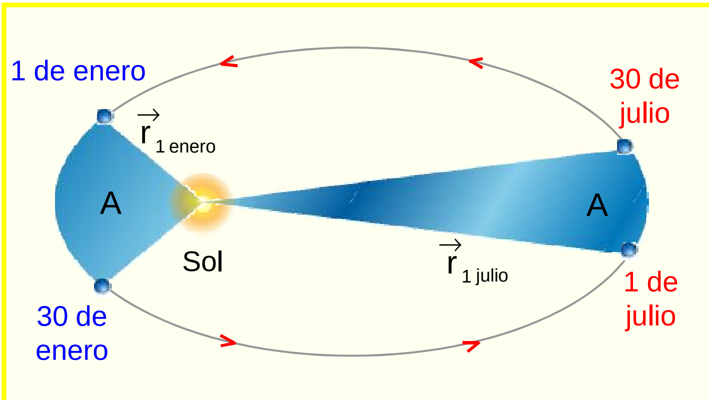
Primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, estando situado este, en uno de sus focos

1 LAS LEYES DE KEPLER (II)

Segunda ley de Kepler

- Kepler observó que la velocidad de los planetas dependía de su posición en la órbita

Segunda ley: La recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



- El módulo del producto vectorial de 2 vectores es el área del paralelogramo que forman.

Para un triángulo: $dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \vec{v}\right| dt$

Fuerza central → $M = F \wedge r = F \cdot r \cdot \text{sen}\ 0 = 0$

- Como en el sistema podemos considerar que no hay fuerzas externas, entonces $\vec{M} = 0$ y por tanto $\vec{L}$ = cte . A partir de aquí se deduce que la velocidad areolar también es constante ya que es:

$dL/dt = r \wedge m\, dv/dt = r \wedge ma = r \wedge F = M \rightarrow M = dL/dt$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\ \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{L}\right|}{m} = cte$$

siendo dA/dt la velocidad areolar

$$\mathbf{L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\theta = cte \rightarrow r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p}$$

1 LAS LEYES DE KEPLER (III)

Tercera ley de Kepler

- Sirvió como base de la ley de Newton de la gravitación universal, y permitió calcular la masa de los planetas
- Cada planeta, parecía tener su órbita propia y su velocidad independiente del resto. Buscó la regla y encontró la solución en las medidas de Tycho Brahe
- Esta ley muestra la relación entre los tamaños de las órbitas y el tiempo empleado por los planetas en recorrerlas

Tercera ley: El cuadrado de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol (T) es proporcional a los cubos de los semiejes mayores, o radios medios, de sus órbitas (a), $T^2 = Ka^3$ siendo K una constante igual para todos los planetas

- Como el sistema solar es un sistema aislado de fuerzas, $\sum \vec{M} = 0$, por tanto se conserva el momento angular $\vec{L} = cte$
- La conservación de la dirección y el sentido obliga a que los planetas siempre giren en el mismo sentido y en órbitas planas (L = cte → r y v siempre perpendiculares)
- La conservación del módulo justifica la ley de las áreas

Como k es igual para todos los planetas, La relación entre los periodos de dos planetas es:

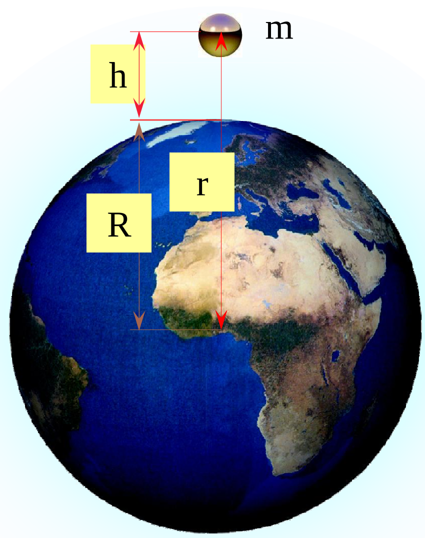
$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

Newton y la gravitación universal

- La atracción de la esfera actúa como si toda su masa estuviese concentrada en el centro
- Si **M** es la masa de la Tierra y **R** su radio, la fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa **m** situado a una altura **h** sobre su superficie responde a la ley de Newton:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$



- A partir de esta ley, Newton pudo explicar fenómenos tales como:
  - las protuberancias de la Tierra y de Júpiter a causa de su rotación
  - el origen de las mareas
  - las trayectorias de los planetas
  - la variación de la gravedad con la altura
  - el cambio en el eje de rotación de la Tierra, etc

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL (II)

Aplicaciones de la ley de la gravitación

- H. Cavendish verificó experimentalmente el valor de la constante G, y a partir de su valor, se puede deducir la tercera ley de Kepler de la gravitación universal de Newton
- En el sistema formado por un planeta en su giro en torno al Sol, la única fuerza que mantiene a los planetas en su órbita es la fuerza centrípeta

$$F_N = F_C \Rightarrow \boxed{G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}} \Rightarrow \text{Despejando } v \text{ resulta: } \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}} \quad (1)$$

que es la velocidad de un planeta o satélite girando en una órbita de radio r alrededor de un cuerpo de masa M

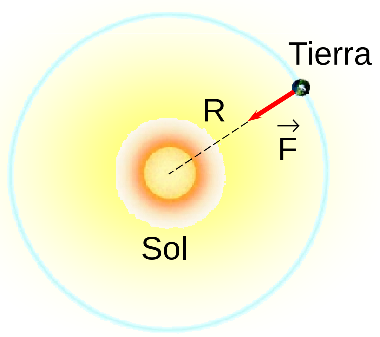
- Como v es aproximadamente constante: $\boxed{v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}}$ (2)
- Igualando (1) y (2): $\sqrt{G\frac{M}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \text{ (3ª ley de Kepler)}}$
- Este resultado permite calcular la masa de cualquier planeta conocido el período y el radio de uno se sus satélites
- Si M es la masa del Sol, el valor de la constante coincidirá con el valor que calculó Kepler

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL (III)

Deducción de la ley de Newton a partir de las leyes de Kepler

- Se supone que las órbitas descritas por los planetas en torno al Sol son circulares, sin que ello suponga cometer un gran error puesto que en realidad son prácticamente así
- Velocidad angular del planeta: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Su aceleración centrípeta: $a = \omega^2 R$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{4\pi^2}{T^2} R}$$



- Por la 3ª ley de Kepler ($T^2 = kR^3$): $a = \frac{4\pi^2}{kR^3} R = \frac{cte}{R^2}$
- La fuerza F ejercida sobre un planeta de masa m es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$F = ma = cte\frac{m}{R^2}$$

- Dicha constante incluye la masa del Sol es decir: $cte = GM \Rightarrow \boxed{F = G\frac{Mm}{R^2}}$ Ley de la gravitación universal

La ley de gravitación universal indica que la fuerza de interacción entre dos partículas materiales es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia

3 CAMPO GRAVITATORIO

El campo gravitatorio

- La ecuación de Newton proporciona la expresión de la fuerza entre dos masas:

$$F = G\frac{M\ m}{R^2}$$

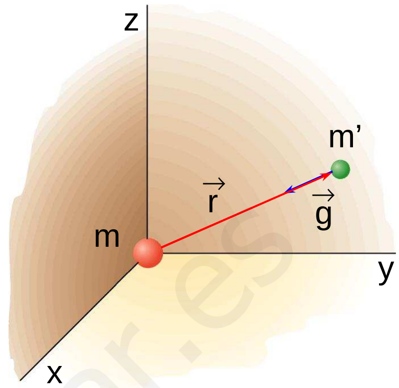
- Para explicar la acción que una masa ejerce sobre otra situada a cierta distancia, se introduce el concepto de campo de fuerzas

- La masa m hace que las propiedades del espacio que la rodea cambien, independientemente que en su proximidad se sitúe otra masa m'

- La intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto es la fuerza por unidad de masa, calculada en dicho punto

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{R^2}$$

y se expresa en N/kg en el S.I.



Decimos que existe un campo de fuerzas en un lugar del espacio si, al colocar en él un cuerpo de prueba, éste queda sometido a una fuerza.

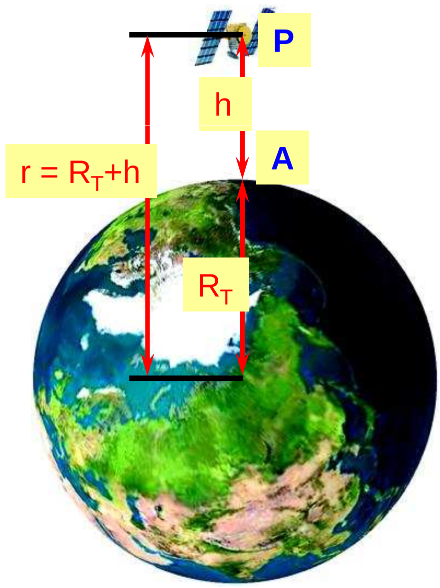
- La fuerza gravitatoria sobre otra masa inmersa en el campo es: $\vec{F} = m\,\vec{g}$

Llamamos campo gravitatorio a la perturbación que un cuerpo produce en el espacio que lo rodea por el hecho de tener masa.

3 CAMPO GRAVITATORIO (II)

El campo gravitatorio terrestre

- Cuando se trata de cuerpos extensos, se supone la masa concentrada en el c.d.m, y además se considera para las distancias que $r = R_T + h$



- El módulo del campo gravitatorio creado es:

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

- En las proximidades de la superficie, donde h es despreciable frente al R_T puede considerarse:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \ m/s^2$$

- La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa m colocado a una altura h sobre la superficie terrestre será:

El peso, P, de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. P = mg

$$F = G\frac{M_T\ m}{(R_T + h)^2} = m\,g$$

La intensidad del campo gravitatorio, g, en un punto del espacio es la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa situada en ese punto.

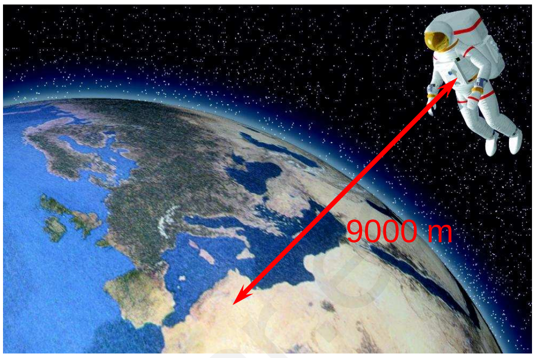
3 CAMPO GRAVITATORIO (III)

Aplicación al cálculo del peso de un cuerpo a cierta altura

Si una persona pesa 686 N en la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesará a 9000 m de altura?
Datos: $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2kg^{-2}; $R_T = 6370$ km; $g_T = 9{,}8$ m/s^2

- Cálculo de la masa en la superficie terrestre

$$m = \frac{F_0}{g_0} = \frac{686}{9{,}8} = 70 \text{ kg}$$



- Cálculo del peso a 9000 m de altura

La fuerza gravitatoria tanto a dicha distancia como sobre la superficie terrestre es:

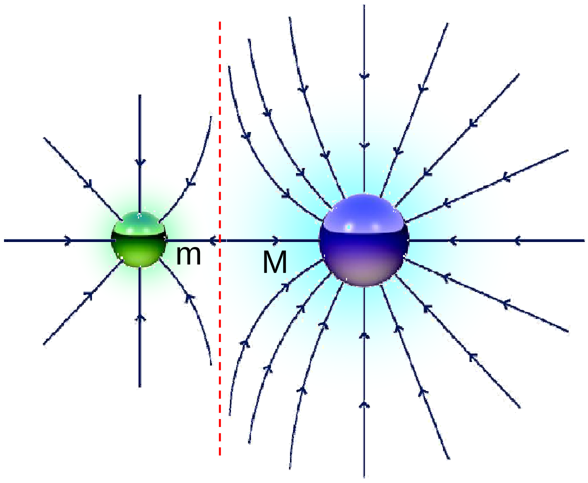
$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{M_T\ m}{(R_T + h)^2} \\ F_0 = G\dfrac{M_T\ m}{R_T^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F}{F_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \Rightarrow F = \frac{F_0 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 + 9000)^2} = 684{,}06 \text{ N}$$

Luego el peso de la persona a 9000 m será: **F = 684,06 N**

3 CAMPO GRAVITATORIO (IV)

Representación del campo

- Los campos de fuerzas se representan mediante líneas de campo
- En el campo gravitatorio, las líneas de campo no parten de ningún punto definido, carecen de fuentes, y acaban en los cuerpos con masa o sumideros (Campos Centrales)



Características de las líneas de campo

- Módulo: se indica mediante la densidad de líneas de campo
- Dirección del campo en un punto es la tangente a la línea en dicho punto
- El sentido viene indicado por la flecha, y es el que seguiría la unidad de masa colocada en dicha línea por efecto de las fuerzas del campo

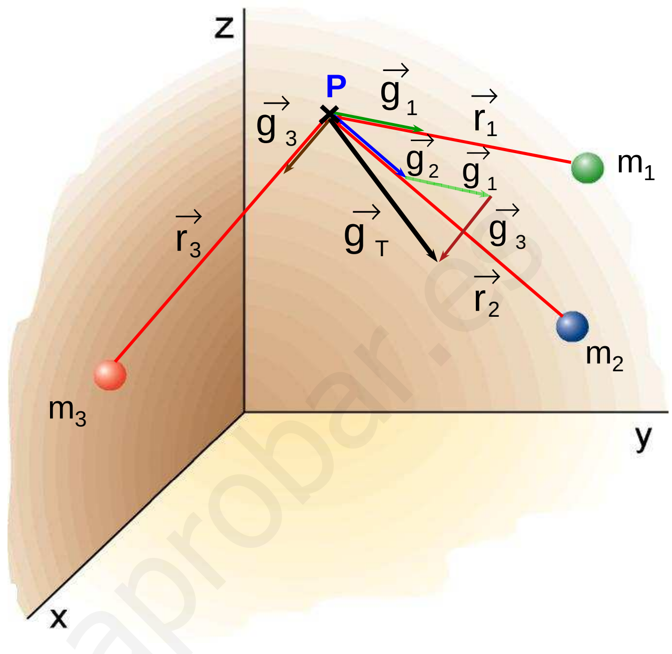
3 CAMPO GRAVITATORIO (V)

Principio de superposición

- La intensidad del campo en un punto P, creado por un conjunto de masas puntuales, se obtiene calculando la intensidad de campo creada por cada una de las partículas y sumando los resultados parciales

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^{n}\left(-G\,\frac{m_i}{|\vec{r}_i|^2}\cdot\vec{u}_i\right)$$

siendo $\vec{u}_i = \dfrac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$



- También se puede aplicar al cálculo de la fuerza ejercida sobre cierta masa por la acción de un conjunto discreto de ellas

$$\vec{F}_T = m\,\vec{g}_T = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

Si un cuerpo está sometido a la acción de varias fuerzas gravitatorias, el efecto total resultante es la suma de los efectos individuales de cada fuerza

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO

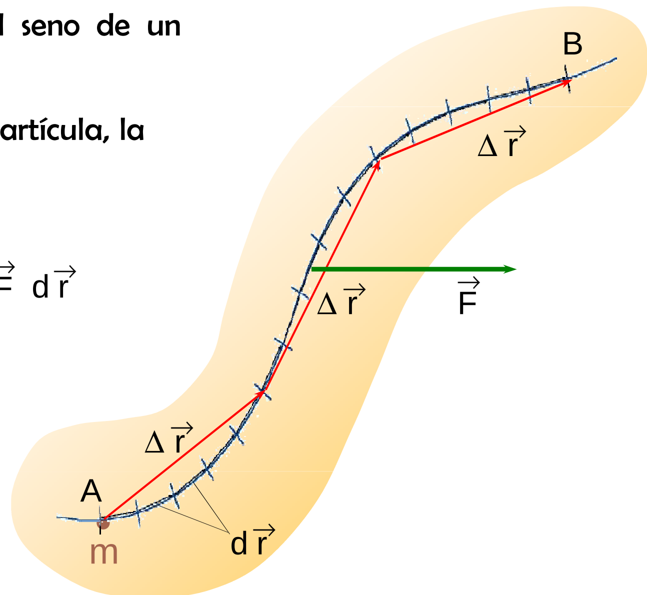
Campos de fuerzas conservativos (I)

- Sea una partícula de masa m situada en el seno de un campo de fuerzas
- Por cada desplazamiento $\Delta\vec{r}$ que realice la partícula, la fuerza del campo realiza un trabajo:

$$\Delta W = \vec{F}\ \Delta\vec{r}$$

- Para desplazamientos infinitesimales: $dW = \vec{F}\ d\vec{r}$
- El camino total desde un punto A a otro B es la suma de todos los $d\vec{r}$
- Si en cada $d\vec{r}$ se realiza un trabajo dW, el trabajo total será la suma de todos los realizados en cada intervalo infinitesimal:

$$W = \int_A^B \vec{F}\ d\vec{r}$$



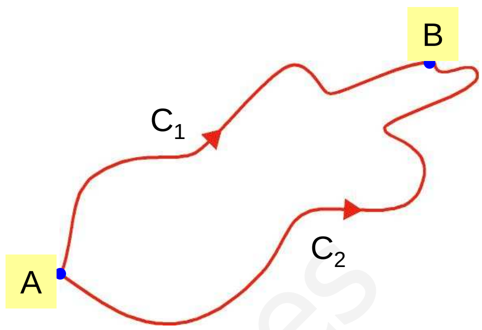
Campos de fuerzas conservativos son aquellos en los que el trabajo depende solo de los puntos inicial y final, y no del camino seguido

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (II)

Campos de fuerzas conservativos (II)

- En un campo de fuerzas conservativo, el resultado de la integral del trabajo realizado para ir desde A hasta B puede expresarse como una nueva función, E_p que depende solo de los puntos inicial y final

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B)$$



- Si el campo de fuerzas es conservativo,

$$W_{A\to C_1\to B} = W_{A\to C_2\to B}$$

- Si se invierte el segundo camino,

$$W_{A\to C_2\to B} = -W_{B\to C_2\to A} \;\Rightarrow\; W_{A\to C_1\to B} = -W_{B\to C_2\to A}$$

$$W_{A\to C_1\to B} + W_{B\to C_2\to A} = 0$$

Cuando un cuerpo se desplaza por una trayectoria cerrada en un campo de fuerzas conservativo, el trabajo total realizado por las fuerzas del campo es nulo

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (IV)

Energía potencial

- Una característica de los campos conservativos es que puede definirse una magnitud denominada energía potencial
- Los cambios producidos en la energía potencial, indican el trabajo realizado por las fuerzas del campo
- Este trabajo no depende del camino recorrido sino de las posiciones inicial (A) y final (B) en las que se encuentra el cuerpo

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) \;\Rightarrow\; W = -\Delta E_p$$

Teorema de la energía potencial: En un campo conservativo el trabajo realizado por las fuerzas del campo es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo

- Conocido el valor de la fuerza: $\Delta E_p = -\vec{F}\,\Delta\vec{r}$
- Considerando incrementos diferenciales: $dE_p = -\vec{F}\, d\vec{r}$
- Integrando: $E_p = -\int \vec{F}\, d\vec{r}$
- Si se integra la fuerza del campo entre dos puntos A y B del campo gravitatorio, se obtiene la diferencia de potencial

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (V)

Energía potencial gravitatoria

- Para calcular su valor, basta con resolver:

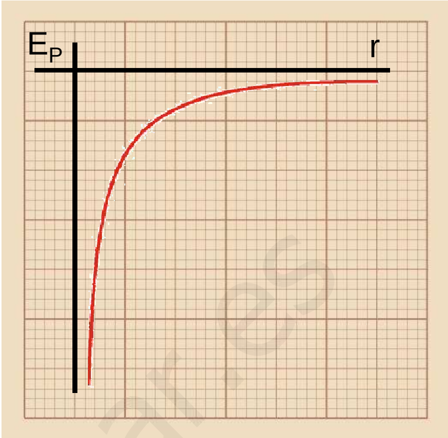
$$dE_p = -\vec{F}\,d\vec{r} \Rightarrow dE_p = G\frac{mm'}{r^3}\vec{r}\,d\vec{r}$$

- El trabajo realizado es máximo cuando los desplazamientos ($d\vec{r}$) están en la misma dirección que $\vec{r}$, y así el producto escalar $\vec{r}\,d\vec{r}$ se reduce al producto de los módulos:

$$E_p = \int G\frac{mm'}{r^2}\,dr \Rightarrow E_p = -G\frac{mm'}{r} + C$$

- La Energía potencial gravitatoria es cero cuando r tiende a infinito, y por tanto C = 0, luego:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$



4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (VI)

Potencial gravitatorio

- Por ser el campo gravitatorio conservativo, se puede definir una magnitud que depende únicamente del cuerpo m que crea el campo y no del m' que se coloca como testigo
- Dicha magnitud se denomina potencial U y se obtiene así:

$$dV = -\vec{g}\,d\vec{r} \Rightarrow V = -G\frac{M}{r}$$

- La diferencia de potencial entre dos puntos A y B cuyas distancias al origen son r_A y r_B respectivamente es:

$$V(A) - V(B) = -G\frac{m}{r_A} + G\frac{m}{r_B}$$

El potencial en un campo gravitatorio es la energía potencial por unidad de masa en ese punto.

$$W = -\Delta E_p = -m\,\Delta V = m\,(V_A - V_B)$$

Trabajo realizado por el campo gravitatorio para trasladar la masa del punto A al B.

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (VII)

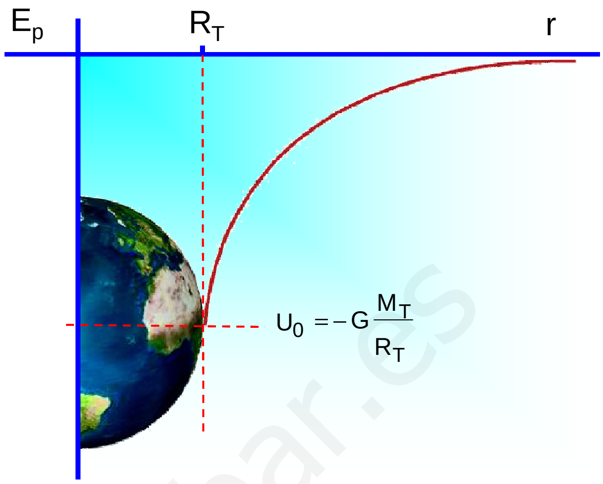
Potencial gravitatorio terrestre

- Se obtiene de la misma forma que en el caso de la energía potencial
- Para un punto P situado a una altura h de la superficie:

$$U(P) = -G\frac{M_T}{(R_T + h)}$$

- En la superficie, el potencial gravitatorio U_0 será:

$$U(P) = -G\frac{M_T}{R_T}$$



Energía potencial gravitatoria terrestre:

$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$

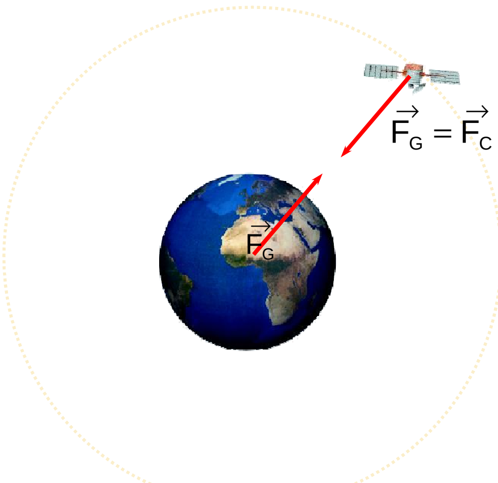
Aproximación cuando h sea despreciable frente a R_T

5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS.

Satélites artificiales: energía total y energía de satelización

Cálculo de la velocidad del satélite en la órbita

$$\sum F = F_C \Rightarrow G\frac{M_T\, m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{r}$$



Cálculo de las energías cinética y potencial

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} G\frac{M_T\, m}{r} \Rightarrow E_C = G\frac{M_T\, m}{2r}$$

$$E_p = -G\frac{M_T\, m}{r}$$

Cálculo de la energía total del satélite en órbita

$$E = G\frac{M_T\, m}{2r} - G\frac{M_T\, m}{r} = -G\frac{M_T\, m}{2r} \Rightarrow E = -G\frac{M_T\, m}{2r}$$

Esta formula solo puede usarse para cuerpos orbitando alrededor de otros. Para el resto: Em = Ec + Ep

Cálculo de la energía de satelización

$$E_0 = E_f \Rightarrow E_{c,0} + E_{p,0} = E_{c,f} + E_{p,f}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{c,0} - G\frac{M_T\, m}{R_T} = -G\frac{M_T\, m}{2r} \end{array}\right\} \Rightarrow E_{c,0} = G\, M_T\, m\left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right]$$

5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS (II)

Velocidad de lanzamiento de un satélite

- A partir del valor de la E_c de satelización, la v_0 de lanzamiento necesaria para ponerlo en órbita circular desde la superficie terrestre, es:

$$E_{c,0} = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = G\, M_T\, m \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right] \Rightarrow v_0 = \sqrt{2G\, M_T \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right]}$$

Velocidad de escape de un satélite

$$E_0 = E_f = 0$$
$$E_e + E_{p0} = 0$$

- Para que el satélite escape de la atracción terrestre, supondremos que se marcha al infinito, (r es infinito), y la energía de escape será: $E_e = G\,\frac{M_T\, m}{R_T}$
- La velocidad de escape será:

$$\left.\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} m\, v_e^{\,2} \\ g_0 &= \frac{G\, M_T}{R_T^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_e = \sqrt{2\, g_0\, R_T}$$

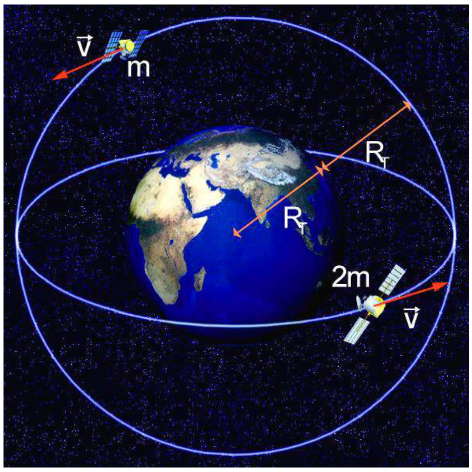
5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS (III)

Aplicación al cálculo de la energía mecánica de un satélite

Dos satélites artificiales de masa m y 2m, respectivamente, describen órbitas circulares del mismo radio r = 2R, siendo R el radio de la Tierra. Calcular la diferencia de las energías mecánicas de ambos satélites

- La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, y cuyo valor es:

$$E = \frac{E_p}{2} = -\,G\,\frac{M_T\, m}{2r}$$



Satélite 1, de masa m: $E_1 = -\,G\,\frac{M_T\, m}{2\,(2R)} = -\,G\,\frac{M_T\, m}{4R}$

Satélite 2, de masa 2m: $E = -\,G\,\frac{M_T\,(2m)}{2\,(2R)} = -\,G\,\frac{M_T\, m}{2R}$

Su diferencia es: $E_2 - E_1 = -\,G\,\frac{M_T\, m}{4R}$