Capítulo 1

Interacción gravitatoria

1.1. Conceptos previos.

- ***Ley de Gravitación Universal:*** La fuerza con que se atraen dos masas viene expresada por:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

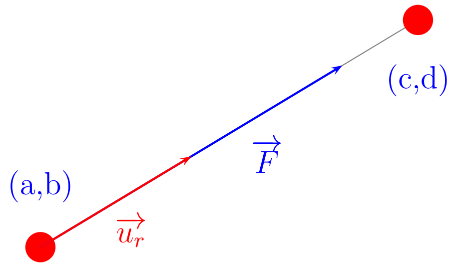
donde $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario radial. En el caso de querer calcular la fuerza que una masa situada en (a, b), ejerce sobre otra situada en (c, d), resulta cómodo hacer:

$$\overrightarrow{F} = |\overrightarrow{F}|\ \overrightarrow{u_r}$$

Donde u_r se calcula de la forma:

$$u_r = \frac{(c-a)\overrightarrow{i} + (d-b)\overrightarrow{j}}{(\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2})}$$

Como puede verse en el siguiente dibujo:



Cuando queremos conocer la fuerza que varias masas puntuales ejercen sobre otra, no tendremos más que hallar cada uno de los vectores fuerza que las otras masas ejercen sobre la que consideramos, y sumar dichos vectores.

- ***Intensidad de campo gravitatorio:*** La intensidad de campo gravitatorio viene dada por la expresión:

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM}{r}\overrightarrow{u_r}$$

Por lo que lo que, de forma similar al apartado anterior, podremos poner que:

$$\overrightarrow{g} = |\overrightarrow{g}|\,\overrightarrow{u_r}$$

Siendo de aplicación lo que se ha mencionado anteriormente acerca del vector unitario y de la intensidad de campo gravitatorio creado por varias masas en un punto.

- ***Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio en un punto:*** La energía potencial gravitatoria se define como el trabajo necesario para desplazar una masa desde el infinito hasta el punto que consideramos. Se obtiene a partir de la expresión:

  $$W = \int_{\infty}^{r} -\frac{GMm}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}\cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{GMm}{r}$$

  Como podemos ver, la energía potencial gravitatoria es una magnitud escalar, por lo que la energía potencial de una masa debida a la presencia de otras, será la suma algebraica de las energías potenciales debidas a cada una de ellas.
  Lo dicho anteriormente es válido cuando hablamos de potencial gravitatorio, con la única salvedad de que la masa m tendrá el valor unidad.

- ***Tercera ley de Kepler***: El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del Sol (y, por extensión, el periodo de rotación de un cuerpo respecto a otro), es directamente proporcional al cubo de la distancia media entre ambos, lo que se puede expresar como:

  $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}$,siendo M la masa del cuerpo respecto al que se describe la órbita

- ***Velocidad de una órbita:*** Teniendo en cuenta que el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria de un cuerpo sobre otro que gira respecto a él, puede expresarse en la forma:

  $$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

  Podremos despejar v, quedando:

  $$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

- ***Velocidad de escape:*** Es la velocidad mínima que debe ser suministrada a un cuerpo para que escape a la atracción gravitatoria de un planeta. Teniendo en cuenta que en la superficie de dicho planeta, la energía potencial del cuerpo es $-\dfrac{GMm}{r}$, y que en el infinito, tanto la energía cinética como la potencial son nulas, tendremos, en aplicación del Principio de Conservación de la Energía:

  $$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0$$

  De donde, despejando, obtenemos:

  $$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

- ***Energía de una órbita:*** La energía de una órbita, suma de las energías cinética y potencial es:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Sustituyendo la velocidad por la expresión obtenida antes, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, tendremos:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

De aquí podemos comprobar que el valor de la energía cinética es la mitad del valor absoluto de la energía potencial.

1.2. Problemas resueltos.

1.- Un satélite de 1000 kg de masa gira alrededor de la Tierra con un periodo de 12 horas. (Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I; masa de la Tierra $= 5,98 \cdot 10^{24}$ kg). Calcular

1.a.- El radio de giro.

1.b.- La velocidad del satélite.

1.c.- Su energía total.

Solución:

1.a.- El radio de giro puede obtenerse a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Despejando r nos queda:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot (12 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 2,662 \cdot 10^7 \ m$$

1.b.- La velocidad del satélite se obtiene a partir de la igualdad:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

De lo anterior se deduce que:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 3870,88 m/s$$

1.c.- La energía total es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Por tanto:

$$-\frac{GMm}{2r} = -7,49 \cdot 10^9\ J$$

2.- La Luna posee una masa de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y un radio de $1,74 \cdot 10^6$ m. Un satélite de 5000 kg de masa gira a su alrededor a lo largo de una circunferencia con radio igual a cinco veces el radio de la Luna. (Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I). Calcular:

2.a.- El periodo de giro del satélite.

2.b.- La energía total del satélite.

2.c.- La velocidad de escape de la Luna.

Solución:

2.a.- El periodo de giro viene dado por la ecuación:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \text{ por lo que } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5 \cdot 1,74 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}} = 72820,25s$$

2.b.- La energía total del satélite viene dada por la expresión **??**:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 5000}{2 \cdot 5 \cdot 1,74 \cdot 10^6} = -1,409 \cdot 10^9 J$$

2.c.- La velocidad de escape se obtiene a partir de la igualdad:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

Puesto que la suma de las energías cinética y potencial en el infinito es igual a cero. De aquí se deduce:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6}} = 2373,81 m/s$$

3.- Un satélite de 2000 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7000 km de radio. (Datos: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I; radio de la Tierra = 6370 km; masa de la Tierra $=5,98 \cdot 10^{24}$ kg). Calcular los siguientes parámetros del satélite:

3.a.- El módulo de su aceleración.

3.b.- El periodo de giro.

3.c.- Su energía cinética y potencial.

Solución:

3.a.- El módulo de la aceleración es: $|\overrightarrow{g}| = \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(7 \cdot 10^6)^2} = 8,14\, m/s^2$

3.b.- Aplicando la tercera ley de Kepler: $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 (7 \cdot 10^6)^3)}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5826,58\ s$

3.c.- La energía potencial es:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{7 \cdot 10^6} = -1,14 \cdot 10^{11}\ J$$

En la expresión de la energía cinética , $\dfrac{1}{2}mv^2$, si sustituimos la velocidad por la expresión:v=$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$, nos quedará:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{1,4 \cdot 10^6} = 5,70 \cdot 10^{10}$$

4.- Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran en los puntos (0,0,0) y (4,0,0) m.(Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I). Calcular:

4.a.- El módulo de la fuerza gravitatoria entre ambas partículas.

4.b.- El campo gravitatorio producido por ambas partículas en el punto (1,0,0).

4.c.- La energía potencial gravitatoria de una de las masas debida a la presencia de la otra.

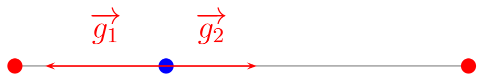
Solución:

4.a.- Como puede verse en el dibujo,sobre cada una de las masas se ejerce una fuerza$\overrightarrow{F}$, ambas iguales y de sentidos opuestos.

El módulo de cada una de estas fuerzas es:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{Gmm'}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{4^2} = 4,17 \cdot 10^{-10}\ N$$

4.b.- El campo gravitatorio en el punto (1,0,0) será la resultante de los dos vectores intensidad de campo, $\overrightarrow{g_1}$ y $\overrightarrow{g_2}$



Siendo $\overrightarrow{g_1} = -|\overrightarrow{g_1}|\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{g_2} = |\overrightarrow{g_2}|\overrightarrow{i}$, como puede verse en la representación gráfica. Sustituyendo valores, tendremos:

$$|g_1| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} 10}{1^2} = 6,67 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

$$|g_2| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} 10}{3^2} = 7,41 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

Con lo que tendremos: $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = -5,93 \cdot 10^{-10}\overrightarrow{i}\ N/kg$

4.c.- La energía potencial de una masa debida a la otra, será:

$$U = -\frac{Gmm'}{r} = -1,67 \cdot 10^{-9}\ J$$

5.- En la superficie de un planeta de 1000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 2 m/s^2. Calcular:

5.a.- La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa situado en la superficie del planeta.

5.b.- La velocidad de escape de la superficie del planeta.

5.c.- La masa del planeta, sabiendo que G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades S.I.

Solución:

5.a.- La energía potencial es : $U = -\frac{GMm}{r}$. Puesto que no se conoce el valor de G ni el de M, calculamos el valor de GM a partir de la expresión:

$$2 = \frac{GM}{(10^6)^2} \Rightarrow GM = 2 \cdot 10^{12} \text{ en unidades del S.I.}$$

A partir de este resultado, tendremos: $U = -\frac{2 \cdot 10^{12} \cdot 50}{10^6} = -10^8\ J$

5.b.- Aplicando la ecuación: $v = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$ tendremos: $v = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 10^{-12}}{10^6}} = 2000\ m/s$

5.c.- Conocido el valor de G y el de GM, despejamos la masa:

$$M = \frac{2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 3 \cdot 10^{22}$$

6.- Un satélite de 1000 kg de masa gira en órbita geoestacionaria, es decir, de forma que su vertical pasa siempre por el mismo punto de la superficie terrestre (Dato: $r_t = 6370\ km$). Calcular:

6.a.- Su velocidad angular.

6.b.- Su energía

6.c.- Si, por los motivos que fuera, perdiera el 10 % de su energía, ¿cuál sería su nuevo radio de giro?

Solución:

6.a.- El periodo del satélite es el mismo que el de la Tierra, de forma que:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

6.b.- Para calcular la energía, es preciso conocer el radio de la órbita y el valor de GM. Para calcular este último, tenemos en cuenta que:

$$9,8 = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow GM = 9,8(6,37 \cdot 10^6)^2 = 3,97 \cdot 10^{14} \text{ en unidades del S.I.}$$

El radio de la órbita se calcula a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \text{ de donde :}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7\ m$$

Según lo anterior, la energía será:

$$U = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 1000}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7} = -4,70 \cdot 10^{-9}\ J$$

6.c.- Teniendo en cuenta que la energía tiene valor negativo, una pérdida del 10 % significa que el nuevo valor de la energía será:

$$U + \frac{10U}{100} = 1,1U = -5,17 \cdot 10^9\ J$$

Según esto, el nuevo radio se obtendrá de la igualdad:

$$-\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 1000}{2r} = -5,17 \cdot 10^9$$

Con lo que:

$$r = \frac{3,97 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 5,17 \cdot 10^9} = 3,84 \cdot 10^7\ m$$

7.- Tenemos cuatro partículas iguales, de 2 kg de masa cada una, en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado (($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.). Determinar

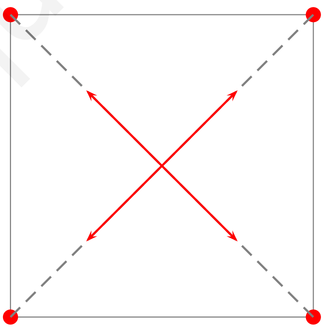
7.a.- El campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

7.b.- El módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta cada partícula debido a la presencia de las otras tres.

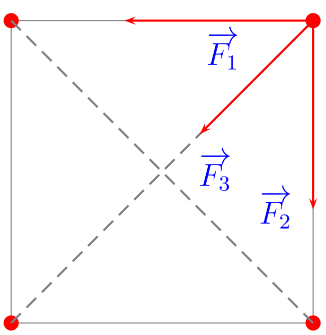
7.c.- La energía potencial gravitatoria de una partícula debida a las otras tres.

Solución:

7.a.- Por razones de simetría, y como puede verse en la siguiente representación gráfica, la intensidad de campo en el centro del cuadrado es cero.



7.b.- La representación gráfica de las fuerzas que las tres masas restantes ejercen sobre una de ellas será la siguiente:



Con lo cual, tendremos que $|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}|$
La fuerza resultante puede ser expresada como:

$$\overrightarrow{F} = |\overrightarrow{F_1}|\ \overrightarrow{u_1} + |\overrightarrow{F_2}|\ \overrightarrow{u_2} + |\overrightarrow{F_3}|\ \overrightarrow{u_3} \text{ siendo:}$$

$$|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{4} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N$$

$$|\overrightarrow{F_3}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{8} = 3,33 \cdot 10^{-11}$$

De la representación gráfica se deduce que:

$$\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{j}$$

Mientras que $\overrightarrow{u_3}$ se halla de la forma:

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{(0-2)\overrightarrow{i} + (0-2)\overrightarrow{j}}{\sqrt{2^2+2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$$

De todo esto, obtenemos:

$$\overrightarrow{F} = -6,67 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{i} - 6,67 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{j} + 3,33 \cdot 10^{-11}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}\right)$$

$$\overrightarrow{F} = -4,31 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{i} - 4,31 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{j}$$

$$|\overrightarrow{F}| = 6,10 \cdot 10^{-11}\ N$$

7.c.- La energía potencial será la suma de tres sumandos, quedando de la forma:

$$U = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{2} + \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{2} + \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2^2}{\sqrt{8}}$$

8.- La Luna se encuentra a $3,84 \cdot 10^8$ m de la Tierra. La masa de la Luna es de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y la de la Tierra $5,98 \cdot 10^{24}$ kg (G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del S.I.)Calcular:

8.a.- La energía potencial gravitatoria de la Luna debida a la presencia de la Tierra.

8.b.- A qué distancia de la Tierra se cancelan las fuerzas gravitatorias de la Luna y de la Tierra sobre un objeto allí situado.

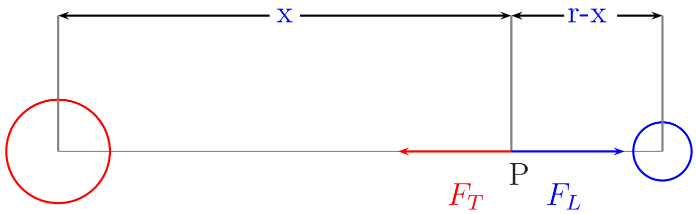
8.c.- El periodo de giro de la Luna alrededor de la Tierra.

Solución:

8.a.- La energía potencial será:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{3,84 \cdot 10^8} = -7,63 \cdot 10^{28}\ J$$

8.b.- Como puede verse en la gráfica, existe un punto P donde se cancelan las fuerzas gravitatorias debidas a la Tierra y a la Luna. En dicho punto, la resultante de ambas fuerzas es cero.



Según lo anteriormente expuesto, en el punto P se cumplirá que:

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(r-x)^2} \quad \text{de donde se deduce:} \quad \left(\frac{r-x}{x}\right)^2 = \frac{M_L}{M_T}$$

$$r - x = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}x \quad \text{y} \quad x = \frac{r}{\left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right)} = 3,46 \cdot 10^8 \ m$$

8.c.- El periodo se obtendrá aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 (3,84 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 2,37 \cdot 10^6 \ s$$

9.- El planeta Júpiter posee un radio 11 veces mayor que el de la Tierra y una masa 318 veces mayor que la de ésta. Calcule:

9.a.- El peso en Júpiter de un astronauta que en la Tierra pesa 800 N.

9.b.- La masa del astronauta en Júpiter

9.c.- La relación entre las velocidades de escape desde la superficie de Júpiter y desde la de la Tierra.

Solución:

9.a.- La masa del astronauta es: $m = \frac{800}{9,8} = 81,63$ kg. El peso de éste en Júpiter será:

$$P = \frac{GM_J m}{r_J^2} = \frac{G \cdot 318 M_T m}{(11 r_T)^2}$$

Todo esto se puede poner como:

$$\frac{GM_T}{r_T^2} \cdot \frac{318 \cdot 81,63}{121} = \frac{9,8 \cdot 318 \cdot 81,63}{121} = 2102,41 \ N$$

9.b.- La masa del astronauta es invariable, por lo que en la superficie de Júpiter tendrá el mismo valor que en la Tierra, es decir, $81,63\ kg$

9.c.- La relación entre las velocidades de escape es:

$$\frac{v_J}{v_T} = \frac{\sqrt{\frac{2G\cdot 318M_T}{11r_T}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}} = \sqrt{\frac{318}{11}} = 5,377$$

10.- Un satélite de 5000 kg de masa gira con un radio de 30000 km alrededor de un planeta cuya masa es de $2,2\cdot 10^{24}$ kg (Dato: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ en unidades S.I.). Calcule:

10.a.- El periodo de giro.

10.b.- La velocidad del satélite.

10.c.- Energía que se necesita para escapar de la atracción gravitatoria del planeta.

Solución:

10.a.- El periodo de calcula de la forma:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(3\cdot 10^7)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2,2\cdot 10^{24}}} = 85229\ s$$

10.b.- La velocidad es: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2,2\cdot 10^{24}}{3\cdot 10^7}} = 2211,64\ m/s$

10.c.- La energía que posee el satélite es $E = \frac{GMm}{2r}$, puesto que está describiendo una órbita. A esta energía debemos sumarle una cantidad E, para que el satélite escape a la atracción gravitatoria del planeta. Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{2r} + E = 0$$

Puesto que el satélite escapará de la atracción gravitatoria a una distancia infinita, siendo entonces cero tanto la energía cinética como la potencial. Según esto:

$$E = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2,2\cdot 10^{24}}{2\cdot 3\cdot 10^7} = 2,44\cdot 10^6\ J$$

11.- La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es de $3,7 m/s^2$. El radio de la Tierra es de 6378 km y la masa de Marte es un 11 % de la de la Tierra. Calcule:

11.a.- El radio de Marte.

11.b.- La velocidad de escape desde la superficie de Marte.

11.c.- El peso en dicha superficie de un astronauta de 80 kg de masa.

Solución:

11.a.- La aceleración de la gravedad será: $3,7 = \frac{GM_M}{r_M^2}$. Puesto que: $9,8 = \frac{GM_T}{(6,37 \cdot 10^6)^2}$, despejamos $GM_T = 3,97 \cdot 10^{14}$ en unidades del S.I.
Por lo tanto:

$$3,7 = \frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{r_M^2}, \text{ de donde:}$$

$$r_M = \sqrt{\frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{3,7}} = 3,44 \cdot 10^6\ m$$

11.b.- La velocidad de escape es: $\sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14}}{3,44 \cdot 10^6}} = 5038,80\ m/s$

11.c.- El peso viene dado por: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{0,11 \cdot 3,97 \cdot 10^{14} \cdot 80}{(3,44 \cdot 10^6)^2} = 295,22\ N$

12.- Un satélite de 4000 kg de masa gira en una órbita geoestacionaria (es decir, la vertical del satélite siempre pasa por el mismo punto de la superficie terrestre) (Dato: radio de la Tierra = 6370 km). Calcule:

12.a.- El módulo de la velocidad del satélite.

12.b.- El módulo de su aceleración.

12.c.- Su energía total.

Solución:

12.a.- El módulo de la velocidad del satélite será: $|\overrightarrow{g}| = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. El valor de GM lo calculamos de:

$$9,8 = \frac{GM}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow GM = 3,97 \cdot 10^{14} \text{ en unidades S.I.}$$

Mientras que r se calcula a partir de la igualdad:

$$86400^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{3,97 \cdot 10^{14}}$$

$$r = \sqrt{\frac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot (86400)^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7\ m$$

(El periodo del satélite en una órbita geoestacionaria es el mismo que el de rotación de la Tierra respecto a su eje). Así pues:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{3,97 \cdot 10^{14}}{4,22 \cdot 10^{7}}} = 3067,18\ m/s$$

12.b.- El módulo de la aceleración es $|\vec{g}| = \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{3,97 \cdot 10^1 4}{(4,22 \cdot 10^7)^2} = 0,223\ m/s^2$

12.c.- Su energía total es: $E = -\dfrac{GMm}{2r} = -\dfrac{3,97 \cdot 10^{14} \cdot 4000}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7} = -1,88 \cdot 10^{10}\ J$

13.- Suponga que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, con un radio de $1,59 \cdot 10^{11}$ m. (Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$). Calcule:

13.a.- La velocidad angular de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol.

13.b.- La masa del Sol.

13.c.- El módulo de la aceleración lineal de la Tierra.

Solución:

13.a.- Puesto que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y T=365 días ($3,154 \cdot 10^7$ s), tendremos:

$$\omega = \frac{2\pi}{3,154 \cdot 10^7} = 1,992 \cdot 10^{-7}\ rad/s$$

13.b.- Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$(3,154 \cdot 10^7)^2 = \frac{4\pi^2 (1,59 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ de donde :}$$

$$M = \frac{4\pi^2 (1{,}59 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (3,154 \cdot 10^7)^2} = 2,39 \cdot 10^{30}\ kg$$

13.c.- El módulo de la aceleración lineal será nulo, puesto que el movimiento se ha supuesto circular uniforme.

14.- La masa de Venus, su radio y el radio de su órbita alrededor del Sol, referidos a las magnitudes respectivas de la Tierra valen, respectivamente, 0.808, 0.983 y 0.725. Calcule:

14.a.- La duración de un año en Venus.

14.b.- El valor de la gravedad en la superficie de Venus.

14.c.- La velocidad de escape de un cuerpo en Venus en relación a la que tiene en la Tierra.

Solución:

14.a.- Aplicando la tercera ley de Kepler, se obtiene:

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2 r_v^3}{GM} \qquad \text{y} \qquad T_t^2 = \frac{4\pi^2 r_t^3}{GM}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones nos queda:

$$\left(\frac{T_v}{T_t}\right)^2 = \left(\frac{r_v}{r_t}\right)^3 = 0,983^3$$

Por tanto, tendremos que: $T_v = \sqrt{0,983^3} = 0,974$ años

14.b.- La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por:

$$g_v = \frac{GM_v}{r_v^2}$$

Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$9,8 = \frac{GM_t}{r_t^2}$$

dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{g_v}{9,8} = \frac{\dfrac{G \cdot 0,808M_t}{(0,983r_t)^2}}{\dfrac{GM_t}{r_t^2}} = \frac{0,808}{0,983^2}$$

Finalmente: $g_v = 9,8 \cdot \dfrac{0,808}{0,983^2} = 8,19\ m/s^2$

14.c.- Utilizando la ecuación $v = \sqrt{\dfrac{2Gm}{r}}$, y dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{v_v}{v_t} = \frac{\sqrt{\dfrac{2GM_v}{r_v}}}{\sqrt{\dfrac{2GM_t}{r_t}}} = \sqrt{\frac{m_v r_t}{m_t r_v}} = \sqrt{\frac{0,808}{0,983}} = 0,907$$

15.- La nave espacial Cassini-Huygens se encuentra orbitando alrededor de Saturno en una misión para estudiar este planeta y su entorno. La misión llegó a Saturno en el verano de 2004 y concluirá en 2008 después de que la nave complete un total de 74 órbitas de formas diferentes. La masa de saturno es de $5684,6 \cdot 10^{23}\ kg$ y la masa de la nave es de 6000 kg (Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$

15.a.- Si la nave se encuentra en una órbita elíptica cuyo periastro (punto de la órbita más cercano al astro) está a 498970 km de Saturno y cuyo apoastro (punto más alejado) está a 9081700 km, calcule la velocidad orbital de la nave cuando pasa por el apoastro (Utilice el principio de conservación de la energía y la segunda ley de Kepler).

15.b.- Calcule la energía que hay que proporcionar a la nave para que salte de una órbita circular de 4,5 millones de km de radio a otra órbita circular de 5 millones de km de radio.

15.c.- Cuando la nave pasa a 1270 km de la superficie de Titán (la luna más grande de saturno, con un radio de 2575 km y $1345 \cdot 10^{20}$ kg de masa), se libera de ella la sonda Huygens. Calcule la aceleración a que se ve sometida la sonda en el punto en que se desprende de la nave y empieza a caer hacia Titán. (Considere sólo la influencia gravitatoria de Titán)

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

15.a.- A partir del principio de conservación de la energía y de la segunda ley de Kepler, podemos poner:

$$\begin{cases} -\dfrac{GMm}{r_1} + \dfrac{1}{2}\,mv_1^2 = -\dfrac{GMm}{r_2} + \dfrac{1}{2}\,mv_2^2 \\[2ex] \dfrac{r_1 v_1}{2} = \dfrac{r_2 v_2}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\begin{cases} -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26}}{4{,}9897 \cdot 10^{8}} + \dfrac{1}{2}\,v_1^2 = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26}}{9{,}0917 \cdot 10^{9}} + \dfrac{1}{2}\,v_2^2 \\[2ex] 4{,}9897 \cdot 10^{8} \cdot v_1 = 9{,}0917 \cdot 10^{9} \cdot v_2 \end{cases}$$

que, al ser resuelto nos da $v_2 = 658,75\ m/s$

15.b.- Cuando la nave se encuentra en una órbita circular de 4,5 millones de kilómetros de radio, su energía total será:

$$E_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{4,5 \cdot 10^{9}}$$

mientras que, a una distancia de 5 millones de kilómetros, su energía será:

$$E_2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{5 \cdot 10^{9}}$$

Por todo ello, tendremos:

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{4,5 \cdot 10^{9}} + E = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,6846 \cdot 10^{26} \cdot 6000}{5 \cdot 10^{9}}$$

siendo E la energía que hay que suministrar. Resolviendo la ecuación, obtenemos $E = 5,05 \cdot 10^{9}\ J$

15.c.- La aceleración a que se ve sometida la sonda, será:

$$|\vec{a}| = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,3435 \cdot 10^{23}}{(2,575 \cdot 10^6 + 1,270 \cdot 10^6)^2} = 0,606\ m/s^2$$

16.- La sonda Huygens se dejó caer en Titán (la luna más grande de Saturno) para estudiar este satélite y su atmósfera. En su descenso la sonda envía ondas de radio de 2040 MHz de frecuencia y 10 W de potencia. Debido al fuerte viento en la atmósfera de Titán, la sonda en su movimiento de caída se desplaza lateralmente a 100 m/s en sentido contrario al de emisión de la señal. (Dato: Saturno está a unos 1200 millones de km de la Tierra.) Calcule:

16.a.- El número de longitudes de onda, de la señal que emite la sonda, que caben en la distancia que existe entre Saturno y la Tierra.

16.b.- La diferencia de frecuencia respecto a la real cuando recibe la señal un observador en reposo del que se aleja la sonda.

16.c.- La intensidad de la señal cuando llega a la Tierra.

Solución:

16.a.- La longitud de onda de la radiación es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,04 \cdot 10^9} = 0,147\ m$$

El número de longitudes de onda que cabrá en la distancia entre Saturno y la Tierra es:

$$n = \frac{1,2 \cdot 10^{12}}{0,147} = 8,16 \cdot 10^{12}$$

16.b.- Al desplazarse la fuente de la radiación respecto al observador, se producirá el efecto Doppler, con lo que la radiación percibida por el observador será:

$$\nu_o = \frac{2,04 \cdot 10^9}{\left(1 + \dfrac{100}{3 \cdot 10^8}\right)} = 2039999320\ Hz$$

La variación en la frecuencia será:

$$\Delta\nu = 2,04 \cdot 10^9 - 2039999320 = 680\ Hz$$

16.c.- La intensidad de la señal al llegar a la Tierra será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{10}{4\pi(1,2 \cdot 10^{12})^2} = 5,52 \cdot 10^{-24}\ W/m^2$$

17.- Desde la superficie de la Tierra se lanza un proyectil en dirección vertical con una velocidad de 1000 m/s. (Datos: Radio de la Tierra = 6378 km, masa de la Tierra $=5,98 \cdot 10^{24}$ kg, G $= 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.) Determine:

17.a.- La altura máxima que alcanza el proyectil. (Desprecie el rozamiento con el aire.)

17.b.- El valor de la gravedad terrestre a dicha altura máxima.

17.c.- La velocidad del proyectil cuando se encuentra a la mitad del ascenso.

Solución:

17.a.- Aplicando el principio de conservación de la energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{r_T} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r}$$

por lo cual:

$$-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}1000^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{r}$$

de donde, despejando:

$$r = 6,43 \cdot 10^6 \text{m}$$

17.b.- La aceleración de la gravedad en este punto será:

$$g = \frac{-GM}{(6,43 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,43 \cdot 10^6)^2} = 9,64 m/s^2$$

17.c.- La mitad del ascenso corresponderá a una distancia del centro de la Tierra:

$$r' = 6,378 \cdot 10^6 + \frac{6,43 \cdot 10^6 - 6,378 \cdot 10^6}{2} = 6,404 \cdot 10^6$$

Aplicando nuevamente el principio de conservación de la energía:

$$-\frac{GMm}{r_T} + \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{GMm}{r'} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}1000^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,404 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}v^2$$

Despejando, obtenemos:

$$v = 701,56 \; m/s$$

18.- La distancia media entre la Luna y la Tierra es de $3,84 \cdot 10^8$ m, y la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1496 \cdot 10^8$ m. Las masas valen $1,99 \cdot 10^{30}$, $5,97 \cdot 10^{24}$ y $7,35 \cdot 10^{22}$ kg para el Sol, la Tierra y la Luna, respectivamente. Consideramos las órbitas circulares y los astros puntuales.

18.a.- Calcule el módulo del campo gravitatorio que crea la Tierra en la Luna.

18.b.- ¿Cuántas veces más rápido gira la Tierra alrededor del Sol que la Luna alrededor de la Tierra?

18.c.- En el alineamiento de los tres astros que corresponde a la posición de un eclipse de Sol, calcule la fuerza neta que experimenta la Luna debido a la acción gravitatoria del Sol y de la Tierra. Indique el sentido (signo de dicha fuerza).

Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11}$N m^2/kg^2

Solución:

18.a.- El módulo del campo gravitatorio creado por la Tierra en la Luna será:

$$|\overrightarrow{g}| = \frac{GM_T}{r_{TL}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

18.b.- El periodo de rotación de la Luna alrededor de la Tierra será:

$$T_L = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{GM_T}}$$

Mientras que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es:

$$T_T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{ST}^3}{GM_S}}$$

Al dividir miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{T_T}{T_L} = \sqrt{\frac{\frac{4\pi^2 r_{ST}^3}{GM_S}}{\frac{4\pi^2 r_{TL}^3}{GM_T}}} = \sqrt{\frac{M_T r_{ST}^3}{M_s r_{TL}^3}} = \sqrt{\frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot (1496 \cdot 10^8)^3}{1,99 \cdot 10^{30} \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}} = 13,31$$

18.c.- Cuando se produce un eclipse de Sol, la Luna se encuentra entre éste y la Tierra, por lo que

$r_{TL} = 3,84 \cdot 10^8$ m y $r_{SL} = r_{ST} - r_{TL} = 1496 \cdot 10^8 - 3,84 \cdot 10^8 = 1,49216 \cdot 10^{11}$ m

El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{GM_S M_L}{r_{SL}^2} - \frac{GM_T M_L}{r_{TL}^2} = 2,397 \cdot 10^{20}\text{N}$$

La fuerza resultante se dirigirá hacia el Sol, puesto que la atracción gravitatoria de éste sobre la Luna es mayor que la de la Tierra sobre aquella.

19.- El satélite Hispasat se encuentra en una órbita situada a 36000 km de la superficie terrestre. La masa de la Tierra es de $5.97{\cdot}10^{24}$ kg y su radio de 6380 km.

19.a.- Calcule el valor de la gravedad terrestre en la posición donde está el satélite.

19.b.- Demuestre que la órbita es geoestacionaria.

19.c.- El satélite actúa como repetidor que recibe las ondas electromagnéticas que le llegan de la Tierra y las reemite.Calcule cuánto tiempo tarda una onda en regresar desde que es emitida en la superficie terrestre.

Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11}$N m^2/kg^2

Solución:

19.a.- El radio de giro será la suma de la distancia a la superficie de la Tierra y el radio de la misma, es decir, r $= 3,6 \cdot 10^7 + 6,38 \cdot 10^6 = 4,238 \cdot 10^7$ m. El módulo de la aceleración de la gravedad será:

$$|\overrightarrow{g}| = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(4,238 \cdot 10^7)^2} = 0,22 \text{ m/s}^2$$

19.b.- Para que la órbita sea geoestacionaria, el periodo debe ser igual al periodo de rotación terrestre, es decir, 86400 s. Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (4,238 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 86870 \text{ s}$$

La órbita es aproximadamente geoestacionaria.

19.c.- El tiempo invertido será el cociente entre la distancia y la velocidad, en este caso la de la luz:

$$t = \frac{2 \cdot 3,6 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,24 \text{ s}$$

20.- La astronauta Sunita Williams participó desde el espacio en la maratón de Boston de 2007 recorriendo la distancia de la prueba en una cinta de correr dentro de la Estación Espacial Internacional. Sunita completó la maratón en 4 horas, 23 minutos y 46 segundos. La Estación Espacial orbitaba, el día de la carrera, a 338 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:

20.a.- El valor de la gravedad terrestre en la Estación Espacial.

20.b.- La energía potencial y la energía total de Sunita sabiendo que su masa es de 45 kg.

20.c.- ¿Cuántas vueltas a la Tierra dio la astronauta mientras estuvo corriendo?

Datos: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, masa de la Tierra = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre = 6371 km.

Solución:

20.a.- La aceleración de la gravedad en la estación espacial es:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5)^2} = 8,85 \text{ m/s}^2$$

20.b.- La energía potencial es:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 45}{6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5} = -2,671 \cdot 10^9 \text{ J}$$

mientras que la energía cinética tiene el valor:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 45}{2(6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5)} = 1,335 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía total, E=E_c+U valdrá:

$$E = -2,671 \cdot 10^9 + 1,335 \cdot 10^9 = -1,335 \cdot 10^9 \text{ J}$$

20.c.- La velocidad de la nave es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,371 \cdot 10^6 + 3,38 \cdot 10^5}} = 7,70 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El perímetro de la Tierra es 2π r= 40030 m, mientras que el tiempo invertido por la astronauta, expresado en segundos es 15826. De esta forma, el número de vueltas será:

$$n = \frac{7,70 \cdot 10^3 \cdot 15826}{40030} = 3,04 \text{ vueltas}$$

21.- Sabiendo que la Luna tiene una masa de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg y que el campo gravitatorio en su superficie es la sexta parte que en la superficie terrestre, calcule:

21.a.- El radio de la Luna.

21.b.- La longitud de un péndulo en la Luna para que tenga el mismo período que otro péndulo situado en la Tierra y cuya longitud es de 60 cm.

21.c.- El momento angular de la Luna respecto a la Tierra.

Dato: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, distancia Luna-Tierra = $3,84 \cdot 10^8$ m.

Solución:

21.a.- Teniendo en cuenta el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (9,8 m/s^2, podremos poner que:

$$g_L = \frac{9,8}{6} = \frac{GM_L}{r_L^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{r_L^2}$$

de donde, despejando, se obtiene:

$$r_L = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 6}{9,8}} = 1,732 \cdot 10^6 \text{ m}$$

21.b.- El periodo de un péndulo viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El periodo del péndulo en la Tierra será $T = 2\pi\sqrt{\frac{0,6}{9,8}} = 1,55s$, por lo cual:

$$1,55 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9,8/6}}$$

obteniéndose así l =0,1 m

21.c.- El módulo del momento angular de la Luna respecto a la Tierra será $|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r}||\overrightarrow{mv}|\,\text{sen}\,90^o$. La velocidad de la órbita de la Luna se puede obtener conociendo su periodo de rotación alrededor de la Tierra (28 días). Aplicando la tercera ley de Kepler, tendremos:

$$(28 \cdot 86400)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}{GM}$$

de donde se obtiene el valor de GM, $3,84 \cdot 10^{14}$
La velocidad de la órbita será:

$$(*) \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3,84 \cdot 10^{14}}{3,84 \cdot 10^8}} = 10^3 \text{ m/s}$$

por lo que, sustituyendo, tendremos:

$$|\overrightarrow{L}| = 3,84 \cdot 10^8 \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 10^3 = 2,82 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cabe destacar de este apartado que es necesario conocer el periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra, o la masa de ésta última, pues en la expresión de la velocidad (*), la masa que aparece es la de la Tierra (cuerpo respecto al cual se describe la órbita)

22.- La masa de la Luna es de 7,356 · 10^{22} kg y la de la Tierra de 5,986 · 10^{24} kg. La distancia media de la Tierra a la Luna es de 3,846 · 10^{8} m. Calcule:

22.a.- El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra.

22.b.- La energía cinética de la Luna.

22.c.- A qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza neta ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo allí situado. Dato: G=$6,67 \cdot 10^{-11} en unidades S.I.$

Solución:

22.a.- Ver problema 8, apartado c.

22.b.- La energía cinética será:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,536 \cdot 10^{22} \cdot 5,986 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 3,846 \cdot 10^8} = 3,91 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

.

22.c.- Ver problema 8, apartado b.

23.- Los cuatro satélites de Júpiter descubiertos por Galileo son: Ío (radio = 1822 km, masa = $8,9 \cdot 10^{22}$ kg, radio orbital medio = 421600 km), Europa, Ganímedes y Calisto (radio = 2411 km, masa = $10,8 \cdot 10^{22}$ kg).

23.a.- Calcule la velocidad de escape en la superficie de Calisto.

23.b.- Obtenga los radios medios de las órbitas de Europa y Ganímedes, sabiendo que el período orbital de Europa es el doble que el de Ío y que el período de Ganímedes es el doble que el de Europa.

23.c.- Sean dos puntos en la superficie de Ío: uno en la cara que mira a Júpiter y otro en la cara opuesta. Calcule el campo gravitatorio total (es decir: el creado por la masa de Ío más el producido por la atracción de Júpiter) en cada uno de esos dos puntos.

Datos: masa de Júpiter = $1,9 \cdot 10^{27}$ kg, G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²

Solución:

23.a.- La velocidad de escape viene expresada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10,8 \cdot 10^{22}}{2,411 \cdot 10^6}} = 2444,5 \text{ m/s}$$

23.b.-

$$\frac{T_E^2}{T_I^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_E^3/GM_J}{4\pi^2 r_I^3/GM_J} = \left(\frac{r_E}{r_I}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3} \cdot r_I = 4,216 \cdot 10^8 \cdot 2^{2/3} = 6,69 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\frac{T_G^2}{T_E^2} = 2^2 = \frac{4\pi^2 r_G^3/GM_J}{4\pi^2 r_G^3/GM_J} = \left(\frac{r_G}{r_E}\right)^3 \Rightarrow r_E = 2^{2/3} \cdot r_I = 6,69 \cdot 10^8 \cdot 2^{2/3} = 1,062 \cdot 10^9 \text{ m}$$

23.c.- El módulo del campo gravitatorio de Ío es:

$$g_I = \frac{GM_I}{r_I^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,9 \cdot 10^{22}}{(1,822 \cdot 10^6)^2} = 1,79 \text{ N/Kg}$$

El módulo del campo creado por Júpiter en los dos puntos extremos de Ío será:

$$\text{En el punto A más cercano } g_{J-A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4,216 \cdot 10^8 - 1,822 \cdot 10^6)^2} = 0,719 \text{ N/Kg}$$

$$\text{En el punto A más lejano } g_{J-A} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}}{(4,216 \cdot 10^8 - 1,822 \cdot 10^6)^2} = 0,707 \text{ N/Kg}$$

Así pues, el módulo del campo gravitatorio total será:

$$g_A \text{ (en el punto más cercano)} = 1,79 - 0,719 = 1,071 \text{ N/Kg}$$

$$g_B \text{ (en el punto más lejano)} = 1,79 + 0,719 = 2,497 \text{ N/Kg}$$

24.- Plutón tiene una masa de $1{,}29 \cdot 10^{22}$ kg, un radio de 1151 km y el radio medio de su órbita alrededor del Sol es de $5,9 \cdot 10^9$ km.

24.a.- Calcule g en la superficie de Plutón.

24.b.- Su satélite Caronte tiene una masa de $1,52 \cdot 10^{21}$ kg y está a 19640 kilómetros de él. Obtenga la fuerza de atracción gravitatoria entre Plutón y Caronte.

24.c.- Calcule cuántos años tarda Plutón en completar una vuelta alrededor del Sol. Datos: masa del Sol = $1,98 \cdot 10^{30}$ kg, G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^{-2}

Solución:

24.a.- El valor de g viene dado por la expresión:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,29 \cdot 10^{22}}{(1,151 \cdot 10^6)^2} = 0,649 \text{ m/s}^2$$

24.b.- La fuerza de atracción gravitatoria entre Plutón y Caronte será:

$$F = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,29 \cdot 10^{22} \cdot 1,52 \cdot 10^{21}}{(1,964 \cdot 10^7)^2} = 3,39 \cdot 10^{18} \text{ N}$$

24.c.- Aplicando la tgercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(5,9 \cdot 10^{12})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}} = 7,835 \cdot 10^9 s$$

que equivale a 248, 45 años

25.- El radio del Sol es de 696 000 km y su masa vale $1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

25.a.- Halla el valor de la gravedad en la superficie solar.

25.b.- Si el radio de la órbita de Neptuno alrededor del Sol es 30 veces mayor que el de la órbita terrestre, ¿cuál es el período orbital de Neptuno, en años?

25.c.- Si el Sol se contrajese para convertirse en un agujero negro, determina el radio máximo que debería tener para que la luz no pudiera escapar de él. Dato: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·Kg^{-2}

Solución:

25.a.- La aceleración de la gravedad será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(6,96 \cdot 10^8)^2} = 274 \text{ m/s}^2$$

25.b.- Teniendo en cuenta que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año ($3,1536 \cdot 10^7$ s), podemos poner:

$$(3,1536 \cdot 10^7)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_S}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (30r)^3}{GM_S}$$

con lo que, dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\left(\frac{3,1536 \cdot 10^7}{T}\right)^2 = \frac{1}{30^3}$$

siendo el periodo:

$$T = \sqrt{(3,1536 \cdot 10^7)^2 \cdot 30^3} = 5,214 \cdot 10^9 \text{ s que equivale a } 165,33 \text{ años}$$

25.c.- Para que la luz no escape de un agujero negro, la velocidad de escape deberá igualarse a c, es decir:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

despejando el radio:

$$r = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{9 \cdot 10^{16}} = 2949,6 \text{ m}$$

26.- Un avión de pasajeros vuela a 8 km de altura a una velocidad de 900 km/h. La masa total del avión, contando combustible, equipaje y pasajeros, es de 300 000 kg. Calcula:

26.a.- La energía mecánica del avión.

26.b.- El valor de la gravedad terrestre en el avión.

26.c.- La fuerza gravitatoria que ejerce el avión sobre la Tierra.

Dato: radio medio de la Tierra = 6371 km

Solución:

26.a.- La energía mecánica del avión será la suma de sus energía cinética y potencial, siendo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 10^5 \cdot 250^2 = 9,375 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Para calcular la energía potencial, cuya expresión es U = -GMm/r, necesitamos conocer el valor de GM, el cual podemos calcular conociendo el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra:

$$9,8 = \frac{GM}{(6,371 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow GM = 3,98 \cdot 10^{14}$$

A partir de este valor, tendremos que:

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{3,98 \cdot 10^{14} \cdot 3 \cdot 10^5}{(6,371 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3)} = -1,87 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

La energía mecánica será:

$$E = E_c + U = 9,375 \cdot 10^9 - 1,87 \cdot 10^{13} = -1,869 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

26.b.- El valor de g será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{3,98 \cdot 10^{14}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3)^2} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

26.c.- La fuerza gravitatoria será:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = mg = 3 \cdot 10^5 \cdot 9,78 = 2,934 \cdot 10^6 \text{ N}$$

27.- De un antiguo satélite quedó como basura espacial un tornillo de 50 g de masa en una órbita a 1000 km de altura alrededor de la Tierra. Calcula:

27.a.- El módulo de la fuerza con que se atraen la Tierra y el tornillo.

27.b.- Cada cuántas horas pasa el tornillo por el mismo punto.

27.c.- A qué velocidad, expresada en Km/h, debe ir un coche de 1000 Kg de masa para que tenga la misma energía cinética del tornillo.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2/Kg^2$, masa de la Tierra = 5,97·10^{24} Kg; radio terrestre = 6371 Kg

Solución:

27.a.- El módulo de la fuerza será:

$$|\overrightarrow{F}| = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{(6,371 \cdot 10^6 + 10^6)^2} = 0,366 \text{ N}$$

27.b.- El tiempo pedido es el periodo. Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,37 \cdot 10^6 + 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} = 6287 \text{ s} \quad (1,75\text{horas})$$

27.c.- La energía cinética del tornillo será:

$$E_c = \frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{2(6,371 \cdot 10^6 + 10^6)} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ J}$$

para el coche, tendremos:

$$1,35 \cdot 10^6 = \frac{1}{2}\, 1000 v^2$$

de donde obtenemos v = 52 m/s

28.- Un escalador de 70 kg de masa asciende a la cima del Everest, cuya altura es de 8848 m. Calcula:

28.a.- El peso del escalador en la superficie terrestre a nivel del mar.

28.b.- El valor de la gravedad en lo alto del Everest.

28.c.- El momento angular del escalador respecto al centro de la Tierra, considerando que el escalador rota con la Tierra.

Datos: G =6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2, masa de la Tierra = 5,97·10^{24} kg, radio terrestre = 6371 km.

Solución:

28.a.- El peso del escalador será:

$$\mathrm{mg} = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 70}{(6,371 \cdot 10^6)^2} = 686,73 \text{ N}$$

28.b.- La aceleración de la gravedad en lo alto del Everest vendrá dada por:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2} = 9,78\ m/s^2$$

28.c.- $|\overrightarrow{\mathrm{L}}| = |\overrightarrow{\mathrm{r}}||\overrightarrow{\mathrm{mv}}| = \mathrm{m}\ \omega \mathrm{r}^2$, siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{86400}$. Suponiendo el escalador en la cima del Everest, $\mathrm{r} = 6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3$ m, por lo cual:

$$|\overrightarrow{\mathrm{L}}| = 70\ \frac{2\pi}{86400}\ (6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2 = 2,07 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

29.- El 5 de mayo de 2012 hubo una "superluna": la Luna estuvo a sólo 356955 km de la Tierra, la menor distancia del año en su órbita elíptica. (Toma los astros como masas puntuales).

29.a.- Calcula la fuerza con que se atraían la Tierra y la Luna el 5 de mayo.

29.b.- Considera en este apartado que la órbita de la Luna es circular, con un radio medio de 384402 km. Calcula el periodo orbital de la Luna alrededor de la Tierra.

29.c.- El 19 de mayo la Luna se situó a 406450 km. Calcula la diferencia entre el valor de la gravedad creada por la Luna el 5 de mayo yl el valor del 19 de mayo.

Solución:

29.a.- El módulo de la fuerza viene dado por:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,55 \cdot 10^{22}}{(3,56955 \cdot 10^8)^2} = 2,297 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

29.b.- Aplicando la tercera Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (3,84402 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 2,373 \cdot 10^6 \text{ s}$$

29.c.- La aceleración de la gravedad en cada uno de los casos será:

$$g_1 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(4,06450 \cdot 10^8)^2} = 2,97 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2$$

$$g_2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,56955 \cdot 10^8)^2} = 3,85 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2$$

siendo la diferencia: $g_2 - g_1 = 3,85 \cdot 10^{-5} - 2,97 \cdot 10^{-5} = 8,8 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2$

30.- Utiliza los datos proporcionados para calcular:

30.a.- La gravedad en la superficie de la Luna.

30.b.- velocidad de escape de la Tierra.

30.c.- La fuerza con que se atraen los dos astros.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; masa de la Tierra = 5,97·10^{24} kg; masa de la Luna = 7,35·10^2 kg; radio de la Luna = 1738 km; velocidad de escape de la Luna = 2,38 km/s; periodo orbital de la Luna =28 días.

Solución:

30.a.- La gravedad en la superficie de la Luna será:

$$g = \frac{GM_L}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6)^2} = 1,62\ \text{m/s}^2$$

30.b.- Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra vale 9,8 m/s^2, podremos poner:

$$9,8 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{r_T^2}$$

obteniéndose un valor de r$_T$ = $6,374 \cdot 10^6$ m. Con este valor, hallaremos la velocidad de escape de la Tierra:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,374 \cdot 10^6}} = 11177,8\ \ \text{m/s}$$

30.c.- Para calcular la fuerza de atracción entre los dos astros, debemos conocer la distancia entre sus centros, que obtenemos aplicando la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

Despejando r, tendremos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(28 \cdot 86400)^2 6,67 \cot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Con lo que, finalmente:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,89 \cdot 10^8)^2} = 1,93 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

31.- La población mundial es de 7000 millones de habitantes. Considera que la masa media de una persona es de 50 kg. Calcula:

31.a.- El peso del conjunto de todos los habitantes del planeta.

31.b.- La fuerza gravitatoria entre dos personas distanciadas 1 m.

31.c.- La energía gravitatoria entre esas dos mismas personas.

Solución:

31.a.- El peso total será: P = mg = $7{\cdot}10^9 \cdot 50 \cdot 9,8 = 3{,}43{\cdot}10^{12}$ N

31.b.- La fuerza gravitatoria entre dos personas situadas una a 1 m de la otra, será

$$F = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 50}{1^2} = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

31.c.- La energía una persona debido a la otra será:

$$U = -\frac{GMm}{r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot 50}{1} = 1,67 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

32.- El rover Curiosity llegó a Marte el pasado mes de Agosto y todavía se encuentra alli explorando su superficie. Es un vehículo de la misión Mars Science Laboratory, un proyecto de la NASA para estudiar la habitabilidad del planeta vecino (http://mars.jpl.nasa.gov/msl/). La masa del Curiosity es de 899 kg, y se encuentra sobre la superficie de Marte. Calcula:

32.a.- La velocidad de escape de Marte.

32.b.- Cuánto pesa el Curiosity en la Tierra y en Marte.

32.c.- Cuántos dias terrestres deben transcurrir para que el Curiosity complete una vuelta alrededor del Sol.

Datos: G = 6,67·10^{-11} N· $m^2 \cdot kg^{-2}$; masa de Marte = 6,42·10^{23} kg; radio de Marte = 3396 km; radio orbital medio de Marte = 2,28·10^8 km; masa del Sol = 1,989·10^{30} kg

Solución:

32.a.- La velocidad de escape es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,396 \cdot 10^6}} = 5021,83 \text{ m/s}$$

32.b.- Los respectivos pesos en la Tierra y en Marte son:

$$P\ (Tierra) = 899 \cdot 9,8 = 8810,2 \text{ N}$$

$$P\ (Marte) = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 899}{(3,396 \cdot 10^6)^2} = 3338 \text{ N}$$

32.c.- El periodo será el mismo que el de Marte. Aplicando la tercera ley de Kepler, tendremos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(2,28 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}} = 5,94 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Que equivalen a:

$$T = \frac{5,94 \cdot 10^7}{86400} = 687,5 \text{ días}$$

33.- Un escalador de 70 kg asciende a la cima del Everest, cuya altura es de 8848 m. Calcula:

33.a.- El peso del escalador en la superficie terrestre.

33.b.- El valor de la gravedad en lo alto del Everest.

33.c.- El momento angular del escalador respecto al centro de la Tierra, considerando que aquel rota con la Tierra.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2

Solución:

33.a.- El peso será: P = mg $= \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 70}{(6,371 \cdot 10^6)^2} = 686,72$ N

33.b.- La gravedad en lo alto del Everest será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)^2} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

33.c.- El momento angular del escalador, referido al centro de la Tierra; será:

$$|\overrightarrow{L}| = |\overrightarrow{r}|\,|\overrightarrow{mv}| \text{ sen } 90^{\circ}$$

La velocidad será la de giro de la Tierra, es decir:

$$v = \omega \text{ r} = \frac{2\pi}{86400}(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3) = 463,96 \text{ m/s}$$

Por tanto, el momento angular será:

$$(6,371 \cdot 10^6 + 8,848 \cdot 10^3)\ 70 \cdot 463,96 = 2,072 \cdot 10^{11}; \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$