Tema 5: Campo Gravitatorio

5.1.- Introducción.

Cuando en el espacio vacío se introduce una partícula, ésta lo perturba, modifica, haciendo cambiar su geometría, de modo que otra partícula que se sitúa en él, estará sometida a una acción debida a la deformación producida por la primera, es decir; las partículas interaccionan por medio de los campos que ellas crean.

¿Y qué entendemos por campo?.

Se llama ***campo*** a toda región del espacio tal que en cada uno de sus puntos se pone de manifiesto valores iguales o distintos de una magnitud física.

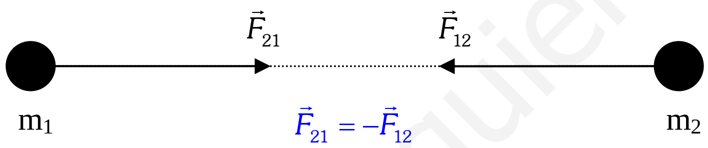
Si la magnitud física que se pode de manifiesto es vectorial, diremos que el campo es vectorial, mientras que si la magnitud es escalar, el campo será escalar.

Si la magnitud física es una fuerza, el campo se llama campo vectorial de fuerzas.

Campo gravitatorio es un campo vectorial de fuerzas cuya magnitud activa es la masa.

5.2.- Ley de la Gravitación Universal:

Una masa crea a su alrededor un campo gravitatorio, dicho campo se manifiesta cuando un objeto se sitúa en la zona de influencia de la masa, tal que al colocarla allí, el objeto se ve sometido a una fuerza de atracción, que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia al cuadrado que las separa.



$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}\cdot\hat{r}}$$

donde G es la cte. de gravitación universal y vale $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2 y el vector $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une las dos masas.

El signo negativo (-) indica que la fuerza es siempre atractiva.

<u>Ejemplo 1:</u> Un bloque de 5 toneladas dista de otro, de masa 1 tonelada, una distancia de 5m. Este segundo bloque se apoya sobre un suelo horizontal, cuyo coeficiente de rozamiento contra él vale 0,02. Explicar razonadamente por qué el segundo bloque no se mueve hacia el primero.

La fuerza gravitatoria con la que atrae hacia sí el primer bloque al segundo viene dada por la ley de la gravitación universal:

$$F = G\frac{m\cdot m'}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot5000kg\cdot1000kg}{25m^2} = 1{,}33\cdot10^{-5}N$$

La fuerza de rozamiento que impide el movimiento del segundo bloque hacia el primero vale:

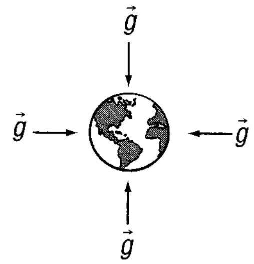
$$F_r = \mu\cdot N = \mu\cdot m\cdot g = 0{,}02\cdot1000kg\cdot9.81m\cdot s^{-2} = 196N$$

Como vemos es mucho mayor que la fuerza de atracción entre ambos bloques. Por eso, el bloque segundo no se mueve hacia el primero.

5.3.- Intensidad del campo gravitatorio

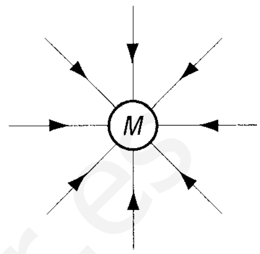
La intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ que crea un cuerpo de masa M en un punto del campo situado a una distancia $\vec{r}$ de la masa, es la relación que existe entre la fuerza gravitatoria $\vec{F}$ a la que está sometido un cuerpo situado en dicho punto y el valor de la masa m.

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{-G\frac{M\cdot m}{r^2}\cdot\hat{r}}{m}=-G\frac{M}{r^2}\cdot\hat{r}$$



La dirección y el sentido de la intensidad del campo gravitatorio los proporciona la fuerza gravitatoria $\vec{F}$, ello permite intuir como son las líneas de fuerza del campo gravitatorio.

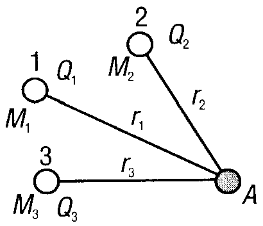
Por tanto, el campo gravitatorio es un vector que tiene como dirección la recta que une el centro del cuerpo con el punto donde se calcula, y con sentido siempre dirigido hacia el cuerpo que crea el campo gravitatorio. Se mide en [N/kg]



Las líneas de campo son radiales, con origen en la masa o carga puntual. La densidad de las líneas de campo está relacionada con la intensidad del campo. El vector campo es tangente a las líneas de campo en cada punto.

5.3.1.- Principio de superposición

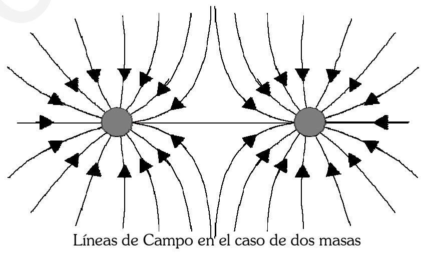
El campo gravitatorio y el potencial creado en un punto del espacio por un sistema de masas respectivamente es la suma (vectorial en el caso del campo, escalar en el caso del potencial) de los campos o de los potenciales creados en aquel punto por cada una de las masas por separado.



$$\vec{g}_A=\sum_i\vec{g}_i=\vec{g}_1+\vec{g}_2+\vec{g}_3+......+\vec{g}_n$$

$$\vec{E}_A=\sum_i\vec{E}_i=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+......+\vec{E}_n$$

$$V_A=\sum_i V_i=V_1+V_2+V_3+........+V_n$$



Líneas de Campo en el caso de dos masas

***Ejemplo 2:* Calcula el vector intensidad de campo gravitatorio creado por dos masas de 10 kg situadas en los puntos (0,3) y (4,0) en el origen de coordenadas.**

Calculamos el campo gravitatorio creado por cada una de ellas en el origen de coordenadas:

$$\vec{g}_1=-G\frac{M}{r^2}\cdot\hat{r}=-G\frac{10}{9}\hat{j} \qquad \vec{g}_2=-G\frac{M}{r^2}\cdot\hat{r}=-G\frac{10}{16}\hat{i}$$

Y ahora mediante el principio de superposición, sumamos vectorialmente ambos vectores:

$$\vec{g}=-G\frac{10}{16}\cdot\hat{i}-G\frac{10}{9}\cdot\hat{j}=-G\left(\frac{10}{16}\hat{i}+\frac{10}{9}\hat{j}\right)\ N\cdot kg^{-1}$$

5.4.- Energía Potencial Gravitatoria:

La energía potencial gravitatoria de una masa en un punto del campo gravitatorio es el trabajo, cambiado de signo, que el campo realiza sobre la masa cuando esta se traslada desde el infinito hasta dicho punto:

$$E_p(r)=-W_{\infty\to r}=\int_\infty^r\vec{F}_g\cdot d\vec{r}$$

Si integramos esta expresión, obtenemos:

$$E_p(r)=-\int_\infty^r\vec{F}_g\cdot d\vec{r}=-\int_\infty^r-\frac{G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot dr=G\cdot m\cdot m\int_\infty^r\frac{dr}{r^2}=G\cdot M\cdot m\left[\frac{-1}{r}\right]_\infty^r=\frac{-GM\cdot m}{r}-\cancelto{0}{\frac{-G\cdot m\cdot m}{\infty}}=-\frac{G\cdot m\cdot m}{r}$$

Por tanto la energía potencial de una masa en un punto del campo gravitatorio viene dada por:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r}$$

Que es la energía que tiene un sistema formado por dos masas M_1 y M_2 separadas una distancia r.

La energía potencial es una magnitud escalar que se mide en Julios [J]

Como podemos observar, el trabajo realizado solo depende de la posición, y no del camino seguido: Luego las fuerzas gravitatorias son fuerzas conservativas.

***Ejemplo 3:* Halla la energía potencial de una masa de 100 kg en la superficie de la tierra cuyo radio es de 6400 km.**
Sustituyendo directamente los datos en la expresión:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 100 kg \cdot 6 \cdot 10^{24} kg}{6,4 \cdot 10^6 m} = 6,25 \cdot 10^9 J$$

5.5.- Potencial Gravitatorio

El potencial gravitatorio V(r) que crea un cuerpo de masa M en un punto separado una distancia $\vec{r}$ de dicho cuerpo es la relación que existe entre la energía potencial gravitatoria que adquiera un cuerpo de masa m al situarse en ese punto y el valor de dicha masa.

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = \frac{-G\frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$

donde r es la distancia desde el centro de la masa al punto donde se calcula el potencial.

El potencial gravitatorio depende solo de la posición y de la masa que crea el campo, y es independiente de la masa del cuerpo que coloquemos en ese punto, es una magnitud escalar que se mide en [J/Kg]

La relación entre la energía potencial, el potencial y el trabajo que realiza el sistema para mover una masa M desde el punto A hasta el punto B es la siguiente:

$$W = M \cdot (V_B - V_A) = -\Delta E_p$$

***Ejemplo 4*: Calcúlese el potencial gravitatorio creado por una masa esférica de 100 kg y 2m de diámetro, en un punto situado a 9m de su superficie. ¿Cuál es la energía potencial de una masa de 1kg situada en ese punto?. Dato: $G=6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.**

Este ejercicio se puede hacer de dos formas, según cual se el origen de potenciales que elijamos:

a) Si tomamos como origen de potenciales el infinito, el potencial gravitatorio considerado será:

$$V = -G\frac{M}{r} = -6,77 \cdot 10 N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot \frac{100kg}{10m} = -6,67 \cdot 10^{-10} J / kg$$

b) Tomando como origen de potenciales la superficie de la masa esférica tenemos:

$$V = -GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right) = -6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 100kg\left(\frac{1}{10m} - \frac{1}{1m}\right) = 6 \cdot 10^{-9} J / kg$$

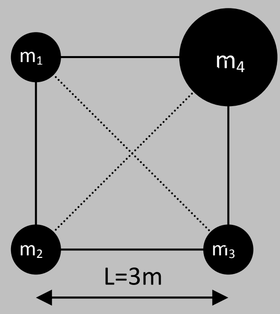
$$E_p = m \cdot V = 1kg \cdot 6 \cdot 10^{-9} J / kg = 6 \cdot 10^{-9} J$$

Ejemplo 5: ***Cuatro masas están situadas en los vértices de un cuadrado como se ve en la figura. Determinar:***

a) Módulo, dirección y sentido del campo gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado.

b) Potencial gravitatorio en el mismo.

Datos: $m_1 = m_2 = m_3 = 100kg$, $m_4 = 200kg$, $L = 3m$



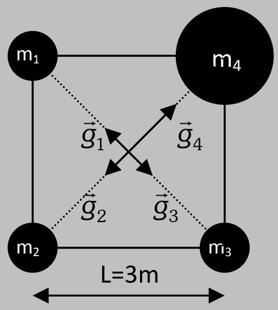
a) Para calcular el campo gravitatorio en el centro del cuadrado, calculamos el campo creado por cada una de las cargas en ese punto.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$$

Primero calculamos la distancia de cada una de las masas al centro del cuadrado. Esa distancia es la mitad de la diagonal de un cuadrado.

$$d = \frac{\sqrt{2L^2}}{2} = 2{,}12m$$

Como las masas m_1,m_2,m_3, son iguales y las tres están a la misma distancia del centro, el módulo del campo creado por cada una de ellas en el centro será el mismo, es decir $g_1=g_2=g_3$ y valdrá:

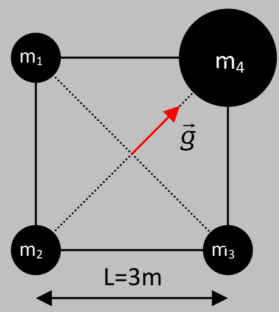


$$g_1 = g_2 = g_3 = \frac{G \cdot m}{d^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{4{,}5} = 1{,}48 \cdot 10^{-9}\ N/kg$$

Calculamos el módulo de g para la masa 4:

$$g_4 = \frac{G \cdot m_4}{d^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 200}{4{,}5} = 2{,}96 \cdot 10^{-9}\ N/kg$$

La dirección y el sentido del vector campo creado por cada una de ellas es radial y dirigido hacia las masas. Como $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_3$ son iguales en dirección y módulo, pero de sentido contrario se anularán entre sí.



El campo total será la suma vectorial de $\vec{g}_2$ y $\vec{g}_4$. Su módulo valdrá $g = g_4 - g_2$

$$g = 2{,}96 \cdot 10^{-9}\ N/kg - 1{,}48 \cdot 10^{-9} = 1{,}48 \cdot 10^{-9}\ N/kg$$

La dirección y el sentido del vector campo son las que se observan en la figura.

b) Para calcular el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado aplicamos el principio de superposición:

$$V = \sum_i V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V = -\frac{G \cdot m_1}{d} - \frac{G \cdot m_2}{d} - \frac{G \cdot m_{31}}{d} - \frac{G \cdot m_4}{d} = -\frac{G}{d}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

$$V = -\frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2}{2{,}12m}(500kg) = -1{,}57 \cdot 10^{-8}\ J/kg$$

5.6.- Campo Gravitatorio en la superficie terrestre:

Como hemos visto con anterioridad, la intensidad del campo gravitatorio se calcula mediante:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\cdot\hat{r}$$

En la superficie de la tierra tendremos que:

$$g_o = -G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}37 \cdot 10^6\right)^2} = 9{,}829\ \text{N} \cdot kg^{-1}$$

En un punto situado a una altura h (grande) de la superficie terrestre, tendremos:

$$g = -G\frac{M_T}{\left(R_T + h\right)^2}$$

Valores de g al nivel del mar en algunos puntos de la superficie terrestre:

Polo norte: g_o= 9,832 N/Kg
Madrid: g_o= 9,80 N/Kg
Ecuador: g_o= 9,781 N/Kg
París: g_o= 9,81 N/Kg

Masa de la Tierra:
$5{,}9736 \cdot 10^{24}$ Kg

Radio medio Tierra:
6371 km

y como

$$g_o = -G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones miembro a miembro tenemos:

$$\frac{g_o}{g} = \frac{\frac{GM_T}{R_T^2}}{\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}} = \frac{(R_T+h)^2}{R_T^2} = \frac{R_T^2+h^2+2R_Th}{R_T^2} = 1+\frac{2h}{R_T}+\frac{h^2}{R_T^2} = \left(1+\frac{g}{R_T}\right)$$

De donde despejando g obtenemos:

$$g = \frac{g_o}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

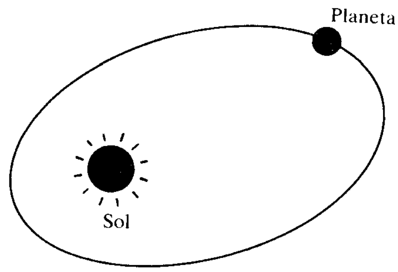
Que es el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia h (grande) de la superficie.

Si la distancia no es muy grande, g se calcula mediante: $g = g_o \cdot \left(1-\frac{2h}{R_T}\right)$

Si por el contrario el valor de g bajo el nivel del mar lo calcularíamos mediante: $g = g_o\left(1-\frac{h}{R_T}\right)$

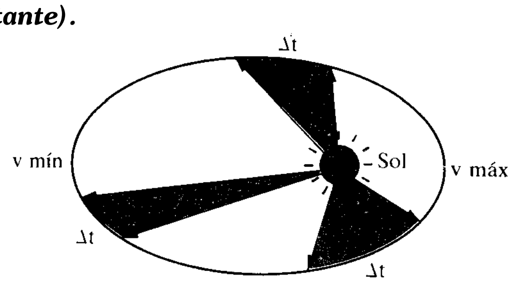
5.7.- Movimiento planetario

5.7.1.- Leyes de kepler



- ***1ª Ley:*** ***Los planetas en su movimiento alrededor del sol describen orbitas elípticas, estando este en uno de los focos de dicha elipse.***

- ***2ª Ley.*** ***El segmento que une el sol con un planeta barre áreas iguales en tiempo iguales. (Velocidad areolar constante).***



Para demostrar esta ley hemos de recordar que el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que forman. Por tanto, la mitad de dicho área coincidirá con el área del triángulo formado por ambos vectores.

Los planetas se mueven en torno a su estrella describiendo elipses. En un tiempo dt, el planeta se desplaza una distancia $d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt$, el área barrida por el radiovector en ese tiempo vendrá dada por:

$$dA = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}\wedge d\vec{r}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{r}\wedge\vec{v}\cdot dt\right\|$$

Dividiendo esta expresión por dt tenemos:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\frac{1}{2}\left\|\vec{r}\wedge d\vec{r}\right\|}{dt}=\frac{1}{2}\left\|\vec{r}\wedge\vec{v}\right\|$$

Teniendo en cuenta que el momento angular es:

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}=\vec{r}\wedge m\cdot\vec{v}$$

De aquí:

$$\frac{\vec{L}}{m}=\vec{r}\wedge\vec{v}$$

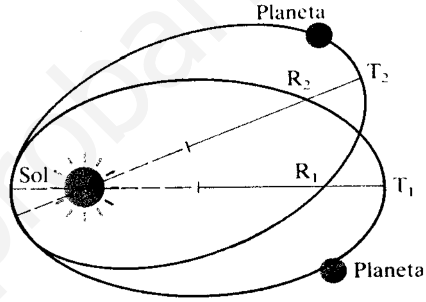
Sustituyendo en la expresión anterior, nos queda:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\left\|\vec{L}\right\|}{m}$$

Como la fuerza gravitatoria es central, siempre va dirigida al centro, el momento angular permanece constante, y al ser también constante la masa del planeta, resulta:

$$\frac{dA}{dt}=cte.$$

- ***<u>3ª Ley.</u> El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.***



$$\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3}=.....=cte$$

***Ejemplo 6:* La luna dista de la tierra 384.000 km y su periodo de revolución alrededor de esta es 27,32 días. ¿Cuál será su periodo de revolución si se encontrase a 100000km de la tierra?**

Según la ***tercera ley de Kepler***: El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol.

$$\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3}=.....=cte$$

Por tanto:

$$T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=27{,}32dias\cdot\sqrt{\left(\frac{100000km}{384000km}\right)^3}=3{,}63dias$$

5.8.- Dinámica del movimiento planetario

5.8.1.- Velocidad Orbital:

Para analizar el movimiento de un planeta alrededor del sol. Aproximamos la orbita del planeta a una circunferencia, es decir, suponemos la trayectoria del planeta circular. Si aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento del planeta tendremos:

$$\boxed{\sum F=m_p\cdot a}$$

Si suponemos que la única fuerza de interacción entre el sol y el planeta es la gravitatoria:

$$\vec{F}=-G\frac{M_1\cdot M_2}{r^2}\cdot\hat{r}$$

y que el planeta describe un movimiento circular.

Igualando ambas fuerzas, la gravitatoria y la centrípeta, tenemos:

$$\frac{G \cdot M_s \cdot m_p}{r^2} = m_p a_N$$

Como

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

entonces:

$$\frac{G \cdot M_s}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Y de aquí:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{r}}$$

Que es la velocidad con la que se mueve el planeta en su órbita.

5.8.2.- Periodo de revolución de un planeta:

El tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa al Sol, se llama periodo de revolución, o simplemente periodo, y se representa por T.

Al ser un movimiento uniforme, ya que el periodo siempre es el mismo, podemos decir:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{velocidad}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_S}}$$

Por tanto:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}}$$

De este resultado podemos extraer una importante consecuencia: Elevando al cuadrado y despejando…..

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3 \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} = Cte$$ Obtenemos la expresión de la tercera ley de Kepler

5.8.3.- Energía de los Planetas:

Un planeta situado a una distancia r del sol tendrá una energía potencial dada por:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_s \cdot m_p}{r}$$

Este planeta, además, y debido a su velocidad, tendrá una energía cinética dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2$$

Si sumamos ambas energías, obtenemos la energía mecánica de un planeta en una orbita:

$$\boxed{E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2 - \frac{G M_s m_p}{r}}$$

Operando llegamos a:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2 - \frac{GM_s m_p}{r} = \frac{1}{2} m_p \left(\sqrt{\frac{G \cdot M_s}{r}} \right)^2 - \frac{G \cdot M_S \cdot m_p}{r} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M_S \cdot m_p}{r} - \frac{G \cdot M_S \cdot m_p}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_S \cdot m_p}{r}$$

Por tanto la energía mecánica de un planeta en una órbita viene dada por:

$$\boxed{E = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_s \cdot m_p}{r}}$$

Estas relaciones de la velocidad y de la energía de un planeta alrededor del sol son igualmente validas para el movimiento de cualquier satélite alrededor de la Tierra, o de cualquier cuerpo en general que describa una orbita circular alrededor de otro.

5.8.4.- Velocidad de escape

La velocidad de escape es la mínima velocidad que debe llevar un cuerpo para que se pueda escapar de la atracción gravitatoria de un planeta, estrella…

La condición de velocidad de escape es que la energía mecánica del cuerpo al final sea 0, es decir la velocidad de escape es aquella que anula la energía mecánica de un cuerpo.

Para obtener una expresión para la velocidad de escape igualamos la energía mecánica a cero:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot Mm}{R} = 0$$

Por tanto despejando v:

$$v^2 = \frac{2G \cdot M}{R}$$

Y al final nos queda:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

***Ejemplo 7*: La masa de la luna es $6{,}7 \cdot 10^{22}$kg y su radio $1{,}6 \cdot 10^{6}$ m. a) ¿Qué distancia recorrerá en caída libre durante un segundo un cuerpo que se abandone el las proximidades de la superficie lunar?. B) S un hombre es capaz de elevar su centro de gravedad 1,2 m en un salto efectuado en la superficie terrestre, ¿qué altura alcanzará en la luna con el mismo impulso?.**

a) Lo primero es calcular el valor de g en la luna:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot \frac{6{,}7 \cdot 10^{22} kg}{1{,}6 \cdot 10^{6} m} = 1{,}74 m/s^2$$

Utilizando la ecuación de la caída libre de cuerpos:

$$h = h_o + v_o \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} 1{,}74 m/s^2 \cdot 1 = 0{,}87 m$$

b) Si el impulso del hombre en la tierra es el mismo que en la luna, su velocidad inicial en el salto será la misma.

$$v_o^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

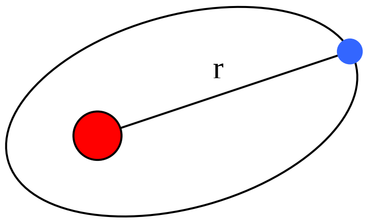
Por tanto habrá de cumplirse:

$$2 \cdot g_L \cdot h_L = 2 \cdot g_T \cdot h_T$$

De donde:

$$h_L = \frac{g_T \cdot h_T}{g_L} = \frac{9{,}81 m/s^2 \cdot 1{,}2 m}{1{,}74 m/s^2} = 6{,}8\ m$$

5.9.- Satélites



Por satélite entenderemos cualquier cuerpo (natural o artificial) que describa órbitas alrededor de un cuerpo celeste. Así, la Luna, o el satélite Hispasat, son satélites de la Tierra, y la Tierra es satélite del Sol.

Todo lo visto anteriormente en el apartado de dinámica de los planetas, se puede aplicar al movimiento de los satélites alrededor de la tierra.

Si nos referimos a un satélite que se mueve en torno a la tierra, su velocidad orbital vendrá dada por:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Donde M_T es la masa de la tierra y r la distancia entre el centro de la tierra y el satélite. Teniendo en cuenta que $r = R_T + h$r, la expresión quedará de la forma:

$$\boxed{v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}}$$

Donde R_T es el radio de la tierra y h la altura a la que orbitas el planeta.

En cuanto a su periodo de revolución, tendremos:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{velocidad}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$$

Por tanto:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}}$$

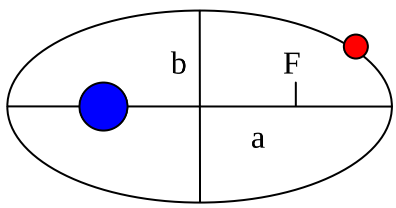
La energía de un satélite será:

$$\boxed{E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2 - \frac{GM_s m_p}{r}}$$

Esto hace que la posición y la velocidad del satélite en la órbita estén relacionadas. Para una posición concreta, el satélite tendrá una velocidad concreta. En los puntos más alejados de la órbita (r mayor), la E_p almacenada será mayor, por lo que la E_c será menor, y la velocidad también disminuirá. De la misma forma, al ir acercándose al planeta, su E_p disminuirá, produciendo un aumento de la E_c y, por tanto, de la velocidad.

Los puntos de máximo acercamiento y máximo alejamiento del satélite al cuerpo central reciben nombres propios. Para un satélite que orbita alrededor de la Tierra se habla de apogeo (alejamiento máximo) y perigeo (distancia mínima). Para el Sol, las palabras usadas son afelio y perihelio. En ambos puntos la velocidad es perpendicular al radio.

Semiejes y excentricidad de la órbita:



Toda elipse viene caracterizada, además de por los focos, por dos distancias llamadas semiejes, a y b (en la figura). Estas dos distancias sirven para calcular la excentricidad (e), magnitud que nos indica el achatamiento de la elipse, es decir, cuánto se aleja la elipse de una circunferencia perfecta.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad\qquad e < 1$$

En una circunferencia, a = b, con lo que e = 0. Cuanto menor sea la excentricidad, más parecida es la órbita a una circunferencia. Para el caso de los planetas alrededor del Sol, las excentricidades son muy pequeñas (la de la Tierra, por ejemplo, es de 0,017)

La ***velocidad de escape*** de un satélite será:

$$\boxed{v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R}}}$$

5.9.1.- Satélites geoestacionarios:

Este tipo de satélites artificiales son muy usados, sobre todo en telecomunicaciones (TV, radio "vía satélite"). Se denominan así porque siempre se encuentran sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Lógicamente no están quietos (se caerían), sino que se mueven al mismo ritmo que la Tierra, describiendo una vuelta en un día.

Así, su periodo es el mismo que el de la tierra: T = 24 h = 86400 s. aprox.

Como

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$$

si despejamos r, obtenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = 42,243 \cdot 10^6 \ m$$

Como vemos , para el caso de estos satélites geoestacionarios, la distancia resulta ser de unos 42300 km, o sea, describen órbitas a 36000 km de altura sobre la superficie terrestre, una distancia muy grande comparada con la altura que alcanzan los llamados “satélites de órbita baja”, entre 400 y 800 km sobre la superficie.

Para un satélite, la ***velocidad de escape*** es la velocidad mínima necesaria con la que hay que lanzarlo desde la superficie terrestre para que como su nombre indica escape, de forma efectiva, a la acción del campo gravitatorio terrestre.

Como hemos visto con anterioridad :

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R_T}}$$

Si tenemos en cuenta:

$$G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2$$

Y operamos un poco:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 g_o \cdot R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot g_o \cdot R_T} = 11,18 \cdot 10^3 \ m \cdot s^{-1}$$

Esta velocidad, mas de 11 kilómetros por segundo, es muy elevada, lo que explica las enormes dificultades que supone lanzar un cuerpo al espacio de modo que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre.