Solucionario

CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Física

AUTOR
Jorge Barrio Gómez de Agüero

2 BACHILLERATO

Oxford
EDUCACIÓN

Índice

Herramientas matemáticas de la física

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

- **1. Áreas y volúmenes de figuras geométricas** — página 7
- **2. Funciones trigonométricas** — páginas 7/8
  - **2.1. Funciones trigonométricas de ángulos pequeños** — página 7
  - **2.2. Identidades trigonométricas de interés** — página 8
- **3. Producto de vectores** — páginas 8/10
  - **3.1. Producto escalar** — página 8
  - **3.2. Producto vectorial** — página 9
  - **3.3. Aplicaciones del producto vectorial** — página 10
- **4. Desarrollo en serie de un binomio** — página 11
- **5. Cálculo diferencial** — páginas 11/13
  - **5.1. Cálculo de la derivada de la función $y(x) = x^n$** — página 12
  - **5.2. Propiedades de las derivadas** — página 12
  - **5.3. Derivación parcial** — página 13
- **6. Cálculo integral** — página 13

Cuestiones previas (página 6)

1. ¿Por qué las funciones trigonométricas son periódicas?

Porque se repiten los valores cada ciertos radianes. Por ejemplo, en el caso del seno y del coseno se repiten los valores cada 360°, y la tangente, cada 180°.

2. Cierto vector tiene por módulo 15 y ángulo 60° con el eje *X*. Determina sus coordenadas.

Componente *x*:

$$\vec{a_x} = 15 \cdot \cos 60° = 7{,}5\vec{i}$$

Componente *y*:

$$\vec{a_y} = 15 \cdot \text{sen } 60° = 13\vec{j}$$

3. Calcula el producto escalar y vectorial de los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \cdot 3) + (2 \cdot 2) = 10$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k} = (6 - 6)\,\vec{k} = 0$$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) **$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$**

b) **$f(x) = \cos x^2$**

a) $f'(x) = 4x + 3$

b) $f'(x) = -2x \,\text{sen}\, x^2$

Actividades (páginas 7/13)

1 Determina la equivalencia en radianes de un ángulo de 20°. Haciendo uso de la calculadora (en modo radián), verifica que los valores del seno y la tangente prácticamente coinciden con el valor del ángulo. Comprueba con otro ángulo menor que los valores son tanto más parecidos cuanto menor es el ángulo.

$$2\pi/360° = x/20° \rightarrow x = \pi/9 = 0{,}349 \text{ rad}$$

sen 20° = 0,342 y tg 20° = 0,356, valores parecidos al ángulo (expresado en radianes).

Si tomamos un ángulo menor, como 10° = 0,1745 rad

sen 10° = 0,1736 y tg 10° = 0,176, valores aún más parecidos al ángulo (expresado en radianes).

2 Demuestra que

$$2 \text{ sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

es igual a sen *a* + sen *b*.

Sugerencia:

$$\text{sen} \frac{a+b}{2} = \text{sen}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

Desarrollando la primera expresión y utilizando propiedades matemáticas:

$$2 \text{ sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2\left(\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2} + \text{sen}^2\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} + \right.$$

$$\left. + \text{sen}\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\,\text{sen}^2\frac{b}{2}\right)$$

Agrupando el primer término con el cuarto y el segundo con el tercero, resulta:

$$2\left(\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{b}{2} + \text{sen}^2\frac{b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \text{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\left(\text{sen}^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + \text{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\right) =$$

$$= 2 \text{ sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} + 2 \text{ sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} = \text{sen } a + \text{sen } b$$

3 Calcula qué ángulo forman los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Determinamos el producto escalar de ambos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 = -6 - 3 = -9$$

Para determinar el ángulo, hacemos uso de la expresión:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

$a = 3{,}742$ y $b = 3{,}606$, luego:

$$\cos \alpha = -9/13{,}49 = -0{,}667 \Rightarrow \alpha = 131{,}8°$$

4 Determina los coeficientes *a*, *b* y *c* para que los siguientes vectores sean mutuamente perpendiculares:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = a\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{C} = -\vec{i} + 2\vec{j} + c\vec{k}$$

Si los tres vectores son mutuamente perpendiculares, sus productos escalares son nulos.

Realizando algebraicamente los tres productos ($\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{b} \cdot \vec{c}$), resulta:

$$2a - b + 6 = 0$$

$$-2 + 2b + 2c = 0$$

$$-a - 2 + 3c = 0$$

Multiplicando la primera expresión y sumándole la segunda, resulta:

$$4a + 2c + 10 = 0$$

Multiplicando la tercera expresión por cuatro y sumándole esta última, resulta:

$$14c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1/7$$

De donde se extrae que $a = -17/7$.

Sustituyendo en la primera ecuación, resulta que $b = 78/7$.

5 Sean los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{C} = -3\vec{i} - 5\vec{j}$. Demuestra si existe alguna diferencia entre los productos $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$? ¿Y entre los productos $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$?

Nada nos asegura que ambas expresiones han de ser iguales. Comprobémoslo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 22\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = 7\vec{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (5\vec{i} - 2\vec{j}) \times 7\vec{k} = -14\vec{i} - 35\vec{j}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 22\vec{k} \times (-3\vec{i} - 5\vec{j}) = 110\vec{i} - 66\vec{j}$$

Luego ambos productos son diferentes.

Por otra parte, y como se ha visto, tanto $\vec{a} \times \vec{b}$ como $\vec{b} \times \vec{c}$ son vectores en la dirección del eje *Z* (vector $\vec{k}$).

Si multiplicamos escalarmente estos vectores por cualquiera de los vectores iniciales, que pertenecen al plano *XY*, el resultado será el mismo: 0.

6 **Determina el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ y $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j}$. ¿Cuál es el vector representativo de dicha superficie? ¿Qué ángulo forman ambos vectores?**

El área del paralelogramo que encierran dos vectores cualesquiera es $S = ab \operatorname{sen} \alpha$, luego necesitamos conocer el ángulo que forman ambos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Determinando el producto escalar y calculando los módulos de ambos vectores, resulta:

$$\cos \alpha = \frac{5 - 8}{\sqrt{29 \cdot 17}} = -0{,}135 \rightarrow \alpha = 97{,}765°$$

$$S = \sqrt{29 \cdot 17} \operatorname{sen} \alpha = 22$$

El vector representativo es perpendicular al plano formado por los dos vectores y de módulo el valor del área, es decir $22\vec{k}$.

7 **El vector $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ tiene por punto de aplicación P (4, 3, 3). Determina el momento de dicho vector respecto del punto O (1, 0, 1).**

El momento viene dado por la expresión $M = \vec{r} \times \vec{a}$, donde $\vec{r}$ es el vector que va de O a P, es decir:

$$\vec{r} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Realizamos el producto vectorial:

$$M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 0\vec{j} - 12\vec{k} = 8\vec{i} - 12\vec{k}$$

8 **¿Cuál es la aproximación de $(1 - x)^{1/2}$ para valores de x muy pequeños?**

Partiendo de la aproximación de $(1 + x)^n$, podemos concluir que:

$$(1 + (-x))^{1/2} \approx 1 + 1/2\,(-x) = 1 - x/2$$

9 **Haciendo uso de la definición de la derivada de una función, demuestra que la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ es $y' = \cos x$.**

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \operatorname{sen} \Delta x \cos x - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \cong$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \Delta x \cos x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

Hemos aproximado $\cos \Delta x$ a 1 y $\operatorname{sen} \Delta x$ a Δx. En conclusión:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cos x}{\Delta x} = \cos x$$

10 **Halla las derivadas de las siguientes funciones:**

a) **$y(x) = \sqrt[4]{3x^3}$** ***b)*** **$y(x) = \sqrt{2x^2}/\sqrt{x}$** ***c)*** **$y(x) = \cos^2 x$**

a) $y = \sqrt[4]{3} \cdot x^{3/4} \rightarrow y' = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{3}{4} x^{-1/4} = \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{3}{x}}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot x^{2/3 - 1/2} = \sqrt[3]{2} \cdot x^{1/6} \rightarrow y' = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{6} x^{-5/6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[6]{x^5}}$

c) $y = \cos^2 x \rightarrow y' = 2 \cos x\,(-\operatorname{sen} x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x$

11 **Calcula el gradiente de la función escalar $V(x, y, z) = 6x^2yz^3 + 3yz^2 - 4zx^3y^2$ y determina su valor en el punto (1,0,1).**

$$V(x, y, z) = 6x^2yz^3 + 3yz^2 - 4x^3y^2z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V(x, y, z) = (12xyz^3 - 12x^2y^2z)\vec{i} + (6x^2z^3 + 3z^2 - 8x^3yz)\vec{j} + (18x^2yz^2 + 6yz - 4x^3y^2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V(1, 0, 1) = 0\vec{i} + (6 + 3)\vec{j} + 0\vec{k} = 9\vec{j}$$

12 **Resuelve la siguiente integral definida:**

$$\int_1^3 \frac{3}{x^2}\, dx$$

$$\int_1^3 \frac{3}{x^2}\, dx = 3 \int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx = 3\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 3\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 2$$

Repaso de mecánica

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

- **1. Las magnitudes cinemáticas** (páginas 15/18)
  - **1.1. Posición** (página 15)
  - **1.2. Velocidad** (página 16)
  - **1.3. Aceleración** (páginas 17/18)
- **2. Movimientos en una dimensión. Movimientos rectilíneos** (páginas 18/20)
  - **2.1. Movimiento rectilíneo uniforme** (página 18)
  - **2.2. Movimiento rectilíneo con aceleración constante** (página 19)
  - **2.3. Movimientos acelerados en la naturaleza** (página 20)
- **3. Movimientos en dos dimensiones** (páginas 21/22)
  - **3.1. Movimientos de trayectoria parabólica** (página 21)
  - **3.2. Movimientos de trayectoria circular** (página 22)
- **4. Masa y momento lineal** (página 23)
- **5. Leyes de la dinámica de Newton** (páginas 23/25)
  - **5.1. Primera ley: ley de inercia** (página 23)
  - **5.2. Segunda ley: definición de fuerza** (página 24)
  - **5.3. Tercera ley: principio de acción y reacción** (página 24)
  - **5.4. Conservación del momento lineal en un sistema aislado** (páginas 24/25)
- **6. El impulso mecánico** (página 25)
- **7. Fuerzas elásticas o restauradoras** (página 26)
- **8. Resolución de problemas de fuerzas** (página 26)
- **9. Trabajo mecánico** (páginas 27/28)
  - **9.1. Trabajo realizado por fuerzas variables** (páginas 27/28)
  - **9.2. Potencia** (página 28)
- **10. Energía mecánica** (página 29)
  - **10.1. Trabajo y energía cinética** (página 29)
- **11. Colisiones entre cuerpos** (páginas 29/31)
  - **11.1. Colisiones elásticas** (página 30)
  - **11.2. Colisiones inelásticas** (página 31)
- **12. Trabajo y energía potencial: fuerzas conservativas** (página 32)
- **13. Conservación de la energía mecánica** (página 33)
- **14. Conservación de la energía en presencia de fuerzas no conservativas (disipativas)** (página 33)

Cuestiones previas (página 14)

1. ¿Cómo determinarías la velocidad en cada instante a partir de la gráfica posición-tiempo de un movimiento rectilíneo con aceleración constante?

A través de la pendiente en este instante. Sería derivando la ecuación de posición.

2. ¿Cómo quedaría la expresión $v^2 = v_0^2 \pm 2as$ en un caso de caída libre?

En el caso del movimiento de caída libre, cuyas características son: $v_0 = 0$; $a = g$ y $s = y_0 - y$, nos quedaría:

$$v = \sqrt{2g\,(y_0 - y)}$$

3. ¿Puede darse el caso de que sobre un cuerpo actúe una única fuerza y, sin embargo, el módulo de su velocidad sea constante?

Sí, en el movimiento circular uniforme.

4. Las fuerzas grandes siempre producen un mayor impulso que las pequeñas. ¿Es este enunciado verdadero o falso? ¿Por qué?

Es falso. Porque el impulso no solo depende de la intensidad de la fuerza, sino también del intervalo de tiempo durante el que actúe la fuerza. El efecto de una fuerza de gran intensidad que actúe durante un breve intervalo de tiempo puede ser el mismo que el de una fuerza de poca intensidad que se prolongue durante más tiempo.

Actividades (páginas 15/33)

1 Si un cuerpo se mueve según la ecuación de trayectoria:

$$\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 5t\vec{j} - \vec{k} \text{ (m)}$$

***a)* ¿Cuál es el vector que describe el desplazamiento efectuado en los ocho segundos comprendidos entre $t = 2$ s y $t = 10$ s?**

***b)* ¿Cuál es el valor en metros de dicho desplazamiento?**

***c)* ¿Vale lo mismo dicho desplazamiento que el efectuado en los ocho segundos comprendidos entre $t = 4$ s y $t = 12$ s? ¿Por qué? ¿A qué potencia debería estar elevada la variable tiempo (t) para que el desplazamiento fuese el mismo en cualquier intervalo considerado de 8 s?**

a) Sustituyendo los valores dados de tiempo calculamos el vector desplazamiento:

$$\vec{r}\,(t = 2 \text{ s}) = 12\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k}\,;\ \vec{r}\,(t = 10 \text{ s}) = 300\vec{i} + 50\vec{j} - \vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t = 10 \text{ s}) - \vec{r}\,(t = 2 \text{ s}) = 288\vec{i} + 40\vec{j}$$

b) Calculamos el módulo del vector desplazamiento:

$$|\Delta\vec{r}|^2 = 288^2 + 40^2 \rightarrow |\Delta\vec{r}| = 290{,}76 \text{ m}$$

c) No puede valer lo mismo, pues x varía con la segunda potencia de t. Para que los desplazamientos fueran los mismos, x debería estar elevada a potencia 1.

2 Determina las componentes x, y, z de la velocidad de un cuerpo cuya ecuación de trayectoria es:

$$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 6t\vec{j} - 4\vec{k} \text{ (m)}$$

***a)* ¿En qué plano se mueve dicho cuerpo?**

***b)* ¿Cuánto vale su velocidad inicial?**

***c)* ¿Y su velocidad a los 10 s?**

Derivamos el vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4t\vec{i} + 6\vec{j}$$

a) El cuerpo se mueve en un plano perpendicular al eje Z y situado a una altura de $z = -4$ m.

b) $\vec{v}\,(t = 0 \text{ s}) = 6\vec{j}$ m/s

c) $\vec{v}\,(t = 10 \text{ s}) = 40\vec{i} + 6\vec{j}$ m/s

3 Determina las componentes del vector aceleración del movimiento del cuerpo descrito en la actividad anterior. ¿Qué tipo de movimiento describe?

Derivamos el vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$$

El cuerpo describe un movimiento uniformemente acelerado en la dirección X, y uniforme en la dirección Y. En consecuencia, la trayectoria será parabólica.

4 PAU Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un cuerpo son:

$$x = R\,(kt + \text{sen}\,kt)$$

$$y = R\,(1 + \cos kt)$$

Donde R y k son constantes. Halla:

***a)* La expresión de la velocidad y de la aceleración y sus módulos.**

***b)* La expresión de la aceleración tangencial, de la aceleración centrípeta y del radio de curvatura del movimiento.**

a) Derivando las ecuaciones paramétricas con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$x' = dx/dt = Rk\,(1 + \cos kt) = ky$$

$$y' = dy/dt = -kR\text{sen}\,kt$$

El vector velocidad queda:

$$\vec{v} = Rk\,(1 + \cos kt)\,\vec{i} - kR\text{sen}\,kt\,\vec{j}$$

El modulo de la velocidad queda:

$$v^2 = R^2k^2\,(\cos^2 kt + 1 + 2\cos kt + \text{sen}^2 kt) =$$

$$= 2k^2R^2\,(1 + \cos kt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2}Rk\sqrt{1 + \cos kt}$$

Para obtener el vector aceleración derivamos nuevamente la velocidad:

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = -Rk^2\text{sen}\,kt\,\vec{i} - k^2R\cos kt\,\vec{j} =$$

$$= -Rk^2(\text{sen}\,kt\,\vec{i} + \cos kt\,\vec{j})$$

El modulo de la aceleración es:

$$a = Rk^2$$

b) Primero calculamos la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}Rk\frac{1}{2\sqrt{y}}\,y' =$$

$$= k\sqrt{\frac{R}{2R(1 + \cos kt)}}(-kR\,\text{sen}\,kt) =$$

$$= \frac{-k^2R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\text{sen}\,kt}{\sqrt{1 + \cos kt}}$$

Para determinar la aceleración centrípeta hacemos uso de la relación entre la aceleración centrípeta, la tangencial y la total:

$$a_c^2 = a^2 - a_t^2 = R^2k^4 - \frac{R^2k^4\text{sen}^2\,kt}{2\,(1 + \cos kt)} =$$

$$= R^2k^4\left(1 - \frac{1 + \cos^2 kt}{2\,(1 + \cos kt)}\right) = R^2k^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{R^2k^4}{2}\,(1 + \cos kt)$$

operando queda:

$$a_c = \frac{Rk^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos kt}$$

Ahora bien, puesto que $a_c = v^2/r$, ahora podemos determinar el radio de curvatura, que será $r = v^2/a_c$:

$$r = \frac{2R^2k^2(1 + \cos kt)}{\dfrac{Rk^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos kt}} = 2\sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos kt}$$

5 Al desplazarse de una ciudad a otra, un motorista viaja a una velocidad constante de 40 km/h durante el primer cuarto de hora. ¿A qué velocidad debe viajar el tiempo restante si desea que la velocidad media del viaje sea de 70 km/h?

El trayecto total dura una hora. Durante el primer cuarto de hora, el motorista circula a 40 km/h, luego recorre 10 km. Los tres cuartos de hora restantes los realiza a una velocidad que debe ser mayor, de modo que la velocidad media resulte ser de 70 km/h. La velocidad media es el trayecto total recorrido dividido por el tiempo total. El trayecto total es el realizado en el primer cuarto de hora más el realizado en los tres cuartos de hora restantes, luego:

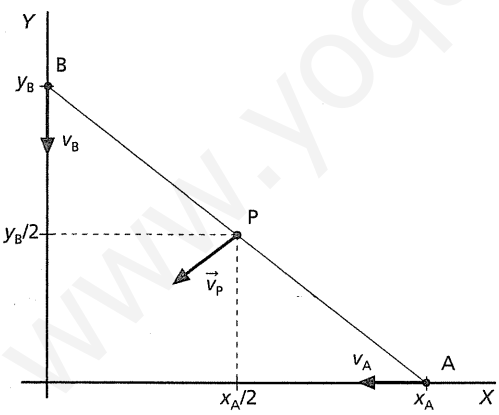
$$v_{media} = \frac{10 + \frac{3}{4}v_2}{1} = 70 \Rightarrow \frac{3}{4}v_2 = 70 - 10 = 60$$

$$v_2 = 80 \text{ km/h}$$

6 Dos cuerpos A y B se desplazan sobre los semiejes X^+ e Y^-, respectivamente, con velocidades v_A y v_B.

Inicialmente se encontraban a distancias x_0 e y_0 del origen y se dirigen hacia él. Halla la trayectoria del punto medio P entre A y B, así como la velocidad de dicho punto. ¿Qué tipo de movimiento describe P?

La siguiente figura representa la situación planteada en el enunciado del problema:



Sacamos las ecuaciones de posición de los puntos A y B:

$$x_A = x_0 + v_A t$$

$$y_B = y_0 + v_B t$$

Por otro lado relacionamos la posición del punto P con respecto A y B:

$$x_P = \frac{1}{2}x_A$$

$$y_P = \frac{1}{2}y_B$$

Luego la trayectoria de P vendrá dada por estas dos ecuaciones paramétricas:

$$x_P = \frac{x_0 + v_A t}{2} \qquad y_P = \frac{y_0 + v_B t}{2}$$

La velocidad del punto P se determinará derivando las anteriores expresiones:

$$v_{xP} = \frac{v_A}{2} \qquad v_{yP} = \frac{v_B}{2}$$

El punto P describe una trayectoria rectilínea, como puede observarse si combinamos las ecuaciones de x e y para hacer desaparecer la variable t:

$$2y = y_0 + v_B t = y_0 + v_B\frac{2x - x_0}{v_A} = y_0 + \frac{v_B}{v_A}(2x - x_0)$$

despejando queda:

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{v_B}{v_A}x_0\right) + \frac{v_B}{v_A}x$$

7 Una trainera emplea 8 min en recorrer 1,5 millas náuticas navegando a favor de la corriente y 12 min en el trayecto de vuelta en contra de la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente en m/s?

Dato: 1 milla náutica = 1 852 m

La distancia que recorre la trainera en cada trayecto es de 1,5 millas = 2 778 m.

Cuando hace el recorrido a favor de la corriente, se cumple que:

$$v = v_{trainera} + v_{agua} = \frac{2\,778}{480} = 5{,}787\,5 \text{ m/s}$$

Mientras que cuando lo hace contra la corriente, se cumple lo siguiente:

$$v = v_{trainera} + v_{agua} = \frac{2\,778}{480} = 5{,}787\,5 \text{ m/s}$$

Sumando ambas expresiones, se obtiene:

$$2v_{trainera} = 9{,}645\,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{trainera} = 4{,}822\,9 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en una cualquiera de las ecuaciones, resulta que:

$$v_{agua} = 0{,}964\,6 \text{ m/s}$$

8 Dos corredores de atletismo se encuentran separados inicialmente una distancia de 10 m, y ambos salen simultáneamente al oír el pistoletazo de salida. El corredor más adelantado arranca con una aceleración de 0,27 m/s² que mantiene constante durante 30 s, al cabo de los cuales sigue corriendo uniformemente con la velocidad alcanzada. El segundo corredor arranca con una aceleración constante de 0,29 m/s² durante 30 s, transcurridos los cuales se mueve uniformemente con la velocidad lograda. Determina:

***a)* ¿Cuánto tarda el segundo corredor en dar alcance al primero?**

***b)* ¿A qué distancia de la línea más atrasada le da alcance?**

Sacaremos previamente las ecuaciones de posición de los dos corredores:

Si ponemos el origen de coordenadas en el corredor B, la distancia al origen del corredor A en el tramo acelerado de su carrera es:

$$x_{0A} = 10 + 1/2 \cdot 0{,}27 \cdot 30^2 = 131{,}5 \text{ m}$$

En este tramo, el corredor A alcanza la velocidad:

$$v_A = 0{,}27 \cdot 30 = 8{,}1 \text{ m/s}$$

A partir de los 30 s, la distancia al origen del corredor A vendrá dada por:

$$x_A = 131{,}5 + 8{,}1t$$

Por su parte, la distancia al origen del corredor B en el tramo acelerado de su carrera es:

$$x_{0B} = 1/2 \cdot 0{,}29 \cdot 30^2 = 130{,}5 \text{ m}$$

En este tramo, el corredor B alcanza la velocidad:

$$v_B = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \text{ m/s}$$

Vemos que en el tramo acelerado de la carrera, el corredor B no ha alcanzado al A; pero sabemos que lo hará, pues la velocidad de B en el tramo uniforme es mayor que la de A.

A partir de los 30 s, la distancia al origen del corredor B vendrá dada por:

$$x_B = 130{,}5 + 8{,}7t$$

a) Para saber cuándo B da alcance a A, igualamos ambas expresiones:

$$130{,}5 + 8{,}7\,t = 131{,}5 + 8{,}1t$$

$$0{,}6t = 1 \Rightarrow t = 1{,}67 \text{ s}$$

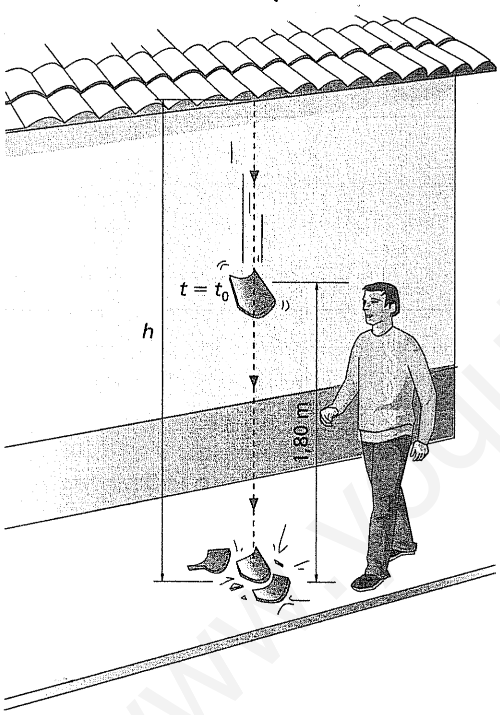
Luego el corredor B da alcance al corredor A al cabo de 31,67 s.

b) El cruce se produce a la siguiente distancia del origen:

$$x_{cruce} = 130{,}5 + 8{,}7 \cdot 1{,}67 = 145 \text{ m}$$

9 **PAU** **Una teja se desprende de un tejado y cae justo delante de un atónito viandante que salva su cabeza de milagro. La teja recorre los 1,80 m de altura de la persona en 0,2 s. ¿A qué altura está el tejado?**

La siguiente figura ilustra la situación descrita en el enunciado del problema:



Aplicando las ecuaciones de posición de caída libre de la teja en las dos situaciones que indica el dibujo:

$$y(t = t_0) = h - 1/2\, gt_0^2 = 1{,}8 \Rightarrow 2h = 3{,}6 + gt_0^2$$

y para la segunda posición:

$$y(t = t_0 + 0{,}2) = h - 1/2\, g(t_0 + 0{,}2)^2 = 0$$

$$2h = g(t_0 + 0{,}2)^2 = g(t_0^2 + 0{,}4t_0 + 0{,}04)$$

Igualando, resulta:

$$3{,}6 + gt_0^2 = g(t_0^2 + 0{,}4t_0 + 0{,}04)$$

operando:

$$3{,}6 = 0{,}4gt_0^2 + 0{,}04g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = 0{,}818 \text{ s}$$

A partir de t_0 podemos determinar la altura de la pared:

$$h = \frac{3{,}6 + gt_0^2}{2} = 5{,}08 \text{ m}$$

10 **PAU** **Dos pelotas son lanzadas verticalmente con una velocidad de 30 m/s, con un intervalo de tiempo de 0,3 s entre el primer y segundo lanzamiento.**

a) **¿A qué altura se cruzan y en qué tiempo lo hacen desde que se lanzó la primera?**

b) **¿Qué altura máxima alcanzan?**

La ecuación de posición de la primera bola es:

$$y_1 = 30\,t - 1/2\, gt^2$$

Y la ecuación de la segunda bola considerando que es lanzada 0,3 segundos más tarde:

$$y_2 = 30\,(t - 0{,}3) - 1/2\, g(t - 0{,}3)^2 =$$

$$= -1/2\, gt^2 + (0{,}3g + 30)t - 8{,}559$$

a) Cuando las dos pelotas se cruzan, se cumple que:

$$30\,t - 1/2\, gt^2 = -1/2\, gt^2 + (0{,}3g + 30)t - 8{,}559$$

$$0 = 0{,}3gt - 8{,}559 \Rightarrow t = 2{,}91 \text{ s}$$

Para determinar la altura del cruce, se sustituye este tiempo en una cualquiera de las dos expresiones de *y:*

$$y_{cruce} = 45{,}81 \text{ m}$$

b) La altura máxima, por ejemplo de la pelota 1, se alcanza cuando la velocidad es 0, luego:

$$v = 30 - gt = 0 \Rightarrow t = 30/g = 3{,}06 \text{ s}$$

Sustituyendo en la expresión de *y*, resulta:

$$y_{máx} = 30 \cdot 3{,}06 - 1/2 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}06^2 = 45{,}92 \text{ m}$$

11 **PAU** **Un objeto es lanzado desde una altura inicial y_0 con una velocidad inicial v_0, y forma un ángulo de elevación α sobre la horizontal. Demuestra que la distancia horizontal que recorre el objeto hasta que toca suelo viene dada por:**

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left[v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 + 2gy_0}\right]$$

Analiza cómo quedaría la expresión cuando $y_0 = 0$ (lanzamiento desde el suelo). (No se considera fricción con el suelo)

La altura del objeto viene dada por la expresión:

$$y = y_0 + v_{0y}t - 1/2\, gt^2 = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, gt^2$$

Para determinar el alcance del objeto, debemos calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo, es decir, el tiempo para el que *y* se hace 0:

$$y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}t - \frac{2y_0}{g} = 0$$

resolviendo como una ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{\dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} + \sqrt{\dfrac{4v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g^2} + \dfrac{8y_0}{g}}}{2} =$$

$$= \frac{1}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2y_0 g}\right)$$

Hemos desechado el signo menos en la solución pues corresponde a un valor negativo del tiempo.

Despejando el valor obtenido en la expresión de la distancia horizontal, resulta:

$$x = v_{0x}t = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2y_0 g}\right)$$

Si $y_0 = 0$:

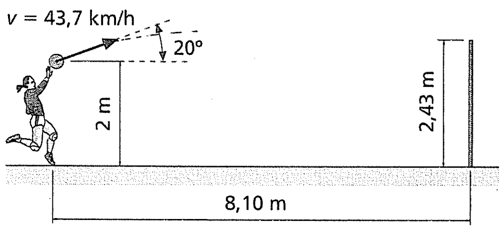
$$t = \frac{2v_0}{g} \operatorname{sen}\alpha$$

Y sustituyendo este valor en la expresión anterior:

$$x = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

12 **PAU** **En un partido de voleibol, un jugador hace un saque desde una distancia de 8,10 m de la red, de modo que la pelota sale desde una altura de 2 m con una velocidad de saque de 43,7 km/h y un ángulo de elevación de 20°. Si la altura reglamentaria de la red es de 2,43 m, ¿logra que la pelota pase al campo contrario?**

En la figura siguiente se observa la situación descrita:



En primer lugar, pasamos la velocidad al sistema internacional, que resulta ser de 12,139 m/s. La distancia horizontal de la pelota vendrá dada por:

$$x_0 = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \, t$$

Despejamos el tiempo para estos datos:

$$t = \frac{8{,}10}{12{,}139 \cdot \cos 20°} = 0{,}71 \text{ s}$$

Debemos determinar la altura de la pelota cuando llega a la red. La altura vendrá dada por:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 =$$

$$= 2 + 12{,}139 \cdot \text{sen } 20° \cdot 0{,}71 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}71)^2$$

$$y = 2 + 2{,}948 - 2{,}47 = 2{,}478 \text{ m}$$

Esta altura es superior a la altura de la red, luego la pelota sí pasará al campo contrario.

13 **Halla la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración de un punto de la superficie terrestre situado a 40° de latitud.**

La velocidad angular es la misma para todos los puntos de la Tierra, y viene dada por la expresión:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3\,600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La velocidad lineal es el producto de la velocidad angular por la distancia al eje de rotación:

$$v = \omega \cdot r = \omega \cdot R_T \cdot \cos 40° =$$

$$= 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \cdot \cos 40° = 354{,}75 \text{ m/s}$$

Puesto que la velocidad lineal es constante, la única componente de la aceleración será la centrípeta, que viene dada por la expresión siguiente:

$$a = a_c = v^2/r = \omega^2 r =$$

$$= (7{,}27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos 40°$$

$$a_c = 0{,}026 \text{ m/s}^2$$

14 **PAU** **Una llanta de radio R rueda por el suelo sin deslizarse, con velocidad constante v. Demuestra que la posición del punto P, que inicialmente estaba en contacto con el suelo, viene dada al cabo de un tiempo t por las coordenadas:**

$$x = R\,(\omega t - \text{sen } \omega t)$$

$$y = R\,(1 - \cos \omega t)$$

donde $\omega = v/R$. (Dichas expresiones son las ecuaciones paramétricas de la cicloide).

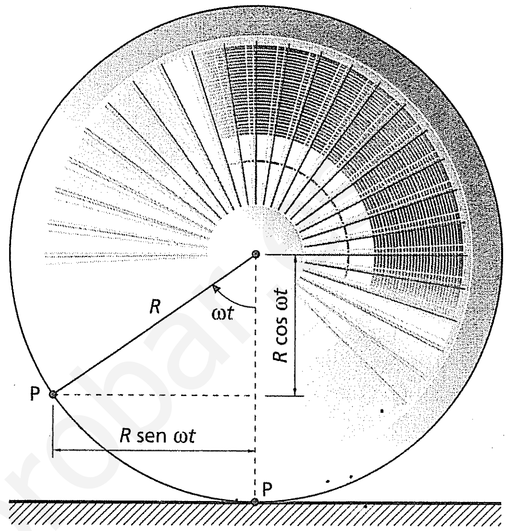
La rueda experimenta simultáneamente un movimiento de rotación y uno de traslación. Si la posición del origen es el punto P de contacto con el suelo, las coordenadas de dicho punto en el caso de que solo haya rotación vendrían dadas por las expresiones siguientes:

$$x = -R \text{ sen } \omega t$$

$$y = R\,(1 - \cos \omega t)$$

$$x_{máx} = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \text{ sen } \alpha + \sqrt{v_0^2 \text{ sen}^2\alpha}\right) = \frac{v_0^2 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha}{g} =$$

$$= v_0^2 \frac{\text{sen } 2\alpha}{g}$$



A este movimiento hay que añadirle el desplazamiento horizontal debido a la traslación, que es vt. En consecuencia:

$$x_P = vt - R \text{ sen } \omega t = R\omega t - R \text{ sen } \omega t = R\,(\omega t - \text{sen } \omega t)$$

$$y_P = R\,(1 - \cos \omega t)$$

15 **¿Puede un cuerpo sobre el que actúa una única fuerza permanecer en reposo?**

No. Para que un cuerpo esté en reposo es preciso, o bien que no actúe sobre él ninguna fuerza, o bien que las que actúen sobre él se anulen mutuamente, algo imposible si solo hay presente una fuerza.

16 **¿Es correcto afirmar que un cuerpo siempre se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre él? ¿Por qué?**

No. La aceleración «empuja» al cuerpo a que se desplace en su dirección, pero dicho alineamiento no siempre se produce. Por ejemplo, si bien las fuerzas gravitatorias dan lugar a aceleraciones centrales, los astros describen movimientos circulares, que son perpendiculares a las aceleraciones que los producen.

17 **Tenemos dos bloques de plomo de 4 kg y 1 kg, respectivamente. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:**

a) **El primero tiene el cuádruple de inercia.**

b) **El primero tiene el cuádruple de volumen.**

c) **El primero adquiere el cuádruple de aceleración sometido a la misma fuerza.**

d) **Si dejan de actuar todas las fuerzas sobre ambos, el primero seguirá moviéndose durante más tiempo que el segundo.**

e) **¿Qué respuestas cambiarías si el bloque de 4 kg fuese de hielo?**

Razona la respuesta.

a) Sí, pues la inercia es una magnitud proporcional a la masa del cuerpo.

b) Sí, pues ambos bloques son del mismo material.

c) No. Adquiere la cuarta parte de aceleración.

d) No. Ambos seguirán moviéndose indefinidamente.

e) No cambia ninguna de las respuestas, pues son independientes del material de que estén hechas las dos bolas.

18 **Un objeto de 5 kg que se mueve a 20 m/s choca contra otro objeto de masa desconocida que estaba en reposo. Después del impacto, el primer objeto se mueve en el mismo sentido que antes, pero con una velocidad de 2 m/s, mientras que el segundo lo hace también en ese sentido, pero con una velocidad de 12 m/s. ¿Qué masa tenía el segundo objeto?**

En ausencia de fuerzas externas se conserva el momento lineal, es decir:

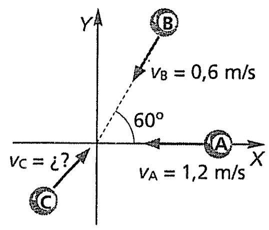
$$p_{\text{antes}} = p_{\text{después}}$$

$$5 \cdot 20 = 2 \cdot 5 + m \cdot 12 \Rightarrow 100 = 10 + 12\,m$$

$$12\,m = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 7{,}5 \text{ kg}$$

19 **PAU** **Las tres esferas A, B y C de la figura, de masas respectivas 0,1, 0,2 y 0,5 kg, llegan simultáneamente al origen, donde colisionan y quedan adheridas unas con otras. ¿Cuál es la velocidad de la esfera C si se quedan en reposo después de la colisión?**



En ausencia de fuerzas externas se conserva el momento lineal.

Podemos plantear dos ecuaciones, una para la coordenada *x* y otra para la coordenada *y:*

$$m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} + m_c v_{Cx} = 0$$

$$m_A v_{Ay} + m_B v_{By} + m_c v_{Cy} = 0$$

Ambas expresiones se igualan a 0 pues sabemos que tras la colisión quedan en reposo.

Si llamamos α al ángulo de incidencia de la bola C:

$$-0{,}1 \cdot 1{,}2 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot \cos 60° + 0{,}5 \cdot v_C \cos\alpha = 0$$

$$-0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot \operatorname{sen} 60° + 0{,}5 \cdot v_C \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Operando las dos ecuaciones quedan:

$$-0{,}12 - 0{,}06 + 0{,}5 \cdot v_C \cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_C \cos\alpha = 0{,}36$$

$$v_C \operatorname{sen}\alpha = 0{,}24 \cdot \operatorname{sen} 60°$$

Dividiendo ambas expresiones, resulta:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Despejando v_c en cualquiera de las dos ecuaciones, resulta:

$$v_c = 0{,}416 \text{ m/s}$$

20 **Un cuerpo de 10 kg que se movía a una velocidad de 20 m/s logra frenar en 10 m. ¿Cuánto vale la fuerza, supuesta constante, que ha actuado? ¿Cuánto vale el impulso que ha frenado el cuerpo?**

Para determinar la aceleración cuando disponemos de las velocidades inicial y final y del espacio recorrido, se hace uso de la siguiente ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

Despejamos la aceleración con los datos del problema:

$$a = \frac{-20^2}{2 \cdot 10} = -20 \text{ m/s}$$

- Conocida la aceleración, podemos determinar el tiempo de actuación de la fuerza:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-20}{-20} = 1 \text{ s}$$

La fuerza que ha frenado el cuerpo será:

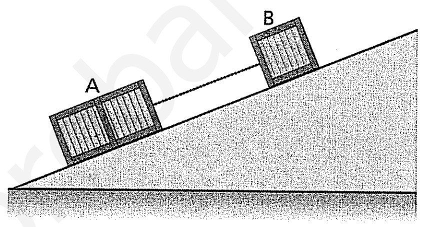
$$F = ma = -200 \text{ N}$$

Y el impulso será:

$$I = F\Delta t = -200 \text{ N s}$$

Obsérvese que esta cantidad coincide con la variación del momento lineal.

21 **PAU** **Los cuerpos A y B de la figura, de masas 5 y 3 kg, respectivamente, están unidos mediante una cuerda inextensible de masa despreciable sobre un plano inclinado 30°. El coeficiente de rozamiento de A con la superficie es de 0,2, y el de B es de 0,3. Determina la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.**



La ecuación de fuerzas para el cuerpo A es:

$$m_A g \operatorname{sen} 30° - T - F_{roz} = m_A a$$

$$m_A g \operatorname{sen} 30° - T - \mu_A m_A g \cos 30° = m_A a$$

Mientras que para el cuerpo B será:

$$T + m_B g \operatorname{sen} 30° - F_{roz} = m_B a$$

$$T + m_B g \operatorname{sen} 30° - \mu_B m_B g \cos 30° = m_B a$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$[(m_A + m_B) \operatorname{sen} 30° - (\mu_A m_A + \mu_B m_B) \cos 30°]g =$$

$$= (m_A + m_B)a$$

De donde resulta que la aceleración es:

$$a = 2{,}88 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en una cualquiera de las dos expresiones anteriores, podemos determinar la tensión:

$$T = m_B[a + g\,(\mu_B \cos 30° - \operatorname{sen} 30°)]$$

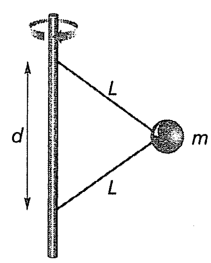
Introduciendo los correspondientes valores tenemos:

$$T = 1{,}578 \text{ N}$$

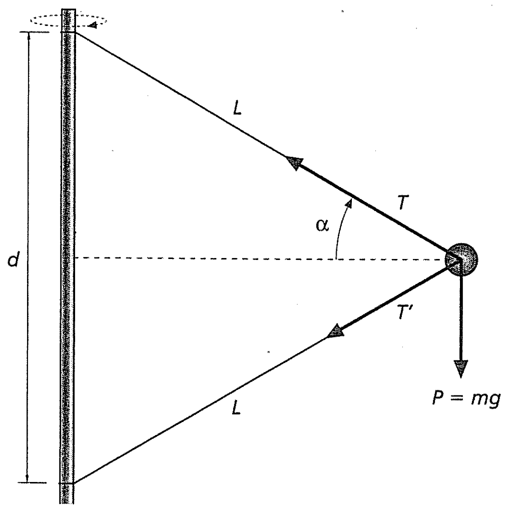
22 **PAU** **Una esfera de masa m está unida a una varilla vertical que gira con cierta velocidad angular, como se muestra en la figura. Si la tensión en el hilo superior es *T*, determina, en función de los parámetros ofrecidos:**

***a)* La tensión *T'* en el hilo inferior.**

***b)* La velocidad angular del sistema.**



En la figura siguiente se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa *m:*



El ángulo que forma cada uno de los hilos con la horizontal viene dado por la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{2L} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{d^2}{4L^2}}$$

a) En el equilibrio dinámico, las componentes verticales de las tensiones y el peso del cuerpo deben igualarse:

$$T \operatorname{sen}\alpha = T' \operatorname{sen}\alpha + mg$$

Despejamos T' e incorporando el valor del sen α queda:

$$T' = \left(T\frac{d}{2L} - mg\right)\frac{2L}{d} = T - \frac{2Lmg}{d}$$

b) Las componentes horizontales de las tensiones son las responsables del movimiento circular de la bola, es decir:

$$F_c = T\cos\alpha + T'\cos\alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 L\cos\alpha$$

Como:

$$T + T' = m\omega^2 L$$

Entonces:

$$T + T - \frac{2Lmg}{d} = m\omega^2 L \Rightarrow 2\left(T - \frac{Lmg}{d}\right) = m\omega^2 L$$

Despejando la velocidad angular, tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{L}\left(\frac{T}{m} - \frac{L}{d}g\right)}$$

23 Determina el trabajo realizado por una fuerza del tipo $F = -k/x^2$ en un desplazamiento entre una posición inicial $x_0 = 20$ m y otra final $x = 10$ m.

El trabajo viene dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{-k}{x^2}\,dx = \left[\frac{k}{x}\right]_{20}^{10} = \frac{k}{10} - \frac{k}{20} = \frac{k}{20}$$

24 PAU Piensa en lo que ocurrirá en los siguientes casos de colisiones elásticas y verifícalo posteriormente a partir de las expresiones de las velocidades:

***a)* Las partículas tienen idéntica masa y colisionan frontalmente con velocidades iguales y opuestas.**

***b)* Las partículas colisionan frontalmente con el mismo valor de velocidad, siendo m_2 mucho mayor que m_1.**

a) Ambas partículas rebotan con las velocidades intercambiadas:

$$mv + m(-v) = 0 = mv_1' + mv_2' \Rightarrow v_1' = -v_2'$$

Además, sabemos que en una colisión elástica se cumple:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

Sustituyendo, resulta:

$$v_1 - (-v_1) = v_2' - (-2v_2') \Rightarrow v_2' = v_1$$

Luego:

$$v_1' = -v_1$$

b) El sentido común nos dice que la partícula de masa mucho mayor seguirá moviéndose con la misma velocidad, pero no está claro qué ocurre con la partícula de masa mucho menor. Veamos:

$$(m_1 - m_2)v = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Dividimos esta expresión por m_1:

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$$

Puesto que $m_2 << m_1$, se puede aproximar a:

$$v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$$

Por otro lado, sabemos que:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \Rightarrow 2v_1 = v_2' - v_1'$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$3v_1 = v_2'\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \cong v_2' \Rightarrow v_2' = 3v_1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta:

$$2v_1 = v_2' - v_1' \Rightarrow v_1' = 3v_1 - 2v_1 \Rightarrow v_1' = v_1$$

Visto el resultado, podríamos haber aproximado directamente la primera ecuación, con lo que habríamos obtenido directamente el valor de v_1'.

25 Dos masas iguales se mueven una al encuentro de la otra con velocidades iguales y de signos contrarios. ¿Qué ocurrirá si la colisión es inelástica?

Si las dos masas quedan adheridas, se detienen tras el choque. Esto puede verse si igualamos las cantidades de movimiento de antes y después del choque:

$$mv + m(-v) = 2mv_f \Rightarrow 0 = 2mv_f \Rightarrow v_f = 0$$

26 PAU ¿Qué fracción de energía cinética se disipa cuando dos masas iguales colisionan frontalmente de forma inelástica y una de ellas tenía doble velocidad que la otra? ¿Y si colisionan moviéndose las dos en el mismo sentido?

Igualamos los momentos lineales de antes y después de la colisión:

$$m \cdot 2v + m(-v) = 3mv_f \Rightarrow mv = 3mv_f$$

$$v_f = v/3$$

Las energías cinéticas de antes y después de la colisión son las siguientes:

$$E_{c\,antes} = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mv^2$$

$$E_{c\,después} = \frac{1}{2}3m\left(\frac{v}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}mv^2$$

Restando ambas expresiones obtenemos la energía cinética disipada:

$$E_{c\,disipada} = E_{c\,antes} - E_{c\,después} = \frac{14}{6}mv^2$$

Dividiendo el resultado anterior por la energía de antes de la colisión, obtenemos la fracción de energía disipada:

$$\%\,E_{c\,disipada} = 100 \cdot E_{c\,disipada}/E_{c\,antes} = 93{,}3\,\%$$

Si las dos masas se movían en el mismo sentido, la velocidad final será:

$$m \cdot 2v + mv = 3mv_f \Rightarrow v_f = v$$

Las energías cinéticas de antes y de después de la colisión son ahora las siguientes:

$$E_{c\,antes} = \frac{5}{2}mv^2;\ E_{c\,después} = \frac{3}{2}mv^2$$

Procediendo de la misma manera:

$$E_{c\,disipada} = E_{c\,antes} - E_{c\,después} = mv^2$$

$$\%\,E_{c\,disipada} = 100 \cdot E_{c\,disipada}/E_{c\,antes} = 40\,\%$$

27 **PAU** **Un cuerpo se desplaza desde el punto A (1, 1) hasta D (3, 3) bajo la acción de una fuerza que obedece a la expresión:**

$$\vec{F} = \frac{c}{x^2}\vec{i} + \frac{c}{y^2}\vec{j}\ \text{N}$$

donde c es una constante. Determina el trabajo efectuado por dicha fuerza a lo largo de las siguientes trayectorias:

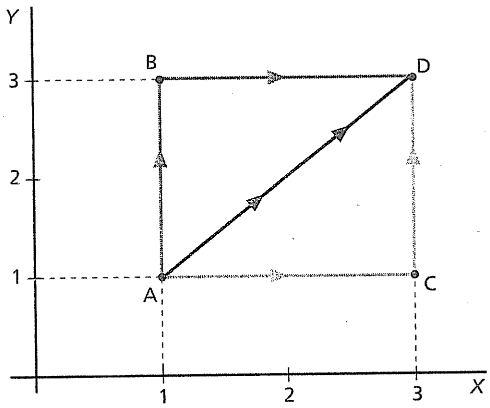
a) **Trayectoria directa desde *A* hasta *D*.**

b) **Trayectoria *A* (1, 1) → *B* (1, 3) → *D* (3, 3)**

c) **Trayectoria *A* (1, 1) → *C* (3, 1) → *D* (3, 3)**

d) **¿Qué puede decirse acerca de dicha fuerza?**

En la figura siguiente se observan las tres trayectorias descritas:



a) El trabajo viene dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_A^D \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^D \left(\frac{c}{x^2}\,dx + \frac{c}{y^2}\,dy\right)$$

Puesto que la trayectoria viene definida por la expresión $y = x$, se concluye que $dy = dx$.

$$W = \int_1^3 \left(\frac{c}{x^2}\,dx + \frac{c}{x^2}\,dx\right) = 2c\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 2c\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4c}{3}$$

b) Para la trayectoria A (1, 1) → B (1, 3) → D (3, 3), el trabajo viene dado por:

$$W = W_{AB} + W_{BD}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \frac{c}{y^2}\,dy = c\left[-\frac{1}{y}\right]_1^3 = \frac{2c}{3}$$

$$W_{BD} = \int_B^D \vec{F}\,d\vec{r} = \int_B^D \frac{c}{x^2}\,dx = c\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{2c}{3}$$

$$W = \frac{4c}{3}$$

c) Para la trayectoria A (1, 1) → C (3, 1) → D (3, 3), el trabajo viene dado por:

$$W = W_{AC} + W_{CD}$$

Puede comprobarse del mismo modo que para el punto anterior que el trabajo es $4c/3$.

d) La fuerza es conservativa, pues el trabajo realizado tan solo depende de los puntos inicial y final, y no varía con la trayectoria que sigue el cuerpo.

28 **PAU** **Desde el punto más alto de una esfera de radio *R* se deja resbalar sin fricción una canica de masa *m*. Demuestra que la canica se despegará de la superficie en un punto *P* tal que el ángulo que forma con la vertical cumple la razón trigonométrica:**

$$\cos\theta = 2/3$$

Durante el movimiento de bajada por la rampa esférica, la canica realiza un movimiento circular. La fuerza centrípeta que lo causa vendrá dada por la componente radial del peso y por la fuerza normal que ejerce el suelo, es decir:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

$$N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$$

En el momento en que la canica despega de la superficie, la fuerza normal que ejerce el suelo se hace cero, luego:

$$mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = 0 \Rightarrow mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = Rg\cos\theta$$

Por otro lado, la energía mecánica del sistema se mantiene constante e igual a su valor inicial, que es $2mgR$. En el punto de «despegue», la expresión de la energía mecánica será:

$$E_{total} = 2mgR = 1/2\,mv^2 + mgh = 1/2\,mv^2 + mgR\,(1 + \cos\theta)$$

$$4gR = v^2 + 2gR\,(1 + \cos\theta)$$

Sustituyendo el valor antes obtenido para la velocidad en el punto de «despegue», resulta:

$$4gR = gR\cos\theta + 2gR\,(1 + \cos\theta)$$

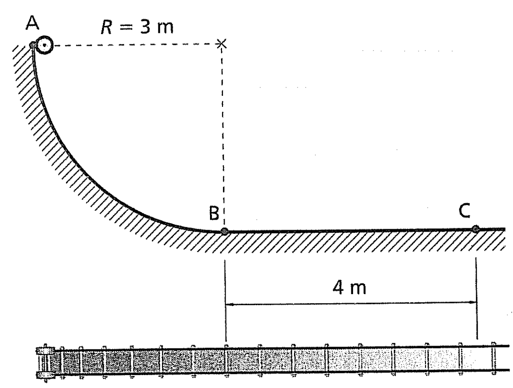
$$4 = \cos\theta + 2 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 2/3$$

29 **PAU** **Un pequeño bloque de 0,5 kg de masa se deja resbalar desde el punto A y se desliza por un riel enforma de cuadrante de círculo de radio *R* = 3 m, tal y como se aprecia en la figura, de modo que llega al punto B con una velocidad de 5,4 m/s. Finalmente, se para del todo en C, que se encuentra a una distancia de 4 m de *B*. Determina:**

a) **El trabajo realizado por la fricción sobre el bloque entre A y B.**

b) **El valor del coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie horizontal.**

La situación descrita en el enunciado puede observarse en el siguiente dibujo:



a) Las energías en el punto inicial A (el punto más alto de la trayectoria) y en el punto B son:

$$E_A = mgR = 14{,}7\ \text{J};\ E_B = 1/2\,mv^2 = 7{,}29\ \text{J}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será la energía disipada desde el punto A hasta el punto B:

$$W_{roz} = E_A - E_B = 7{,}41\ \text{J}$$

b) Desde el punto B al punto C, el cuerpo experimenta un movimiento uniformemente acelerado con aceleración negativa. Esta aceleración puede calcularse mediante la conocida expresión:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow a = \frac{-5{,}4^2}{2 \cdot 4} = -3{,}645\ \text{m/s}^2$$

A partir de la aceleración podemos determinar la fuerza de rozamiento y el coeficiente de rozamiento:

$$F_{roz} = ma = 1{,}822\,5\ \text{N}$$

$$F_{roz} = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{1{,}822\,5}{0{,}5 \cdot 9{,}8} = 0{,}372$$

1 Movimientos de los cuerpos celestes

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 36)

1. ¿Se mueve nuestro planeta a la misma velocidad en todos los puntos de su órbita alrededor del Sol?

No, porque según la segunda ley de Kepler cuanto mayor sea la distancia entre el Sol y la Tierra, menor será la velocidad. La Tierra se mueve más deprisa en el perihelio que en el afelio, pero barre áreas iguales en tiempos iguales.

2. ¿Por qué razón la mayoría de los cuerpos que componen el sistema solar orbitan en torno al Sol casi en el mismo plano?

Porque el momento angular de traslación de un planeta alrededor del Sol permanece constante en dirección.

3. ¿Por qué el eje de rotación terrestre se mantiene paralelo a sí mismo mientras la Tierra orbita en torno al Sol?

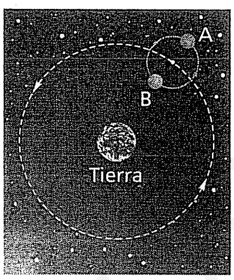
Por la ausencia de momentos de fuerza netos actuando sobre la Tierra. Esto explica la secuencia regular de las estaciones.

4. Se afirma que la fusión de los casquetes polares por un aumento de la temperatura planetaria produciría un ligero alargamiento de los días. ¿Sabes por qué?

La distribución de masa varía, y por tanto el momento de inercia. La conservación del momento angular exige que varíe la velocidad angular.

Actividades (páginas 37/57)

1 A la vista de la figura, ¿en qué punto del epiciclo se vería más brillante el planeta desde la Tierra? ¿En qué zona del epiciclo parecería retrogradar el planeta si el centro del epiciclo no se moviera?



Se vería más brillante en el punto B, y parecería retrogradar también cuando el planeta estuviera recorriendo el tramo de epiciclo próximo a B. Obsérvese que ambos giros se producen en sentido antihorario.

2 ¿Qué observaciones realizó Galileo para comprobar la ausencia de paralajes?

Galileo comprobó que las estrellas no parecían aumentar a través del telescopio, lo cual le hizo pensar que estaban muy lejos, tanto que no era posible detectar ningún paralaje.

3 Los seis meses transcurridos entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre tienen más días que los comprendidos entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo. ¿Se te ocurre alguna razón? ¿Entre qué fechas estará más próxima la Tierra al Sol?

En efecto, el tiempo comprendido entre el equinoccio de septiembre y el de marzo es menor que el que transcurre entre el equinoccio de marzo y el de septiembre. La razón es que ni la órbita terrestre es un círculo perfecto ni el Sol está en su centro. En consecuencia, y de acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad orbital de la Tierra es algo mayor cuanto más próxima está al Sol, cosa que ocurre durante el invierno boreal.

4 PAU A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol (T = 365 días y $r_{Sol\text{-}Tierra} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m), determina cuánto tarda Júpiter en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres) sabiendo que su distancia al Sol es de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m.

Dato: el valor de la constante de Kepler, *k*, es el mismo para todos los planetas que orbitan alrededor del Sol.

De la tercera ley de Kepler sabemos que:

$$T^2 = kR^3 \Rightarrow \frac{T^2_{Júpiter}}{R^3_{Júpiter}} = \frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}}$$

Por tanto:

$$T^2_{Júpiter} = T^2_{Tierra}\left(\frac{R_{Júpiter}}{R_{Tierra}}\right)^3 = 1{,}87 \cdot 10^7$$

$$T_{Júpiter} = 4\,328{,}77 \text{ días} = 11{,}86 \text{ años} = 3{,}74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

5 Si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿tendrá momento angular cero con respecto a un origen cualquiera elegido al azar? ¿Tendrá momento angular cero con respecto a algún origen específico? Razona tu respuesta.

Su momento angular no será cero, salvo que el origen elegido se encuentre en la recta del movimiento, en cuyo caso $\vec{r}$ y $\vec{p}$ serían paralelos.

6 Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una recta con una velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0, 0) cuando el cuerpo está en los puntos (2, 0), (2, 1) y (2, 2) de la misma recta. ¿Qué conclusión obtienes respecto del momento angular de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme?

Punto (2, 0): $\vec{r} = 2\vec{i}$ m

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 1): $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 2): $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

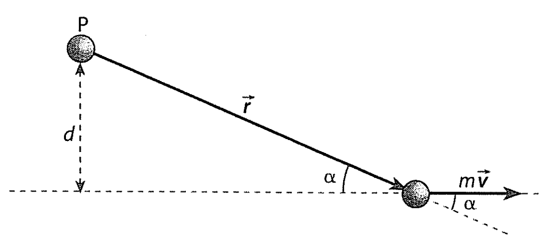
En consecuencia, el momento angular de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme es constante.

7 Demuestra que el momento angular de una partícula de masa *m*, que se mueve con velocidad *v* a lo largo de una recta cuya distancia mínima al origen es *d*, es constante y tiene por valor $L = mvd$ en cualquier punto de la trayectoria.

El módulo del momento angular viene dado por la expresión:

$$L = rmv \operatorname{sen} \alpha$$

donde α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Sin embargo, como puede comprobarse en la figura:



$$r \operatorname{sen} \alpha = d$$

Por lo que:

$$L = mvd = \text{constante}$$

8 **PAU** **¿Permanece constante el momento angular de un electrón en una órbita determinada según el modelo de Bohr? Explícalo.**

El segundo postulado de Bohr establece, efectivamente, la constancia de dicha magnitud como consecuencia del carácter central de la fuerza electrostática entre núcleo y electrón. De ahí también que el modelo de Bohr supusiera órbitas planas para el movimiento de los electrones.

9 **Teniendo en cuenta tu respuesta a la actividad anterior, ¿puede usarse el valor del momento angular para caracterizar una determinada órbita? ¿Conoces algún número cuántico referido al momento angular?**

Efectivamente, al tener valor constante para cada órbita, el momento angular sirve para caracterizar las órbitas del átomo de Bohr. El número cuántico referido al momento angular es *n*, el número cuántico principal.

10 **¿Qué significado físico tiene el postulado de Bohr según el cual $mvr = \frac{nh}{2\pi}$?**

La formulación del segundo postulado de Bohr es:

$$L = m_e vr = n\hbar$$

Luego el momento angular caracteriza las distintas órbitas de Bohr a través del número cuántico principal, *n*.

11 **PAU** **Una pelota unida a una cuerda se hace girar en círculos horizontales alrededor de un eje, permitiendo que la cuerda se vaya arrollando en torno a dicho eje. ¿Permanece constante, aumenta o disminuye la velocidad de la pelota a medida que la cuerda se arrolla? ¿Cómo lo explicarías en términos del momento angular?**

Suponiendo que el efecto del peso es pequeño en el lapso de tiempo considerado, puede afirmarse que el momento angular es constante, es decir:

$$L = mvr = \text{constante}$$

Puesto que el radio disminuye al ir enrollándose la cuerda, para mantener *L* constante es preciso que la velocidad vaya aumentando progresivamente.

12 **PAU** **Teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, que su distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y que su período orbital es de 365 días, determina:**

a) **El valor de su momento angular de traslación respecto al Sol.**

b) **La velocidad areolar del movimiento de traslación terrestre (expresando sus unidades).**

c) **A partir del valor anterior y dando por cierto que la distancia al Sol permanece invariable en el transcurso de un día, determina qué distancia recorre la Tierra en un día durante su movimiento orbital. Compáralo con el que se obtendría al dividir la longitud orbital entre los 365 días.**

a) El momento angular de traslación es:

$$L = mrv = mr^2\omega =$$
$$= 6 \cdot 10^{24} \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \cdot \frac{2\pi}{(365 \cdot 24 \cdot 3\,600)}$$
$$L = 2{,}675 \cdot 10^{40} \text{ kg m/s}^2$$

b) La velocidad areolar del movimiento de traslación es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}(1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3\,600} =$$
$$= 2{,}23 \cdot 10^{15} \text{ m}^2\text{/s}$$

c) A partir de la velocidad areolar podemos determinar el área que barre la Tierra en un día:

$$A_{\text{día}} = v_{\text{areolar}} \cdot 24 \cdot 3\,600 = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

Para desplazamientos pequeños comparados con la órbita completa, como es el recorrido de un día, se puede aproximar el área barrida al área del triángulo (figura 1.21):

$$A = \frac{Rd}{2} = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

De donde resulta que el desplazamiento *d* de un día es:

$$d = 2{,}575 \cdot 10^9 \text{ m} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Por otro lado, sabemos que la Tierra describe aproximadamente una circunferencia, luego la distancia recorrida en un día será la longitud de dicha circunferencia dividida por 365:

$$d = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{365} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

13 **Demuestra que la constancia del momento angular orbital es coherente con la segunda ley de Kepler. Razona si dicha constancia es también coherente con la primera ley.**

Como sabemos, la velocidad areolar es equivalente a $L/2m$. Si el momento angular es constante, lo será la velocidad areolar. Esta constancia es la que establece la segunda ley de Kepler.

Por otro lado, si el momento angular es constante, la órbita debe quedar siempre forzosamente en el mismo plano, que es lo que afirma la primera ley de Kepler.

14 **Determina la posición del centro de masas del sistema constituido por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, y $m_3 = 6$ kg, situadas, respectivamente, en los puntos (0, 3, 1), (4, 1, 2) y (5, 0, 0). Expresa su posición en notación vectorial.**

Hacemos uso de la expresión **1.12**:

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{CM} = 2(0\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + 4(4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + 6(5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$$
$$m_{\text{total}}\vec{r}_{CM} = 46\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$
$$\vec{r}_{CM} = 3{,}83\vec{i} + 0{,}83\vec{j} + 0{,}83\vec{k}$$

15 **Una partícula de 4 kg se mueve en la dirección del eje *X* con una velocidad de 3 m/s, y otra de 2 kg lo hace en la misma dirección con una velocidad de −2 m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? ¿Y el momento lineal total del sistema?**

Aplicando la expresión **1.14**:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{4 + 2}\vec{i} = \frac{8}{6}\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i} \text{ m/s}$$

Y, por tanto:

$$\vec{p}_{CM} = 8\vec{i} \text{ kg m/s}$$

16 **Tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, y $m_3 = 1$ kg, se mueven según las trayectorias $\vec{r}_1 = t^2\vec{i} - 2t\vec{j}$ m, $\vec{r}_2 = 3t^3\vec{i} - t\vec{j} + t^2\vec{k}$ m y $\vec{r}_3 = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$ m, respectivamente. Calcula:**

a) **$\vec{r}_{CM}$ en función del tiempo y en $t = 1$ s.**

b) **El momento lineal del sistema en $t = 1$ s.**

c) **La fuerza neta que opera sobre el sistema.**

d) **La aceleración del centro de masas.**

a) Aplicando la expresión **1.12**, se obtiene:

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)\vec{i} - 2{,}5t\vec{j} + (0{,}5t^2 + t)\vec{k}}{3{,}5}$$

Por lo que:

$$\vec{r}_{CM}(1) = 1{,}57\vec{i} - 0{,}71\vec{j} + 0{,}43\vec{k} \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{p}_{CM} = m_{\text{total}}\vec{v}_{CM} = m_{\text{total}}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

se obtiene:

$$\vec{p}_{CM} = (4{,}5t^2 + 4t + 2)\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + (t + 1)\vec{k} \text{ kg m/s}$$

Y, por tanto, en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 10{,}5\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + 2\vec{k} \text{ kg m/s}$$

c) Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

entonces:

$$\vec{F} = (9t + 4)\vec{i} + \vec{k} \text{ N}$$

d) La aceleración del centro de masas será:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m_{total}} = \frac{9t+4}{3{,}5}\vec{i} + \frac{1}{3{,}5}\vec{k} \text{ m/s}^2$$

17 **¿Crees que puede considerarse el momento de inercia una propiedad fundamental de la materia del mismo modo que la masa?**

El momento de inercia **no** es una propiedad de la materia. La masa es una propiedad inherente a todo cuerpo material, y su valor es característico de cada cuerpo o partícula; es decir, a cada cuerpo le corresponde una **única masa.** Por el contrario, un mismo cuerpo puede tener **infinitos momentos de inercia** en función del eje elegido.

18 **Con el propósito de calcular el momento de inercia de un cuerpo en rotación, ¿puede considerarse la masa del cuerpo como si estuviese concentrada en el centro de masas? ¿Por qué?**

No, porque en la determinación del momento de inercia es esencial la forma del cuerpo; si el eje de rotación pasara por el centro de masas, el momento de inercia sería cero. Eso ocurriría, por ejemplo, en el caso de una esfera homogénea (maciza o hueca) que girase alrededor de un eje que pasa por su centro; no puede suponerse que la masa de la esfera está concentrada en el centro de masas. Este concepto, sin embargo, sí es aplicable en la dinámica de traslación.

Existe, sin embargo, un equivalente al centro de masas en rotación, que sería aquel punto donde podemos suponer concentrada la masa del sólido, girando a una distancia tal del eje (distancia denominada **radio de giro**) que su momento de inercia con respecto a ese eje fuese igual al de todo el sólido. La localización de dicho punto es muy sencilla. Por ejemplo, si consideramos el caso de una esfera sólida homogénea de masa *m* que está rotando alrededor de un diámetro, la distancia (radio de giro) a la que estaría dicho punto especial se hallaría igualando el momento de inercia de la esfera con el que tendría toda su masa concentrada en dicho punto:

$$\frac{2}{5}mr^2 = mR^2$$

donde *R* es el radio de giro. Resolviendo, obtenemos:

$$R = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot r$$

19 **PAU** **Si dos discos del mismo peso y espesor se hacen de metales de diferentes densidades, ¿tendrán el mismo momento de inercia? Si no es así, demuestra cuál de ellos tiene mayor momento de inercia.**

Los dos discos tienen la misma masa y diferente densidad, por lo que tendrán también distinto volumen. Dado que el volumen viene dado por $\pi r^2 h$, donde *r* es el radio del disco, y *h*, su espesor, y puesto que tienen el mismo espesor, la diferencia de volumen se manifestará en distinto radio, que será mayor cuanto mayor sea el volumen, es decir, cuanto menor sea la densidad.

En el enunciado no se indica el eje de rotación alrededor del cual giran los discos. Supongamos que se trata de un eje que pasa por el centro y tiene la dirección perpendicular al disco. Según la expresión **1.17,** el momento de inercia es tanto mayor cuanto más alejadas del eje están las distintas partículas que forman el disco. Esta observación cualitativa es suficiente para concluir que el disco con mayor radio (menor densidad) tiene mayor momento de inercia. Se obtiene la misma conclusión si consideramos que el momento de inercia de un disco alrededor del eje indicado es $I = mr^2/2$, que será tanto mayor cuanto mayor sea el radio.

20 **¿Existe algún momento de fuerza responsable de la rotación de los planetas y satélites? ¿Qué consecuencias se extraen de tu respuesta?**

Sobre cualquier punto de un planeta o satélite actúa principalmente la fuerza gravitatoria del Sol o, en el caso de los satélites, la que ejerce el planeta más próximo, y podría pensarse que existe un momento de fuerza. Sin embargo, al ser los planetas esféricos y presentar una distribución simétrica de la masa, la resultante de la fuerza gravitatoria debe pasar por el centro de los planetas o satélites, con lo cual el momento de fuerza resultante es nulo. En consecuencia, el momento angular de rotación de los planetas permanece constante.

21 **Sobre la polea de la figura 1.39 (a) se ejerce directamente una fuerza de 30 N. Si el radio de la polea es de 10 cm, su masa es de 1,5 kg, y su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 1/2\ mr^2$, ¿cuál será su velocidad angular al cabo de 10 s?**

La fuerza $\vec{F}$ produce un momento que da lugar a la rotación de la polea. Como la fuerza es tangencial, el momento de fuerza vale $M = Fr$, donde *r* es el radio de la polea. Aplicando la expresión **1.19,** podemos obtener la aceleración angular y, de ese modo, la velocidad angular en función del tiempo:

$$F_r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

donde *m* es la masa de la polea. Resolviendo:

$$\alpha = \frac{2F}{mr} = 400 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega(t = 10 \text{ s}) = \alpha t = 4\,000 \text{ rad/s}$$

22 **Fíjate en la figura 1.39 (b). ¿Se obtendría el mismo resultado si en lugar de ejercer directamente una fuerza de 30 N colgáramos un peso de 30 N?**

El caso es, ahora, cualitativamente muy distinto, pues la fuerza tangencial cuyo momento produce la rotación de la polea es la tensión de la cuerda. Por una parte, tenemos la ecuación de traslación de la pesa:

$$P - T = m'a$$

y por otra, la de rotación de la polea:

$$Tr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

Puesto que $a = \alpha r$, sustituyendo en la primera ecuación y resolviendo el sistema resultante, se obtiene:

$$\alpha = \frac{P}{\left(\frac{1}{2}m + m'\right)r} = 78{,}7 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega = \alpha t = 787 \text{ rad/s}$$

Resultado muy diferente, por tanto, al del caso anterior.

23 **PAU** **Dos cuerpos esféricos en rotación alrededor del eje que pasa por sus respectivos centros tienen la misma masa pero distinta densidad. Si el momento angular de rotación de ambos es idéntico, ¿es entonces también idéntica su energía cinética de rotación?**

A igualdad de masas, si las densidades de ambas esferas son distintas, también lo serán los volúmenes y, en consecuencia, los radios. Por otro lado, la energía cinética de rotación es:

$$E_{c\ \text{rotación}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Ahora bien, $I = 2mR^2/5$, luego es diferente para ambas esferas. En consecuencia, la energía cinética de rotación también lo será.

24 **Resuelve el orden de llegada a la base de un plano inclinado de altura *h* de los siguientes cuerpos: una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo, un aro y un bloque rectangular de hielo.**

Para los cuatro primeros objetos trabajaremos en el supuesto de ausencia de deslizamiento. En tal caso, la fuerza de rozamiento no realiza trabajo y la energía mecánica se mantiene constante en todo el proceso, es decir:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base}} = E_{c\ \text{base traslación}} + E_{c\ \text{base rotación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mv^2\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)$$

Para el bloque de hielo, supondremos que no existe rozamiento, luego:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base traslación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Por tanto, sin hacer ningún otro cálculo, vemos ya que el hielo es el cuerpo que llega antes, pues es el que alcanza la mayor velocidad. En cuanto a los cuatro cuerpos rodantes, vemos que cuanto mayor es su momento de inercia menor es su velocidad. En consecuencia, el orden de llegada será:

1. Bloque de hielo ($v^2 = 2gh$)
2. Esfera maciza ($v^2 = 10gh/7$)
3. Cilindro macizo ($v^2 = 4gh/3$)
4. Esfera hueca ($v^2 = 6gh/5$)
5. Aro ($v^2 = gh$)

25 **Teniendo en cuenta los valores de los momentos de inercia ofrecidos en la figura 1.35, compara las velocidades al llegar a la base de un plano inclinado de altura *h* de una esfera maciza que se desliza y rueda.**

a) Cuando la esfera se desliza, toda la energía potencial inicial se transforma en cinética traslacional, por lo que la velocidad del centro de masas en la base del plano será:

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) Cuando rueda, la energía potencial se transforma en traslacional del centro de masas y en rotacional de la esfera, de modo que:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\omega^2 \Rightarrow gh = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{5} r^2\omega^2$$

Teniendo en cuenta que $\omega = v/r$, y resolviendo v, se obtiene:

$$gh = \frac{7}{10} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

velocidad que es menor que la anterior.

26 **PAU** **Determina las aceleraciones de descenso de un cilindro macizo y de una esfera maciza, ambos de la misma masa y radio, que ruedan sin deslizarse por un plano inclinado de 30°.**

a) Si la distancia que recorren en el plano es de 5 m, ¿con qué velocidad llega cada cuerpo a la base del plano?

b) ¿Cuánto tarda cada uno en llegar a la base?

a) Para cualquier cuerpo rodante que baja por un plano inclinado, la velocidad al llegar a la base viene dada por la expresión que vimos en la actividad 24:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}}$$

donde $h = d\ \text{sen}\ \theta = 5\ \text{sen}\ 30° = 2{,}5$ m.

Así pues, para determinar la velocidad basta con sustituir el valor del momento de inercia y la altura recorrida. El momento de inercia del cilindro macizo es $mR^2/2$, mientras que el de la esfera maciza es $2mR^2/5$. Las velocidades de llegada de ambos cuerpos serán, por tanto:

$$v_{\text{cilindro}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = 5{,}72 \text{ m/s} \quad v_{\text{esfera}} = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = 5{,}92 \text{ m/s}$$

b) Tanto el cilindro como la esfera tienen un movimiento uniformemente acelerado, por lo que:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Sustituyendo los valores de la velocidad final, resulta que $a_{\text{cilindro}} = 3{,}26$ m/s^2 y $a_{\text{esfera}} = 3{,}5$ m/s^2.

Por otro lado, sabemos que:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{10}{a}}$$

Sustituyendo los valores de la aceleración, resulta que:

$$t_{\text{cilindro}} = 1{,}75 \text{ s}; \ t_{\text{esfera}} = 1{,}69 \text{ s}$$

Cuestiones y problemas (páginas 60/61)

Guía de repaso

1 **¿Qué innovaciones introdujo Ptolomeo en la teoría geocéntrica? ¿Qué problemas parecían resolver?**

Véase el apartado «Teoría geocéntrica de Ptolomeo» (en el subepígrafe 1.1).

2 **¿Qué tipo de velocidad parece mantenerse constante en el transcurso del movimiento planetario?**

La velocidad areolar.

3 **Define la magnitud que se usa para describir el movimiento de traslación de los planetas. ¿Cuáles son sus características?**

El momento angular (véase el subepígrafe 3.1).

4 **¿Qué agente dinámico puede producir cambios en el momento angular de un cuerpo?**

El momento de una fuerza (consúltese el subepígrafe 3.2).

5 **¿En qué condiciones se mantiene constante el momento angular? Pon ejemplos de movimientos en los que permanece constante el momento angular.**

Véase el subepígrafe 3.2. Son ejemplos de este tipo de movimiento los del sistema solar, el de un tiovivo, los saltos de trampolín, etcétera.

6 **¿Cuáles son los correspondientes símiles en la dinámica rotacional para fuerza, masa y momento lineal?**

El momento de fuerza, el momento de inercia y el momento angular respectivamente.

7 **¿Qué es el centro de masas de un cuerpo? ¿Qué tiene de particular dicho punto?**

Véase el epígrafe 4.

8 **Completa el siguiente cuadro:**

Cualidad	Magnitud y expresión en movimientos lineales	Magnitud y expresión en movimientos de rotación
Posición del móvil	x	θ
Velocidad del móvil	$v = \dfrac{dx}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
Aceleración tangencial	$a_t = \dfrac{dv}{dt}$	$a_t = \alpha r$
Aceleración centrípeta	$a_c = \dfrac{v^2}{r}$	$a_c = \omega^2 r$
Resistencia a modificar el estado de movimiento	m	I
Medida de la cantidad de movimiento	$\vec{p}$	$\vec{L}$
Agente capaz de variar la cantidad de movimiento	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Energía asociada al movimiento	$\dfrac{1}{2}mv^2$	$\dfrac{1}{2}I\omega^2$

Leyes de Kepler

9 **PAU** **La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita a una altura media de 340 km sobre la superficie terrestre. Teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es de 380 000 km y que el período lunar es de $2{,}36 \cdot 10^6$ s, determina cuánto tarda la ISS en dar una vuelta completa a la Tierra.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

En el sistema gravitatorio formado por la Tierra y sus satélites se cumple la tercera ley de Kepler, es decir, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas:

$$T^2 = kR^3$$

Por tanto:

$$\frac{T^2_{Luna}}{R^3_{Luna}} = \frac{T^2_{ISS}}{R^3_{ISS}} \Rightarrow T^2_{ISS} = \left(\frac{R_{ISS}}{R_{Luna}}\right)^3 T^2_{Luna}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$T^2_{ISS} = \left(\frac{6\,370 + 340}{380\,000}\right)^3 (2{,}36 \cdot 10^6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{ISS} = 5\,537{,}38 \text{ s} = 92{,}3 \text{ min}$$

10 **Marte orbita a una distancia media de 1,517 UA alrededor del Sol. A partir de los datos orbitales terrestres, determina la duración del año marciano.**

Dato: 1 UA = distancia media Tierra-Sol

Sabemos que para el sistema gravitatorio formado por el Sol y sus satélites se debe cumplir la tercera ley de Kepler, es decir:

$$\frac{T^2_{Marte}}{R^3_{Marte}} = \frac{T^2_{Tierra}}{R^3_{Tierra}} \Rightarrow T_{Marte} = \sqrt{\left(\frac{R_{Marte}}{R_{Tierra}}\right)^3} T_{Tierra}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

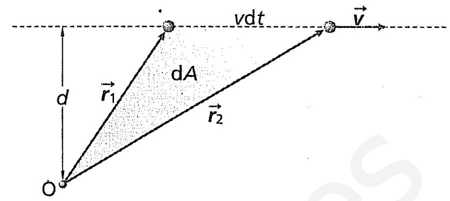
$$T_{Marte} = \sqrt{(1{,}517)^3} T_{Tierra} = 1{,}868 T_{Tierra} = 682 \text{ días}$$

Momento angular y su conservación en traslación

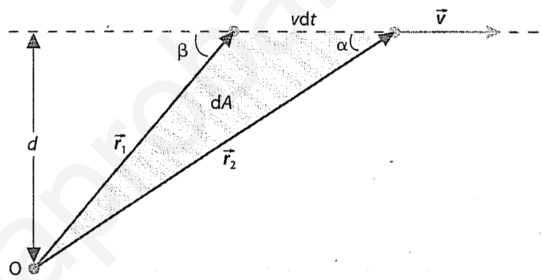
11 **Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información de que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero, respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?**

No puede concluirse que la velocidad de la partícula sea necesariamente constante. Si el origen se encuentra en la recta del movimiento y la fuerza que actúa sobre la partícula tiene también esa dirección, entonces el momento de fuerza es nulo, pero la partícula no se moverá con velocidad constante.

12 **PAU** **Una partícula se mueve con velocidad constante v a lo largo de una recta cuya distancia a un origen O es d. Si en un tiempo dt el vector de posición barre un área dA, demuestra que la velocidad areolar es constante en el tiempo e igual a $L/2m$, expresión en la que L es el momento angular de la partícula con respecto al origen citado.**



Como puede observarse en la figura, el área dA señalada es la diferencia entre el área del triángulo en el que $\vec{r}_2$ es la hipotenusa y la de aquel en que $\vec{r}_1$ es la hipotenusa.



Así pues:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 \cos\alpha \cdot d - \frac{1}{2} r_1 \cos\beta \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} d\,(r_2 \cos\alpha - r_1 \cos\beta) = \frac{1}{2} dv dt$$

Con lo que:

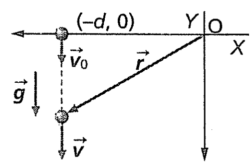
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m}$$

13 **PAU** **A una partícula de masa m se le imprime una velocidad $-v_0 j$ en el punto $(-d, 0)$ y empieza a acelerarse en presencia de la gravedad terrestre.**

a) **Determina una expresión para el momento angular como función del tiempo, con respecto al origen.**

b) **Calcula el momento de fuerza que actúa sobre la partícula, en cualquier instante, con relación al origen.**

c) **Con los resultados obtenidos en *a)* y *b)*, comprueba que $M = dL/dt$.**



a) El momento angular viene dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde:

$$\vec{r} = -d\,\vec{i} + y\,\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = -mv\,\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Así pues:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mv & 0 \end{vmatrix} = mvd\,\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

donde $v = v_0 + gt$, por lo que:

$$\vec{L} = m(v_0 + gt)\, d\,\vec{k} = (mv_0 d + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Es decir:

$$\vec{L} = (L_0 + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento de fuerza es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

c) Puede verse que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L_0 + mgdt)\,\vec{k}}{dt} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

D 14 **PAU** **Una pequeña esfera de 300 g de masa atada a una cuerda de masa despreciable de 1 m de longitud gira con una velocidad de 2 m/s alrededor de un punto O de un eje en el plano horizontal. En cierto momento, la cuerda empieza a arrollarse alrededor de dicho punto, de modo que su longitud libre va decreciendo. Determina:**

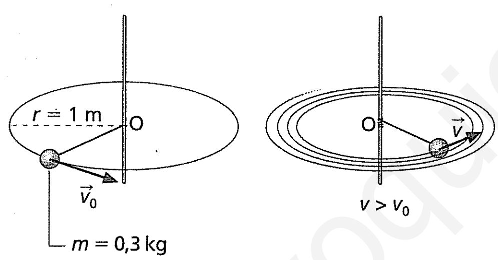
a) **El momento angular inicial alrededor del punto O.**

b) **El valor de la velocidad lineal de la pelota cuando se ha arrollado 0,75 m de cuerda.**

c) **Analiza la validez de la suposición que has hecho para resolver el apartado anterior.**

d) **Teniendo en cuenta que la variación en módulo de la velocidad lineal exige la existencia de una fuerza tangencial, realiza un diagrama de la situación y discute acerca de cómo aparece dicha fuerza tangencial y a qué se debe.**

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



a) Como se ve, el vector de posición es perpendicular en todo momento a la velocidad de la esfera, luego el momento angular inicial es:

$$L_0 = rmv = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento angular se mantiene constante, pues la fuerza centrípeta que actúa sobre la esfera es de tipo central, con lo que el momento de la fuerza es nulo. Por tanto:

$$L = \text{constante} = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Y, en consecuencia:

$$L_2 = r_2 m v_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot v_2 = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

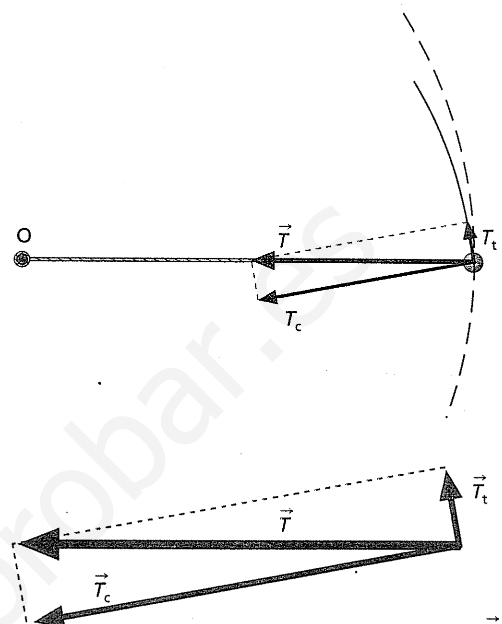
c) Hemos supuesto que no hay más fuerza que la centrípeta que ejerce la cuerda, pero también está el peso, que produce cierto momento de fuerza que imprime un movimiento de caída a la esfera. La aproximación puede valer si la velocidad de la esfera es suficientemente grande, de modo que la esfera se mantiene aproximadamente en posición horizontal en todo el proceso. También hemos supuesto despreciable la fricción de la esfera con el aire.

d) La tensión que ejerce la cuerda sobre la esfera es la responsable de su movimiento. Esta tensión viene dada por la siguiente expresión:

$$T = m\frac{v_2}{r} = m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{\text{constante}}{mr^3}$$

Es decir, la tensión aumenta proporcionalmente al cubo del radio a medida que este disminuye. En consecuencia, la velocidad será inversamente proporcional al radio. Ahora bien, la trayectoria que sigue la esfera no es un círculo perfecto sino una espiral.

En consecuencia, la tensión presentará una pequeña componente en dirección tangencial a la trayectoria, tal como se observa en el dibujo:



$\vec{T}_t$: componente tangencial de $\vec{T}$
$\vec{T}_c$: componente centrípeta de $\vec{T}$

Esa componente en la dirección tangencial es la responsable de la aceleración tangencial que experimenta la esfera.

Posición y movimiento del centro de masas

15 **Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, se mueven según trayectorias determinadas por:**

$$\vec{r}_1 = (3t^2 + 1)\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$
$$\vec{r}_2 = (2t^2 - t)\,\vec{i} - 5t^2\,\vec{j} \text{ m}$$
$$\vec{r}_3 = 4t^3\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k} \text{ m}$$

a) **Establece la posición del centro de masas del sistema en función del tiempo y en el instante en que $t = 1$ s.**

b) **Halla el momento lineal del sistema en función del tiempo y cuando $t = 1$ s.**

c) **¿Qué fuerza neta opera sobre el sistema?**

d) **¿Cuál ha sido el desplazamiento del centro de masas entre $t = 0$ y $t = 1$ s?**

e) **¿Cuál es el momento angular de la partícula 1 respecto del origen cuando $t = 1$ s?**

a) Aplicando la expresión **1.12:**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM}(t) = (0{,}8t^3 + 2{,}1t^2 - 0{,}3t + 0{,}5)\,\vec{i} +$$
$$+ (t^3 - 1{,}1t^2)\,\vec{j} + (0{,}4t^2 + 2)\,\vec{k} \text{ m}$$

que en el instante en que $t = 1$ s, vale:

$$\vec{r}_{CM}(1) = 3{,}1\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 2{,}4\vec{k} \text{ m}$$

b) El momento lineal del sistema será:

$$\vec{p}_{CM}(t) = m_{total}\vec{v}_{CM} = m_{total}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

Por tanto:

$$\vec{p}_{CM}(t) = 10\ \text{kg} \cdot [(2{,}4t^2 + 4{,}2t - 0{,}3)\vec{i} + (3t^2 - 2{,}2t)\vec{j} + 0{,}8t\vec{k}\ \text{m/s}] =$$
$$= (24t^2 + 42t - 3)\vec{i} + (30t^2 - 22t)\vec{j} + 8t\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

Y en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 63\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

c) La fuerza neta que opera sobre el sistema será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$
$$\vec{F} = (48t + 42)\vec{i} + (60t - 22)\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{N}$$

d) El desplazamiento del centro de masas entre 0 y 1 s es:

$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(1) - \vec{r}_{CM}(0)$$

Como $\vec{r}(1)$, mientras que $\vec{r}(0) = 0{,}5\vec{i} + 2\vec{k}$:

$$\Delta\vec{r} = 2{,}6\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 0{,}4\vec{k}\ \text{m}$$

Es decir:

$$|\Delta\vec{r}_{CM}| = 2{,}63\ \text{m}$$

e) Para hallar el momento angular de la partícula 1 con respecto al origen cuando $t = 1$ s, hay que calcular previamente los vectores posición y velocidad de dicha partícula en ese tiempo:

$$\vec{r}_1(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\ \text{m} \ \ \text{y} \ \ \vec{v}_1(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j}\ \text{m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{L}(1) = \vec{r} \times m_1\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 30 & 30 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -120\vec{i} + 120\vec{j} + 60\vec{k}\ \text{kg m}^2\text{/s}$$

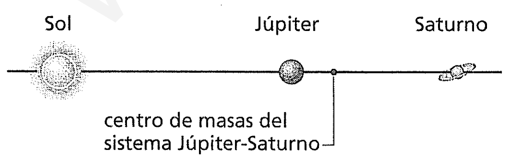
16 En una buena aproximación, podemos suponer que Júpiter y Saturno concentran la mayor parte de la masa planetaria del sistema solar. Suponiéndolos alineados en conjunción con respecto al Sol y haciendo uso de la tabla de datos del sistema solar en las páginas finales del libro, determina:

***a)* La posición del centro de masas correspondiente a ambos planetas.**

***b)* La posición del centro de masas (con respecto al centro solar) del sistema Sol-Júpiter-Saturno, suponiendo que estos últimos están en conjunción con respecto al Sol.**

***c)* A la luz del anterior apartado, ¿podría inferir un hipotético astrónomo de un exoplaneta la presencia de planetas alrededor del Sol? ¿Sería capaz de distinguir de algún modo si se trata de uno o de dos planetas?**

En el siguiente dibujo se muestra la situación descrita en el enunciado. El sentido común nos dice que el centro de masas del sistema Júpiter-Saturno se encuentra entre ambos planetas, y que debe estar más próximo a Júpiter que a Saturno:



a) La posición del centro de masas del sistema Júpiter-Saturno respecto al origen, que es el centro del Sol, será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Júpiter}} \cdot 7{,}78 \cdot 10^{11} + m_{\text{Saturno}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{12}}{m_{\text{Júpiter}} + m_{\text{Saturno}}} =$$
$$= \frac{1{,}9 \cdot 10^{27} \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 14{,}3}{1{,}9 \cdot 10^{27} + 5{,}68 \cdot 10^{26}} \cdot 10^{11} =$$
$$r_{CM} = \frac{1{,}9 \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 14{,}3}{1{,}9 + 5{,}68 \cdot 10^{11}} = 9{,}27 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

b) Si incluimos el Sol en el sistema anterior, el centro de masa del sistema será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Sol}} \cdot 0 + m_{\text{Júpiter + Saturno}} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11}}{m_{\text{Sol}} + m_{\text{Júpiter + Saturno}}} =$$
$$= \frac{24{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11} \cdot 14{,}3}{1{,}98 \cdot 10^{30} + 24{,}68 \cdot 10^{26}} = 1{,}155 \cdot 10^{9}\ \text{m} \cong 1{,}66\ R_{\text{Sol}}$$

c) Sí, pues el Sol orbita alrededor de un centro de masas que no coincide con su centro, y el hipotético astrónomo extraterrestre podría deducir, si dispusiera de una tecnología suficientemente desarrollada, la presencia de planetas orbitando en torno suyo. Asimismo, del tipo de movimiento del Sol (o de cualquier otra estrella) puede inferirse si es uno o si son varios los planetas que orbitan a su alrededor. De este modo se ha postulado la presencia de planetas orbitando alrededor de algunas estrellas cercanas al Sistema Solar, si bien se trata de medidas que requieren una altísima precisión y los resultados no han sido concluyentes hasta la fecha.

17 PAU Eligiendo como origen de referencia el centro de la Tierra, y teniendo en cuenta que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra, determina a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Compárala con el radio de la Tierra y saca las conclusiones oportunas.

Datos: $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; $r_T = 6\,370$ km

Aplicando la expresión general:

$$x_{CM} = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L} =$$
$$= \frac{m_T \cdot 0 + 0{,}012 \cdot m_T \cdot 384\,000}{1{,}012 \cdot m_T} = 4\,553{,}3\ \text{km}$$

Aquí hemos supuesto que $x_T = 0$, al considerar que el origen se encuentra en el centro de la Tierra. Así pues, el centro de masas del sistema Tierra-Luna está en el interior de la Tierra, a 4 553,3 km de su centro.

Si bien ambos astros se mueven en torno al centro de masas, la Tierra queda prácticamente inmóvil, y es la Luna la que gira en torno suyo.

Rotación del sólido rígido y conservación del momento angular

18 ¿Qué sentido tiene el acto instintivo de extender los brazos en cruz cuando tratamos de conservar el equilibrio? ¿Por qué los funambulistas hacen equilibrios en la cuerda ayudados de un palo largo?

En esencia, se trata de aumentar nuestro momento de inercia para disminuir la posibilidad de «rotación» (con la consiguiente caída) alrededor de la línea de equilibrio.

Las pequeñas variaciones imprimidas en el momento de inercia con la barra permiten al funambulista compensar los desequilibrios puntuales y, con ello, evitar la caída.

19 ¿Por qué cuando caminamos no lo hacemos a «piñón fijo»; es decir, por qué no adelantamos simultáneamente el brazo y la pierna del mismo lado?

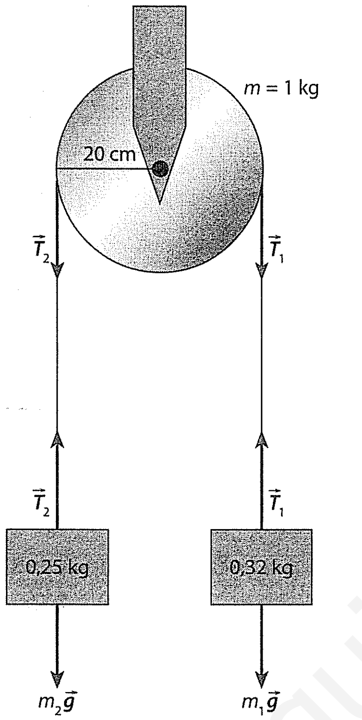
Si camináramos a «piñón fijo», el brazo y la pierna adelantados del mismo lado crearían un par de fuerzas con el brazo y la pierna que se quedan atrás, lo que produciría una pequeña rotación alrededor del eje vertical que pasa por nuestro centro, dando lugar a ese extraño andar de «robot».

20 Una persona se encuentra en pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. En un momento dado, se siente mareada y trata de desplazarse hacia el eje con la intención de asirse a él. ¿Crees que ha tomado la decisión más acertada? ¿Por qué?

Ha tomado la peor decisión. Al dirigirse hacia el eje, el momento de inercia del conjunto (plataforma + persona) disminuye, por lo que la velocidad angular de rotación aumenta y, con ella, el mareo de nuestro personaje.

21 **La polea de una máquina de Atwood tiene una masa de 1 kg y un radio de 20 cm. A ambos lados de la polea cuelgan dos pesas de 250 g y 320 g, respectivamente. Determina la aceleración que adquieren las masas, así como los valores de la tensión a ambos lados de la polea. ¿Qué porcentaje de error cometemos al no tener en cuenta el movimiento de la polea? (Considera la polea como un pequeño cilindro homogéneo.)**

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:



Hay dos ecuaciones de traslación de m_1 y m_2, y una de rotación de la polea:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 (g - a)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 (g + a)$$

$$(T_1 - T_2)\, r = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\, r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} ma$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para T_1 y T_2, resulta:

$$m_1 (g - a) - m_2 (g + a) = \frac{1}{2} ma$$

$$(m_1 - m_2)\, g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m\right) \cdot a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + 1/2\, m} = 0{,}64 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 2{,}93 \text{ N};\ T_2 = 2{,}61 \text{ N}$$

Operando en la máquina de Atwood, obtendríamos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2} = 1{,}203\,5 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, se comete un error del 88 %.

22 **PAU** **El radio solar es de unos $6{,}96 \cdot 10^8$ m, y su período de rotación es de 25,3 días. ¿Cuál sería su período de rotación si se colapsara formando una enana blanca de 4 000 km de radio, sin variación apreciable de masa?**

En ese hipotético proceso se conservaría el momento angular, por lo que:

$$I\omega = I'\omega' \Rightarrow \frac{2}{5} m r^2 \omega = \frac{2}{5} m (r')^2 \omega'$$

Como $\omega = 2\pi/T$, llegamos a:

$$r^2 \frac{2\pi}{T} = (r')^2 \frac{2\pi}{T'} \Rightarrow \frac{r^2}{T} = \frac{(r')^2}{T'}$$

De donde:

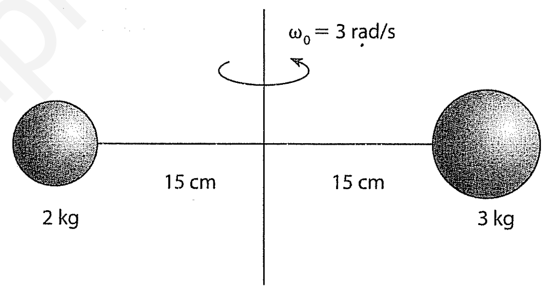
$$T' = \left(\frac{r'}{r}\right) = 0{,}000\,835 \text{ días} = 1 \text{ min } 12 \text{ s}$$

D23 **PAU** **Dos masas de 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran en los extremos de una varilla rígida horizontal de 30 cm de longitud y de masa despreciable. El sistema comienza a girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la varilla a razón de 3 rad/s. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema? Si en un momento dado las dos partículas empiezan a desplazarse una hacia la otra con velocidades respectivas de 0,8 cm/s y 0,5 cm/s:**

a) **Determina una expresión para el momento de inercia del sistema en función del tiempo.**

b) **Halla la velocidad angular del sistema al cabo de 10 s.**

c) **Si para que las partículas comiencen a moverse, ha sido necesario impulsarlas en la dirección radial, ¿es lícito pensar que el momento angular no sufre variaciones?**



El momento de inercia inicial es:

$$I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Y sustituyendo los datos:

$$I_0 = 2 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 = 0{,}112\,5 \text{ kg m}^2$$

Por lo que el valor de su momento angular será:

$$L_{\text{inicial}} = I_0 \omega_0 = 0{,}337\,5 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

a) El momento de inercia en función del tiempo es:

$$I(t) = m_1 (d_1 - v_1 t)^2 + m_2 (d_1 - v_2 t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = 2 \cdot (0{,}15 - 0{,}008t)^2 + 3 \cdot (0{,}15 - 0{,}005t)^2 =$$

$$= 2{,}03 \cdot 10^{-4} t^2 - 9{,}3 \cdot 10^{-3} t + 0{,}112\,5 \text{ kg m}^2$$

b) El momento de inercia a los 10 s valdrá:

$$I\,(10) = 0{,}039\,8 \text{ kg m}^2$$

Y como el momento angular se conserva:

$$I_0 \omega_0 = I'\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_0 \omega_0}{I'} = 8{,}48 \text{ rad/s}$$

c) Sí, pues al ser las fuerzas radiales, resulta que $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, lo que implica que el momento angular es constante.

D24 **PAU** **Una partícula de 10 g de masa que se mueve con una rapidez v_0 = 15 m/s choca tangencialmente contra la periferia de una esfera sólida de 1 kg de masa y 20 cm de radio que estaba en reposo. Si la partícula queda adherida a la esfera y esta puede comenzar a girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro, determina:**

a) **La velocidad angular con la que girará el sistema.**

b) **La energía se disipa en la colisión.**

a) El momento angular inicial del sistema es el de la partícula con respecto al centro de la esfera:

$$L_0 = mv_0r = 0{,}01\ \text{kg} \cdot 15\ \text{m/s} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}03\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Después de la colisión, el momento angular es:

$$L' = I'\omega' = \left(\frac{2}{5}mr^2 + m'r^2\right)\omega' = \left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2\omega'$$

En ausencia de fuerzas externas momento angular se conserva es decir, $L_0 = L'$ por tanto:

$$L' = I'\omega' = 0{,}3 \Rightarrow \omega' = \frac{0{,}03\ \text{kg m}^2/\text{s}}{\left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2} = 1{,}83\ \text{rad/s}$$

b) La energía disipada en la colisión viene dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I'(\omega')^2 = 1{,}125\ \text{J} - 0{,}027\ \text{J} = 1{,}098\ \text{J}$$

por lo que se disipa el 97,6 %.

El problema de los cuerpos rodantes

25 PAU **Una esfera maciza rueda por dos planos inclinados que tienen la misma altura, pero diferente inclinación. ¿Llegará la esfera al final con la misma velocidad en ambos casos? ¿Tardará lo mismo en llegar al final?**

La velocidad al final de ambos planos es la misma si la altura de partida era idéntica, pues la ecuación general referida a la energía mecánica es la misma: $E_{c\ \text{final}} = E_{p\ \text{inicial}}$.

Sin embargo, no tardan lo mismo en llegar en un caso y en otro. La razón es la diferente aceleración lineal del centro de masas en cada caso. La fuerza de fricción, F_r, produce el momento de fuerza necesario que incrementa la velocidad angular a medida que la esfera desciende. Entonces, podemos aplicar a la esfera que rueda sin deslizarse dos ecuaciones:

- Ecuación de rotación:

$$F_r r = I\alpha \Rightarrow F_r r = \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{a_{CM}}{r}\right) \Rightarrow F_r = \frac{2}{5}ma_{CM}$$

- Ecuación de traslación:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_r = ma_{CM}$$

donde a_{CM} es la aceleración del centro de masas.

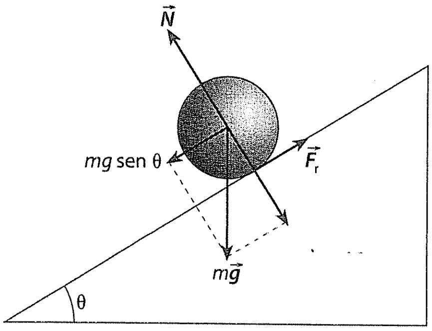
Resolviendo el sistema, observamos que la aceleración del centro de masas es:

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g\ \text{sen}\ \theta$$

Por tanto, puede concluirse que, cuanto menor sea el ángulo, la aceleración es menor y, por tanto, será menor el tiempo que emplea la esfera en llegar a la base del plano.

26 PAU **Una esfera sólida de masa *m* y radio *r* rueda sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo θ. Demuestra que el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático necesario para garantizar la rodadura sin deslizamiento vale μ = 2/7 tg θ.**

Consideremos un cuerpo que baja rodando por un plano inclinado, tal como se observa en el dibujo:



Podemos plantear una ecuación para el movimiento de traslación y otra para el movimiento de rotación, suponiendo que el cuerpo no se desliza:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_{roz} = ma$$

$$F_{roz} \cdot R = I\alpha = \frac{Ia}{R} \Rightarrow F_{roz} = \frac{Ia}{R^2}$$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$g\ \text{sen}\ \theta = \left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)a \Rightarrow a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Pero, por otro lado, sabemos que la fuerza de rozamiento viene dada por la expresión:

$$F_{roz} = \mu mg \cos\theta$$

Si introducimos este valor en la ecuación de rotación, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \mu mg\cos\theta = ma \Rightarrow a = g(\text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la aceleración, resulta:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta$$

Ahora podemos introducir el valor del momento de inercia, que para la esfera es $2mR^2/5$:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\text{sen}\ \theta}{\frac{7}{5}} = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}\text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta - \mu\cos\theta$$

$$-\frac{2}{7}\text{sen}\ \theta = -\mu\cos\theta \Rightarrow \mu = \frac{2}{7}\text{tg}\ \theta$$

27 **¿Podrían diferenciarse dos esferas idénticas, de la misma masa y radio, que fueran una hueca y otra maciza? ¿Cómo?**

Los momentos de inercia de una esfera maciza y una hueca son, respectivamente:

$$I_{maciza} = \frac{2}{5}mR^2 \qquad I_{hueca} = \frac{2}{3}mR^2$$

Las esferas podrían distinguirse dejándolas rodar por un plano inclinado. Como se ha visto en la actividad 22, la aceleración de caída para un cuerpo que rueda por un plano inclinado viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Al tener un momento de inercia menor, la esfera maciza caerá con mayor aceleración y llegará antes a la base del plano.

28 **Dos esferas de la misma masa pero de distinta densidad se dejan caer rodando por un plano inclinado. ¿Llegan a la vez a la base del plano?**

Como hemos visto en actividades anteriores, la aceleración de caída de la esfera viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Ahora bien, si se trata de dos esferas de la misma masa pero distinta densidad, la expresión I/mR^2 es idéntica para ambas, e igual a 2/5. En consecuencia, podemos asegurar que las dos esferas llegarán a la vez.

2 Gravitación universal

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Precedentes de la ley de gravitación** — páginas 63/64
  - 1.1. Las fuerzas centrípetas y el inverso del cuadrado de la distancia — página 64
- **2. La ley de gravitación universal** — páginas 65/67
  - 2.1. Fuerzas gravitatorias en un conjunto de masas — página 67
- **3. Consecuencias de la ley de gravitación universal** — páginas 68/69
  - 3.1. Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies planetarias — página 68
  - 3.2. Significado físico de la constante *k* en la tercera ley de Kepler — página 69
- **4. Análisis de los factores que intervienen en la ley de gravitación universal** — páginas 70/73
  - 4.1. La constante de gravitación universal *G* — página 70
  - 4.2. Masa inercial y masa gravitacional — página 71
  - 4.3. El inverso del cuadrado de la distancia — páginas 72/73
- **5. Las mareas: el poderoso influjo de la Luna** — páginas 74/77
  - 5.1. Mareas altas o de flujo — páginas 74/75
  - 5.2. Mareas bajas o de reflujo — página 75
  - 5.3. ¿Cada cuánto tiempo se producen las mareas? — página 76
  - 5.4. Mareas «vivas» y mareas «muertas» — página 76
  - 5.5. Las fuerzas de marea y su dependencia con la distancia — página 77

Cuestiones previas (página 62)

1. ¿Qué atrae con más fuerza a qué: la Tierra a la Luna o la Luna a la Tierra? ¿Y en el caso de una piedra y la Tierra?

Se atraen con la misma fuerza en magnitud pero sentidos opuestos.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?

a) **Un cuerpo más pesado siempre caerá más deprisa que otro más ligero.**

b) **La Tierra atrae a todos los cuerpos en su superficie con la misma fuerza.**

a) Falso. Caen con la misma aceleración siempre que despreciemos el rozamiento de los cuerpos con el aire.

b) Falso. La Tierra atrae a todos los cuerpos que se encuentran en la superficie con la misma aceleración pero distinta fuerza.

3. Imagina que te encuentras dentro de una nave espacial sin referencias visuales con respecto al exterior. ¿Podrías discernir de alguna manera si en un momento dado te hallas en órbita alrededor de la Tierra o, estás precipitándote hacia ella?

Si estás en ingravidez es cuándo estás en órbita, lo puedes comprobar si sueltas un objeto y observas que se mueve a la velocidad de la nave.

4. ¿A qué se deben las mareas? ¿Cuántas se producen en un día? ¿Qué son las mareas vivas? ¿Y las muertas?

Las mareas se deben fundamentalmente a la acción de la Luna sobre la Tierra. Se producen dos mareas altas y dos mareas bajas.

Las mareas vivas se deben a la influencia de la Luna y del Sol sobre la Tierra. Cuando los dos efectos se suman dan lugar a las mareas de flujo máximas.

Al igual que las mareas vivas, las mareas muertas también se deben a la influencia de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Sin embargo, al contrario de las mareas vivas, cuando ambas contribuciones se contrarrestan dan lugar a las mareas muertas.

Actividades (páginas 63/77)

1 Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre. Con los datos que se ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura 2.2, contesta a las siguientes preguntas.

a) **¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en 1 hora?**

b) **¿Qué altura *h* ha «caído» la Luna en esa hora?**

c) **¿Qué valor de aceleración g_L de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?**

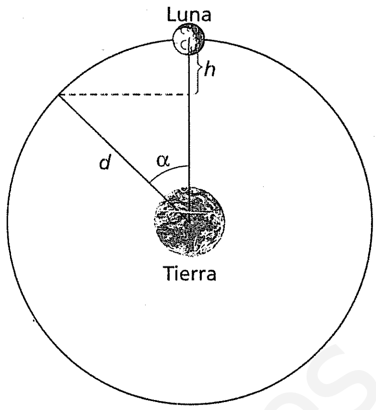
d) **¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_T = 9{,}8$ m/s^2, que corresponde a la superficie terrestre?**

e) **¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?**

f) **¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?**

Datos: radio terrestre = 6 370 km; distancia Tierra-Luna = 384 000 km; período sidéreo lunar = 27,31 días

La situación descrita en el enunciado es la siguiente:



a) El período sidéreo lunar, expresado en horas, es de 655,44 h. En este tiempo, la Luna ha descrito 360°, por lo que, en 1 hora, el ángulo α es de:

$$\alpha = \frac{360°}{655{,}44} = 0{,}549°$$

b) La altura *h* (véase la figura 2.2) que la Luna ha «caído» en esa hora es:

$$h = d - d\cos\alpha = d\,(1 - \cos\alpha) = 17\,627{,}75 \text{ m}$$

c) El valor de aceleración de caída que se correspondería con esa distancia en 1 h (3 600 s) se obtendría de la siguiente manera:

$$h = \frac{1}{2} g_L t^2 \Rightarrow g_L = \frac{2h}{t^2} = 0{,}0027 \text{ m/s}^2$$

d) Dividiendo el valor de g_T en la superficie terrestre entre g_L, se obtiene:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong 3\,600$$

e) Al dividir ambas distancias, resulta:

$$\frac{d}{r_T} \cong 60$$

f) Queda claro que, al aumentar la distancia 60 veces, la aceleración gravitatoria ha disminuido 3 600 veces, es decir, 60^2 veces. Así pues:

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

2 PAU Determina el valor de «la fuerza requerida para mantener a la Luna en su órbita» (en palabras de Newton) haciendo uso de los datos de masas de la Tierra y de la Luna, así como de la distancia entre ambos. ¿Qué aceleración comunica dicha fuerza a cada uno de los cuerpos celestes?

La fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna es:

$$F = G\frac{m_T m_L}{d^2_{T\text{-}L}}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 1{,}95 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Dicha fuerza comunica a la Tierra una aceleración de valor:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} = 3{,}34 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Y a la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{7{,}34 \cdot 10^{22}} = 2{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

3 **¿Qué le sucede al peso de un objeto si su masa se triplica a la vez que también se triplica su distancia al centro terrestre?**

La expresión de la fuerza gravitatoria es:

$$F = G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2}$$

Si se triplica tanto la masa m como la distancia r al centro de la Tierra, resulta:

$$F' = G\frac{M_{\text{Tierra}}3m}{9r^2}$$

Operando queda:

$$F' = \frac{1}{3}G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2} = \frac{1}{3}F$$

Luego la fuerza queda dividida por tres.

4 **PAU** **Dos esferas idénticas de radio r y densidad ρ están en contacto. Expresa la fuerza de atracción gravitatoria entre ambas como función de r, ρ y G.**

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho \cdot 4/3\ \pi r^3$ y que la distancia entre los centros de las esferas es 2r, entonces:

$$F = G\frac{mm}{(2r)^2} = G\,(2/3\ \rho\pi r^2)^2 = 4/9G\rho^2\pi^2r^4$$

5 **¿A qué distancia del centro lunar es atraída con una fuerza de 1 N una masa de 1 kg?**

La fuerza con que la Luna atrae a una masa de 1 kg será:

$$F = G\frac{m_{\text{L}}m}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{7{,}20 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}}{r^2} = 1\ \text{N}$$

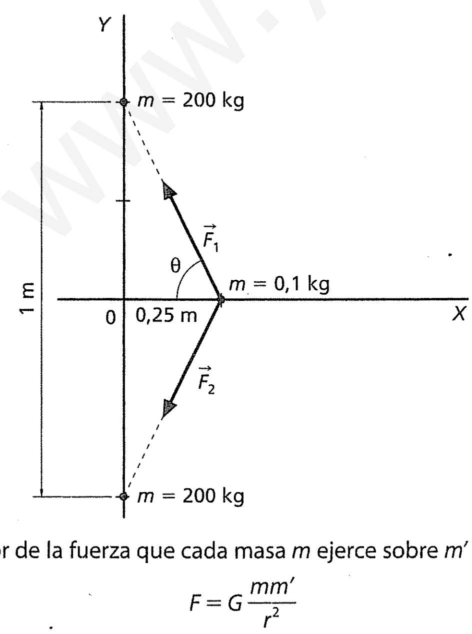
Despejando r, resulta:

$$r = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 7{,}20 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}/1\ \text{N}} =$$

$$= 2{,}19 \cdot 10^6\ \text{m} = 2\,190\ \text{km}$$

6 **PAU** **Dos esferas de 200 kg se encuentran separadas 1 m a lo largo del eje Y. Halla la fuerza neta que ejercen sobre una pequeña masa de 0,1 kg situada sobre el eje X a 0,25 m del punto medio de las esferas. (Expresar el resultado en notación vectorial y calcular el módulo de la fuerza neta).**

El diagrama de las fuerzas originadas por las dos masas se observa en el siguiente dibujo:



El valor de la fuerza que cada masa m ejerce sobre m' es:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

Siendo $r^2 = 0{,}5^2 + 0{,}25^2 = 0{,}312\,5$, por lo que sustituyendo:

$$F = 4{,}27 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

Como se desprende de la figura, las fuerzas F_1 y F_2 son iguales en valor y pueden descomponerse en las componentes x e y, siendo:

$$F_{1x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{1y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$
$$F_{2x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{2y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$

Donde sen $\alpha = 0{,}5/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}89$ y cos $\alpha = 0{,}25/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}45$

Por lo que:

$$\vec{F}_1 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\vec{i} + 3{,}8 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$
$$\vec{F}_2 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\vec{i} - 3{,}8 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Así pues, la fuerza neta es:

$$\vec{F} = -3{,}84 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Siendo su valor $3{,}84 \cdot 10^{-9}$ N.

7 **Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, y su radio es aproximadamente 1/4 del terrestre, da un valor aproximado de la aceleración de caída de los objetos en la superficie lunar.**

Utilizando los datos ofrecidos, tendremos:

$$g_{\text{L}} = G\frac{m_{\text{L}}}{r_{\text{L}}^2} = G\frac{(0{,}012 \cdot m_{\text{T}})}{\left(\frac{1}{4}r_{\text{T}}\right)^2} =$$

$$= 0{,}192 \cdot g_{\text{T}} = 1{,}88\ \text{m/s}^2$$

8 **PAU** **A partir de la expresión de la aceleración de caída libre, demuestra que, si consideramos los planetas como cuerpos esféricos, puede escribirse:**

$$a = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

donde ρ es la densidad media del planeta.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio del planeta, se obtiene la expresión pedida, al sustituir esta igualdad en la expresión **2.8:**

$$a = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

Obsérvese que la expresión obtenida nos da únicamente la aceleración en la superficie del planeta (o para alturas muy pequeñas comparadas con ella).

9 **PAU** **El diámetro de Venus es de 12 120 km y su densidad media es de 5 200 kg/m³. ¿Hasta qué altura ascendería un objeto lanzado desde su superficie con una velocidad inicial de 30 m/s?**

La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por la siguiente expresión:

$$g_{\text{Venus}} = G\frac{M_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} = G\frac{\rho_{\text{Venus}}V_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} =$$

$$= \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Venus}}R_{\text{Venus}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una gravedad de 8,8 m/s².

Puesto que el objeto lanzado hacia arriba experimenta un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la ecuación que relaciona velocidades con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy_{\text{máx}}$$

En nuestro caso, la aceleración es negativa y la velocidad final es la del punto más alto, esto es, cero:

$$0 = 30^2 - 2 \cdot 8{,}8 \cdot y_{\text{máx}} \Rightarrow 51{,}14\ \text{m}$$

10 **Teniendo en cuenta que la masa del Sol es de unos $2 \cdot 10^{30}$ kg, calcula el valor de *k* para los planetas del sistema solar y exprésalo con sus correspondientes unidades del SI.**

Sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión **2.9**, se obtiene:

$$k = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}} = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

11 **El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?**

A partir de la tercera ley de Kepler, y sustituyendo los valores ofrecidos, se calcula el valor de la constante *k* en el caso de Júpiter:

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(152\,940)^2}{(4{,}22 \cdot 10^8)^3} = 3{,}112 \cdot 10^{-16}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

Después se halla la masa de Júpiter a partir de la expresión **2.9**:

$$m_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{kG} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

12 **Marte se encuentra a una distancia media del Sol de 227 900 000 km. ¿Cuántos días dura el año marciano?**

Se trata de determinar, a partir de la tercera ley de Kepler, el período de Marte usando el valor de la constante *k* obtenido en la actividad 10.

$$T^2 = kr^3 = 2{,}96 \cdot 10^{-19} \cdot (2{,}279 \cdot 10^{11})^3 = 3{,}5 \cdot 10^{15}$$

$$T = 5{,}92 \cdot 10^7\ \text{s} = 685\ \text{días}$$

13 **Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por $T = 2\rho\sqrt{l/g}$:**

a) **¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?**

b) **¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a su frecuencia de oscilación?**

a) Al duplicar la distancia, el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la cuarta parte; es decir:

$$g' = \frac{g}{4}$$

Al sustituir este nuevo valor en la expresión del período, observamos que este se duplica:

$$T = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g/4}} = 4\rho\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Si se duplica el período, la frecuencia se reduce a la mitad.

14 **Haz una estimación del valor de la aceleración de marea en la zona más próxima a la Luna. ¿Qué elevación de marea produciría dicha aceleración, en condiciones ideales, actuando durante media hora?**

Dato: La masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra.

La aceleración de la marea en el punto más cercano a la Luna viene dada por la expresión **2.14**. Sustituyendo $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_T$ por sus respectivas expresiones matemáticas, resulta:

$$a_{\text{marea}} = Gm_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{(r - r_T)^2} - \frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= 0{,}012 \cdot G \cdot m_T \cdot \frac{2rr_T - r_T^2}{r^2(r - r_T)^2}$$

Ahora bien, como veremos en el epígrafe siguiente, el radio de la Tierra es mucho menor que la distancia Tierra-Luna, luego la expresión anterior se puede aproximar a:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot Gm_T \cdot \frac{2rr_T}{r^2r^2} = 0{,}012 \cdot Gm_T\frac{2r_T}{r^3}$$

Sustituyendo, resulta:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2$$

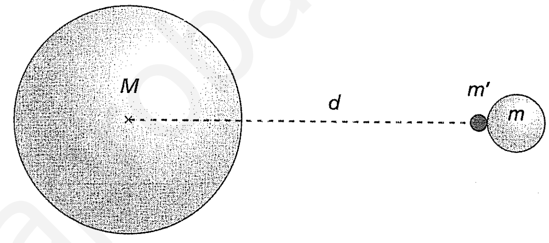
Si consideramos que el valor de la aceleración de marea se mantiene aproximadamente constante durante media hora, la elevación que se producirá será:

$$y = \frac{1}{2}at^2 = 1{,}75\ \text{m}$$

Debe hacerse notar que este ejercicio no es más que una mera aproximación.

15 **PAU** **Supongamos una masa *m'* sobre la superficie de un satélite de masa *m* y radio *r* que orbita a una distancia *d* alrededor de un planeta masivo de masa *M*. Teniendo en cuenta que el límite de Roche sería la distancia crítica *d* en la que la fuerza de marea sobre *m'* originada por el planeta se iguala a la fuerza de atracción gravitatoria que el satélite ejerce sobre *m'*, demuestra que el límite de Roche viene dado por la expresión:**

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$



La fuerza de marea que ejerce el planeta masivo sobre el pequeño satélite será:

$$F_{\text{marea}} = G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m'$$

Mientras que la fuerza gravitatoria que ejerce el satélite sobre la masa *m'* es:

$$F_{\text{gravitatoria}} = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

En el límite de Roche, ambas fuerzas se igualan, es decir:

$$G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m' = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

Despejando la distancia:

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

16 **Demuestra que si en la anterior fórmula expresamos las masas en función de las densidades y volúmenes del planeta y satélite, se obtiene la siguiente expresión más útil para el límite de Roche, que solo depende del radio del planeta y de las densidades de ambos cuerpos:**

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Si expresamos las masas en función de la densidad y el volumen de los planetas:

$$M = \frac{4}{3}\rho R^3 \cdot \rho_{\text{planeta}};\ m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{satélite}}$$

$$\frac{2M}{m} = \frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

Si sustituimos este cociente en la expresión hallada en la actividad anterior, resulta:

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Cuestiones y problemas (páginas 80/81)

Guía de repaso

1 ¿De qué tipo llegó a imaginar Kepler que podía ser la fuerza responsable del movimiento de los planetas? ¿A qué asociaba la causa de dicha fuerza?

Kepler situaba la causa del movimiento de los planetas en el Sol. La razón que daba era que la fuerza con que el Sol movía a los planetas disminuía con la distancia, del mismo modo que lo hacía su propia luz. Por ello, dicha fuerza debía ser algo inherente a la sustancia solar. Seducido por los estudios de Gilbert sobre magnetismo terrestre, Kepler llegó a suponer que la fuerza que dimanaba del Sol era magnética.

2 ¿Cuál parece ser el origen de la idea contenida en el libro III de los *Principia* de Newton, según la cual la caída de los cuerpos y los movimientos planetarios obedecen a un mismo tipo de fuerza?

Los cálculos que Newton realizó en 1666, en los que supuso que la Luna «caía» hacia la Tierra de forma continua, de igual modo que un proyectil se precipita parabólicamente a tierra.

Así, halló que la aceleración con que caía cumplía con la regla del inverso del cuadrado de la distancia.

3 ¿Cuál es el origen de la insistente suposición de que la fuerza responsable del movimiento de los planetas debía cumplir la ley del inverso del cuadrado de la distancia?

La suposición de que la fuerza era centrípeta, junto con el cumplimiento de la tercera ley de Kepler.

4 ¿Por qué no aparece la constante de gravitación *G* en los Principia? ¿Qué impedía a Newton conocer su valor?

Porque no se conocía la masa de la Tierra.

5 ¿Qué precauciones considerarías necesario tomar si te vieses en la tesitura de tener que reproducir el experimento de Cavendish? ¿Por qué es tan difícil su reproducción?

Habría que evitar, por ejemplo, las posibles perturbaciones producidas por corrientes de aire. Debe, pues, reproducirse el experimento en condiciones de vacío.

Según el material que se emplee, ha de procurarse también que no se produzcan interacciones de naturaleza electrostática.

6 ¿Cómo se llega a la conclusión de que la masa inercial y la gravitacional son la misma magnitud?

Se llega a esa conclusión a partir de la observación experimental de que la aceleración de la gravedad es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su masa.

7 ¿Qué razones llevaron a suponer que la fuerza gravitatoria entre masas varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia?

La respuesta a esta cuestión es la misma que se dio para la cuestión 3.

8 ¿Te parece lícito considerar que *G* es una constante verdaderamente «universal»? ¿Qué otras constantes universales conoces?

Sí es lícito, mientras no se demuestre lo contrario. Existen otras constantes universales, como la de Avogadro, la de Boltzmann, la masa y la carga del electrón, la velocidad de la luz en el vacío, la constante de Planck, las masas y cargas de partículas elementales o la constante de Hubble.

9 ¿Cómo podría incidir en el fenómeno de las mareas un calentamiento global del planeta? ¿Qué consecuencias podría tener dicha incidencia?

Un calentamiento global del planeta que provocase la fusión de los casquetes polares conllevaría un aumento de la masa acuosa del planeta y, por tanto, problemas de anegación de zonas hoy habitadas debido a un ligero incremento de las mareas.

10 ¿Por qué el efecto de marea de la Luna sobre la Tierra es mayor si la fuerza gravitatoria del Sol supera a la ejercida por la Luna?

Porque, como ya se ha comentado y puede observarse en el ejercicio resuelto número 6 de la página 77, las fuerzas y aceleraciones de marea varían conforme al inverso del cubo de la distancia.

11 ¿Cuántas mareas se producen al día en una localidad costera? ¿Cada cuánto tiempo?

Al día se producen dos mareas altas y dos mareas bajas. Las mareas altas se producen cada 12 h y 26 min y el tiempo que transcurre entre una marea alta y una marea baja es de 6 h y 13 min.

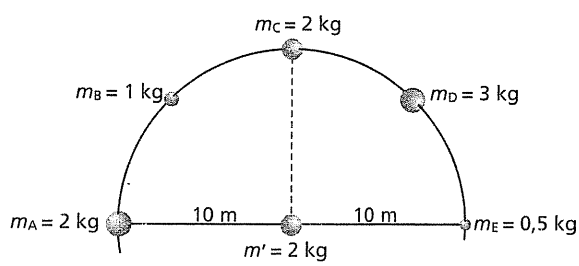
Ley de gravitación universal

12 Dos masas aisladas se atraen gravitacionalmente. Si una es el doble que la otra, ¿cómo serán, en comparación, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas? ¿Qué pasará a las fuerzas si la distancia entre las masas se reduce a la mitad? ¿Cómo serán, en comparación, las aceleraciones que adquirirán las masas?

Las fuerzas, según se desprende de la formulación de la ley de gravitación y de la tercera ley de Newton, serán iguales y de sentidos opuestos. Si la distancia se reduce a la mitad, el valor de la fuerza se cuadruplica.

En cuanto a las aceleraciones que adquirirán ambos cuerpos, el de doble masa tendrá la mitad de la aceleración que el otro.

13 PAU Determina la fuerza que actúa sobre la masa *m'* de la distribución que se aprecia en la figura.



La fuerza total resultante en la dirección del eje *X* viene dada por:

$$F'_x = G\frac{m'}{r^2}(-m_A - m_B\cos 45° + m_D\cos 45° + m_E)$$

de donde:

$$F'_x = -0{,}021\,72 \cdot G$$

De manera análoga, la fuerza total resultante en la dirección del eje *Y* es:

$$F'_y = G\frac{m'}{r^2}(m_B\,\text{sen}\,45° + m_C + m_D\,\text{sen}\,45°)$$

de donde:

$$F'_y = 0{,}096\,56 \cdot G$$

Por lo que:

$$\vec{F}' = -0{,}021\,72 \cdot G\vec{i} + 0{,}096\,56 \cdot G\vec{j}\ \text{N}$$

cuyo valor es:

$$F' = G\sqrt{(-0{,}021\,72)^2 + (0{,}096\,56)^2} = 6{,}60 \cdot 10^{-12}\ \text{N}$$

14 **PAU** **Dos masas puntuales iguales de 5 kg se encuentran situadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero de 40 cm de lado.**

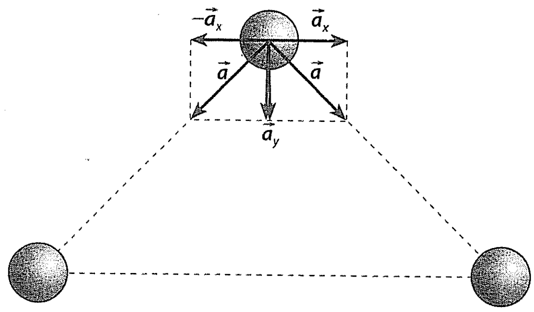
Si se coloca en el vértice superior una tercera masa m':

a) **¿Qué aceleración adquiere esta última masa en ese punto (exprésala en notación vectorial)?**

b) **¿Descenderá con aceleración constante?**

c) **¿Qué aceleración tendrá en el momento de llegar a la base del triángulo?**

La representación vectorial del problema se aprecia en la siguiente figura:



a) Puesto que las masas en los vértices inferiores son iguales, las componentes x de la aceleración que cada una de ellas comunica a m' se cancelan, de modo que la aceleración total que adquiere m' será:

$$\vec{a}_{\text{total}} = -2a_y\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

donde:

$$a_y = G\frac{m}{d^2}\cos 30°$$

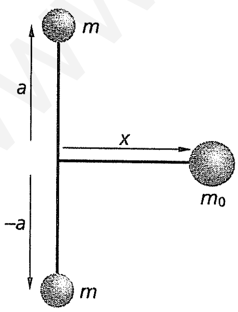
Sustituyendo $m = 5$ kg y $d = 0{,}4$ m, se obtiene:

$$\vec{a}_{\text{total}} = -3{,}6\cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

b) No lo hará con aceleración constante, pues a medida que desciende las componentes y de la aceleración disminuyen.

c) Puesto que se mueve en la dirección del eje Y, su aceleración total será 0, al estar en el punto medio de las dos masas iguales.

D15 **PAU** **Dos masas puntuales de valor m se encuentran situadas sobre el eje Y en las posiciones $y = +a$ e $y = -a$, mientras que una tercera, m_0, se encuentra situada en el eje X a una distancia $-x$ del origen, como se indica en la figura.**

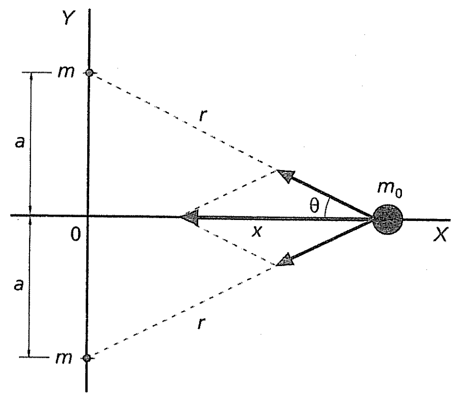


a) **Demuestra, detallando todos los pasos y argumentando la respuesta, que la fuerza que las dos masas idénticas ejercen sobre m_0, es:**

$$\vec{F} = \frac{2G\,mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) **¿Qué expresión se obtendrá si situamos la masa m_0 a una distancia mucho mayor que a?**

El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) El valor de la fuerza que cada masa ejerce sobre m_0 es:

$$F = G\frac{mm_0}{r^2} = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}$$

Al descomponer ambas fuerzas en sus componentes x e y, vemos que las componentes y se anulan entre sí, de modo que la fuerza neta resultante sobre m_0 es, como se aprecia en la figura:

$$\vec{F} = -2F_x\vec{i}$$

Aplicando la ley de gravitación universal:

$$F_x = F\cos\alpha = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} = G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Así pues, en forma vectorial:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) Si $x >> a$, entonces $(x^2+a^2)^{3/2} \approx x^3$, quedando la anterior expresión de la manera:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{x^2}\vec{i}$$

Que será la que resultará de suponer la masa m_0 atraída por una única masa puntual de valor $2m$ situada a la distancia x.

16 **¿Dónde será mayor el período de un péndulo, en el ecuador o en los polos?**

Según la expresión utilizada en la actividad 13, el período de un péndulo será mayor en el ecuador, donde el valor de g es ligeramente menor. Este hecho era conocido por Newton, ya que Richter había llevado a cabo mediciones del período de un péndulo en la Guayana francesa en 1672 y observado que el péndulo oscilaba más lentamente. A raíz de ello, Newton concluyó que la Tierra debía estar abultada en su zona ecuatorial y achatada por los polos.

17 **Imagínate que la ESA (Agencia Espacial Europea) organiza un concurso de ideas en los centros de enseñanza sobre posibles experimentos para llevar a cabo en un satélite que se halle en órbita alrededor de la Tierra. Alguien propone analizar el movimiento de un péndulo en el interior del satélite. ¿Qué te parece la idea?**

La idea no resultaría en absoluto, pues el péndulo no oscilaría. En realidad, todos los objetos en el interior de la estación orbital estarían cayendo libremente, lo que les conferiría esa situación de «ingravidez», que no significa ausencia de gravedad.

18 **¿Qué le ocurriría a un péndulo si, de repente, la Tierra aumentara su velocidad de rotación? ¿Se vería afectado el péndulo si se encontrara en los polos?**

Como se tendrá ocasión de analizar en detalle en la siguiente unidad, la aceleración gravitatoria efectiva que actuaría sobre los cuerpos en latitudes no polares sería ligeramente menor, al aumentar la aceleración centrífuga.

En consecuencia, el período del péndulo aumentaría, con lo que oscilaría más lentamente. Por el contrario, en los polos no se vería afectado el valor de g, aunque aumentara la velocidad de rotación.

19 **Imagínate que un planeta aumentara de tamaño sin alterar su densidad. ¿Se elevaría o disminuiría el peso de los cuerpos en su superficie?**

Tal y como se desprende de la actividad 8 de la página 66, es posible expresar la aceleración de la gravedad superficial en función de la densidad del siguiente modo:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

Al aumentar el tamaño el planeta, se incrementa r y, si no varía la densidad, el valor de g se elevaría, por lo que el peso de los cuerpos en la superficie se incrementa linealmente con la distancia o radio.

20 **Unos astronautas, al llegar a un planeta desconocido de gran tamaño, ponen su nave a orbitar a baja altura del planeta y con los motores desconectados. ¿Cómo podrían estimar la densidad del planeta usando solo un reloj?**

Si los astronautas sitúan la nave en una órbita baja a la velocidad orbital adecuada, lo único que tienen que tener en cuenta es el tiempo que tardan en efectuar una órbita completa (período T). Con esto ya pueden estimar la densidad del planeta del modo que sigue. En primer lugar, como la aceleración centrípeta de la nave es la aceleración gravitatoria, ambas expresiones se igualan:

$$g = \omega^2 r$$

Puesto que la órbita es de baja altura, cabe suponer que r es el radio del planeta. Expresando la aceleración de la gravedad en función de la densidad del planeta (véase la actividad 8), y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/T$, se obtiene:

$$\frac{4}{3} G\pi r\rho = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

Despejando la densidad, se concluye que:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

Así pues, como puede observarse, todo lo que necesitamos la densidad del planeta es un reloj para medir T.

21 **¿Qué pasaría si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?**

Permanecería orbitando en posición paralela a la nave, pues tanto esta como el objeto se encontrarían en caída libre. Lo veríamos, pues, en reposo relativo con respecto a la nave.

22 **PAU** **En la superficie de un planeta cuyo radio es 1/3 del de la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 5,8 m/s². Halla:**

a) **La relación entre las masas de ambos planetas.**

b) **La altura desde la que debería caer un objeto en el planeta para que llegara a su superficie con la misma velocidad con que lo haría en la Tierra un cuerpo que se precipita desde 50 m de altura.**

a) La aceleración gravitatoria de la Tierra:

$$G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

mientras que en el otro planeta:

$$G\frac{m_P}{r_P^2} = 5{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_T r_P^2}{m_P r_T^2} = 1{,}69$$

como $r_p = r_T/3$ se tiene que:

$$\frac{m_T r_T^2}{m_P r_T^2} \cdot \frac{1}{9} = 1{,}69$$

de donde:

$$\frac{m_T}{m_P} = 15{,}21$$

o bien, a la inversa:

$$\frac{m_P}{m_T} = 6{,}57 \cdot 10^{-2}$$

b) Las velocidades con que llegan al suelo los objetos que caen libremente son:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Puesto que en ambos casos la velocidad debe ser la misma:

$$\sqrt{2g_T y_T} = \sqrt{2g_P y_P} \Rightarrow g_T y_T = g_P y_P$$

Despejando el valor de y_P:

$$y_P = \frac{g_T}{g_P} \cdot y_T = 84{,}45 \text{ m}$$

23 **Considerando que la densidad media de la Tierra es de 5 500 kg/m³, y teniendo en cuenta el valor de su radio, haz una estimación del valor de la constante *G*.**

Expresando el valor de g en función de la densidad y despejando G, resulta:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho \Rightarrow G = \frac{3g}{4\pi r\rho}$$

Sustituyendo los valores:

$$G = \frac{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 5\,500 \text{ kg/m}^3} =$$
$$= 6{,}68 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

24 **PAU** **Una masa cae con una aceleración de 3,7 m/s² sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,4 veces el terrestre.**

a) **¿Cómo es la masa de este planeta en relación con la terrestre?**

b) **¿Qué velocidad debería llevar una nave para orbitar a 500 km sobre la superficie del planeta?**

c) **¿Cuánto tardaría en efectuar una órbita completa a esa altura?**

a) La aceleración superficial en el planeta es:

$$g_P = G\frac{m_P}{r_P^2} = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

Y en la Tierra:

$$g_T = G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_P r_T^2}{m_T r_P^2} = \frac{3{,}7}{9{,}8}$$

de donde:

$$\frac{m_P}{m_T} = 0{,}06$$

b) Teniendo en cuenta que la aceleración gravitatoria es centrípeta, se obtiene:

$$G\frac{m_P}{d^2} = \frac{v^2}{d}$$

Despejando el valor de v:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_p}{d}}$$

donde:

$$d = r_P + 500\ \text{km} = 0{,}4 \cdot 6\,370\ \text{km} + 500\ \text{km} = 3\,048\ \text{km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$v = 2\,806{,}7\ \text{m/s}$$

c) Como:

$$v = \frac{2\pi d}{T}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi d}{v} = 6\,823\ \text{s} \cong 0{,}08\ \text{días}$$

25 PAU **Supongamos que la Tierra tiene una densidad media ρ. Determina cuál sería el valor de *g* sobre su superficie si:**

***a)* El diámetro fuese la mitad y la densidad fuese la misma.**

***b)* El diámetro fuese el doble sin variar la densidad.**

Usando la expresión de *g* en función de la densidad:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

se observa que:

a) Si el radio se reduce a la mitad, entonces:

$$g' = \frac{1}{2} \cdot g$$

b) Si el radio se duplica, entonces:

$$g' = 2 \cdot g$$

26 PAU **La masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre. Calcula:**

***a)* La distancia que recorrería un cuerpo en 3 s cayendo libremente.**

***b)* La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si con la misma velocidad se elevara en Tierra hasta 30 m.**

La aceleración de la gravedad en la superficie lunar viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Luna}} = G\frac{M_{\text{Luna}}}{R^2_{\text{Luna}}} = G\frac{0{,}012 \cdot M_{\text{Tierra}}}{0{,}27^2 \cdot R^2_{\text{Tierra}}} = 0{,}164\,6 g_{\text{Tierra}} = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

a) Para hallar la distancia recorrida en la caída, hacemos uso de la ecuación del movimiento de caída libre:

$$y = 1/2\, g_L t^2 = 7{,}2\ \text{m}$$

b) La altura a la que se elevaría en un lanzamiento vertical vendrá dada por la expresión:

$$h_L = \frac{v_0^2}{2g_L}$$

Comparando las alturas que alcanzarían en la luna y en la Tierra, lanzados con la misma velocidad, se obtendría:

$$\frac{h_L}{h_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2g_L}}{} = \frac{v_0^2/2g_L}{v_0^2/2g_T} \Rightarrow h_L = h_T\frac{g_T}{g_L} = 30 \cdot \frac{9{,}8}{1{,}6} = 183{,}7\ \text{m}$$

27 PAU **Dos planetas extrasolares A y B presentan la misma densidad, pero el radio de A es el doble que el de B. Demuestra cómo serán en comparación los pesos de una misma masa *m* en sus respectivas superficies.**

El peso de una masa *m* en la superficie de un planeta de masa *M* y radio *R* puede expresarse en función del radio y la densidad del planeta:

$$P = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{4}{3}\pi R^3\rho \cdot \frac{m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho m$$

Si la densidad de ambos planetas es la misma, la relación entre el peso en el planeta A y en el planeta B será:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{R_A}{R_B} = 2 \Rightarrow P_A = 2P_B$$

D28 PAU **La densidad de Marte es 0,71 veces la de la Tierra, mientras que su diámetro es 0,53 veces el terrestre. Deduce y explica cómo serán, en comparación, los pesos de una misma masa *m* en Marte y en la Tierra. ¿Cuál es el valor de *g* en la superficie de Marte si en la Tierra es de 9,8 m/s²?**

Haciendo uso de la expresión $g = \frac{4}{3}G\pi\rho r$, se obtiene:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{4/3\, G\pi \cdot 0{,}71\rho_T \cdot 0{,}53 r_T}{4/3\, G\pi\rho_T r_T} = 0{,}38$$

Puesto que $P = mg$, resulta claro que el peso de una misma masa en Marte es 0,38 veces el correspondiente en la Tierra. Y teniendo en cuenta que $g_T = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, por tanto:

$$\frac{P_{\text{Marte}}}{P_{\text{Tierra}}} = \frac{g_{\text{Marte}}}{g_{\text{Tierra}}}$$

despejando queda:

$$g_{\text{Marte}} = 0{,}38 \cdot g_{\text{Tierra}} = 3{,}7\ \text{m/s}^2$$

Gravitación y tercera ley de Kepler

29 **¿Qué condición cumplen los satélites que emiten señales de TV? ¿A qué distancia deben orbitar?**

Deben ser geoestacionarios, es decir, orbitar con el mismo período que el de rotación terrestre (véase el problema resuelto número 4 de la página 76).

30 **¿Sería posible situar un satélite estacionario sobre nuestro país?**

No sería posible situar un satélite permanentemente sobre nuestro país, porque el centro o foco orbital de este satélite debe ser el centro terrestre, por donde pasa la dirección de acción de la fuerza gravitatoria.

31 **Calcula la masa de Marte sabiendo que Fobos, uno de sus dos satélites, completa una órbita de 9 300 km de radio cada 0,32 días.**

La aceleración centrípeta de Fobos es la gravitatoria, de modo que:

$$G\frac{m}{r^2} = \omega^2 r$$

Despejando la masa, tenemos que:

$$m = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituyendo los datos correspondientes, llegamos a:

$$m = 6{,}23 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

Para obtener este resultado, *T* se ha expresado en segundos, y *r*, en metros.

32 **Halla cuántas veces es mayor la masa solar que la terrestre a partir de los datos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol.**

Aplicando la tercera ley de Kepler al movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra y conociendo el valor de la constante *k* para un satélite alrededor de la Tierra (subepígrafe 3.2), se obtiene:

$$T_L^2 = k' d^3_{TL} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3_{TL}$$

Haciendo lo propio en el caso del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene:

$$T_T^2 = k d^3_{TS} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \cdot d^3_{TS}$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{T_L^2}{T_T^2} = \frac{m_S d^3_{TL}}{m_T d^3_{TS}}$$

Es decir:

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{T_L^2 d_{TS}^3}{T_T^2 d_{TL}^3}$$

Considerando los siguientes datos:

$$T_L = 27{,}31 \text{ días}; \quad d_{TS} = 149\,600\,000 \text{ km}$$
$$T_T = 365{,}25 \text{ días}; \quad d_{TL} = 384\,000 \text{ km}$$

cabe concluir que:

$$\frac{m_S}{m_T} = 3{,}3 \cdot 10^5$$

Es decir, la masa solar es $3{,}3 \cdot 10^5$ veces la terrestre.

33 ¿Cuál sería la masa de la Tierra, comparada con la real, para que la Luna girase en torno a nuestro planeta con el período actual, pero a una distancia dos veces mayor?

Aplicando la tercera ley de Kepler para el caso real:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3$$

Por otro lado, si $d' = 2 \cdot d$ y se mantiene el periodo, tendremos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'_T} \cdot (2 \cdot d)^3$$

Igualando ambas expresiones, se llega a que:

$$m'_T = 8 \cdot m_T$$

Es decir, la masa ficticia debería ser 8 veces la real.

34 PAU El satélite de Júpiter llamado Ío orbita a una distancia del centro planetario de 422 000 km, con un período de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su período de revolución es de 3,55 días.

Teniendo en cuenta que el valor de la constante k es el mismo para ambos casos, e igualando a partir de la tercera ley de Kepler, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{T_{\text{Ío}}^2}{d_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\text{Europa}}^2}{d_{\text{Europa}}^3}$$

Despejando la distancia a que se encuentra Europa, se obtiene:

$$d_{\text{Europa}} = d_{\text{Ío}} \cdot \left(\frac{T_{\text{Europa}}}{T_{\text{Ío}}}\right)^{2/3}$$

Sustituyendo los datos correspondientes que nos facilita el problema, concluimos que:

$$d_{\text{Europa}} = 1{,}59 \cdot d_{\text{Ío}} = 671\,144 \text{ km}$$

35 PAU La masa de Saturno es 95,2 veces la de la Tierra. Encélado y Titán, dos de sus satélites, tienen períodos de revolución de 1,37 días y 15,95 días, respectivamente. Determina a qué distancia media del planeta orbitan estos satélites.

En ambos casos se aplica la tercera ley de Kepler:

$$d^3 = \frac{T^2}{k} = \frac{Gm_{\text{Saturno}}T^2}{4\pi^2}$$

donde:

$$d = \left(\frac{Gm_{\text{Saturno}}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Como $m_{\text{Saturno}} = 95{,}2 \cdot m_T = 5{,}71 \cdot 10^{26}$ kg, al sustituir en la anterior expresión, se obtiene:

$$d_{\text{Encélado}} = 237\,520 \text{ km}$$
$$d_{\text{Titán}} = 1\,223\,161 \text{ km}$$

36 PAU El Apolo VIII orbitó en torno a la Luna a una altura de su superficie de 113 km. Si la masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre, calcula:

***a)* El período de su órbita.**

***b)* Su velocidad orbital y su velocidad angular.**

a) Puesto que la aceleración centrípeta de su órbita es la gravitatoria, al igualar, se obtiene:

$$G\frac{m_L}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

de donde:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_L}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r = r_L + h = 1\,833 \text{ km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 7\,113 \text{ s}$$

b) Su velocidad orbital será:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1\,618 \text{ m/s}$$

Y su velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = 8{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

37 PAU Con los datos ofrecidos en el ejercicio anterior, halla:

***a)* La distancia que recorrería un cuerpo en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar.**

***b)* La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente si con esa velocidad se eleva en la Tierra hasta 20 m.**

Para resolver ambos apartados, debemos calcular la aceleración gravitatoria en la superficie lunar, que será, aproximadamente:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(0{,}27 \cdot r_T)^2}$$
$$g_L = 0{,}164 \cdot g_T = 1{,}60 \text{ m/s}^2$$

a) Así pues, la distancia que un cuerpo recorrería en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar sería:

$$y = \frac{1}{2}g_L t^2 = 0{,}81 \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que la altura máxima que alcanza un objeto al ser lanzado verticalmente es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

y si las velocidades de lanzamiento son iguales desde la Tierra y desde la Luna, entonces:

$$2g_T y_T = 2g_L y_L$$

donde:

$$y_L = \frac{g_T}{g_L} \cdot y_T = 121 \text{ m}$$

38 La masa del planeta Saturno es 95,2 veces la de la Tierra, su radio es 9,4 veces el terrestre, y su distancia media al Sol es de 1 427 000 000 km. Calcula:

***a)* La duración de su año en días terrestres.**

***b)* El valor de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre.**

a) Por aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{kd^3}$$

donde k es igual a $2{,}96 \cdot 10^{-19}$ s^2 m^{-3} (véase la actividad 10 de la página 67).

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 9{,}274 \cdot 10^8 \text{ s} = 10\,734 \text{ días}$$

b) El valor de la gravedad superficial de Saturno es:

$$g_S = G\frac{m_S}{r_S^2}$$

Como $m_S = 95{,}2 \cdot m_T$, y $r_S = 9{,}4 \cdot r_T$, podemos concluir que:

$$g_S = G\frac{95{,}2 \cdot m_T}{(9{,}4 \cdot r_T)^2} = 1{,}08 \cdot g_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_T} = 1{,}08$$

39 **Marte se encuentra un 52 % más alejado del Sol que la Tierra. Con este dato, determina la duración del año marciano en días terrestres. Dato: año terrestre = 365 días**

Según la tercera ley de Kepler, $T^2 = kR^3$. Es decir, T^2/R^3 es constante. Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow \left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3$$

Ahora bien, sabemos que $R_{\text{Marte}} = 1{,}52R_{\text{Tierra}}$, y que el periodo de la órbita terrestre es de 365 días, luego:

$$\left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = 1{,}52^3 = 3{,}511\,8$$

$$T_{\text{Marte}} = 1{,}874 \cdot T_{\text{Tierra}} = 684 \text{ días terrestres}$$

D40 **PAU** **Júpiter tiene una masa 320 veces mayor que la terrestre y un volumen 1 320 veces superior al correspondiente a la Tierra. Determina:**

a) **A qué altura *h* sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite en órbita circular, para que su período de revolución fuese de 9 h y 50 minutos.**

b) **¿Qué velocidad tendrá el satélite en dicha órbita?**

Datos: $R_{\text{Tierra}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

a) En el sistema gravitatorio creado por Júpiter, la constante de la tercera ley de Kepler será:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Júpiter}}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Tierra}} \cdot 320}$$

Por otro lado, sabemos que la aceleración de la gravedad terrestre viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Tierra}} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}} \Rightarrow GM_{\text{Tierra}} = g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}}$$

Ahora ya podemos expresar la constante de Kepler para Júpiter en función de datos conocidos:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}} \cdot 320} = 3{,}10 \cdot 10^{-16}$$

Conocida $k_{\text{Júpiter}}$, podemos aplicar la tercera ley de Kepler para determinar el radio de la órbita del satélite, convirtiendo previamente el periodo a segundos:

$$R^3_{\text{satélite}} = \frac{T^2_{\text{satélite}}}{k_{\text{Júpiter}}} = \frac{35\,400^2}{3{,}10 \cdot 10^{-16}} = 4{,}04 \cdot 10^{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{satélite}} = 1{,}59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Para determinar la altura, calculamos el radio de Júpiter. Los volúmenes son proporcionales a los radios al cubo:

$$R^3_{\text{Júpiter}} = 1\,320 \cdot R^3_{\text{Tierra}} \Rightarrow R_{\text{Júpiter}} = 10{,}97 \cdot R_{\text{Tierra}} = 7{,}0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La altura del satélite sobre la superficie de Júpiter se obtiene restando al radio de la órbita el radio de Júpiter, de donde resulta que $h = 8{,}95 \cdot 10^7$ m, es decir, 89 527 km.

b) Igualando la fuerza gravitatoria y la centrípeta:

$$G\frac{m_J m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Se obtiene la velocidad orbital del satélite a la distancia r:

$$v = \sqrt{gm_J/r} = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

El fenómeno de las mareas

41 **Compara el efecto de marea que la Tierra produce sobre la Luna con el que la Luna ejerce sobre la Tierra. ¿Aclara el resultado por qué la Tierra no muestra siempre la misma cara a la Luna y, sin embargo, esta sí lo hace?**

Según hemos visto en el epígrafe 5 de esta unidad, la aceleración de marea que la Tierra ejerce sobre la Luna es, aproximadamente:

$$a_{TL} = G\frac{m_T 2r_L}{d^3}$$

Mientras que la aceleración de marea que nuestro satélite ejerce sobre la Tierra es:

$$a_{LT} = G\frac{m_L 2r_T}{d^3}$$

Al dividir ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{a_{TL}}{a_{LT}} = \frac{m_T r_L}{m_L r_T}$$

Teniendo en cuenta que el radio lunar es de 1 873 km y que la masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre, puede comprobarse que la aceleración de marea de la Tierra sobre la Luna es unas 24,5 veces mayor que la producida por la Luna en nuestro planeta.

Esa es la razón de que haya sido la Luna la que disminuyó más rápidamente su rotación hasta acoplar sus movimientos de rotación y traslación.

42 **PAU** **En el apogeo (punto de la órbita más lejano de la Tierra) la Luna está 1/9 más lejos de la Tierra que en el perigeo. Calcula en qué porcentaje disminuye la fuerza de marea cuando la Luna está en el apogeo.**

La aceleración de marea y, por tanto, la fuerza de marea, es proporcional al inverso del cubo de la distancia Tierra-Luna, es decir:

$$F_{\text{marea}} \propto r^{-3}$$

Donde *r* es la distancia Tierra-Luna. La relación entre la fuerza de marea en el apogeo y en el perigeo será:

$$\frac{F_{\text{apogeo}}}{F_{\text{perigeo}}} = \frac{r^3_{\text{perigeo}}}{r^3_{\text{apogeo}}} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729$$

Es decir, la fuerza de marea en el apogeo es, aproximadamente, un 73 % menor que en el perigeo; por lo que, disminuye en un 27 %.

43 **¿En qué estación del año y bajo qué condiciones lunares se producirían las máximas elevaciones de marea?**

Teniendo en cuenta que las máximas elevaciones (mareas vivas) se producen cuando se suman las contribuciones de la Luna y el Sol, es decir en períodos lunares de plenilunio o novilunio y considerando las dependencias con el inverso del cubo de la distancia a cada uno, es fácil entender que la circunstancia de máxima elevación de marea requiere:

- Mínima distancia lunar: luna en perigeo.
- Mínima distancia solar: invierno boreal o verano austral.
- Luna nueva o luna llena.

Por tanto, las condiciones más favorables tendrán lugar en nuestro invierno y dándose la coincidencia de que en el momento de luna llena o nueva, esta se encuentra en el perigeo o en sus proximidades.

3 El concepto de campo en la gravitación

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 82)

1. ¿Qué interacciones se describen mediante el concepto de campo?

Interacción gravitatoria entre masas, interacción eléctrica entre cargas...

2. ¿Qué diferencia conceptual crees que existe entre la idea de campo y la de acción a distancia?

Acción a distancia

- Se requiere la existencia de, al menos, **dos cuerpos.** Un solo cuerpo no genera acción alguna.
- El espacio es el marco absoluto e invariable en el que sucede la interacción.
- La **interacción es instantánea,** de modo que las leyes newtonianas no se modifican (por ejemplo, el principio de acción y reacción).

Concepto de campo

- Se requiere la existencia de **un solo cuerpo** para originar un campo. El segundo cuerpo tan solo atestigua la existencia del campo.
- Son las distorsiones de las propiedades asociadas al espacio-tiempo las responsables de la interacción.
- Las **interacciones se propagan a la velocidad de la luz,** lo que modifica aspectos esenciales de las leyes de Newton (por ejemplo, el principio de acción-reacción).

3. ¿Crees que sería necesaria la misma velocidad para hacer escapar un cohete de la Tierra que para hacerlo de la Luna? ¿Por qué?

No, porque es característica del cuerpo celeste depende de su y de su radio la Tierra.

4. ¿Qué conoces de los agujeros negros? ¿Por qué se denominan así?

Los agujeros negros son como una masa muy grande concentrada en un punto que crea un gran campo gravitatorio, es decir, que tiene una gran fuerza de gravedad. Se denominan así porque absorben muchísima energía (igual que el color negro), son como sumideros de energía.

Esta fuerza de gravedad es tal que impide que la luz salga del campo de atracción, resultando por ello invisible.

5. ¿Tienen los satélites en órbita que usar permanente motores para mantenerse en la misma?

No, porque la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria.

Actividades (páginas 85/97)

1 ¿A qué distancia de un cuerpo de masa 3*m* tiene el campo gravitatorio el mismo valor que a una distancia *r* de un cuerpo de masa *m*?

Puesto que $g = Gm/r^2$, si la intensidad de los campos creados por m y por $3m$ es la misma, se cumple que:

$$G = \frac{3m}{d^2} = \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{3}{d^2} = \frac{1}{r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{3}r$$

2 Si el campo gravitatorio debido a una masa vale *g* a una distancia *r*, ¿a qué distancia de la masa valdrá la mitad?

El módulo del campo gravitatorio creado por una masa m es:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

A cierta distancia, d, el campo vale la mitad, es decir:

$$g' \doteq G\frac{m}{r^2} = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}G\frac{m}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{2}r$$

3 Si la Tierra fuese una corteza esférica y se practicase en ella un orificio, ¿qué movimiento describiría una pelota que fuera lanzada al interior de dicho orificio?

Puesto que el campo en el interior de una corteza esférica es nulo, la pelota no estaría sometida a ningún tipo de aceleración y describiría un movimiento rectilíneo uniforme.

4 Si cavaras un hipotético túnel que se extendiese desde el lugar en el que te encuentras hasta los antípodas (suponiendo que la Tierra tiene densidad constante), ¿qué tipo de movimiento describiría una pelota que se dejara caer por dicho túnel? Explícalo con todo detalle.

Como el campo en el interior de una esfera sólida viene dado por la ecuación **3.3**, el peso de la pelota en el interior del hipotético túnel variaría conforme a la expresión:

$$\vec{P} = -G\frac{mm'}{r^3}r'\vec{u}_r$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre la pelota responde a la expresión típica de una fuerza restauradora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio ($r' = 0$) y que varía proporcionalmente con la distancia y en sentido opuesto. En consecuencia, la pelota oscilaría continuamente de un extremo al otro del hipotético túnel.

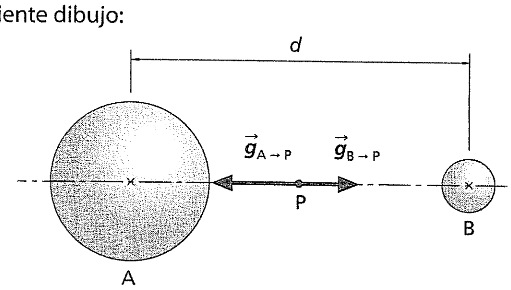
Nota: como ejercicio de ampliación, en la UNIDAD 7, dedicada al estudio del movimiento oscilatorio, puede sugerirse a los alumnos que demuestren que el período de dichas oscilaciones es igual al período orbital que tendría un cuerpo a una distancia equivalente al radio terrestre.

5 PAU Dos esferas A y B tienen la misma densidad, pero el radio de A es el triple del radio de B.

***a)* ¿Qué relación guardan los respectivos valores del campo en un punto P equidistante de los centros de las esferas?**

***b)* Si la separación entre los centros de las esferas es *d*, ¿a qué distancia de la esfera A se encuentra el punto en el que el campo resultante es nulo?**

La situación descrita en el enunciado se observa en el siguiente dibujo:



a) El campo creado por la esfera A en el punto P será:

$$g_{A\to P} = G\frac{m_A}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2}$$

En la expresión anterior, hemos puesto la masa como producto del volumen por la densidad.

Por su parte, el campo creado por la esfera B en el punto P será:

$$g_{B\to P} = G\,\frac{m_B}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{(R/3)^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27r^2}$$

Por tanto, la relación entre los dos campos será:

$$\frac{g_{A\to P}}{g_{B\to P}} = 27$$

b) A cierta distancia del centro de la esfera A, los campos creados por ambas esferas son idénticos, si bien con sentidos opuestos. En ese punto, por tanto, $g_{A\to P} = g_{B\to P}$. Si llamamos r a dicha distancia:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27(d-r)^2}$$

Simplificando términos y tomando las inversas, resulta:

$$27(d-r)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d - r = \frac{r}{3\sqrt{3}}$$

Agrupando términos y despejando, obtenemos:

$$r = 0{,}839d$$

6 **Haz una estimación del valor de g en la cima del Everest, teniendo en cuenta el valor de 9,8 m/s² al nivel del mar. ¿Crees que es correcto utilizar 9,8 m/s² como valor general para toda la superficie terrestre?**

Dato: altura del Everest: 8,9 km

Aplicando la expresión **3.4,** en la que $h = 8\,900$ m, obtendremos:

$$g'_{\text{Everest}} = 9{,}77 \text{ m/s}^2$$

Como puede comprobarse, la generalización del valor aproximado de 9,8 m/s² para toda la corteza terrestre es válida para la mayor parte de las situaciones.

7 **Considerando que en la superficie de Marte g es 3,72 m/s², calcula cuál sería el valor de la gravedad en la cima del monte Olimpo, que, con sus 25 km de altura, es el monte conocido más alto del sistema solar.**

Aplicando de nuevo la expresión **3.4,** y tomando como radio promedio para Marte $3{,}38\cdot 10^6$ m, el valor de g' en la cima del monte Olimpo de Marte será:

$$g' = 3{,}66 \text{ m/s}^2$$

Es decir, ha disminuido en un 2 %.

8 **Dibuja una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, *g,* en función de la distancia *r* al centro de la Tierra. ¿A qué profundidad, *x,* por debajo de la superficie terrestre hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura *h* sobre la misma?**

La gráfica pedida es idéntica a la zona de la izquierda de la figura 3.12.

La segunda parte de la pregunta se refiere, en consonancia con el epígrafe, a alturas pequeñas. En consecuencia, la condición que debe cumplirse es:

$$G\,\frac{m_T}{r_T^3}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{g}{r_T}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$$

De donde se obtiene:

$$r' = r_T - 2h$$

Puesto que r' es la distancia desde el centro terrestre hasta el punto considerado, la profundidad pedida será: $x = 2h$.

9 **¿Por qué produce la rotación terrestre un abultamiento ecuatorial y un achatamiento por los polos en nuestro planeta?**

En la zona ecuatorial, la aceleración centrífuga alcanza su máximo valor, al ser también máxima la distancia al eje de rotación. Al actuar, en este caso, en la misma dirección que $\vec{g}$, el valor de $\vec{g}_{\text{efectiva}}$ es algo menor. Por esta razón, la Tierra presenta un abultamiento en la zona ecuatorial. Por el contrario, en las zonas polares, la aceleración centrífuga es nula, y $\vec{g}_{\text{efectiva}} = \vec{g}$, por lo que su valor es mayor. De ahí que la Tierra presente un achatamiento en las zonas polares.

10 **Determina qué ángulo separa la vertical de la dirección radial en una latitud de 40°.**

La relación que existe entre la componente horizontal y la radial de $\vec{g}_{\text{efectiva}}$ nos da la tangente del ángulo α, que separa la vertical de la dirección radial y es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 r_T \cos\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi}{g - \omega^2 r_T \cos^2\varphi} = 0{,}0017$$

Por lo que $\alpha = 0{,}097°$.

Para obtener este valor, se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi/86\,400$ rad/s. Obsérvese que la desviación de la vertical con respecto a la dirección radial es sumamente pequeña.

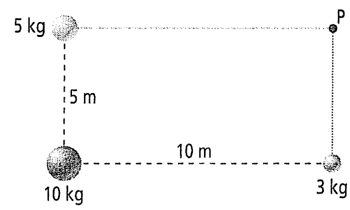
11 **Calcula los valores de la gravedad efectiva en las latitudes canarias (aprox. 28°) y cantábricas (aprox. 43°). Considera $g = 9{,}81$ N/kg.**

La gravedad efectiva viene dada por la expresión **3.5,** en la que se observa la variación con la latitud del lugar, φ. La velocidad angular de la Tierra puede ponerse en función del periodo de rotación: $\omega = 2\pi/T$. Sabemos que el periodo es de 24 horas, es decir, de 86 400 s. Por tanto:

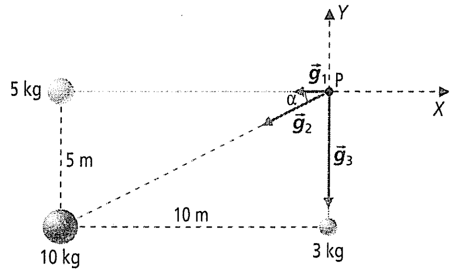
$$g_{\text{Canarias}} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37\cdot 10^6\cdot\cos^2 28 = 9{,}783\,7 \text{ m/s}^2$$

$$g_{\text{Cantabria}} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37\cdot 10^6\cdot\cos^2 43 = 9{,}792\,0 \text{ m/s}^2$$

12 **Determina el campo producido en el punto P por la distribución de masas de la siguiente figura.**



Representemos primero los vectores de campo producidos por la distribución de masas en el punto P.



El campo total será la suma vectorial de los campos originados por las distintas masas:

$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Para la masa m_1, el campo creado será:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m_1}{r_1^2}\,\vec{i} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\text{ N m}^2/\text{kg}^2\cdot\frac{5\text{ kg}}{(10\text{ m})^2}\,\vec{i} =$$
$$= -3{,}335\cdot 10^{-12}\,\vec{i}\text{ N/kg}$$

Así, para la masa m_2, tendremos que:

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\cos\alpha\,\vec{i} - G\frac{m_2}{r_2^2}\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{10\ \text{kg}}{(\sqrt{125\ \text{m}})^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{125}}\vec{j}\right) =$$

$$= (-4{,}772\cdot 10^{-12}\vec{i} - 2{,}386\cdot 10^{-12}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y, para m_3:

$$\vec{g}_3 = -G\frac{m_3}{r_3^2}\vec{j} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2\cdot\frac{3\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\vec{j} =$$

$$= -8{,}004\cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

Entonces, el campo total será:

$$\vec{g}_{\text{total}} = (-8{,}107\cdot 10^{-12}\vec{i} - 1{,}039\cdot 10^{-11}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y su módulo será:

$$g = 1{,}317\cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

13 **¿Cuánto trabajo se realiza al desplazar una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio de la Tierra?**

El trabajo será igual a la variación negativa de la energía potencial, por lo que:

$$W = -G\frac{m_T m}{r_T} - \left(-G\frac{m_T m}{3r_T}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}G\frac{m_T m}{r_T} = -4{,}19\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El signo negativo del trabajo significa que se realiza contra la atracción gravitatoria.

14 **Un sistema consta de cuatro partículas de 10 g situadas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_{\text{p total}} = E_{\text{p }12} + E_{\text{p }13} + E_{\text{p }14} + E_{\text{p }23} + E_{\text{p }24} + E_{\text{p }34}$$

Las distancias r_{13} y r_{24} son las diagonales del cuadrado y valen 0,28 m. Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{\text{p total}} = -G\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2}\right) = -G\cdot 10^{-4}\left(\frac{4}{0{,}2} + \frac{2}{0{,}28}\right) =$$

$$= -1{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

15 **PAU** **Cuatro masas de 2, 4, 3 y 0,4 kg, respectivamente, se encuentran en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado? ¿Qué energía potencial adquirirá una masa de 10 kg colocada en dicho punto?**

La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es igual a $\sqrt{2}$ m. Así pues:

$$V = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)$$

Sustituyendo los datos queda:

$$V = -4{,}43\cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Por su parte, la energía potencial que adquiriría una masa $m' = 10$ kg situada en dicho punto será:

$$E_p = m'V = -4{,}43\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

16 **PAU** **El potencial gravitatorio debido a cierta masa varía a lo largo de la dirección X según la expresión:**

$$V(x) = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x}\ \text{J/kg}$$

Determina:

a) **El valor de la masa, considerada puntual, que origina dicho potencial.**

b) **La expresión vectorial del campo gravitatorio en $x = 10$ m y en $x = 20$ m.**

a) Sabemos que el potencial creado por una masa puntual viene dado por la expresión:

$$V(x) = -G\frac{m}{x}$$

b) El campo es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{g} = -\frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x^2}\vec{i}$$

Por tanto:

$$\vec{g}(x=10) = -2\cdot 10^{-9}\vec{i}$$

$$\vec{g}(x=20) = -5\cdot 10^{-10}\vec{i}$$

17 **¿Qué valor tiene el campo gravitatorio en el punto A de la figura 3.23? Razona tu respuesta.**

En dicho punto, los campos gravitatorios lunar y terrestre son iguales y de sentidos opuestos, por ello el campo neto es nulo.

18 **¿Cuánto vale la velocidad de escape del Sol a una distancia igual al radio orbital terrestre? ¿Qué te sugiere el resultado?**

La velocidad de escape de la atracción gravitatoria solar a esa distancia (149 600 000 km) es:

$$v = \sqrt{\frac{2Gms}{r}} = 42\,230\ \text{m/s} = 42{,}23\ \text{km/s}$$

La conclusión que se extrae de este resultado es que la velocidad de escape terrestre no es suficiente para abandonar el campo gravitatorio solar. Como se comenta en el texto, las sondas que han abandonado el sistema solar han tenido que adquirir la velocidad necesaria haciendo uso de la llamada «asistencia gravitacional».

Cuestiones y problemas (páginas 102/103)

Guía de repaso

1 **¿Qué importante diferencia se establece a partir de los trabajos de Maxwell en el tratamiento de la interacción a larga distancia y que marca una significativa diferencia entre el concepto de campo y el de acción a distancia?**

Las interacciones entre cuerpos a distancia no son instantáneas, sino que se propagan a la velocidad límite de la luz.

2 **¿Qué se entiende por campo gravitatorio?**

Campo gravitatorio es aquella región del espacio cuyas propiedades son perturbadas por la presencia de una masa m.

3 **¿Qué magnitudes se utilizan como inherentes o propias del campo gravitatorio? ¿Y cuáles se usan para describir la interacción del campo con una partícula testigo?**

Las magnitudes que definen el campo son la Intensidad del campo en un punto y el potencial del campo.

Las magnitudes que se utilizan para describir la interacción del campo con una partícula testigo son la fuerza que actúa sobre la partícula como medida de la interacción, y la energía potencial de la partícula asociada a su posición relativa en el campo.

4 **¿Cuál es la expresión para la intensidad del campo debido a una masa puntual en un punto P distante?**

$$\vec{g} = -Gm/r^2\vec{u}_r,\ \text{o bien}\ g = F/m'$$

donde m es la masa que origina el campo y m', la testigo.

5 ¿Cómo es el campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior? ¿Y en uno interior? ¿Podrías demostrar tu respuesta a esta última cuestión desde un punto de vista cualitativo?

El campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior es idéntico al que se obtendría si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en su centro. En un punto interior el campo es nulo. Véase la demostración dada en la página 87.

6 ¿Bajo qué aproximaciones equivale el campo creado por una esfera sólida en un punto exterior de esta al de esa misma masa considerada puntual y concentrada en el centro de la esfera?

Hay que suponer que la densidad de la esfera es uniforme o varía solo con la distancia al centro, o decir, de modo isotrópico.

7 ¿De qué forma varía el campo en el interior de una esfera sólida? ¿Bajo qué suposiciones?

Varía linealmente con la distancia al centro hasta hacerse cero en dicho punto. La suposición que hay que hacer es que la densidad de la esfera es uniforme.

8 ¿Cómo se modifica la aceleración gravitatoria efectiva en la superficie en función de la altitud? ¿Y en función de la latitud?

En función de la altitud: $g_{\text{efectiva}} = g\left(1 - \dfrac{2h}{r_T}\right)$

En función de la latitud: $g_{\text{efectiva}} = g - \omega^2 r_T \cos^2 \varphi$

9 ¿En qué condiciones es lícito utilizar el término *mgh,* en el que *g* es constante?

En pequeñas alturas (véase la página 93).

10 ¿Qué significado físico tiene hablar de energía potencial de un conjunto de partículas?

La medida del trabajo que debería realizarse para separar el sistema hasta hacer infinita la distancia entre las partículas.

11 ¿Cuál es el significado físico de la energía de amarre o de ligadura?

Es la energía que debe transferirse por unidad de masa para que un cuerpo abandone completamente un campo gravitatorio.

12 ¿Qué le ocurriría a un cuerpo lanzado desde la Tierra a una velocidad de 11,2 km/s si tenemos presente su situación en el sistema solar?

Que no llegaría a abandonar el sistema solar.

El campo gravitatorio

13 **PAU** Dos cortezas esféricas de distinto radio tienen la misma masa. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto situado a la misma distancia de sus respectivos centros?

Sí, siempre y cuando el punto considerado sea exterior a ambas cortezas.

14 Dos cortezas esféricas de la misma densidad tienen distinto radio. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto equidistante de sus respectivos centros?

A igualdad de densidad, la corteza de mayor radio (mayor superficie) tendrá mayor masa, por lo que el campo originado por ella en un punto equidistante será también mayor. Si consideramos la densidad como superficial, la masa de cada esfera vendrá dada por $\rho 4\pi r^2$, con lo que queda clara la interdependencia entre la masa y el radio de la corteza.

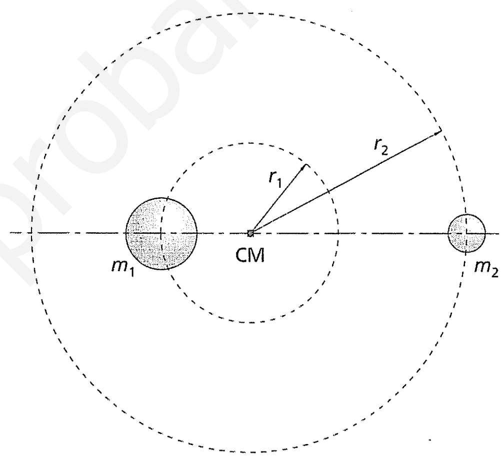
15 **PAU** Observa que la variación de $\vec{g}$ con respecto a *r* en el interior de una esfera sólida puede expresarse mediante la igualdad $\vec{g} = -kr\vec{u}_r$. En consecuencia, ¿cómo varía la fuerza gravitatoria con la distancia en el interior de dicha esfera? ¿Qué fuerzas de las que estudiaste en 1.° de Bachillerato variaban de igual manera con la distancia?

Varía del modo en que lo hacen las fuerzas restauradoras, como las elásticas, estudiadas en 1.° de Bachillerato. En este caso, la posición de equilibrio sería el centro de la esfera (suponiendo constante la densidad).

16 **PAU** Sean dos masas m_1 y m_2 orbitando alrededor del centro de masas del sistema con idéntico período *T*, a distancias respectivas r_1 y r_2. Dado que es la interacción gravitatoria mutua la que proporciona la fuerza centrípeta necesaria a cada una, demuestra que debe cumplirse que:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



La fuerza gravitatoria que ejerce la masa m_1 sobre m_2 es igual y de sentido contrario a la que ejerce m_2 sobre m_1. Estas dos fuerzas son las responsables de los respectivos movimientos giratorios en torno al centro de masas, es decir:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2 r_1}{r_1^2} = \frac{m_1 v_2^2 r_2}{r_2^2}$$

Ahora bien, el cociente entre la velocidad lineal y la distancia al centro de masas es la velocidad angular, idéntica para ambas masas. Por tanto, podemos simplificar la anterior igualdad:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Es decir, cuanto más grande sea una masa respecto a la otra, menor será el radio de su órbita respecto al radio de la otra masa.

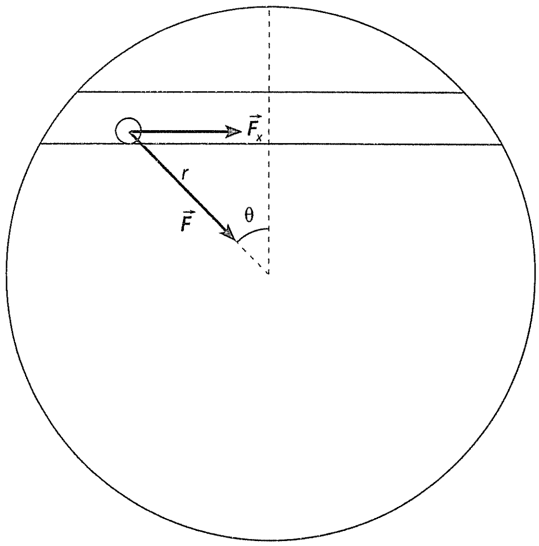
17 ¿Qué tipo de movimiento describiría una partícula en el interior de un hipotético túnel que se cavara desde un punto de latitud 60° N-longitud 0° hasta otro de latitud 60° N-longitud 180°, si la partícula se abandonara en la entrada del túnel?

Describirá un movimiento oscilatorio bajo la acción de una fuerza variable con la distancia.

Como puede observarse en el dibujo, en este caso es la componente *x* de la fuerza gravitatoria la que varía con la distancia (la componente *y* es compensada por la reacción normal de la pared del túnel), con lo que:

$$F_x = F \operatorname{sen} \theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} r \operatorname{sen} \theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} x$$

Es decir, se trata de una fuerza restauradora del tipo $F = -kx$.



18 **Si se mantuviera constante la densidad de la Tierra:**

a) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su radio se duplicara?**

b) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su diámetro fuera la mitad?**

a) Puesto que podemos expresar el campo gravitatorio superficial en función de la densidad como:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

si el planeta aumenta de tamaño sin variar la densidad, el peso de los cuerpos en la superficie se incrementaría linealmente con r. Concretamente, el radio (o el diámetro) se duplica, el peso también se duplicaría.

b) Haciendo uso de la misma expresión que en el apartado anterior, si el diámetro se reduce a la mitad, g también lo hará en la misma proporción, luego el peso se reducirá también a la mitad.

19 **Considerando que el período de un péndulo en la superficie terrestre viene dado por $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$, donde l es la longitud del péndulo, analiza si un reloj de péndulo que funcionase bien en nuestras latitudes se atrasaría o se adelantaría en las siguientes situaciones:**

a) **El reloj es trasladado al polo Norte.**

b) **El reloj es trasladado al ecuador.**

c) **El reloj asciende a gran altura en un globo aerostático.**

d) **El reloj desciende a gran profundidad en el interior terrestre.**

e) **El reloj viaja en el interior de una estación orbital.**

a) El período disminuye y, en consecuencia, el reloj se adelantaría, pues g aumenta.

b) Ahora g disminuye y el período aumenta, por lo que el reloj se atrasaría.

c) Sucede lo mismo que en ***b)***.

d) En este caso, g disminuye con respecto al valor superficial y el reloj se atrasaría al aumentar el período.

e) El reloj no funcionaría al estar en situación de caída libre.

20 **¿En qué lugar pesa más un cuerpo: en la superficie de nuestro planeta, a 2 000 m de altura o a una profundidad de 2 000 m?**

El mayor valor de g corresponde a la superficie de nuestro planeta, por lo que será ahí donde pese más.

21 **En un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, la aceleración superficial es de 5,4 m/s². Determina cuánto vale comparativamente la densidad (suponiendo que sea constante) del planeta en relación con la densidad terrestre, ρ_T (considerándola también constante).**

El valor de la aceleración gravitatoria de la Tierra es:

$$g_T = \frac{4}{3} G\pi r_T\rho_T = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

En el caso del planeta:

$$g_P = \frac{4}{3} G\pi r_P\rho_P = 5{,}4 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{r_P\rho_P}{r_T\rho_T} = 0{,}55$$

Como $r_P = r_T/3$, entonces:

$$\frac{\rho_P}{3 \cdot \rho_T} = 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_P = 1{,}65 \cdot \rho_T$$

22 **PAU** **Halla la altura sobre la superficie terrestre a la que debe colocarse un satélite artificial para que su peso se reduzca en un 20 %.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

El satélite deberá situarse en un punto tal que la intensidad del campo valga:

$$0{,}8 \cdot g = 7{,}84 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, a partir de la expresión:

$$g' = G\frac{m_T}{r^2}$$

se puede obtener r:

$$r = \sqrt{\frac{Gm_T}{g'}} = 744\,642{,}6 \text{ m} = 7\,144{,}64 \text{ km}$$

Como $r = r_T + h$, la altura a la que debe colocarse el satélite será:

$$h = r - r_T = 774{,}64 \text{ km}$$

23 **PAU** **Halla el valor que tiene el campo gravitatorio en la superficie del planeta Júpiter, teniendo en cuenta que su masa es 300 veces la de la Tierra, y su radio, 11 veces mayor que el terrestre.**

El valor del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter será:

$$g_J = G\frac{m_J}{r_J^2} = G\frac{300 \cdot m_T}{(11 \cdot r_T)^2} = 2{,}48 \cdot g_T$$

Es decir:

$$g_J = 24{,}3 \text{ m/s}^2$$

El campo gravitatorio desde un enfoque energético

24 **Si entendemos que la energía potencial es algo así como la capacidad de realizar un trabajo en función de la posición, ¿consideras acertado el criterio de que la energía potencial es cero en el infinito?**

Como la intensidad del campo, por definición, tiende a cero en el infinito, lo más lógico sería considerar el valor cero de energía potencial a distancia infinita, entendiendo que, al tender el campo a cero, también lo hace la fuerza gravitatoria capaz de realizar el trabajo, por lo que el cuerpo, a distancia infinita, perdería dicha capacidad.

25 **Si elegimos como criterio que la energía potencial es cero en la superficie terrestre, ¿cuánto valdría en el infinito?**

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar un cuerpo de masa m desde el infinito hasta la superficie de nuestro planeta viene dado, en todos los casos, por:

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -Gmm' \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= -Gmm' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r} = G\frac{mm'}{r}$$

Y puesto que el trabajo equivale a la variación negativa de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

llegamos a:

$$-\Delta E_p = E_{p\infty} - E_{pr} = G\frac{mm'}{r}$$

Así pues, queda claro que si elegimos como valor cero el de la energía potencial en la superficie, el valor de la energía potencial en el infinito será:

$$E_{p\infty} = G\frac{mm'}{r}$$

donde r es el radio terrestre. Debe entenderse que, sea cual sea el criterio de energía potencial cero elegido, el resultado del cálculo del trabajo efectuado debe ser el mismo.

26 PAU ***a)*** **Determina la velocidad con que llega a la superficie terrestre un cuerpo que se deja caer desde una altura *h* no despreciable medida desde la superficie. Demuestra, asimismo, que si *h* es despreciable comparada con el radio terrestre se obtiene la expresión:**

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) **Determina la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto que es abandonado en reposo a una altura de 5 000 km sobre ella.**

a) Para efectuar el cálculo, consideraremos que la energía mecánica del cuerpo se conserva en la caída. Es decir:

$$(E_p)_r = (E_c + E_p)_{r_T}$$

Sustituyendo llegamos a:

$$-G\frac{m_T m}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right)$$

Si despejamos v y desarrollamos la expresión teniendo en cuenta que $r = r_T + h$, obtenemos:

$$v = \sqrt{2Gm_T \frac{h}{r_T^2 + r_T h}}$$

Esta es la expresión general de la velocidad de un objeto que cae desde cualquier altura, por grande que sea, cuando llega al suelo. Observemos que, si consideramos que la altura h es pequeña comparada con el radio terrestre, podemos despreciar en el denominador $r_T h$ frente a r_T^2, con lo que nos queda la conocida expresión (válida sólo para alturas pequeñas):

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) La expresión general de la velocidad puede simplificarse del siguiente modo:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T^2} \cdot \frac{h}{1 + h/r_T}} = \sqrt{2g\frac{h}{1 + h/r_T}}$$

Sustituyendo el valor de la altura h, resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{5 \cdot 10^6}{1 + \dfrac{5 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6}}} = 7\,409{,}7 \text{ m/s}$$

En este cálculo no se ha tenido en cuenta la fricción del aire, que frena a todo cuerpo en su caída.

27 **Si el campo en el interior de una esfera sólida homogénea varía conforme a *r*, ¿cómo lo hará el potencial en función de *r* en el interior de dicha esfera?**

El potencial en el interior de la esfera variará conforme a r^2. La razón es que, si consideramos los puntos situados a lo largo de una dirección en el interior de la esfera, la relación que existe entre el campo y el potencial en los puntos de dicha recta viene dada por la expresión $g = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, por lo que V debe depender de r^2 para obtener la correspondiente variación lineal de g con r.

28 **¿Qué puede decirse del potencial gravitatorio en el interior de una corteza esférica?**

Puede decirse que será constante. Usando la relación entre g y V ($g = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$), dado que $g = 0$ en el interior de una corteza esférica, el potencial ha de ser constante.

29 PAU **Tres partículas cuyas masas son 2, 4 y 0,3 kg se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 8,66 m de altura. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_p = -\frac{G}{l}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)$$

donde:

$$l = \frac{h}{\text{sen } 60°} = 10 \text{ m}$$

Por tanto:

$$E_p = -6{,}53 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

30 PAU **¿A qué altura de la superficie terrestre ascendería un objeto lanzado verticalmente desde dicha superficie con una velocidad de 5 km/s?**

El objeto lanzado verticalmente alcanzará la altura máxima cuando $E_{c\,\text{final}} = 0$, por lo que:

$$E_{c\,\text{inicial}} + E_{p\,\text{inicial}} = E_{p\,\text{final}}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm_T}{r_T} = -G\frac{mm_T}{r_T + h}$$

Simplificando, cambiando de signo e invirtiendo términos se obtiene:

$$h = \frac{v_0^2 r_T^2}{2Gm_T - v_0^2 r_T}$$

Sustituyendo los valores:

$$h = 1\,590\,460 \text{ m} = 1\,590{,}46 \text{ km}$$

Luego:

$$\frac{1}{\dfrac{2Gm_T}{r_T} - v_0^2} = \frac{r_T + h}{2Gm_T}$$

Despejando h y simplificando, resulta la siguiente expresión, que permite obtener la altura:

$$\frac{2Gm_T - r_T}{2Gm_T - v_0^2 r_T} = r_T + h$$

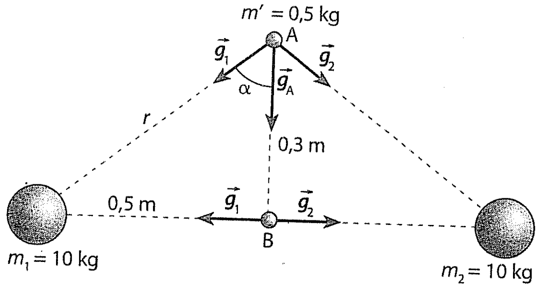
31 PAU **Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran fijas en dos puntos separados por una distancia de 1 m. Una tercera masa de 0,5 kg se abandona en un punto A equidistante de ambas y situado a 30 cm por encima del punto medio B del segmento que las une. Calcula:**

a) **La aceleración de la tercera masa en los puntos A y B.**

b) **La velocidad que llevará cuando pase por el punto B.**

c) **El tipo de movimiento que describe.**

La figura siguiente ilustra el enunciado del problema:



a) Según se desprende de la figura:

$$r = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2} = 0{,}58 \text{ m}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{0{,}5}{0{,}58}$$

El ángulo α es:

$$\alpha = 59°$$

La intensidad del campo debido a m_1 en el punto A es:

$$\vec{g}_1 = G\frac{m_1}{r^2}(-\text{sen}\ 59°\,\vec{i} - \cos 59°\,\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

y la del originado por m_2 es:

$$\vec{g}_2 = G\frac{m_2}{r^2}(\text{sen}\ 59°\,\vec{i} - \cos 59°\,\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

Así pues, la intensidad del campo en el punto A, teniendo en cuenta que $m_1 = m_2$, es:

$$\vec{g}_A = -2G\frac{m_1}{r^2}\cdot\cos 59°\,\vec{j} = -2\cdot 10^{-9}\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Es decir, la aceleración gravitatoria debida a m_1 y m_2 en el punto A es $2\cdot 10^{-9}$ m/s^2.

Sin embargo, en el punto B, la aceleración gravitatoria total es cero, pues los dos campos se anulan mutuamente.

b) Por el principio de conservación de la energía mecánica, se cumplirá que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

es decir:

$$E_{c\,B} - E_{c\,A} = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

donde $E_{c\,A} = 0$.

Por supuesto, la energía potencial en A es:

$$E_{p\,A} = m'V_A = m'\left(-2G\frac{m}{r}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,A} = -1{,}15\cdot 10^{-9} \text{ J}$$

mientras que la energía potencial en B es:

$$E_{p\,B} = m'V_B = m'\left(-2G\frac{m}{x}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,B} = -1{,}335\cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Así pues:

$$\frac{1}{2}m'v^2 = E_{p\,A} - E_{p\,B} = 1{,}85\cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Despejando la velocidad, se obtiene:

$$v = 2{,}7\cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

c) Las condiciones del movimiento en el que la v_0 es igual a cero en el punto A y distinta de cero en el punto B, y la aceleración es distinta de cero en el punto A y cero en el punto B, para, a continuación, invertir su sentido.

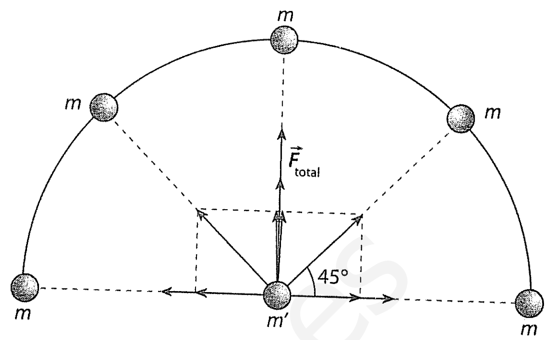
Estas condiciones, permiten predecir que el movimiento de la partícula será oscilatorio y que tendrá como punto de equilibrio el punto B.

32 **PAU** **Cinco masas de 4 kg cada una están en posiciones equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de 80 cm de radio. Una masa de 0,5 kg se sitúa en el centro de curvatura de dicho arco. Determina:**

a) **La fuerza que actúa sobre dicha masa.**

b) **La energía potencial de dicha masa en ese punto.**

a) La siguiente figura ilustra el enunciado de este problema:



Al ser iguales las cinco masas, la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F}_{\text{total}} = (F + 2\cdot F\ \text{sen}\ 45°)\,\vec{j} \text{ N}$$

Es decir:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \left[G\frac{mm'}{r^2}(1+\sqrt{2})\right]\vec{j} \text{ N}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$\vec{F}_{\text{total}} = 5{,}02\cdot 10^{-10}\,\vec{j} \text{ N}$$

b) La energía potencial de la masa m' en el punto indicado es:

$$E_p = m'V = m'\left(-G\frac{5\cdot m}{r}\right) = -8{,}34\cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Movimiento de cuerpos en campos gravitatorios

33 **Un satélite artificial en movimiento circular alrededor del planeta O es acelerado cuando pasa por el punto P. Razona cuál de las siguientes figuras refleja la nueva órbita en la que se moverá el satélite.**

A la vista de las posibles órbitas, el satélite sigue teniendo energía total negativa tras pasar por P, es decir, describe una elipse. Si suponemos que, tras la aceleración, el satélite sigue sujeto exclusivamente a la atracción gravitatoria que ejerce el planeta O, este deberá estar situado en uno de los focos de la elipse que describe la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria válida será la ***a***.

34 **Un objeto celeste que proviene del exterior del sistema solar pasa muy cerca de la atmósfera terrestre con una velocidad de 15 km/s. ¿Quedará fijado en una órbita alrededor de la Tierra? ¿Quedará capturado en el sistema solar?**

El objeto no quedará fijado en ninguna órbita alrededor de la Tierra, dado que su velocidad es superior a la de escape terrestre. Sin embargo, sí quedará atrapado en el sistema solar, pues su velocidad es inferior a la que se requiere para escapar del sistema solar. No se consideran aquí posibles asistencias gravitatorias que podrían catapultarlo fuera del sistema.

35 **Si el radio lunar es 0,27 veces el terrestre y la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, ¿cuál es la velocidad de escape de la superficie lunar? ¿Cuánto valdrá la energía de ligadura lunar por kilogramo de masa?**

Considerando en la expresión **3.12** la masa y el radio lunar en comparación con los datos terrestres, podemos concluir que:

$$v_{\text{escape lunar}} = 0{,}21\cdot v_{\text{escape terrestre}} = 2{,}35 \text{ km/s}$$

Por otra parte, sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión de la energía de ligadura, comprobamos que en el caso lunar vale:

$$E_{\text{ligadura lunar}}/\text{kg} = 0{,}044 \cdot E_{\text{ligadura terrestre}} = 2{,}76 \cdot 10^6 \text{ J}$$

36 **¿Puede orbitar un satélite en torno a la Tierra sin que su plano orbital contenga en su interior el centro terrestre?**

No puede orbitar en esas condiciones. La fuerza central que mantiene al satélite en órbita ha de estar dirigida hacia el centro terrestre, lo que obliga a que la Tierra esté contenida en el plan orbital.

D37 **PAU** **Desde la superficie terrestre se lanza un satélite; al llegar a la máxima altura *r* medida desde el centro terrestre, se le comunica una velocidad horizontal. ¿Qué ocurrirá en cada uno de los siguientes casos?**

a) **La velocidad comunicada es $v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$.**

b) **La velocidad comunicada está comprendida entre v_1 y $\sqrt{2}v_1$.**

c) **La velocidad comunicada es mayor o igual a $\sqrt{2}v_1$.**

a) La energía mecánica del satélite tras proporcionarle la velocidad horizontal es:

$$E = \frac{Gm_T m}{r} + \frac{1}{2} m \frac{Gm_T}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Gm_T m}{r}$$

Se trata de una velocidad negativa, luego el satélite describirá una órbita cerrada. Además, según se ha visto en el subepígrafe 5.3, la velocidad suministrada es la que da lugar a una órbita circular.

b) En este caso, la energía sigue siendo negativa, pero mayor que la requerida para una órbita circular. Por tanto, la órbita será elíptica.

c) En ese caso, el cuerpo abandona el campo gravitatorio terrestre, siguiendo una trayectoria parabólica (si $v = \sqrt{2}v_1$) o hiperbólica (si $v > \sqrt{2}v_1$).

38 **PAU** **La distancia de la Tierra al Sol es de 152 100 000 km en el afelio, mientras que en el perihelio es de 147 100 000 km. Si la velocidad orbital de la Tierra es de 30 270 m/s en el perihelio, determina, por conservación de la energía mecánica, cuál será su velocidad orbital en el afelio.**

La energía mecánica en el perihelio es:

$$E_{ph} = E_{c\,ph} + E_{p\,ph} = \frac{1}{2} m_T v_{ph}^2 + \left(-G\frac{m_T m_S}{r_{ph}}\right)$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{ph} = -2{,}69 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

La energía mecánica se conserva, luego:

$$E_{c\,af} + E_{p\,af} = E_{ph}$$

Por tanto:

$$E_{c\,af} = E_{ph} - E_{p\,af} = E_{ph} - \left(-G\frac{m_T m_S}{r_{af}}\right)$$

Sustituyendo los datos, se obtiene:

$$E_{c\,af} = 2{,}57 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

Como:

$$v_{af} = \sqrt{\frac{2E_{c\,af}}{m_T}}$$

El resultado será:

$$v_{af} = 29\,247{,}5 \text{ m/s}$$

39 **Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que su acción gravitatoria sea tan intensa que ni la luz tiene suficiente velocidad de escape para salir de él. A la distancia crítica en la que este hecho sucede (medida desde el centro del agujero) se la denomina «radio de Schwarzchild». ¿Cuál sería este radio para un agujero de diez masas solares?**

En el límite del radio de Schwarzchild, la velocidad de escape es *c*, por lo que:

$$c = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \Rightarrow r = \frac{2Gm}{c^2}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$r = 29\,644 \text{ m} = 29{,}64 \text{ km}$$

40 **PAU** **Determina la velocidad de escape de la superficie de un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, y cuya aceleración gravitatoria en la superficie es de 5,4 m/s².**

Datos: $R = 6\,370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg²; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg

La velocidad de escape será:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2Gm}{r^2}\cdot r} = \sqrt{2g'r}$$

donde $r = r_T/3$, por lo que:

$$v = \sqrt{2/3\, g' r_T} = 4\,800 \text{ m/s}$$

Para ello, se ha considerado que $r_T = 6\,400$ km.

D41 **PAU** **Una sonda espacial de 1 000 kg se halla en una órbita circular de radio 2*R* alrededor de la Tierra. ¿Cuánta energía se requiere para transferir la sonda hasta otra órbita circular de radio 3*R*? Analiza los cambios en la energía cinética, potencial y total.**

La energía potencial viene dada por la expresión general:

$$E_p = -\frac{Gm_T m}{r}$$

Si las órbitas son circulares, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_T m}{r^2}$$

Por tanto, la energía cinética valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_T m}{2r}$$

En ambas expresiones, *r* es el radio de la órbita. Para la primera órbita, obtenemos:

$$E_{p1} = -\frac{Gm_T m}{2R}; E_{c1} = \frac{Gm_T m}{4R} \Rightarrow E_{\text{total 1}} = -\frac{Gm_T m}{4R}$$

Mientras que para la segunda órbita:

$$E_{p2} = -\frac{Gm_T m}{3R}; E_{c2} = \frac{Gm_T m}{6R} \Rightarrow E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_T m}{6R}$$

La energía necesaria para transferir la sonda de una órbita a otra será la diferencia entre estas dos energías totales:

$$\Delta E = E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_T m}{R}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Gm_T m}{12R}$$

Sustituyendo los valores, esta energía resulta ser de $5{,}24 \cdot 10^9$ J.

Tanto la energía potencial como la cinética en la segunda órbita tienen valores que resultan de multiplicar por 2/3 los de la primera órbita. Sin embargo, en el caso de la energía potencial, esta aparente reducción es en realidad un aumento, al tratarse de una energía negativa. Del mismo modo, la energía total de la segunda órbita es 2/3 de la energía total de la primera órbita. Sin embargo, al tratarse de una energía negativa, en realidad se ha producido un aumento de energía, como puede verse en el signo de Δ*E*, positivo.

42 PAU Un satélite artificial de 1 200 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 2 300 km sobre la superficie terrestre. Determina su momento angular con respecto al centro terrestre.

El momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Luego su módulo será $L = mrv$, donde r es el radio de la órbita: $r = R + h = 8{,}67 \cdot 10^6$ m. Sabemos que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_Tm}{r^2} = v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = 6\,794 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo del momento angular, resulta:

$$L = mrv = 7{,}07 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Lo calculado es el módulo del momento angular. La dirección del vector $\vec{L}$ será perpendicular al plano de la órbita, mientras que el sentido viene determinado por la regla de la mano derecha.

D43 PAU Las grandes estrellas (de masas superiores a 1,4 veces la solar) acaban el ciclo de sus vidas colapsándose o aplastándose gravitacionalmente, formando diminutas estrellas de neutrones de unos 40 km de diámetro. Supón que eso pudiera sucederle al Sol, que tiene $1{,}39 \cdot 10^9$ m de diámetro y que gira una vez cada 27 días.

***a)* ¿Cuál sería la nueva velocidad angular de «Sol neutrónico», expresada en vueltas o revoluciones por segundo?**

***b)* ¿Cuál sería la gravedad superficial en la estrella de neutrones formada?**

***c)* ¿Cuál sería la velocidad de escape de su superficie?**

Nota: considera que la masa del Sol sigue siendo la misma durante el proceso.

a) En el proceso de colapso de las estrellas de gran tamaño, el momento angular se mantiene constante al no existir fuerzas externas capaces de modificarlo. Sabemos que $L = I\omega$.

El momento de inercia para una esfera maciza que gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Puesto que el momento angular se conserva:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

En esta expresión, conocemos R_1, R_2 y la velocidad angular ω_1, que podemos expresar como $2\pi/27$ rad/día.

Sustituyendo los datos, resulta que $\omega_2 = 2{,}81 \cdot 10^8$ rad/día, lo cual corresponde a un período $T = 2{,}236 \cdot 10^{-8}$ días $\approx$ $\approx 0{,}002$ s.

Es decir, el período de rotación resulta ser de unas dos milésimas de segundo.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella colapsada será:

$$g = G\frac{M_{Sol}}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{1{,}98 \cdot 10^{30}}{(2 \cdot 10^4)} = 3{,}3 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$$

c) La velocidad de escape viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R_{\text{Sol neutrónico}}}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una velocidad de escape de $1{,}15 \cdot 10^8$ m/s.

4 El campo eléctrico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

1. Interacción electrostática: origen y descripción — páginas 107/109

- 1.1. ¿Qué sabemos de la carga eléctrica? — página 107
- 1.2. Ley de Coulomb — páginas 108/109

2. Campo eléctrico: una forma de explicar la interacción — páginas 110

3. El campo eléctrico desde un punto de vista dinámico — páginas 111/114

- 3.1. Intensidad del campo eléctrico — páginas 111/113
- 3.2. Representación del campo mediante líneas de fuerza — página 114

4. El campo eléctrico desde un enfoque energético — páginas 115/121

- 4.1. Energía potencial asociada a la posición de una carga en un campo eléctrico — páginas 115/117
- 4.2. Potencial del campo eléctrico — página 118
- 4.3. Diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico — páginas 119/120
- 4.4. Relación entre las magnitudes propias del campo (intensidad y potencial) — página 121

5. Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme — páginas 122/123

- 5.1. Movimiento de partículas que inciden en la dirección del campo — página 122
- 5.2. Movimiento de partículas que inciden perpendicularmente al campo — página 123

6. Cálculo del capo eléctrico mediante el teorema de Gauss — página 124/127

- 6.1. ¿Qué es el flujo del campo eléctrico? — páginas 124/125
- 6.2. Teorema de Gauss — páginas 125
- 6.3. Cálculo de campos eléctricos a partir del teorema de Gauss — página 126
- 6.4. Protección frente a campos externos: una consecuencia del teorema de Gauss — página 127

Cuestiones previas (página 106)

1. ¿Cuáles son las características de la interacción electrostática? ¿Qué similitudes y diferencias existen entre esta interacción y la gravitatoria?

La interacción electrostática es la que se ejerce entre cargas en reposo. Puede ser atractiva o repulsiva, si la interacción es entre cargas de distinto signo o del mismo signo, respectivamente.

Igual que la interacción gravitatoria, la electrostática varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia entre cargas.

La fuerza que describe tal interacción es central y conservativa. Pero al contrario que la interacción gravitatoria, el valor de la fuerza electrostática depende del medio.

La interacción gravitatoria solo es atractiva entre dos masas.

2. ¿Qué propiedades tiene la carga eléctrica? ¿Por qué razón se habla de dos tipos de carga eléctrica?

- La carga eléctrica está cuantificada y su unidad más elemental es la carga del electrón.
- La carga eléctrica se conserva en cualquier proceso dado en un sistema aislado.
- La fuerza entre dos cargas varía con el inverso del cuadrado.

Se habla de dos tipos de carga eléctrica (positiva y negativa) porque hay dos clases de electrización (atractiva y repulsiva).

3. ¿Puede una partícula cargada permanecer en reposo en el seno de un campo eléctrico?

Si la carga está sometida a la acción exclusiva de un campo eléctrico, nunca podrá permanecer en reposo.

4. Una carga de un culombio, ¿es una unidad grande o pequeña?

El culombio es una unidad muy grande, por lo cual se suelen utilizar frecuentemente submúltiplos y corresponde a $6{,}24 \cdot 10^{18}$ electrones.

5. Al alejar dos cargas eléctricas, ¿aumenta siempre la energía potencial del sistema?

Depende del signo de las cargas, de forma que si son de signo contrario estamos disminuyendo la energía potencial del sistema, sin embargo si son del mismo signo lo estamos aumentando.

Actividades (páginas 107/126)

1 Determina la carga correspondiente a 1 mol de electrones. Dicha carga se conoce comúnmente como la unidad de Faraday.

La carga correspondiente a un mol de electrones (N electrones) es:

$$Q = Ne = 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) = -96\ 352\ \text{C}$$

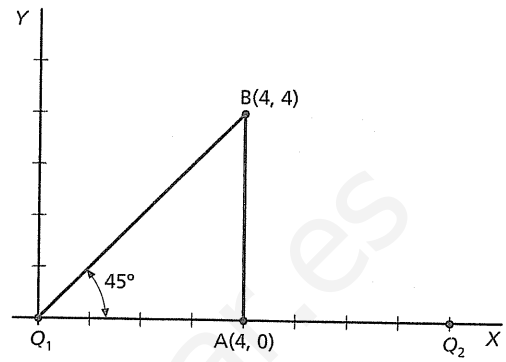
2 Determina la carga correspondiente a un mol de los siguientes iones: ion cloruro, ion sodio, ion hierro(III) e ion carbonato.

La carga de 1 mol de iones cloruro es $-96\ 352$ C; la correspondiente a un mol de iones sodio vale $+96\ 352$ C; la de 1 mol de iones hierro (III), $+289\ 056$ C (es decir, le corresponden $3 \cdot 96\ 352$ C), mientras que la de 1 mol de iones carbonato es $-192\ 704$ C ($2 \cdot 96\,352$ C).

3 PAU Dos cargas, Q_1 y Q_2, de $+10$ nC se encuentran en los puntos (0, 0) y (8, 0) de un sistema de referencia XY medido en metros. Determina la fuerza neta que ambas cargas ejercen sobre una tercera, Q_3, de $+5$ nC cuando esta se encuentra situada en los puntos:

***a)* A (4, 0)** ***b)* B (4, 4)**

La situación descrita se muestra en el siguiente dibujo:



a) El punto A es el punto central del segmento que une Q_1 y Q_2. Al ser iguales ambas cargas, por simetría se concluye que el campo en dicho punto será nulo.

b) Por otro lado, el punto B pertenece a la mediatriz del segmento que une Q_1 y Q_2. Por simetría se concluye que la componente X de la fuerza neta será nula, pues se compensan las fuerzas ejercidas por las dos cargas.

Por su parte, la componente Y de la fuerza ejercida por ambas cargas será la misma, y la resultante será, por tanto, el doble:

$$\vec{F}_{1+2} = 2k\frac{Q_1Q_3}{r^2}\ \text{sen}\ 45°\,\vec{j} = 18 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{32}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} =$$
$$= 1{,}99 \cdot 10^{-8}\vec{j}\ \text{N}$$

4 PAU Se aplica un campo de 500 N/C a una disolución de cloruro de sodio. Compara las aceleraciones que adquieren los iones cloruro y los iones sodio. Ten en cuenta que la masa atómica relativa del cloro es 35,5, y la del sodio, 23.

Puesto que la fuerza que actúa sobre los iones es la debida al campo, se cumplirá que:

$$ma = QE \Rightarrow a = \frac{QE}{m}$$

Así pues, el valor y el sentido de la aceleración dependen de la relación Q/m y del signo de Q. Si consideramos 1 mol de iones cloruro y sodio, sus masas serán, respectivamente:

$$m_{Cl^-} = 0{,}0355\ \text{kg/mol}$$
$$m_{Na^+} = 0{,}023\ \text{kg/mol}$$

Sus cargas son $-96\,352$ C, en el primero de los casos, y $+96\,352$ C, en el segundo; por tanto:

$$a_{Cl^-} = \frac{-96\,352\ \text{C}}{0{,}0355\ \text{kg}} \cdot 500\ \text{N/C} = -1{,}357 \cdot 10^9\ \text{m/s}^2$$

$$a_{Na^+} = \frac{+96\,352\ \text{C}}{0{,}023\ \text{kg}} \cdot 500\ \text{N/C} = 2{,}094 \cdot 10^9\ \text{m/s}^2$$

5 PAU Un electrón y un protón son abandonados en reposo en una región donde el campo eléctrico es $\vec{E} = 200\vec{i}$ N/C. Determina:

***a)* La fuerza (en notación vectorial) que actúa sobre cada partícula.**

***b)* La aceleración que adquieren.**

***c)* La distancia que habrán recorrido en 1 s.**

a) La fuerza que actúa sobre cada partícula es:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Sustituyendo los valores, en el caso del protón es:

$$\vec{F}_p = +3{,}2 \cdot 10^{-17}\vec{i}\ \text{N}$$

y en el del electrón:

$$\vec{F}_e = -3{,}2 \cdot 10^{-17}\vec{i}\ \text{N}$$

b) Las aceleraciones que adquieren estas partículas, dadas por $a = F/m$, serán:

$$\vec{a}_p = +1{,}91 \cdot 10^{10}\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a}_e = -3{,}5 \cdot 10^{13}\vec{i}\ \text{m/s}^2$$

c) Aplicando la expresión $x = 1/2\ at^2$, se obtiene para $t = 10^{-6}$ s:

$$x_p = 0{,}009\,55\ \text{m}$$

$$x_e = 17{,}5\ \text{m (en sentido opuesto)}$$

6 Determina el campo eléctrico total en el punto P de la figura 4.11 de la página 112 del *Libro del alumno*.

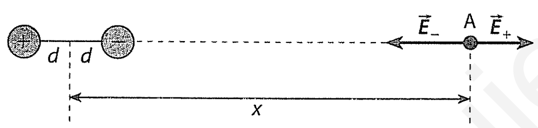
El campo total será:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_3 + \vec{E}_6 =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{+20 \cdot 10^{-6}}{0{,}09^2} - \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0{,}06^2} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}03^2}\right)\vec{i} = -3{,}53 \cdot 10^7\vec{i}\ \text{N/C}$$

7 PAU Determina el valor y el sentido del campo creado por el dipolo de la aplicación anterior en un punto A que se halla a una distancia x del origen en el semieje X^+. Aplica la aproximación $x >> d$.

La siguiente representación gráfica ilustra la situación planteada:



Como puede observarse:

$$E_+ = k\frac{Q}{(x+d)^2};\ E_- = k\frac{-Q}{(x-d)^2}$$

Por tanto, el campo total en el punto A es:

$$E_{\text{total}} = kQ\left(\frac{1}{(x+d)^2} - \frac{1}{(x-d)^2}\right) \cong$$

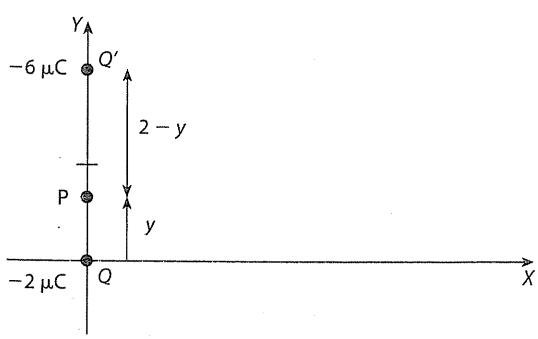
$$\cong -kQ\frac{4xd}{x^4} = -kQ\frac{4d}{x^3}$$

Como $2dQ = \mu$, podemos escribir:

$$E_{\text{total}} = -k\frac{2\mu}{x^3}$$

8 PAU Una carga de $-2\ \mu$C se encuentra en el origen, mientras que otra de $-6\ \mu$C se halla en el punto (0, 2). ¿En qué punto es nulo el campo eléctrico? ¿Y si las cargas fuesen de distinto signo?

Representemos gráficamente el enunciado:



Como se observa en la figura, el campo será nulo en un punto P donde se cumpla que:

$$k\frac{Q}{y^2} = k\frac{Q'}{(2-y)^2}$$

Es decir:

$$\frac{2}{y^2} = \frac{6}{(2-y)^2}$$

Resolviendo *y*, obtenemos que $y = 0{,}73$, luego las coordenadas del punto P son (0, 0,73).

Si las cargas fuesen de signos opuestos, el punto P estaría en el semieje negativo de las *Y*.

En él se cumplirá que:

$$\frac{2}{y^2} = \frac{6}{(2+y)^2}$$

Resolviendo *y*, obtenemos que las coordenadas del punto P son (0, −0,73).

9 ¿Podría una partícula cargada permanecer en reposo en algún punto del campo originado por dos cargas iguales del mismo signo? ¿Y si las cargas iguales fuesen de distinto signo?

Como se desprende de las representaciones gráficas del campo, una partícula podría permanecer en reposo justo en el punto medio entre dos cargas iguales del mismo signo, donde $\vec{E}_{\text{total}} = 0$.

Por el contrario, si las cargas son de distinto signo, no hay ningún punto a distancia finita donde el campo sea nulo, por lo que la partícula no puede estar en reposo.

10 ¿Pueden cortarse dos líneas de fuerza del campo eléctrico? ¿Por qué?

No. Las líneas de fuerza son tangentes en cada punto al vector campo $\vec{E}$, y este vector es único para cada punto del espacio. Si dos líneas de fuerza se cortaran, en el punto de corte habría dos posibles valores del campo, lo cual es imposible.

11 Al acercar dos cargas de distinto signo, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? ¿Por qué?

La energía potencial asociada a dos cargas de distinto signo es negativa y viene dada por la expresión:

$$E_p(r) = -k\frac{QQ'}{r}$$

Como se ve, la energía potencial se hace cada vez más negativo cuando las cargas se aproximan, pues la distancia entre ambas se reduce. Por consiguiente, la energía potencial disminuye.

12 Tenemos dos cargas de $+3\ \mu$C y $-2\ \mu$C inicialmente separadas 30 cm. Calcula el trabajo para acercarlas 15 cm. Explica el significado del signo del trabajo.

El trabajo para acercar dos cargas de distinto signo viene dado por la expresión:

$$W = -\Delta E_p = E_p(r = 0{,}3m) - E_p(r = 0{,}15m)$$

Calculamos por separado las energías potenciales del sistema cuando están separados 30 cm y cuando están separados 15 cm tenemos:

$$E_p(r = 0{,}3m) = k\frac{QQ'}{r} = 9 \cdot 10^9\frac{+3\mu C \cdot -2\mu C}{0{,}30} = -0{,}18\text{J}$$

$$E_p(r = 0{,}15m) = k\frac{QQ'}{r} = 9 \cdot 10^9\frac{+3\mu C \cdot -2\mu C}{0{,}15} = -0{,}36\text{J}$$

$$W = -\Delta E_p = -0{,}18\text{J} - (-0{,}36\text{J}) = 0{,}18\text{J}$$

El signo del trabajo que nos ha dado el resultado es positivo y esto explica que es el campo el que realiza el trabajo a costa de su energía potencial almacenada debido al carácter atractivo de la interacción.

13 **¿Podría ser cero la energía potencial de un sistema de partículas que se encontraran a distancias finitas?**

Dado que el signo de la energía potencial electrostática depende del signo de las cargas, sí podría ser cero la energía potencial total del sistema. Este sería el caso, por ejemplo, de una disposición de cargas $+Q$, $-xQ$, $+yQ$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero, siempre que se cumpla que:

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Es decir, la energía potencial de un sistema de cargas $+Q$, $-0{,}5 \cdot Q$, $+Q$, o bien $+Q$, $-3 \cdot Q$, $-1{,}5 \cdot Q$, dispuestas en los vértices de un triángulo equilátero sería nula.

14 **PAU** **¿Cuánto vale la energía potencial del sistema de la figura 4.16? Razona el significado físico que se deriva del signo del resultado.**

La E_p del sistema será:

$$E_p = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} - \frac{Q_1Q_4}{r_{14}} - \frac{Q_2Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_2Q_4}{r_{24}} - \frac{Q_3Q_4}{r_{34}}\right)$$

Resumiendo, obtenemos:

$$E_p = k\left(-\frac{4}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \cdot 4 \cdot 10^{-12} = -0{,}093 \text{ J}$$

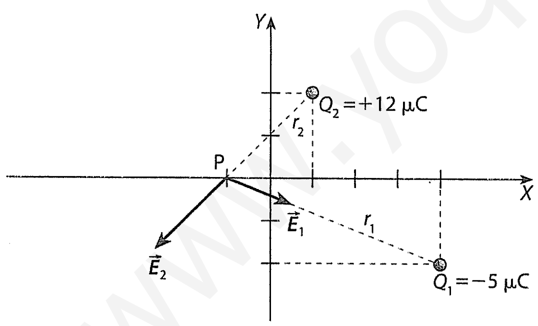
Al ser negativo el signo, es el campo eléctrico el que realiza el trabajo.

15 **Que el potencial en un punto es cero, ¿significa que no existen cargas en las proximidades de dicho punto?**

Como consecuencia del principio de superposición, el potencial en un punto puede ser cero si es debido a dos cargas de distinto signo. Por tanto, no hay necesariamente ausencia de cargas.

16 **PAU** **Una carga puntual de $-5 \cdot 10^{-6}$ C está localizada en el punto de coordenadas ($x = 4$ m, $y = -2$ m), mientras que una segunda partícula de $12 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en el punto ($x = 1$ m, $y = 2$ m). Calcula el potencial en el punto ($x = -1$ m, $y = 0$), así como la magnitud y dirección del campo eléctrico en dicho punto.**

Representamos el enunciado gráficamente:



Como puede observarse:

$$r_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \text{ m}$$

Por tanto, el potencial total en el punto P será:

$$V = V_1 + V_2 =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{-5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{29}} + \frac{12 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{8}}\right) = 29\,827{,}5 \text{ V}$$

El valor del campo en el punto P debido a Q_1 es:

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2} = 1\,551{,}7 \text{ N/C}$$

Su dirección, como se desprende de la figura, es de $-21{,}8°$ bajo el eje X. Así pues:

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j} = 1\,440{,}7\vec{i} - 576{,}2\vec{j} \text{ N/C}$$

El valor de E_2 en el punto P es:

$$E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^2} = 13\,500 \text{ N/C}$$

y su dirección es de 225° con el semieje OX^+; por lo que:

$$\vec{E}_2 = -9\,546\vec{i} - 9\,546\vec{j} \text{ N/C}$$

De este modo, el campo total será:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -8\,105{,}3\vec{i} - 10\,122{,}2\vec{j} \text{ N/C}$$

donde tg $\theta = E_y/E_x$ y forma, pues, un ángulo de 231,3° con respecto a OX^+.

17 **Utiliza la expresión 4.18 para deducir las ecuaciones del potencial en los puntos A y B si el campo es originado por una carga puntual positiva.**

Si partimos de la expresión **4.18,** obtenemos lo siguiente:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B k\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

$$= -kQ\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = k\frac{Q}{r_B} - k\frac{Q}{r_A}$$

Por tanto:

$$V_B = k\frac{Q}{r_B} \quad \text{y} \quad V_A = k\frac{Q}{r_A}$$

18 **Tres puntos (A, B y C) están situados en la misma recta y tienen un potencial de 10, 20 y 30 V, respectivamente. Si dejamos en libertad un electrón en el punto B, ¿a dónde se desplazará, hacia el punto A o hacia el C? ¿Por qué?**

El electrón se acelerará hacia el punto de mayor potencial, pues:

$$W = \Delta E_c = -e\,(V_1 - V_2)$$

Así, V_1 debe estar a menor potencial que el punto 2, hacia donde se dirige. Por consiguiente, se moverá hacia C.

Se llega a la misma conclusión si estudiamos la energía potencial. Al tener el electrón una carga negativa, la energía potencial en los tres puntos (A, B y C) será también negativa. Siempre que se suelta una partícula en el seno de un campo, dicha partícula tiende a desplazarse por efecto del campo en la dirección en que disminuye la energía potencial. En este caso, la energía potencial disminuye si la partícula se aproxima a C, luego esa será la dirección que tome el electrón.

19 **Dos cargas testigo ($+Q'$ y $-Q'$) son lanzadas desde un punto A con velocidad $v_0\vec{i}$ en el seno de un campo eléctrico $E\vec{i}$. Expón lo que ocurrirá con su energía cinética a medida que se mueven en el campo.**

El trabajo que realiza el campo para desplazar las dos cargas una distancia d es:

$$W = \Delta E_c = Q'Ed$$

Por tanto, si la carga es negativa, su energía cinética disminuirá, mientras que aumentará si es positiva.

20 **¿Cómo son las superficies equipotenciales en el campo eléctrico entre dos placas planas paralelas de signo opuesto?**

Las superficies equipotenciales son planas y paralelas a las placas, pues todos los puntos situados a una misma distancia, d, de las placas se encuentran al mismo potencial.

21 **PAU** **Una carga puntual Q cuyo valor es 10 μC se encuentra situada en el punto (1), de coordenadas ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$), en el seno de un campo eléctrico uniforme de valor 500 V/m. Esta carga ha sido desplazada, a velocidad constante, desde el punto (1) al punto (2), de coordenadas ($x_2 = 4$ cm, $y_2 = 2$ cm), y desde aquí al punto (3), de coordenadas ($x_3 = 6$ cm, $y_3 = -1$ cm), como se ilustra en la figura 4.20. Calcula el trabajo realizado por el campo eléctrico en cada uno de los dos desplazamientos.**

Puesto que el campo tiene la dirección del eje *X*, no realiza trabajo en los desplazamientos en la dirección del eje *Y*. Por tanto:

$$W_{12} = QE\,(x_2 - x_1) = 0{,}02\ \text{J}$$
$$W_{23} = QE\,(x_3 - x_2) = 0{,}01\ \text{J}$$

de donde:

$$W_{\text{total}} = 0{,}03\ \text{J}$$

22 Deduce la expresión del campo eléctrico originado por una carga puntual a partir de la expresión de su potencial en un punto y comprueba que el resultado coincide con el obtenido en el epígrafe 3.1.

Si consideramos un punto del eje *X* y la carga situada en el origen:

$$V = k\frac{Q}{x}$$

Por tanto:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = k\frac{Q}{x^2}\vec{i}$$

Esta expresión puede extenderse a cualquier dirección del espacio, pues la elección del eje *X* es arbitraria. De aquí se concluye que la fórmula vectorial del campo es de carácter radial, con lo que se llega a la expresión **4.3**.

23 Si el potencial en cierta región es constante, ¿qué podemos decir del campo eléctrico en esa región?

El campo eléctrico en una región donde el potencial es constante es nulo, pues la derivada de una constante es cero y $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

24 PAU El potencial a lo largo del eje *X* varía según la expresión $V(x) = x^2 + 2x - 8$ V.

a) **Representa la gráfica del potencial.**

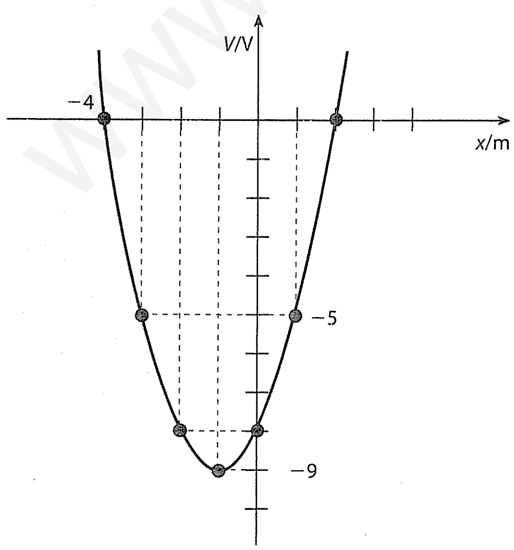
b) **Deduce la expresión del campo eléctrico en cualquier punto.**

c) **Calcula y representa el vector $\vec{E}$ en los puntos (−4, 0) y (0, 0).**

a) Dando valores a *x*, obtenemos los de *V*:

x/m	−4	−3	−2	−1	0	1	2
V/V	0	−5	−8	−9	−8	−5	0

Luego la representación gráfica es:



b) Puesto que *V* solo depende de *x*:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = -(2x + 2)\,\vec{i}\ \text{N/C}$$

c) El valor del campo en los puntos (−4, 0) y (0, 0) es, respectivamente:

$$\vec{E}(-4, 0) = 6\vec{i}\ \text{N/C}$$
$$\vec{E}(0, 0) = -2\vec{i}\ \text{N/C}$$

Como se ve, se trata de sendos vectores en la dirección del eje *X*, positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Esto se debe a que el campo eléctrico es positivo cuando el potencial decrece y negativo cuando crece, como se deduce de la expresión matemática que relaciona ambas magnitudes.

25 PAU Un protón es abandonado en reposo en una región donde existe un campo eléctrico uniforme de 400 V/m. ¿Cuál será su velocidad después de recorrer 30 cm?

La aceleración que experimentará el protón es $a = QE/m$. Puesto que se trata de un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la expresión que relaciona velocidad con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

En nuestro caso, la velocidad inicial es nula. Sustituyendo el valor de la aceleración, tenemos:

$$v^2 = 2\frac{QE}{m}s \Rightarrow \sqrt{2\frac{QE}{m}s}$$

Sustituyendo los datos del enunciado, se obtiene que $v = 1{,}52 \cdot 10^5$ m/s.

26 PAU Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -2\,000\ \vec{j}$ N/C con una velocidad $\vec{v}_0 = 10^6\,\vec{i}$ m/s.

a) **Compara la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él.**

b) **Determina la desviación que sufre el electrón después de haber recorrido 5 cm en la dirección *X*, indicando la dirección y el sentido de dicha desviación.**

Datos: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) El módulo de la fuerza eléctrica que experimenta el electrón es $F_{\text{eléctrica}} = QE$, mientras que el módulo de la fuerza gravitatoria es $F_{\text{gravitatoria}} = mg$. Veamos el valor de cada una de ellas:

$$F_{\text{eléctrica}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000 = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$
$$F_{\text{gravitatoria}} = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8 = 8{,}9 \cdot 10^{-30}\ \text{N}$$

Como se ve, el valor de la fuerza gravitatoria es despreciable frente al de la fuerza eléctrica.

b) Al entrar en el campo eléctrico, el electrón sufre una desviación parabólica tal como se observa en la figura 4.25. La componente *X* de la velocidad se mantiene constante e igual al valor inicial, mientras que en la dirección *Y* el electrón se ve impulsado por una fuerza vertical y hacia arriba:

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot (-2\,000\vec{j}) = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\vec{j}\ \text{N}$$

Puesto que la velocidad horizontal es constante, podemos determinar el tiempo que tarda el electrón en recorrer los 5 cm:

$$t = x/v_0 = 0{,}05/10^6 = 5 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

En este tiempo, el electrón se ha desviado una distancia y que viene dada por la conocida expresión de movimiento uniformemente acelerado:

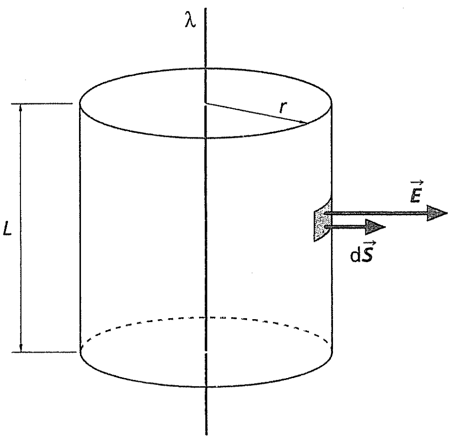
$$y = \frac{1}{2}at^2$$

La aceleración que experimenta dicho electrón es $a = F_{\text{eléctrica}}/m = 3{,}52 \cdot 10^{14}$ m/s². Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3{,}52 \cdot 10^{14} \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2 = 0{,}44\ \text{m} = 44\ \text{cm}$$

27 **Un hilo conductor rectilíneo y muy largo tiene una densidad lineal de carga uniforme λ. Determina el valor del campo eléctrico que origina en un punto P (alejado de los extremos) que se encuentra a una distancia *r* del hilo. (Sugerencia: considera como superficie gaussiana un cilindro de radio *r* y altura *L* cuyo eje principal sea el hilo conductor.)**

Para aplicar el teorema de Gauss, debemos construir una superficie imaginaria, que en este caso, por simetría, se trata de un cilindro:



Por simetría, sabemos que el campo eléctrico debe tener dirección radial perpendicular al hilo conductor.

El flujo del campo a través de la superficie cerrada del dibujo será la suma del flujo a través de la superficie lateral más el flujo a través de la «tapa» y el «fondo»:

$$\Phi = \Phi_{\text{lateral}} + \Phi_{\text{tapa y fondo}}$$

El flujo a través de la tapa y el fondo es nulo, pues el vector superficie en esas caras es perpendicular al campo, con lo que su producto vectorial es nulo; es decir:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{tapa/fondo}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En la cara lateral cilíndrica, el vector campo es paralelo al vector $d\vec{S}$ en todo punto.

Además, el campo es idéntico en todos los puntos de dicha cara, pues todos están a la misma distancia del hilo.

Teniendo esto en cuenta, podemos simplificar la expresión del flujo:

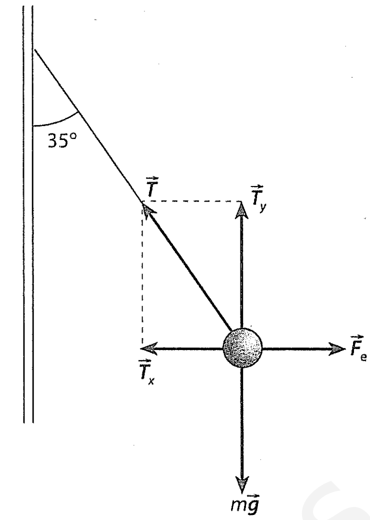
$$\Phi = E \oint d\vec{S} = E \cdot S_{\text{lateral}} = E \cdot 2\pi r L$$

Por el teorema de Gauss sabemos que el flujo eléctrico es el cociente entre la carga encerrada en el cilindro y la constante ε_0. La carga encerrada es el producto de la densidad lineal de carga por la longitud del cilindro, *L*, luego:

$$\Phi = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = 2\pi r L E \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

28 **PAU** **Si se coloca de forma vertical una superficie plana cargada uniformemente y se cuelga de ella, mediante un hilo de seda de masa despreciable, una esfera de 2 g con una carga de 4 nC, observamos que el ángulo que forma el hilo es de 35°. ¿Cuál es la densidad superficial de carga de dicha superficie?**

La representación gráfica de esta cuestión es la siguiente:



Como se observa en la figura:

$$T \operatorname{sen} 35° = Q'E$$
$$T \cos 35° = mg$$

de donde:

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{Q'E}{mg}$$

Como, a su vez, el campo eléctrico uniforme debido a una superficie plana cargada uniformemente es:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

entonces:

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{Q'\sigma}{2\varepsilon_0 mg}$$

Despejando σ, obtenemos:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg \operatorname{tg} 35°}{Q'}$$

y sustituyendo los datos:

$$\sigma = 6 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

Actividades finales (páginas 130/131)

Guía de repaso

1 **Elabora un esquema con las analogías y las diferencias existentes entre el campo eléctrico y el campo gravitatorio.**

Analogías:

- Ambos campos son conservativos.
- Las dos interacciones varían conforme al inverso del cuadrado de la distancia.
- En ambos casos puede definirse el potencial en un punto.
- Las expresiones de la intensidad y el potencial, del mismo modo que la relación entre ambas magnitudes, son similares.
- En los dos casos puede asociarse una energía potencial al sistema de masas o cargas en función de sus posiciones.

Diferencias:

- La interacción gravitatoria es siempre atractiva, mientras que la electrostática puede ser atractiva o repulsiva.
- La constante de gravitación, *G*, es universal y no depende del medio; por el contrario, la constante *k* de la ley de Coulomb y, en consecuencia, la intensidad de la interacción, dependen del medio.
- Considerando como valor cero de energía potencial el correspondiente a una distancia infinita, la energía potencial

gravitatoria es siempre negativa, mientras que la energía potencial electrostática puede ser negativa (cargas de signo opuesto) o positiva (cargas de igual signo).

2 **¿Cuáles son las propiedades de las cargas eléctricas?**

- La carga eléctrica está cuantizada y su unidad más elemental es la carga del electrón.
- Existen dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa.
- La carga eléctrica se conserva en cualquier proceso que tenga lugar en un sistema aislado.

3 **Señala analogías y diferencias entre la ley de Coulomb y la de gravitación de Newton.**

La expresión de ambas es similar: la fuerza eléctrica y la gravitatoria dependen del inverso del cuadrado de la distancia y son directamente proporcionales al producto de la correspondiente propiedad de la materia (cargas o masas). La fuerza electrostática puede ser atractiva o repulsiva, y su valor depende del medio, mientras que la gravitatoria es atractiva e independiente del medio.

4 **Define las magnitudes propias del campo y las magnitudes que se refieren a la interacción campo-carga testigo.**

Las magnitudes propias del campo son la intensidad (subepígrafe 3.1) y el potencial (subepígrafe 4.2), y las referidas a la interacción campo-carga testigo, la fuerza (subepígrafe 1.2) y la energía potencial del sistema (subepígrafe 4.1).

5 **¿Qué signo tiene la energía potencial electrostática en el caso de dos cargas de distinto signo? ¿Y tratándose de cargas del mismo signo? ¿Qué significado físico tiene ese signo?**

Signo negativo en el caso de cargas opuestas y positivo si se trata de cargas iguales. En el primer caso, nos indica el carácter atractivo de la interacción y disminuye su energía potencial con el acercamiento de las cargas. En el segundo caso, nos indica el carácter repulsivo de la interacción y aumenta con el acercamiento.

6 **¿Qué representa la energía potencial de un sistema de varias cargas? ¿Conoces algún caso de interés en el que se aplique esta idea?**

Para la primera pregunta véase el subepígrafe 4.1. La energía reticular de un compuesto iónico es un caso de interés relativo a este punto.

7 **¿Qué significado físico tiene la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico?**

Equivale al trabajo que debe realizarse contra el campo para desplazar la unidad de carga testigo desde un punto a otro.

8 **¿Qué dos formas de representación gráfica del campo eléctrico existen? ¿Qué reglas se siguen en ambos casos?**

El campo eléctrico se representa mediante líneas de fuerza y superficies equipotenciales, cuyas reglas pueden consultarse en los subepígrafes 3.2 y 4.3.

9 **¿Qué ocurre si una carga se mueve a lo largo de una superficie equipotencial?**

El campo eléctrico no realiza trabajo alguno sobre ella (véase el subepígrafe 4.3).

10 **¿Cómo puede obtenerse el valor del potencial en función de la intensidad?**

Mediante la expresión:

$$V_B - V_A = -Ed$$

donde d es la distancia entre el punto A y el punto B medida en la dirección del campo.

11 **¿Cómo hallar la intensidad en un punto si se conoce el modo en que varía el potencial?**

Mediante la expresión:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

12 **Las partículas cargadas se mueven de modo espontáneo en un campo eléctrico, ¿cómo lo hacen: en el sentido de aumentar o en el de disminuir su energía potencial?**

Puesto que es el campo eléctrico el que realiza el trabajo, el sentido será siempre el de disminuir la energía potencial del sistema. El trabajo realizado por el campo es positivo e igual a la disminución de energía potencial.

13 **¿Qué es el flujo del campo eléctrico? ¿Cómo se expresa matemáticamente?**

El flujo del campo magnético es una medida del número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie dada. Se expresa matemáticamente para cualquier superficie con la expresión **4.20** del *Libro del alumno*.

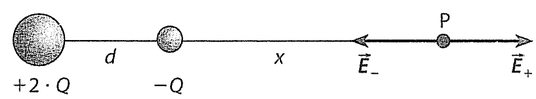
14 **Enuncia el teorema de Gauss y sus principales aplicaciones.**

El teorema de Gauss afirma que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es independiente de la forma de la superficie e igual a la carga neta contenida dividida por ε_0. Una de las aplicaciones más importantes es la de protegernos frente a cargas externas.

Campo eléctrico desde un enfoque dinámico

15 PAU **Dos partículas cargadas con $+2 \cdot Q$ y $-Q$ culombios, respectivamente, están separadas entre sí una distancia d. Determina un punto del espacio en el que el campo eléctrico sea nulo. Justifica la respuesta.**

En dicho punto habrá de cumplirse que los valores de la intensidad debidos a una y otra carga sean iguales y de signo contrario.



Así pues, si denominamos x a la distancia existente desde la carga a $-Q$ al punto P, en el que el campo es nulo, tendremos:

$$k\frac{2Q}{(d+x)^2} = k\frac{Q}{x^2}$$

Resolviendo x, obtenemos:

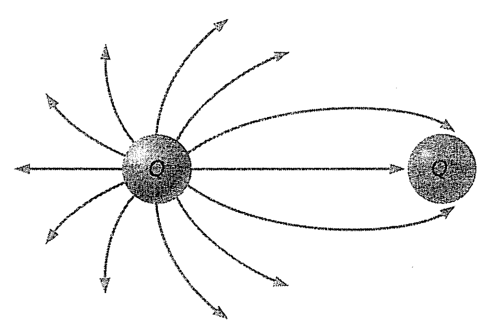
$$x = \left(1 \pm \sqrt{2}\right) d$$

El punto P representado en la figura corresponde al valor:

$$x = \left(1 + \sqrt{2}\right)\; d = 2{,}41 \cdot d$$

El signo negativo indica un punto entre ambas cargas donde el módulo de los dos campos es igual, aunque no se cancelan, al tener el mismo sentido.

16 **Deduce los signos de las cargas de la figura, así como la relación Q/Q'.**



La carga Q es positiva, pues las líneas son salientes, mientras que Q' es negativa, al ser entrantes. Puesto que de Q salen 12 líneas y a Q' van a parar 3, la primera carga es cuatro veces mayor que la segunda, es decir: $Q = 4 \cdot Q'$.

17 **¿Qué movimiento describirá una partícula cargada negativamente que es abandonada en un punto P distante del eje de simetría de un anillo cargado de modo uniforme con carga positiva? Razona y demuestra tu respuesta.**

Como puede verse en el problema resuelto número 3 (páginas 128 y 129), el campo resultante en cualquier punto del eje del anillo (salvo en su centro) es saliente y está dirigido en el sentido del eje. Dado que la fuerza que actuará sobre la carga negativa es $\vec{F} = -QE\vec{u}_e$ (donde $\vec{u}_e$ es el vector unitario en la dirección del eje y tiene sentido saliente), la partícula se acelerará hacia el centro del anillo.

Si bien no hemos hecho el estudio matemático de la función campo obtenida en la página 129, puede demostrarse que dicha función presenta un máximo para cierta distancia al centro del anillo. Para valores menores de x, el campo disminuye, hasta llegar a 0 cuando $x = 0$. Rebasado este punto, el campo y, en consecuencia, la fuerza, invierten su sentido, si bien sus valores son idénticos en valor absoluto a los de los puntos situados a la derecha del anillo.

Así pues, la partícula efectuará un movimiento oscilatorio sobre la posición de equilibrio (centro del anillo) a lo largo del eje.

18 **Si cuatro cargas están situadas como se muestra en la figura, entonces el campo resultante es cero en:**

a) **Todos los puntos medios de los cuatro lados.**

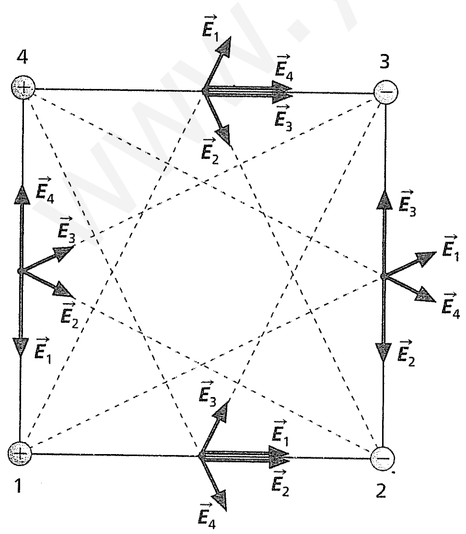
b) **El centro del cuadrado.**

c) **Los puntos medios de los lados superior en inferior.**

d) **Todos los casos anteriores.**

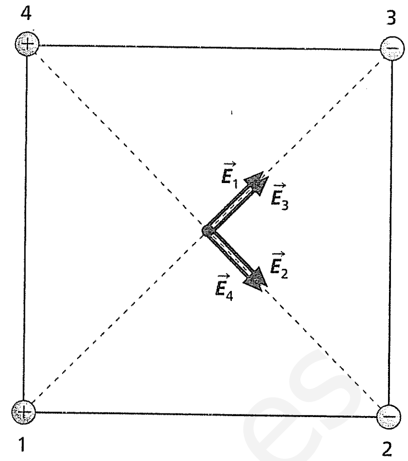
e) **Ninguno de los casos anteriores.**

a) No es cierto. Como se ve en el siguiente dibujo, en los puntos medios de los lados el campo no es nulo, pues no se anula en ningún caso: en el punto medio de los lados verticales se anula el campo producido por las cargas más cercanas, pero no el producido por las más lejanas; por su parte, en el punto medio de los lados horizontales, solo se anula la componente vertical del campo generado por las cargas más lejanas, pero el campo resultante no es nulo.



En los cuatro puntos, la resultante del campo tendrá por tanto dirección horizontal y estará dirigido hacia la derecha.

b) No es cierto. Como se ve en la siguiente figura, el campo generado por las cargas positivas se suma al producido por las cargas negativas. El campo resultante también será horizontal y estará dirigido hacia la derecha.



c) Esta opción tampoco es cierta, como hemos visto en ***a)***.

d) Tal como hemos visto, no es cierto.

e) Esta es la única opción correcta.

19 **PAU** **¿Qué le ocurre a una partícula con carga negativa si es abandonada en el punto B de la figura? ¿Y si es abandonada en el punto A?**

De modo análogo a lo que ocurría en la cuestión anterior, el campo resultante en B tiene la dirección positiva del eje Y, es decir, $\vec{E} = E\vec{j}$. Por tanto, la fuerza que actúa sobre la carga negativa será $\vec{F} = -QE\vec{j}$, de modo que se moverá a lo largo del eje Y hacia A. La función campo a lo largo del eje Y es similar a la obtenida en la actividad resuelta 3 (página 129). Es decir, el campo tiene un máximo para cierto valor de y, y para distancias menores comienza a decrecer hasta hacerse nulo cuando $y = 0$. Rebasado este punto (semieje negativo Y), los valores del campo se invierten.

Así pues, al igual que en el caso anterior, si la carga es abandonada en B, experimentará un movimiento oscilatorio a lo largo del eje Y, alrededor de la posición de equilibrio A. Si la carga se abandona en A, permanecería en reposo, al ser nulo el campo en dicho punto.

20 **Sobre una carga de -2 μC situada en el origen actúa una fuerza de $0{,}002\vec{j}$ N. Calcula:**

a) **El campo eléctrico en dicho origen.**

b) **La fuerza que actuaría sobre una carga de $+10$ μC.**

a) Puesto que el campo eléctrico en un punto se define como la fuerza por unidad de carga situada en dicho punto, su valor es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = -1\,000\vec{j} \text{ N/C}$$

b) La fuerza que actuaría sobre una carga de $+10$ μC situada en dicho punto sería:

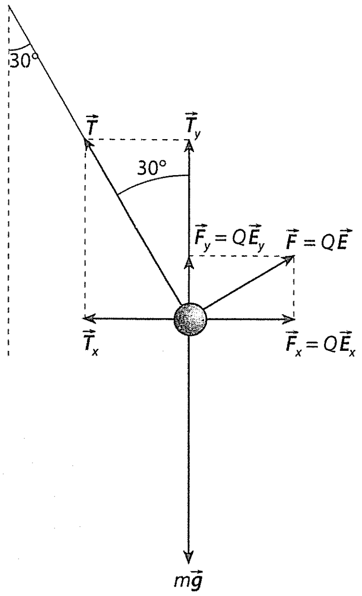
$$\vec{F} = Q\vec{E} = -0{,}01\vec{j} \text{ N}$$

21 **Una bolita de corcho de 2 g de masa pende de un hilo ligero que se halla en el seno de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot 10^5$ N/C. En esa situación, el ángulo que forma el hilo con la vertical es de 30°. Determina:**

a) **La carga de la bolita.**

b) **La tensión del hilo.**

Representamos el enunciado gráficamente:



a) La condición de equilibrio estático de la bola exige que las fuerzas que sobre ella actúan se anulen.

Esto requiere que:

- Eje *X:*

$$T_x = QE_x$$

- Eje *Y:*

$$T_y + QE_y = mg$$

Es decir:

$$T \text{ sen } 30° = QE_x$$
$$T \cos 30° + QE_y = mg$$

Resolviendo *Q,* se obtiene:

$$Q = \frac{mg \text{ tg } 30°}{E_x + E_y \text{ tg } 30°}$$

y sustituyendo los datos, se llega a:

$$Q = 1{,}97 \cdot 10^{-8}\,\text{C}$$

b) Conocido el valor de *Q,* podemos obtener la tensión del hilo a partir de:

$$T \text{ sen } 30° = QE_x$$

Despejando *T:*

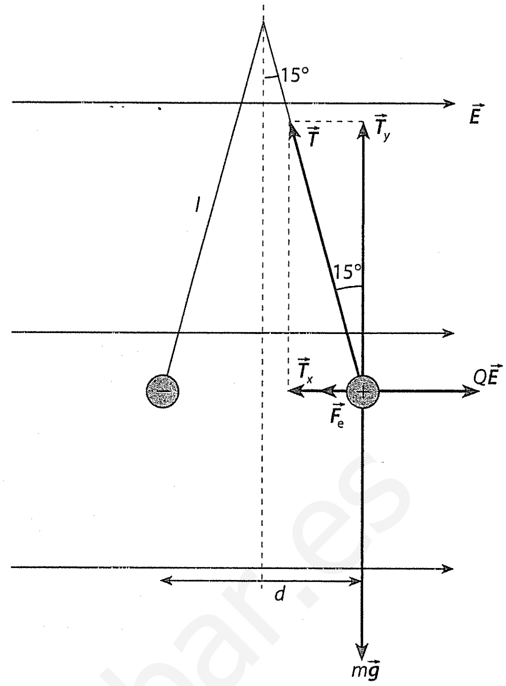
$$T = \frac{QE_x}{\text{sen } 30°}$$

Se obtiene:

$$T = 0{,}016\ \text{N}$$

22 **PAU** **Dos esferas de 5 g están suspendidas de sendos hilos de 20 cm de longitud. Si las esferas tienen cargas de $+3 \cdot 10^{-8}$ C y $-3 \cdot 10^{-8}$ C, respectivamente, y se hallan en el seno de un campo eléctrico uniforme en la dirección del semieje X^+, determina la intensidad del campo eléctrico cuando el sistema queda en equilibrio y los hilos forman un ángulo de 15° con la vertical.**

La representación gráfica de la cuestión planteada es:



Como puede observarse en la figura, donde se han dibujado las fuerzas que actúan sobre la carga positiva, la situación de equilibrio requiere que:

- Eje *X:*

$$T \text{ sen } 15° + k\frac{QQ'}{d^2} = QE$$

- Eje *Y:*

$$T \cos 15° = mg$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$E = \frac{mg \text{ tg } 15° + k\dfrac{QQ'}{d^2}}{Q} = 462\,817\ \text{N/C}$$

donde:

$$d = 2l \text{ sen } 15° = 0{,}103\ \text{m}$$

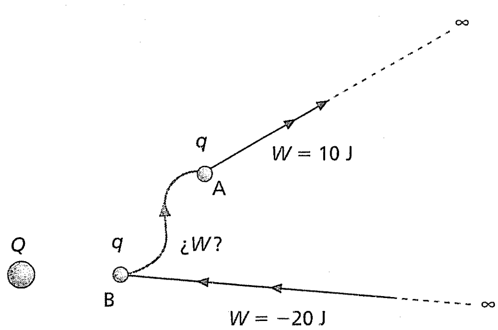
Campo eléctrico desde un enfoque energético

23 **PAU** **Una carga puntual *Q* crea un campo electrostático. Al trasladar una carga testigo *q* desde un punto A hasta el infinito, se realiza un trabajo de 10 J. Si se traslada desde el infinito hasta otro punto B, el trabajo resulta ser de −20 J.**

a) **¿Qué trabajo se realiza cuando la carga se traslada desde el punto B hasta A? ¿En qué propiedad del campo electrostático se basa tu respuesta?**

b) **Si $q = -2$ C, ¿cuánto vale el potencial en los puntos A y B? Si el punto B es el más próximo a la carga *Q,* ¿cuál es el signo de *Q*? ¿Por qué?**

a) La disposición de cargas descrita en el enunciado es:



Siguiendo el criterio de signos visto en la unidad, el trabajo realizado por el campo para trasladar una carga desde cierto punto hasta el infinito es $W = E_p(r)$, mientras que si se traslada la carga desde el infinito hasta dicho punto, el trabajo es $W = -E_p(r)$. Por tanto, conocemos la energía potencial en los puntos A y B:

$$E_p(A) = 10 \text{ J}; E_p(B) = 20 \text{ J}$$

De donde se puede concluir que ambas cargas tienen el mismo signo. Si ahora queremos trasladar la carga q desde B hasta A, el trabajo realizado por el campo será:

$$W_{B\to A} = E_p(B) - E_p(A) = 10 \text{ J}$$

Para llegar a este resultado, nos hemos basado en el hecho de que el campo eléctrico es conservativo, con lo que el trabajo no depende de la trayectoria, sino solo de los puntos inicial y final.

b) Puesto que q es negativa, Q también lo será, pues, según hemos visto, ambas cargas han de tener el mismo signo. Conocemos la relación entre el potencial y la energía potencial:

$$E_p = qV \Rightarrow V_A = \frac{10}{-2} = -5 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{20}{-2} = -10 \text{ V}$$

24 **¿Hacia dónde tienden a moverse espontáneamente los electrones: hacia regiones de mayor o de menor potencial?**

Los electrones tienden a moverse espontáneamente desde puntos de menor potencial hacia puntos de mayor potencial, pues:

$$\Delta E_c = Q(V_1 - V_2) = -e(V_1 - V_2)$$

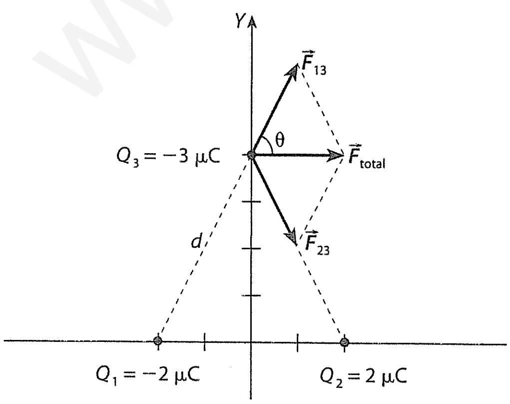
Por tanto, para que el electrón se acelere de modo espontáneo (para que aumente su energía cinética), el resultado de la diferencia del paréntesis ha de ser negativo, es decir, $V_1 < V_2$. Así pues, se moverá de manera espontánea hacia puntos de mayor potencial (acercándose hacia una carga positiva, por ejemplo).

25 **En los puntos (−2, 0) y (2, 0) de un sistema cartesiano plano cuyas dimensiones se expresan en metros existen dos cargas fijas de −2 μC y +2 μC respectivamente. Determina:**

a) **La fuerza ejercida por estas dos cargas sobre una tercera de −3 μC situada en el punto (0,4).**

b) **El trabajo realizado para trasladar dicha carga desde el punto (0, 4) hasta el punto (4, 4).**

a) La siguiente figura ilustra la cuestión planteada:



Por simetría, podemos concluir que la componente Y de la fuerza ejercida sobre Q en A será nula, mientras que la componente X será la suma de las dos componentes generadas por las dos cargas inferiores, que son idénticas.

Es decir:

$$F_{x\,total} = 2\,F_x = 2k\frac{Q_1 Q_3}{d^2}$$

Como se puede observar, la distancia de Q_1 y Q_2 a Q_3 puede expresarse mediante la expresión:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20} \text{ m}$$

Por tanto:

$$F_{x\,total} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{20} \cos\theta$$

Puesto que $\cos\theta = 2/d$, podemos calcular $F_{x\,total}$:

$$F_{x\,total} = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{10}\frac{2}{\sqrt{20}} = 2{,}41 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

b) El trabajo que piden será:

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

Ahora bien, por simetría resulta que la energía potencial en A debida a Q_1 es idéntica y de sentido contrario a la debida a Q_2. Por tanto:

$$W_{A\to B} = -E_p(B)$$

La energía potencial en B será la debida a la carga Q_1 más la debida a Q_2:

$$W_{A\to B} = -kQ\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2}\right) =$$

$$= -9 \cdot 10^9 \cdot (-3 \cdot 10^{-6}) \cdot \left(\frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{52}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{20}}\right)$$

$$W_{A\to B} = 27 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 4{,}59 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Como se ve este trabajo es positivo. Es fácil llegar cualitativamente a esta conclusión, pues, por simetría, la energía potencial debida a Q_2 es idéntica en A y en B, luego el trabajo vendrá determinado por la carga Q_1. Al tener Q_1 y Q el mismo signo, las cargas se repelen, luego el campo realiza un trabajo positivo al alejar ambas cargas.

26 **Un campo eléctrico uniforme de valor 200 N/C tiene la dirección del eje *X*. Si se deja en libertad una carga de −2 μC que se encuentra inicialmente en reposo en el origen de coordenadas:**

a) **¿Cuál será la variación de energía potencial cuando la carga se encuentre en el punto (4, 0)?**

b) **¿Cuál será su energía cinética en ese punto?**

c) **¿Y la diferencia de potencial entre el origen y el punto (4, 0)?**

a) Como se desprende de la expresión **4.20:**

$$E_{p\,B} - E_{p\,A} = -QEd = -0{,}0016 \text{ J} = -1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

donde B es (4, 0) y A es (0, 0).

b) Por un lado, sabemos que:

$$W = -\Delta E_p = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Además, se cumple que:

$$W = \Delta E_c = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Dado que la energía cinética inicial en A es cero, entonces:

$$E_{c\,B} = 0{,}0016 \text{ J} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

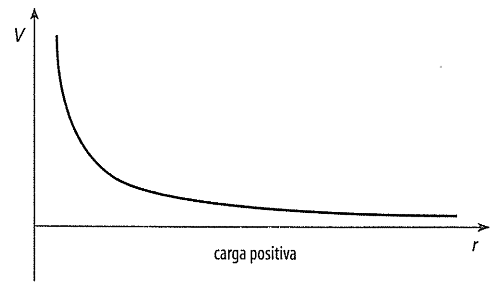
c) La diferencia de potencial entre A y B será:

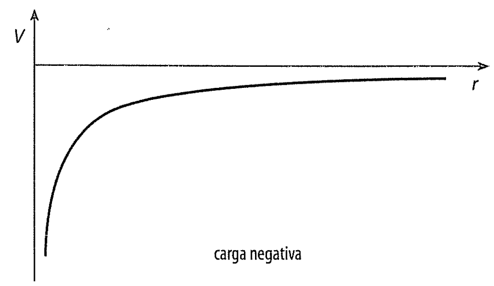
$$V_A - V_B = Ed = 800 \text{ V}$$

Concepto de potencial y relación con el campo eléctrico

27 **Ilustra mediante una gráfica cómo varía el potencial eléctrico creado por una carga puntual *Q* positiva si nos alejamos de ella. ¿Y si la carga es negativa?**

En el caso de la carga positiva, el potencial disminuye conforme a $1/r$ a medida que nos alejamos, hasta hacerse cero en el infinito, mientras que, en el caso de la carga negativa, aumenta desde valores negativos conforme a $1/r$, hasta hacerse también cero en el infinito.





28 **¿Pueden cortarse las superficies equipotenciales?**

No pueden cortarse, pues, según las normas de trazado de las superficies equipotenciales, estas son perpendiculares al vector $\vec{E}$ en cada punto. Dado que en un punto solo puede haber un valor del campo, tal y como se desprende del principio de superposición, no pueden existir dos superficies equipotenciales que se corten, ya que esto supondría la existencia de dos vectores $\vec{E}$ distintos en un mismo punto.

29 **PAU** **El potencial en el interior de una corteza esférica cargada es constante. ¿Cómo es el campo eléctrico en el interior de la corteza?**

Puesto que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, si el potencial es constante, el campo en el interior de la corteza es nulo, lo que es congruente con el teorema de Gauss.

30 **En una región del espacio, el campo eléctrico es nulo. ¿Será también nulo el potencial eléctrico? Razona tu respuesta.**

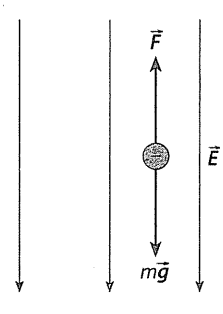
El potencial será constante en dicha región, como se desprende de la expresión **4.18**.

31 **PAU** **Una esfera de 5 g de masa tiene una carga de -4 μC.**

a) **¿Cuál debe ser el campo eléctrico que habríamos de aplicar para que la esfera permanezca en reposo sin caer al suelo?**

b) **Si dicho campo ha de ser suministrado mediante una diferencia de potencial establecida entre dos placas metálicas planas y paralelas separadas 5 cm, ¿cuál debe ser la diferencia de potencial que debe establecerse?**

El enunciado del problema puede ilustrarse del siguiente modo:



a) La condición de equilibrio se cumplirá cuando:

$$mg = QE$$

Por tanto, el campo eléctrico será:

$$E = 12\,250 \text{ N/C}$$

Como la carga es negativa, el campo debe estar dirigio hacia abajo; por lo que:

$$\vec{E} = -12\,250\vec{j} \text{ N/C}$$

b) La relación entre la diferencia de potencial entre dos placas planas paralelas y el campo en su interior es $V_B - V_A = Ed$, luego:

$$V_B - V_A = 12\,250 \cdot 0{,}05 = 612{,}5 \text{ V}$$

32 **PAU** **Dos esferas conductoras tienen por radios 90 cm y 45 cm, respectivamente, y se hallan cargadas de modo que sus superficies están a un potencial respecto del infinito de $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V. Si se encuentran en una zona del espacio vacío y entre sus centros existe una separación de 10 m, calcula:**

a) **La fuerza que ejercen entre sí ambas esferas.**

b) **El campo eléctrico en el punto medio de la recta que une sus centros.**

c) **La carga que quedará en cada esfera si ambas se unen con un cable conductor de capacidad despreciable.**

Para puntos exteriores a las esferas, el potencial es:

$$V = k\frac{Q}{r}$$

Podemos hallar la carga de cada esfera aplicando dicha expresión cuando $r = r_1$ y cuando $r = r_2$:

$$Q_1 = \frac{V_1 r_1}{k} = 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{V_2 r_2}{k} = 10^{-9} \text{ C}$$

Para las preguntas ***a)*** y ***b)***, se puede suponer que la carga está concentrada puntualmente en el centro de cada esfera:

a) Según esto, la fuerza existente entre ambas esferas (repulsiva, pues las cargas son positivas) será:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

b) Puesto que las cargas son iguales, el campo en el punto medio es nulo.

c) Si las dos cargas se unen por un conductor, sus potenciales se igualarán; de modo que:

$$k\frac{Q_1'}{r_1} = k\frac{Q_2'}{r_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{r_1} = \frac{Q_2'}{r_2}$$

Por otra parte, si el conductor tiene una capacidad despreciable, la suma de las cargas $(Q_1' + Q_2')$ ha de ser igual a la carga total inicial $(Q_1 + Q_2)$ por el principio de conservación de la carga; de modo que:

$$Q_1' + Q_2' = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

de donde:

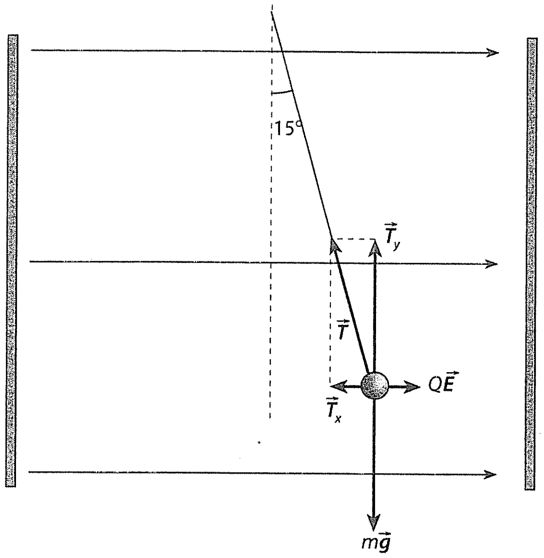
$$Q_1' = 2 \cdot 10^{-9} - Q_2'$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior y resolviendo, obtenemos:

$$Q_1' = 1{,}33 \cdot 10^{-9} \text{ C y } Q_2' = 0{,}66 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

33 **PAU** **Una pequeña esfera de 0,5 g y con una carga de 6 nC cuelga de un hilo. Cuando el sistema se introduce entre dos placas planas verticales y cargadas, separadas entre sí 10 cm, se observa que el hilo forma un ángulo de 15° con la vertical. ¿Cuál es la diferencia de potencial existente entre las placas?**

El enunciado puede ilustrarse mediante la siguiente figura:



Cuando la bola está en equilibrio, se cumple que:

$$T_x = QE \Rightarrow T \text{ sen } 15° = QE \text{ y } T_y = mg \Rightarrow T \cos 15° = mg$$

Dividiendo ambas magnitudes y despejando E, obtenemos:

$$E = \frac{mg \text{ tg } 15°}{Q}$$

Como:

$$V_A - V_B = Ed$$

entonces:

$$V_A - V_B = \frac{mgd \text{ tg } 15°}{Q}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$V_A - V_B = 21\,882{,}5 \text{ V}$$

Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos

34 Analiza el movimiento de una partícula cargada que incide de forma oblicua en un campo uniforme si:

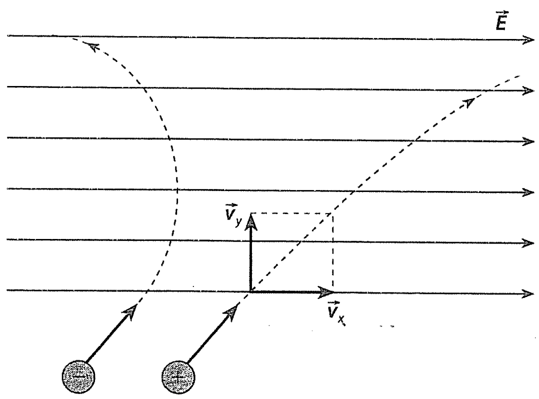
***a)* Su carga es positiva.**

***b)* Su carga es negativa.**

Suponemos que el campo tiene dirección X positiva. En los dos casos, la carga describirá un movimiento parabólico, si bien el sentido de dicho movimiento dependerá del signo de la carga. La componente de la velocidad normal al campo no sufrirá variación, mientras que la componente de la velocidad en la dirección del campo se verá afectada, de modo que:

$$v_x = v_{0x} + \frac{QE}{m} t$$

Por tanto, si la carga es negativa, dicha componente disminuye hasta invertir su sentido, mientras que si es positiva, su valor aumenta. Así pues, las trayectorias serían similares a las indicadas en la figura:



D35 PAU Entre dos placas planas y paralelas, separadas 40 cm entre sí, con cargas iguales y de signo opuesto, existe un campo eléctrico uniforme de 4 000 N/C. Si un electrón se libera de la placa negativa:

***a)* ¿Cuánto tarda en chocar contra la placa positiva?**

***b)* ¿Qué velocidad llevará al impactar?**

a) El movimiento del electrón será acelerado desde el reposo, de modo que:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Por otra parte:

$$eE = ma \Rightarrow a = \frac{eE}{m}$$

Por tanto:

$$t = \sqrt{\frac{2xm}{eE}} = 3{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

b) El trabajo realizado al pasar de una placa a otra es:

$$W = eEd = \Delta E_c$$

Como la energía cinética inicial es nula:

$$E_{c\,f} = eEd = 2{,}56 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Para este valor de energía, el aumento de masa relativista $\Delta m = E_c/c^2$ es despreciable, por lo que podemos suponer que la masa del electrón permanece invariable. En consecuencia:

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 2{,}3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

D36 PAU Un electrón entra con una velocidad de $2 \cdot 10^6$ m/s en una región con un campo eléctrico uniforme de 10 000 N/C. Determina:

***a)* La aceleración que adquiere el electrón.**

***b)* El tiempo que tarda y la distancia que recorre en el seno del campo hasta quedar en reposo.**

***c)* La diferencia de potencial existente entre el punto de entrada y el punto donde su velocidad se hace cero.**

a) La aceleración viene dada por la expresión $a = eE/m$, luego:

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

b) Sabemos que el electrón se va frenando una vez que entra en el campo, pues llega un momento en que está en reposo. Por tanto, la aceleración será negativa.

Podemos aplicar las ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado: $v = v_0 - at$.

Cuando el electrón alcanza el reposo, se cumple:

$$0 = 2 \cdot 10^6 - 1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot t \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 10^6}{1{,}76 \cdot 10^{15}} = 1{,}14 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Para determinar esta distancia, hacemos uso de otra ecuación del movimiento uniformemente acelerado:

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

Sustituyendo en el momento en que el electrón queda en reposo:

$$0 = (2 \cdot 10^6)^2 - 2 \cdot 1{,}76 \cdot 10^{15} \cdot s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{4 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 1{,}76 \cdot 10^{15}} = 1{,}14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Es decir, el electrón recorre poco más de un milímetro.

c) Si llamamos A al punto de entrada y B al punto donde el electrón queda momentáneamente en reposo, se cumple:

$$V_A - V_B = Ed = 10^4 \cdot 1{,}14 \cdot 10^{-3} = 11{,}4 \text{ V}$$

Teorema de Gauss para campo eléctrico

37 **Si el flujo neto del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana tiene valor cero, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?**

a) **No existen cargas en el interior de la superficie.**

b) **La carga neta en el interior de la superficie es nula.**

c) **El número de líneas de fuerza entrantes en la superficie es igual al número de líneas salientes.**

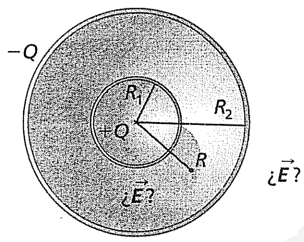
Puesto que el flujo neto del campo eléctrico es $\Phi = Q/\varepsilon_0$ y dicho flujo es cero, la carga neta en el interior de la superficie gaussiana debe ser forzosamente nula, luego la afirmación ***b)*** es cierta. Además, el hecho de que el flujo neto es cero significa que el flujo entrante es igual al saliente, por lo que la proposición ***c)*** también es correcta.

D38 **PAU** **Una esfera conductora hueca de pequeño tamaño está cargada uniformemente con una carga $+Q$. Concéntrica a ella y separada por vacío la rodea otra esfera conductora hueca de mayor tamaño y cargada uniformemente con carga $-Q$. Haciendo uso del teorema de Gauss, determina el campo eléctrico:**

a) **En un punto entre ambas esferas a una distancia R del centro común de ambas.**

b) **En un punto exterior a ambas esferas a una distancia r del centro común de ambas.**

La disposición descrita en el enunciado puede verse en el siguiente dibujo:



a) Aplicando el teorema de Gauss para una superficie de Gauss imaginaria de radio R mayor que R_1 pero menor que R_2, y considerando la simetría de ambas esferas, resulta:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \cdot dS = E \oint dS = E \cdot 4\pi R^2$$

Por otro lado, sabemos que el flujo es el cociente entre la carga y la constante ε_0, luego:

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

El campo queda:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

b) Siguiendo el mismo procedimiento, se llega a la conclusión de que el campo en un punto situado a una distancia $r > R_2$ es nulo, pues la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es nula.

El montaje descrito es un condensador esférico, cuyo campo es no nulo en los puntos situados entre ambas esferas, y nulo en el resto del espacio.

D39 **PAU** **Se tiene un plano de grandes dimensiones con una densidad superficial de carga de $+3 \cdot 10^{-9}$ C/m^2; calcula:**

a) **El campo eléctrico uniforme que genera.**

b) **El trabajo que se realiza al desplazar una carga de -2 μC desde el punto A, a 2 cm de la placa, hasta el punto B, a 8 cm de la misma.**

a) Como puede observarse en la página 127, deducida mediante el teorema de Gauss, el campo que genera una placa plana es uniforme y de valor:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 169{,}6 \text{ N/C}$$

b) El trabajo viene dado por:

$$W = Q'Ed = Q'E\,(x_B - x_A) = -2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

El signo negativo implica que el trabajo debe realizarse en contra de la fuerza eléctrica y se traduce en un aumento de la energía potencial del sistema al alejar la carga negativa.

5 Campo magnético y principios del electromagnetismo

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

- **1. De la magnetita al electromagnetismo**
  páginas 133/135
  - **1.1. Campo magnético**
    página 134
  - **1.2. Primera unificación: el electromagnetismo**
    página 135
- **2. Estudio del campo magnético**
  páginas 136/141
  - **2.1. Acción de un campo magnético sobre una carga en movimiento**
    páginas 136/137
  - **2.2. Acción de un campo magnético sobre una corriente eléctrica**
    páginas 138/140
  - **2.3. Orientación de una espira en un campo magnético**
    páginas 140/141
- **3. Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos**
  páginas 142/144
  - **3.1. Movimiento de partículas cargadas que entran en dirección perpendicular a un campo uniforme**
    páginas 142/143
  - **3.2. Movimiento de cargas que inciden oblicuamente en un campo magnético uniforme**
    página 144
- **4. Campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas**
  páginas 145/149
  - **4.1. Fuerzas magnéticas entre corrientes paralelas**
    páginas 145/147
  - **4.2. Campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida**
    página 147
  - **4.3. Campo producido por una corriente cualquiera. Ley de Biot y Savart**
    páginas 148/149
- **5. Teorema de Ampère**
  páginas 150/151

Cuestiones previas (página 132)

1. Si la masa es el agente asociado a la gravitación, y la carga, la causa ligada a los fenómenos eléctricos, ¿sabrías decir cuál es el agente responsable del magnetismo?

Hay dos agentes causantes del magnetismo; los imanes y las corrientes eléctricas (partículas cargadas en movimiento).

2. ¿Cuál es la razón de que un imán distorsione la imagen de un televisor?

La pantalla de un televisor está formada por tubos que generan haces de electrones, estos electrones realizan un barrido de la pantalla, excitando el material fosforescente. Si acercamos un imán a la pantalla, su campo magnético desvía la trayectoria de los electrones, que impactan en zonas donde no deberían hacerlo. El resultado es una imagen distorsionada.

3. ¿Por qué una línea de metro no debe pasar por debajo de un hospital?

Porque las líneas de metro generan campos electromagnéticos que podrían interferir negativamente en el hospital.

4. ¿Podrías indicar algunas diferencias entre la interacción electrostática y la magnética?

- Tienen direcciones diferentes con respecto a sus campos generados.
- En la interacción eléctrica es independiente la fuerza eléctrica de la velocidad de la carga, en cambio en la interacción magnética son directamente proporcionales.
- En la interacción eléctrica realiza trabajo al desplazar un cuerpo cargado en cambio en la magnética no realiza ningún trabajo al ser perpendicular al desplazamiento.

5. ¿Es peligroso vivir cerca de una línea de alta tensión?

Los estudios sobre posibles efectos perniciosos para la salud de la exposición a campos electromagnéticos se suceden desde los años sesenta, sin que hasta el momento se haya demostrado una relación causa efecto definitiva. En general, la comunidad científica internacional está de acuerdo en que la exposición a los campos eléctricos y magnéticos generados por las instalaciones eléctricas de alta tensión no supone un riesgo para la salud pública.

Actividades (páginas 134/151)

1 ¿Cómo sabrías, con ayuda de una brújula, cuál es el polo norte de un imán? ¡Cuidado! No te fíes de los colores que tienen los imanes del laboratorio.

Si al acercar el imán por un extremo, el polo norte de la brújula (es decir, el que se orienta hacia el norte) es repelido, podemos deducir que el extremo del imán que se ha aproximado es su polo norte. Por el contrario, si el polo norte de la brújula resulta atraído, el extremo del imán será su polo sur.

2 ¿Qué diferencia fundamental existe entre las líneas de fuerza de un campo magnético y las de un campo eléctrico? ¿A qué se debe dicha diferencia?

Las líneas de fuerza de un campo eléctrico son abiertas, mientras que las de un campo magnético son siempre cerradas. Esto se debe a que el campo eléctrico puede ser creado por cargas individuales, mientras que el campo magnético es generado en los polos, que siempre se presentan por pares: las líneas del campo magnético salen del polo norte y entran por el polo sur.

3 PAU Un protón se mueve con una velocidad de $3 \cdot 10^7$ m/s a través de un campo magnético de 1,2 T. Si la fuerza que experimenta es de $2 \cdot 10^{-12}$ N, ¿qué ángulo formaba su velocidad con el campo cuando entró en él?

A partir de la expresión:

$$F = QvB \text{ sen } \theta \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{F}{QvB}$$

y sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\text{sen } \theta = 0{,}347 \Rightarrow \theta = 20{,}3°$$

4 Un electrón penetra en un campo $B\vec{k}$ con una velocidad $v\vec{j}$. ¿En qué dirección actúa la fuerza?

Aplicando la regla de la mano derecha, podemos deducir que la fuerza actúa en el sentido positivo del eje X, es decir:

$$\vec{F} = -F\vec{i}$$

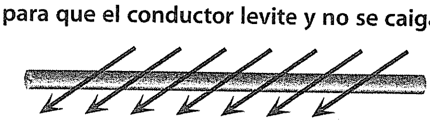
Se llega al mismo resultado si realizamos el producto vectorial que permite obtener la fuerza:

$$\vec{F} = Q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = QvB\vec{i}$$

5 Un haz de protones y otro de electrones son lanzados en la misma dirección y sentido. En ambos casos, se observa que las partículas se desplazan con movimiento rectilíneo y uniforme. ¿Podemos asegurar que en dicha región no existe campo magnético? ¿Y campo eléctrico?

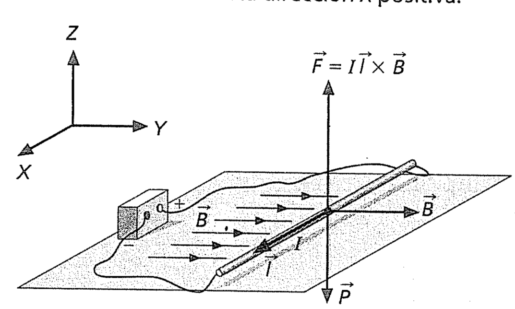
No podemos asegurar la inexistencia de un campo magnético, pues podría suceder que las partículas incidiesen en la dirección del campo magnético, en cuyo caso $\vec{F} = 0$ y el movimiento sería con velocidad constante. Lo que sí puede asegurarse es que no existe campo eléctrico, pues afectaría al movimiento de las partículas cargadas independientemente de la orientación.

6 PAU Un hilo conductor de 10 g de masa y 20 cm de longitud conectado a un generador de corriente continua mediante hilos flexibles se encuentra inmerso en un campo magnético de 0,04 T que lo atraviesa perpendicularmente, paralelo al suelo, como se indica en la figura. Determina qué intensidad de corriente debe hacerse circular y en qué sentido para que el conductor levite y no se caiga al suelo.



La fuerza que experimenta el hilo conductor a consecuencia del campo magnético es: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$.

Esta fuerza será vertical, pero hay dos sentidos posibles, hacia arriba y hacia abajo. Debemos escoger el sentido de corriente capaz de compensar la fuerza de la gravedad. En el caso de la figura del enunciado, la corriente deberá ir hacia la izquierda. En el siguiente dibujo, el hilo se ha orientado en la dirección X, y el campo tiene dirección Y positiva. En este caso, la corriente deberá circular en la dirección X positiva:



La fuerza que experimenta el hilo será $F = IlB$, y tendrá dirección vertical hacia arriba.

El equilibrio entre esta fuerza y la de la gravedad viene dado por la siguiente expresión:

$$mg = IlB \rightarrow I = mg/lB = 12{,}25\ \text{A}$$

7 **Al accionar el paso de corriente por un circuito rectilíneo no se observa efecto alguno. ¿Podemos afirmar que no existe campo magnético en dicha región?**

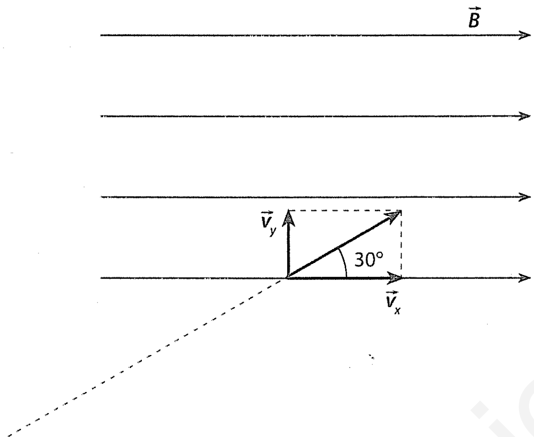
No necesariamente, pues el circuito rectilíneo puede estar orientado en la dirección del campo magnético, en cuyo caso este no ejercerá fuerza alguna sobre el circuito y, en consecuencia, no se detectará ninguna fuerza.

8 **PAU** **Un electrón incide en un campo magnético de $12\vec{i}$ T con una velocidad de $1{,}6 \cdot 10^7$ m/s, formando un ángulo de 30° con las líneas de dicho campo.**

a) **¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón?**

b) **¿Cuál es su velocidad de avance en el campo?**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



De ella se desprende que las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v \cos 30° = 1{,}38 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

$$v_y = v \operatorname{sen} 30° = 8 \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

a) El radio de la órbita que describirá viene dado por la expresión **5.12**, donde $v = v_y$, ya que la componente x es paralela al campo y por ello no ejerce fuerza alguna:

$$r = \frac{mv_y}{QB} = 3{,}79 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 3{,}79\ \mu\text{m}$$

b) Su velocidad de avance en el campo es:

$$v_x = 1{,}38 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

9 **PAU** **Dos partículas de masas *m* y 4*m* y cargas *Q* y 3*Q*, respectivamente, inciden perpendicularmente, con la misma velocidad, *v*, en un campo magnético de valor *B*. Demuestra cómo son, en cada caso, los radios de los círculos que describen, así como sus respectivos períodos de revolución.**

Al incidir perpendicularmente al campo magnético, ambas partículas describirán un movimiento circular. Según la expresión **5.12**, el radio de las dos órbitas será:

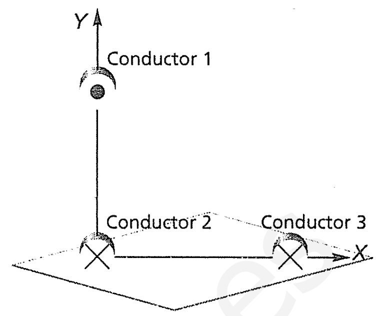
$$r_1 = \frac{mv}{QB} \qquad r_2 = \frac{4mv}{3QB} = \frac{4}{3} r_1$$

Por su parte, el periodo de revolución viene dado por la expresión **5.14**, es decir:

$$T_1 = \frac{2\pi m}{QB} \qquad T_2 = \frac{2\pi 4m}{3QB} = \frac{4}{3} T_1$$

Es decir, tanto el radio como el periodo de revolución de la segunda partícula son 4/3 de los valores correspondientes a la primera partícula.

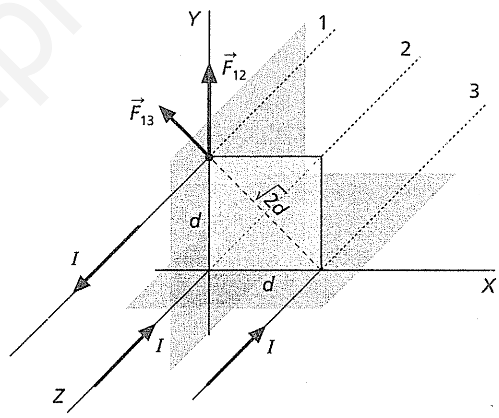
10 **PAU** **Tres hilos conductores largos, rectilíneos y paralelos entre sí están situados en tres vértices de un cuadrado de 10 cm de lado, como se indica en la figura. Por los tres circula una intensidad de 20 A, dirigida hacia fuera del papel en el conductor 1, y hacia dentro en el caso de los conductores 2 y 3. Determina, usando el sistema de referencia *XY* centrado en el conductor 2, la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el conductor 1, así como su valor.**



La fuerza total ejercida sobre el hilo 1 será la suma de las fuerzas que ejercen sobre el mismo los otros dos hilos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

El hilo 2 ejerce sobre el 1 una fuerza repulsiva, luego tendrá dirección *Y* positiva. El hilo 3 ejerce sobre el hilo 1 una fuerza igualmente repulsiva, pero en este caso la fuerza tendrá tanto componente *X* como componente *Y*:



Utilizando la expresión de la fuerza que ejerce un hilo sobre otro por unidad de longitud:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\vec{j} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\vec{j}$$

$$\frac{\vec{F}_{13}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sqrt{2}d}(-\cos 45°\,\vec{i} + \operatorname{sen} 45°\,\vec{j}) =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$\frac{\vec{F}_1}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}(-\vec{i} + 3\vec{j}) = -4 \cdot 10^{-4}\,\vec{i} + 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\ \text{N}$$

$$\frac{|\vec{F}_1|}{l} = 1{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

11 **PAU** **Halla el campo magnético en el centro de una espira circular de 80 cm² de superficie por la que circula una corriente de 2 A.**

El campo magnético en el centro de una espira circular tiene la dirección del eje de la espira y el sentido que marca la regla de la mano derecha, tal como se observa en la figura 5.33. El módulo de dicho campo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

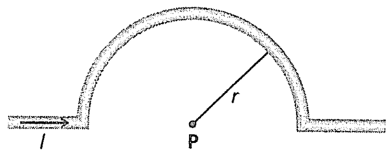
A partir del valor de la superficie podemos averiguar el radio:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cong 0{,}05 \text{ m}$$

Por tanto:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot 0{,}05} = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

12 PAU Por una espira semicircular de radio $r = 30$ cm circula una corriente de intensidad $I = 20$ A. Calcula el campo en el punto P de la siguiente figura.



Aplicando la ley de Biot y Savart, el campo producido por un elemento de corriente $I\,d\vec{l}$ es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

El campo producido por los dos tramos horizontales será nulo, pues el producto vectorial del elemento de corriente por el vector $\vec{u}_r$ es nulo en toda su longitud.

Así pues, el campo será el provocado por el tramo semicircular. Integrando en toda su longitud:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Ahora bien, r, es decir, la distancia del elemento de corriente al punto P, es constante, luego podemos sacarla de la integral. Además, el producto vectorial es también constante, pues $d\vec{l}$ y $\vec{u}_r$ son perpendiculares en todo momento.

Dicho producto será un vector de módulo dl, con dirección perpendicular a la espira y hacia el fondo.

Es decir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left(\oint dl \right) \vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \pi r \vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{4r} \vec{k}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{4 \cdot 0{,}3} = 2{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

13 PAU Imagina que disponemos un número grande N de conductores rectilíneos muy largos de forma adyacente, de modo que parezcan una lámina. Si por todos ellos circula la misma corriente I en el mismo sentido:

a) Deduce cómo serán las líneas del campo magnético del dispositivo en una superficie perpendicular a los conductores.

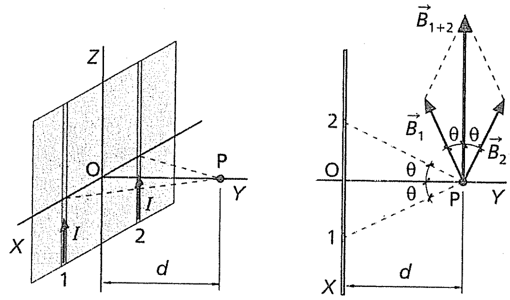
b) Demuestra por aplicación del teorema de Ampère que el valor del campo en un punto enfrente de la lámina obtenida viene dado por:

$$B = 1/2\, \mu_0\, n\, I$$

donde n es el número de conductores por unidad de longitud $\left(n = \frac{N}{L}\right)$.

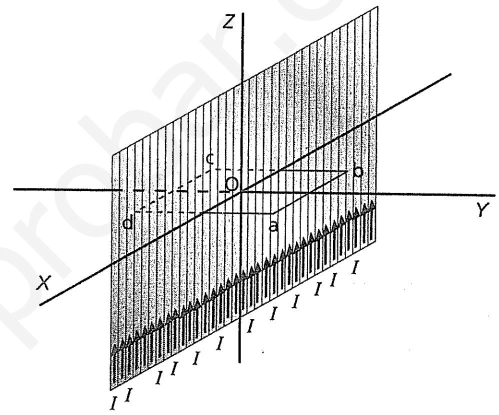
a) Suponemos que los conductores rectilíneos que constituyen la placa son suficientemente largos como para considerarlos indefinidos. También consideramos indefinido el número de conductores.

Imaginemos un punto P situado a una distancia d de la lámina, tal como se observa en la siguiente figura:



Para un conductor rectilíneo **1**, siempre podremos encontrar otro conductor simétrico, **2**, de modo que la componente Y de los dos campos magnéticos se anula. En consecuencia, el campo será paralelo a la lámina y tendrá la dirección que marque la regla de la mano derecha. En nuestro ejemplo, el campo tiene la dirección X negativa.

b) Aplicaremos el teorema de Ampère a la curva rectangular abcd del dibujo:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Ahora bien, las integrales segunda y cuarta de esta expresión valen cero, pues en ellas $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son perpendiculares. Además, por simetría, las integrales primera y tercera son idénticas. Aplicando el teorema de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2 \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2Bl = \mu_0 I_{\text{interior}}$$

En esa expresión, I_{interior} representa la intensidad total encerrada por la curva abcd, que será el producto de I por el número de conductores que hay en la longitud l, esto es, nl. Por tanto:

$$2Bl = \mu_0 I n l \rightarrow B = \mu_0 I n / 2$$

14 ¿Cuánto vale el campo magnético en el centro de un solenoide de 500 espiras que tiene una longitud de 30 cm y un radio de 1 cm y por el que circula una intensidad de 2 A?

El campo eléctrico en el interior de un solenoide es paralelo a su eje y su módulo viene dado por la expresión **5.20**, es decir, es independiente del radio del solenoide. Sustituyendo los datos:

$$B = \mu_0 N \frac{I}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500 \cdot 2}{0{,}3} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Actividades finales (páginas 154/155)

Guía de repaso

1 ¿De dónde viene la terminología «polo norte» y «polo sur» aplicada al magnetismo?

Pierre de Maricourt en el año 1269.

2 **¿Qué magnitud representa al campo magnético? ¿Qué particularidades tiene?**

El campo magnético se representa por la magnitud $\vec{B}$ y se denomina inducción magnética. Se representa mediante líneas de fuerza cerradas y su intensidad varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

3 **¿Cómo varía con la distancia la fuerza con que se atraen o repelen dos polos?**

La fuerza con que se atraen o repelen dos polos varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

4 **¿Qué ocurre cuando rompemos un imán por la mitad?**

Cuando rompemos un imán por la mitad se generan inmediatamente dos polos en cada fragmento.

5 **¿Qué es lo que produce, en última instancia, un campo magnético?**

Partículas cargadas en movimiento, es decir, una corriente eléctrica.

6 **¿Cómo es la fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento? ¿Qué expresión tiene dicha fuerza?**

Su expresión es: $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$, de forma que es proporcional a la carga y velocidad con que entra en el campo magnético. Además depende de la dirección con que la partícula entra en el campo.

7 **¿Cuál es la unidad de inducción magnética en el Sistema Internacional? ¿Cómo se define?**

En el SI, el campo magnético se mide en teslas. Se define una tesla como la intensidad de un campo magnético tal que, cuando incide perpendicularmente en él una carga de 1 C a una velocidad de 1 m/s, ejerce sobre la misma una fuerza de 1 N.

8 **¿Ejerce un campo magnético uniforme algún tipo de acción sobre una espira o circuito cerrado? ¿En qué condiciones lo hace?**

No ejerce fuerza neta, pero, dependiendo de la orientación de la espira en el seno del campo magnético, puede ejercer un par de fuerzas que orienten la espira. Véase el subepígrafe 2.3.

9 **¿Qué es el momento magnético? ¿Guarda alguna semejanza con el momento dipolar de un dipolo eléctrico?**

Véase el subepígrafe 2.3. Es interesante comparar los campos producidos por un dipolo eléctrico (dos cargas próximas idénticas y de signo opuesto) y uno magnético (una pequeña espira por la que circula corriente). Para puntos alejados, el campo magnético producido por un dipolo magnético tiene la misma forma que el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico. Sin embargo, el campo magnético cercano a una espira es completamente diferente al que existe en las proximidades de un dipolo eléctrico. Baste pensar que hay líneas del campo eléctrico que salen de una carga y entran en la otra, cosa que no existe en un dipolo magnético, donde todas las líneas de campo se cierran sobre sí mismas.

10 **Resume lo que le ocurre a una partícula con carga positiva que penetra perpendicular u oblicuamente en un campo magnético uniforme.**

En el primer caso describe un movimiento circular uniforme y en el segundo caso un movimiento helicoidal.

11 **¿Cómo funciona un ciclotrón?**

Véase el apartado correspondiente en la página 143.

12 **¿Qué podemos decir de las corrientes que circulan por dos conductores paralelos que se repelen?**

Que circulan en sentidos opuestos.

13 **¿Cómo son las líneas del campo magnético producido por una corriente rectilínea e indefinida? ¿Cuál es la expresión que representa dicho campo?**

Las líneas de campo son circunferencias concéntricas donde el vector campo es tangente a dichas líneas. Mediante la expresión **5.17** (página 147 del *Libro del alumno*).

Acción del campo magnético sobre cargas y corrientes

14 **En cierta región hay un campo magnético y otro eléctrico que tienen la misma dirección y sentido. Razona lo que ocurre cuando incide en la dirección y sentido de los campos:**

a) **Un haz de protones.** ***b)*** **Un haz de electrones.**

a) El campo magnético no ejerce acción alguna sobre los protones, pues $\vec{v}$ es paralela a $\vec{B}$. Sí lo hace, sin embargo, el campo eléctrico, que los acelera en la dirección del campo.

b) El campo magnético tampoco tiene efecto sobre los electrones, por la misma razón que en el caso anterior. El campo eléctrico, por su parte, los frena e invierte el sentido de su movimiento.

15 **Un haz de protones incide en dirección perpendicular en los campos de la cuestión anterior. ¿Es posible, bajo alguna circunstancia, que el haz no sufra desviación alguna?**

En absoluto; siempre sufrirán desviación, pues las fuerzas magnéticas y eléctricas no se compensan nunca en esas circunstancias, al actuar en direcciones perpendiculares.

16 **En un instante dado, un electrón se mueve en la dirección $-Z$ en una región donde hay un campo magnético en la dirección $+X$. ¿Cuál es la dirección de la fuerza que actúa?**

La fuerza que experimenta el electrón vendrá dada por el producto vectorial:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si realizamos dicho producto vectorial y tenemos en cuenta el signo menos de la carga del electrón, resulta una fuerza en la dirección *Y* positiva.

17 PAU **Una espira se sitúa de modo que su momento magnético tiene la misma dirección que el campo externo $\vec{B}$ y sentido opuesto. ¿Cuál es el momento del par que actúa sobre ella? ¿Se encontrará en equilibrio estable o inestable? Razona tu respuesta.**

El momento del par es 0, pues $M = mB$ sen 180°. Sin embargo, su equilibrio será inestable, ya que cualquier pequeña perturbación producirá el giro de la espira y hará que su momento magnético se oriente a favor del campo. El equilibrio estable se consigue cuando $\vec{m}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y sentido.

18 **¿Marcará lo mismo un galvanómetro si eliminamos algunas espiras de su bobina o cuadro?**

El momento del par que actúa sobre la bobina es $\vec{M} = NI\vec{S} \times \vec{B}$, momento que es compensado por el resorte espiral. A igualdad de intensidad, si reducimos el número de espiras, el momento del par de la bobina será menor, por lo que su tendencia a orientarse a favor del campo magnético disminuirá. La consecuencia de ello es que el galvanómetro marcará un valor menor que el real, es decir, marcará por defecto (véase la figura 5.16).

19 PAU **Con una velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ m/s, un electrón se mueve en una región del espacio en la que el campo magnético viene dado por $\vec{B} = 0{,}3\vec{i} - 0{,}02\vec{j}$ T. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre él? ¿Y su módulo?**

La fuerza que actúa sobre el electrón es:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

Sustituyendo los datos:

$$\vec{F} = (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0{,}3 & -0{,}02 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 9{,}6 \cdot 10^{-21}\vec{i} + 1{,}4 \cdot 10^{-19}\vec{j} + 5{,}4 \cdot 10^{-20}\vec{k}\ \text{N}$$

Y, por tanto, su módulo valdrá:

$$F = \sqrt{(9{,}6 \cdot 10^{-21})^2 + (1{,}4 \cdot 10^{-19})^2 + (5{,}4 \cdot 10^{-20})^2}$$

Es decir:

$$F = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{N}$$

20 PAU Una bobina rectangular formada por 30 espiras de 10 cm × 8 cm conduce una corriente de 1,5 A. Se introduce dicha bobina en un campo magnético uniforme de 0,8 T, de modo que la normal al plano de la bobina forma 60º con las líneas del campo.

a) **¿Cuál es el valor del momento magnético de la bobina?**

b) **¿Cuánto vale el momento del par de fuerzas que actúa sobre la bobina?**

a) El momento magnético de la bobina es:

$$m = NIS = 0{,}36\ \text{A m}^2$$

b) Teniendo en cuenta que el momento de fuerzas actuante es $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, el valor de dicho momento del par será:

$$M = mB \text{ sen } 60° = 0{,}249\ \text{N m}$$

Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos

21 PAU ¿Cómo hemos de aplicar dos campos uniformes, uno eléctrico y otro magnético, para que sus respectivas fuerzas sobre una partícula con velocidad *v* se cancelen? ¿Cuál ha de ser la relación entre sus módulos?

Deben estar cruzados, es decir, ser mutuamente perpendiculares, como se ilustra en la figura 5.23, por ejemplo, y tal y como se ha expuesto al hablar del selector de velocidades.

La relación entre sus módulos ha de ser igual a la velocidad de incidencia de las partículas ($v = E/B$).

22 ¿Se podría detener una partícula cargada en un campo magnético uniforme?

No podría detenerse nunca. Si se moviera en la dirección del campo, lo haría con velocidad constante, pues $\vec{F} = 0$, pero si lo hiciera en cualquier otra dirección, llevaría un movimiento helicoidal de avance o un movimiento circular (en caso de que incidiese perpendicularmente).

23 ¿Cómo puede usarse el movimiento de una partícula cargada para distinguir un campo eléctrico de uno magnético?

Si la partícula cargada incide en la dirección del campo desconocido y se acelera o decelera, se tratará de un campo eléctrico; por el contrario, si se mueve con velocidad constante, será un campo magnético.

Si incide en dirección perpendicular y sufre una desviación parabólica en la dirección del campo, se tratará de un campo eléctrico, mientras que si sigue una trayectoria circular en dirección perpendicular al campo, estaremos ante un campo magnético.

24 ¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre una partícula cargada?

El trabajo es nulo, al ser una fuerza centrípeta, perpendicular a la velocidad. De hecho, el campo magnético no modifica la energía cinética de las cargas, tan solo imprime a estas un movimiento circular.

25 PAU Dos iones (Fe^{2+} y Fe^{3+}) penetran en dirección perpendicular a un campo uniforme con la misma velocidad. ¿Cómo son en comparación los períodos de sus revoluciones en el seno del campo? ¿Y los radios de las circunferencias que describen?

El período de revolución viene dado por la expresión:

$$T = \frac{2\pi m}{QB}$$

mientras que el radio que describen es:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

En el caso del ion Fe^{2+}, su carga, Q, es igual a $2e$, mientras que en el caso del ion Fe^{3+} la carga Q vale $3e$.

Puesto que todos los demás factores son iguales, la relación entre períodos es:

$$T(Fe^{2+}) = \frac{3}{2}\, T(Fe^{3+})$$

E, igualmente:

$$r(Fe^{2+}) = \frac{3}{2}\, r(Fe^{3+})$$

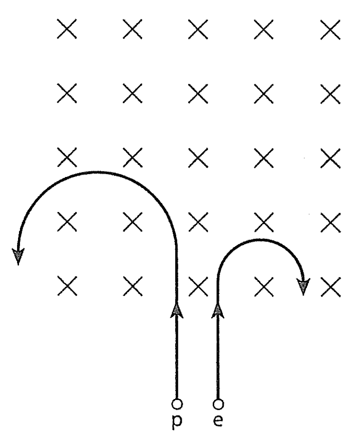
26 PAU Un protón incide en dirección perpendicular a un campo de 3 T. ¿Con qué velocidad debe hacerlo para que el radio de su trayectoria sea de 2 cm?

Si incide perpendicularmente, el radio de su trayectoria vendrá dado por:

$$r = \frac{mv}{QB} \Rightarrow v = \frac{QBr}{m} = 6 \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

27 PAU Un protón y un electrón penetran en dirección perpendicular a un campo magnético entrante hacia el papel. Representa de modo aproximado las trayectorias que describirán, así como la razón entre sus radios. ¿Cuánto tarda cada partícula en completar un círculo si el campo es de 10 T?

Si la velocidad con la que penetran es la misma, el radio del círculo descrito por el protón es mayor que el correspondiente al electrón.



Dichos radios vienen dados por la expresión:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Por tanto, la relación entre ellos será:

$$\frac{r_p}{r_e} = \frac{m_p v_p}{m_e v_e} \cong 1\,840\,\frac{v_p}{v_e}$$

Puesto que la frecuencia del ciclotrón responde a la expresión:

$$\omega = \frac{Q}{m} B$$

entonces, el tiempo que tarda cada partícula en completar una vuelta viene dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{QB}$$

Sustituyendo los valores correspondientes al protón y al electrón, se obtiene:

$$T_p = 6{,}56 \cdot 10^{-9}\ \text{s}$$
$$T_e = 3{,}57 \cdot 10^{-12}\ \text{s}$$

28 PAU Un ciclotrón ha sido diseñado para acelerar protones. El campo magnético con el que opera es de 1,4 T, y el radio es de 0,5 m. ¿Cada cuánto tiempo tenemos que alternar el voltaje entre las des si no consideramos efectos relativistas? ¿Cuál es la máxima energía en MeV que podría alcanzarse en este ciclotrón?

Debe alternarse el voltaje cada semiperíodo de revolución, es decir:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{QB} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

La energía cinética máxima del ciclotrón será:

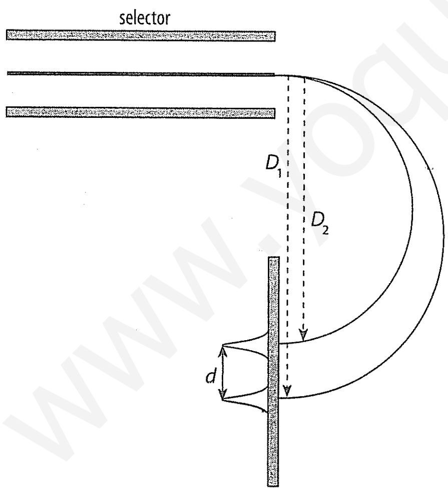
$$E_{c\,\text{máx}} = \frac{Q^2B^2r^2}{2m} = 24{,}5\ \text{MeV}$$

29 PAU Un espectrógrafo de masas utiliza un selector de velocidades consistente en dos placas paralelas separadas 5 mm, entre las que se aplica una diferencia de potencial de 250 V. El campo magnético cruzado en la región de las placas vale 0,5 T. Calcula:

a) **La velocidad de los iones que entran en el espectrógrafo.**

b) **La distancia entre los picos del registro correspondientes al $^{232}Th^+$ y al $^{228}Th^+$ si el campo magnético con el que opera el espectrógrafo en su interior es de 1 T.**

La siguiente figura refleja la situación planteada en el enunciado del problema:



a) El selector de velocidades selecciona aquellas partículas que, independientemente de su masa, lo atraviesen con una velocidad: $v = E/B$.

donde el campo eléctrico entre las placas es:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = 50\,000\ \text{V/m}$$

Así pues:

$$v = \frac{E}{B} = 10^5\ \text{m/s}$$

b) Cuando penetran en el campo de 1 T, los isótopos describen círculos cuyo radio será:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Puesto que v/QB es igual para los dos isótopos mencionados, el radio dependerá de la masa.

Sin embargo, como puede observarse en la figura, la distancia entre los picos es igual a la diferencia entre los diámetros.

Dado que 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, los radios y diámetros de cada isótopo del torio serán:

$$r(^{232}Th^+) = 0{,}2407\ \text{m} \Rightarrow \text{diámetro} = 0{,}4814\ \text{m}$$
$$r(^{228}Th^+) = 0{,}2365\ \text{m} \Rightarrow \text{diámetro} = 0{,}4730\ \text{m}$$

Así pues, la distancia entre los picos será:

$$d = 0{,}4814\ \text{m} - 0{,}4730\ \text{m} = 0{,}0084\ \text{m} = 8{,}4\ \text{mm}$$

D30 PAU Un ion positivo de carga +1 tiene una masa de $3{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg. Si se acelera a través de una diferencia de potencial de 300 V para después entrar en dirección perpendicular a un campo magnético de 0,7 T, ¿cuál será el radio de la trayectoria que describirá? ¿Cuál sería el radio si hubiese entrado en el campo formando un ángulo de 60° con él?

La energía cinética que adquiere el ion acelerado es:

$$E_c = Q\Delta V = 4{,}8 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

Por lo que su velocidad de entrada será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 53\,934\ \text{m/s}$$

de modo que el radio de la trayectoria descrita es:

$$r = \frac{mv}{QB} = 0{,}015\ \text{m}$$

Si incidiera con dicha velocidad formando un ángulo de 60° con el campo, sería la componente perpendicular de la velocidad la que determinaría el valor del radio.

$$r' = \frac{mv_{perp}}{QB} = \frac{mv\ \text{sen}\ 60°}{QB} = 0{,}013\ \text{m}$$

Campos magnéticos producidos por corrientes

31 PAU Si deseamos que el campo en un punto cualquiera entre dos conductores rectilíneos paralelos sea más intenso que el que correspondería a un único conductor, ¿en qué sentido relativo deberían circular las corrientes?

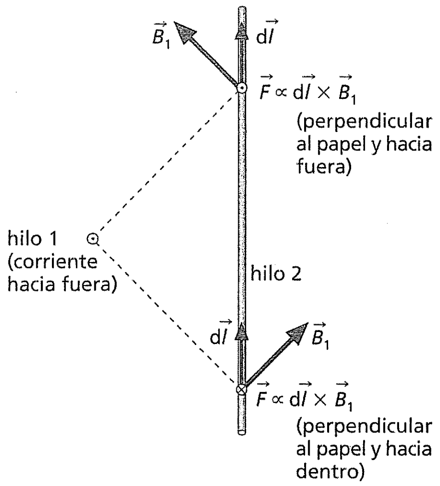
En sentidos opuestos; de ese modo, el sentido de los campos magnéticos producidos por ambos conductores en los puntos intermedios sería el mismo, como puede comprobarse con la regla del pulgar derecho.

32 ¿Qué le ocurrirá a un muelle hecho de material conductor si hacemos circular por él una corriente intensa?

El muelle se encogerá, pues cada dos espiras consecutivas portarían corrientes paralelas del mismo sentido, de modo que aparecerán fuerzas atractivas. Sin embargo, en dos puntos diametralmente opuestos de una misma espira, las corrientes circularán en sentidos opuestos, por lo que las fuerzas entre ambos puntos serán repulsivas y tenderán a abrir la espira y aumentar su diámetro. En resumen, las espiras aumentan de diámetro a la vez que se juntan. Podemos decir, pues, que el muelle se comprime y aumenta de diámetro.

33 Por dos conductores rectilíneos y perpendiculares se hacen pasar corrientes I_1 e I_2. ¿Qué efecto producirán?

El campo magnético que genera un conductor produce en el otro fuerzas perpendiculares en cada punto tanto al hilo conductor como a dicho campo. Además, cobra especial relevancia el producto vectorial $d\vec{l} \times \vec{B}$, pues hace que dichas fuerzas tengan distinto sentido a un lado que al otro, tal como se observa en el siguiente dibujo:



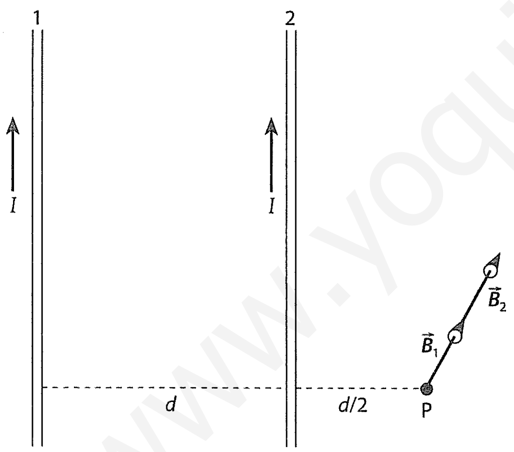
En consecuencia, se genera un par de fuerzas que tiende a orientar ambos conductores.

34 **¿Qué ocurrirá si dirigimos un haz de electrones hacia el interior de un solenoide por el que circula una corriente, de manera que aquellos penetren en la dirección del eje principal?**

Los electrones se moverán con velocidad constante, sin desviarse, pues el campo en el interior del solenoide es uniforme y tiene la dirección del eje principal.

35 **PAU** **Por dos conductores rectilíneos y paralelos circula una corriente de intensidad I con el mismo sentido. Si la separación entre ambos es d, calcula el valor del campo magnético en un punto P exterior situado a una distancia $d/2$ de uno de ellos.**

La siguiente figura representa la situación planteada en el enunciado del problema:



Los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen la misma dirección y sentido (entrante hacia el papel) y son tangentes a las líneas de fuerza circulares.

Así pues, el campo total será:

$$B_{total} = B_1 + B_2$$

donde:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + d/2)} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, d/2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

Por tanto:

$$B_{total} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} + \frac{\mu_0 I}{\pi d} = \frac{4\mu_0 I}{3\pi d}$$

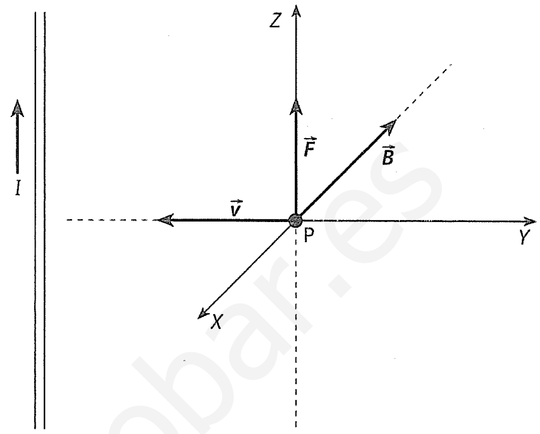
D36 **PAU** **Por un conductor rectilíneo largo circula una corriente de 30 A. Un electrón pasa con una velocidad de $2 \cdot 10^7$ m/s a 2 cm del alambre. Indica qué fuerza actúa sobre él si:**

a) **Se mueve hacia el conductor en dirección perpendicular a este.**

b) **Se mueve paralelamente al conductor.**

c) **Se mueve en dirección perpendicular a las dos direcciones anteriores.**

a) La siguiente figura ilustra la situación descrita en el enunciado del problema:



La fuerza que experimente el electrón será la debida al campo originado por la corriente que circula por el conductor. El valor de dicho campo en el punto P, que se encuentra a 2 cm del conductor, es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

Y según el sistema de referencia elegido:

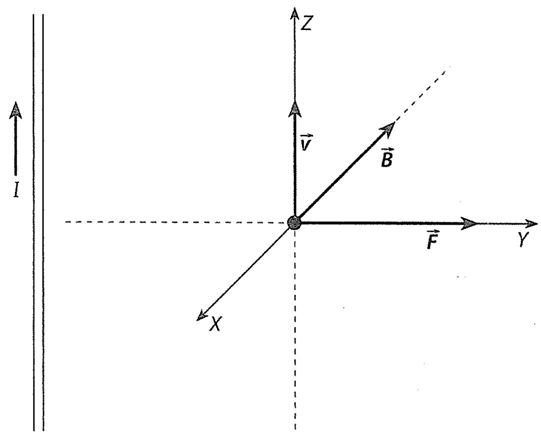
$$\vec{B} = -3 \cdot 10^{-4} \vec{i}\ \text{T}$$

Luego, la fuerza que actúa sobre el electrón cuando este incide en el punto P con una velocidad $\vec{v} = -2 \cdot 10^7 \vec{j}$ m/s es:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 9{,}6 \cdot 10^{-16} \vec{k}\ \text{N}$$

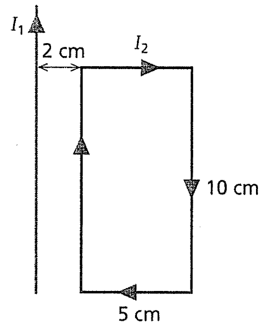
b) En este caso, si $\vec{v} = 2 \cdot 10^7 \vec{k}$ m/s, la fuerza será:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = 9{,}6 \cdot 10^{-16} \vec{j}\ \text{N}$$



c) En este tercer caso, se movería en la dirección del campo magnético, por lo que la fuerza que actuaría sería nula.

37 **PAU** **Una espira rectangular de 10 cm × 5 cm se sitúa paralela a un conductor rectilíneo de gran longitud a una distancia de 2 cm, como se indica en la figura. Si la corriente que circula por el conductor es de 15 A, y la que circula por la espira en el sentido indicado es de 10 A, ¿cuál es la fuerza neta que obra sobre la espira?**



La fuerza neta será la resultante de la fuerza atractiva ($\vec{F}_1$) sobre el segmento paralelo de la izquierda y la fuerza repulsiva ($\vec{F}_2$) sobre el segmento paralelo más alejado:

$$F_1 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{d} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\text{ N (de atracción)}$$

$$F_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{d'} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}\text{ N (de repulsión)}$$

Así pues:

$$F_{total} = F_1 - F_2 = 1{,}07 \cdot 10^{-4}\text{ N (de atracción)}$$

38 PAU Una corriente de 30 A recorre un hilo rectilíneo de gran longitud. Una corriente de 10 A circula por un rectángulo, ABCD, cuyos lados BC y AD son paralelos al conductor rectilíneo. Calcula la fuerza ejercida sobre cada lado del rectángulo por el campo magnético creado por el conductor.

Datos: distancia del conductor al lado AD = 10 cm; al lado BC = 20 cm; longitud de AD = 20 cm

En general, la fuerza que el campo magnético creado por la corriente I_1 ejerce sobre cada lado de la espira vendrá dada por:

$$\vec{F} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}$$

- Fuerza sobre el lado AD:

$$B_{AD} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi d} = 6 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

Así pues:

$$\vec{B}_{AD} = -6 \cdot 10^{-5} \vec{i}\text{ T}$$
$$\vec{l}_{AD} = 0{,}2\vec{k}\text{ m}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{AD} = I_2 \vec{l}_{AD} \times \vec{B}_{AD} = -1{,}2 \cdot 10^{-4} \vec{j}\text{ N}$$

Es decir, se trata de una fuerza atractiva cuyo módulo es $12 \cdot 10^{-5}$ N.

- Fuerza sobre el lado BC:

$$B_{BC} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi d} = 3 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

Así pues:

$$\vec{B}_{BC} = -3 \cdot 10^{-5} \vec{i}\text{ T}$$
$$\vec{l}_{BC} = -0{,}2\vec{k}\text{ m}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{BC} = I_2 \vec{l}_{BC} \times \vec{B}_{BC} = 6 \cdot 10^{-5} \vec{j}\text{ N}$$

Es decir, se trata de una fuerza repulsiva cuyo módulo es $6 \cdot 10^{-5}$ N.

- Fuerza sobre el lado AB:

Consideremos un punto de dicho lado situado a una distancia x del conductor rectilíneo.

El campo magnético vale en él:

$$B = \frac{\mu_o I_1}{2\pi x}$$

y la fuerza que actúa sobre un elemento de longitud dx de este lado conductor es:

$$dF_{AB} = I_2 B dx = I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi x} dx$$

Luego, para obtener la fuerza correspondiente a todo el lado AB, hay que integrar la expresión anterior entre $x =$ $= 0{,}1$ m y $x = 0{,}2$ m, esto es:

$$F_{AB} = \int_{0,1}^{0,2} \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} [\ln x]_{0,1}^{0,2} =$$
$$= \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{0{,}2}{0{,}1} = 4 \cdot 10^{-5}\text{ N}$$

Esta fuerza está dirigida hacia arriba y es idéntica a la que actúa sobre el lado CD, solo que en este caso está dirigida hacia abajo.

39 PAU ¿Cuántas espiras circulares estrechamente arrolladas deberá tener una bobina de 12,56 mm de radio por la que circula una intensidad de 0,25 A, para que el campo magnético en su centro valga 10^{-4} T?

El campo en el centro de una bobina formada por N espiras circulares viene dado por la expresión:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o N I}{2r} \vec{u}_e$$

Es decir, tiene la dirección del eje principal de la bobina; por tanto:

$$N = \frac{2rB}{\mu_o I} = \frac{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot 10^{-4}\text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\text{ N/A}^2 \cdot 0{,}25\text{ A}} = 8$$

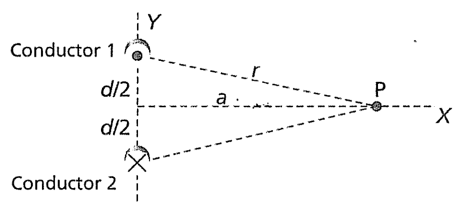
Es decir, la bobina debe tener ocho espiras.

D40 PAU Dos conductores largos y paralelos por los que circulan corrientes de intensidad I en sentidos opuestos están separados una distancia d, tal como se aprecia en la figura.

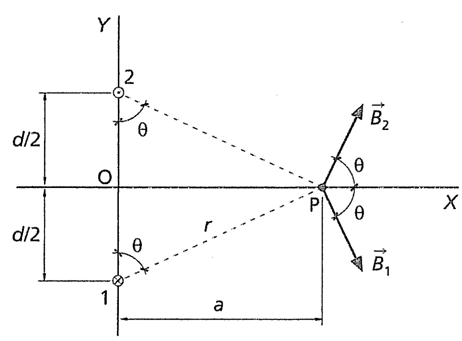
a) Demuestra que el campo en un punto P cualquiera equidistante de ambos conductores viene dado por la expresión:

$$\vec{B} = \frac{2\mu_o I d}{\pi(d^2 + 4a^2)} \vec{u}_x$$

b) Determina, como consecuencia de la anterior expresión general, el valor del campo magnético en el punto medio entre ambos conductores.



a) En el siguiente dibujo se muestran los campos creados por los dos hilos en el punto P:



El campo magnético total será la suma de los campos creados por ambos hilos conductores. Por simetría, se observa que las componentes Y de los dos campos magnéticos se anulan mutuamente, mientras que las componentes X se suman. Es decir:

$$B_y = 0$$
$$B_x = 2B_{1x}$$

donde B_{1x} es el campo magnético creado por el conductor 1 en la dirección X. Ahora bien,

$$B_{1x} = B_1 \cos\theta$$

Aplicando la expresión **5.17** y teniendo en cuenta que $\cos\theta = d/2r$, resulta:

$$B_x = 2B_{1x} = \frac{2\mu_o I}{2\pi r}\frac{d}{2r} = \frac{\mu_o I d}{4\pi r^2}$$

Ahora bien, $r^2 = d^2/4 + a^2$, luego:

$$B_x = 2B_{1x} = \frac{2\mu_o I}{4\pi\left(\dfrac{d^2}{4} + a^2\right)} = \frac{2\mu_o I d}{\pi(d^2 + 4a^2)}$$

b) En el punto medio de ambos conductores, $a = 0$, luego:

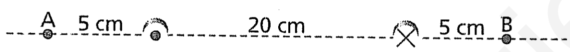
$$B_x(a = 0) = \frac{2\mu_o I}{\pi d}$$

41 **PAU** **Dos hilos conductores, 1 y 2, rectilíneos, paralelos y muy largos, están separados por una distancia de 20 cm. Por el hilo 1 circula una corriente de intensidad $I = 2$ A dirigida hacia fuera del papel.**

a) **¿Qué intensidad y en qué sentido debe circular por el conductor 2 para que el campo magnético en el punto A de la figura sea nulo?**

b) **¿Cuánto valdrá, entonces, el campo magnético en el punto B?**

c) **¿Qué fuerza actúa en esas condiciones sobre la unidad de longitud de conductor y qué carácter tiene (atractiva o repulsiva)?**



a) Los campos magnéticos generados por los hilos 1 y 2 sobre cualquier punto de la recta horizontal que los une serán verticales, si bien pueden estar orientados hacia arriba o hacia abajo. El campo magnético creado por el hilo 1 en el punto A será, aplicando la regla de la mano derecha, hacia abajo, y su módulo vendrá dado por:

$$B_{A1} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r d_1} = \frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}05}$$

Por su parte, el campo creado por el hilo 2 en dicho punto será:

$$B_{A2} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi r d_2} = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi \cdot 0{,}25}$$

Para que ambos campos se compensen y den un campo resultante nulo, el sentido de corriente en el hilo 2 debe ser opuesto al del hilo 1, es decir, debe ir hacia el fondo del papel. Para determinar el valor de dicha corriente, igualamos ambas expresiones:

$$\frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}05} = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi \cdot 0{,}25} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \cdot 0{,}25}{0{,}05} = 10 \text{ A}$$

b) El campo magnético en el punto B será $\vec{B}_B = \vec{B}_{B1} + \vec{B}_{B2}$, donde:

$$B_{B1} = \frac{\mu_o \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}3} \text{ y } B_{B2} = \frac{\mu_o \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05}$$

Ahora bien, $\vec{B}_{B1}$ está dirigido en este caso hacia arriba, y $\vec{B}_{B2}$, hacia abajo. El campo resultante en B será por tanto:

$$B_B = \frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{2}{0{,}3} - \frac{10}{0{,}05}\right) = -3{,}87 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

El signo menos indica que el campo resultante está dirigido hacia abajo.

c) Sabemos que la fuerza es repulsiva, pues las corrientes circulan en sentidos contrarios. Su valor viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{l} = \frac{\vec{F}_{21}}{l} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 10}{0{,}2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$

6 Inducción electromagnética

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

Cuestiones previas (página 156)

1. ¿Puede conseguirse corriente eléctrica a partir de un imán? ¿Cómo?

Sí, se puede producir corriente eléctrica mediante el fenómeno llamado inducción electromagnética. Haciendo que varíe el campo magnético, como en las experiencias de Faraday, moviendo un imán con rapidez en el interior de una bobina.

2. ¿Podría circular corriente eléctrica por un circuito que no estuviese conectado a un generador?

Sí, induciendo una corriente eléctrica mediante un solenoide y un imán. Si acercamos y alejamos rápidamente el imán a la bobina generamos la corriente.

3. ¿Qué es una corriente alterna? ¿Cuál es su fundamento?

Es una corriente que cambia cíclicamente de valor y sentido. Su fundamento se debe a su generación mediante alternadores que al girar sus espiras en el seno de un campo magnético hace variar el flujo magnético.

4. ¿Es lo mismo un generador que un motor?

No es lo mismo, el motor al contrario que un generador, transforma energía eléctrica en mecánica observado en el movimiento de rotación del motor.

5. ¿En qué fenómeno se basa el funcionamiento de un transformador?

Su funcionamiento se basa en el fenómeno de la inducción electromagnética que se encarga de transformar voltajes de mayor a menor intensidad, o viceversa.

Actividades (páginas 159/177)

1 PAU Una espira circular de 5 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,4 T. Calcula:

a) El flujo magnético que atraviesa la espira en esa situación.

b) El flujo magnético que atraviesa la espira si esta se gira 30° alrededor de un eje que pase por su centro y sea perpendicular a $\vec{B}$.

El área de la espira circular es:

$$S = \pi r^2 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

a) Dado que la espira se sitúa perpendicularmente al campo, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tienen la misma dirección, luego:

$$\Phi_1 = BS \cos 0° = BS = 3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

b) En la segunda situación, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo de 30°, luego:

$$\Phi_2 = BS \cos 30° = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

2 PAU Colocamos una espira circular de 2 cm de radio en el seno de un campo magnético uniforme de 0,2 T, de modo que el plano de la espira sea paralelo al campo. ¿Cuánto vale el flujo magnético a través de la espira? ¿Y si el plano de la espira forma 45° con el campo? ¿Y si forma 90°? ¿Qué ocurrirá si hacemos girar la espira?

La superficie correspondiente a la espira es:

$$S = \pi r^2 = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

En el primer caso, el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es de 90°, por lo que:

$$\Phi_0 = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos 90° = 0$$

Si forman 45°, el flujo será:

$$\Phi_1 = BS \cos 45° = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Si la superficie se sitúa perpendicularmente al campo, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tienen la misma dirección:

$$\Phi_2 = BS \cos 0° = 2{,}51 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Como puede comprobarse, una forma de variar el flujo magnético que atraviesa una superficie consiste en girar la propia superficie (espira) en el seno de un campo magnético.

3 PAU Acercamos un electroimán a una espira rectangular cuyas dimensiones son 3 cm × 4 cm, de modo que el campo magnético pase de 0 a 0,8 T en una décima de segundo. ¿Cuál es el valor de la fuerza electromotriz inducida?

La superficie de la espira es:

$$S = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

El flujo inicial es:

$$\Phi_0 = B_0 S = 0$$

Y el final es:

$$\Phi_f = B_f S = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Por tanto, la fem inducida será:

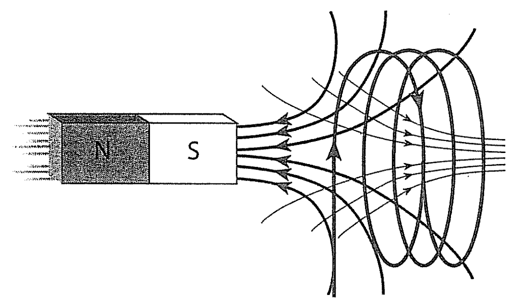
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

4 Razona cuál será el sentido de la corriente inducida en el caso de que:

a) Acerquemos un imán a la espira por el polo sur.

b) Alejemos el imán en la misma posición.

a) Al acercar un imán por el polo sur, aumenta el flujo saliente de la espira, por lo que la corriente inducida se opondrá a dicha variación, produciendo un campo con flujo entrante. Por tanto, el sentido es el que se indica en la siguiente figura:



b) Por el contrario, al alejar el imán, disminuye el flujo saliente, por lo que la corriente inducida tendrá ahora el sentido contrario al caso anterior.

5 La figura 6.10 muestra dos bobinados de hilo conductor alrededor de un cilindro de plástico. Si la corriente en la bobina de la izquierda aumenta, explica cuál será el sentido de la corriente inducida en la bobina de la derecha e indícalo en la figura.

Al aumentar la corriente, aumenta el campo y, en consecuencia, el flujo magnético.

Las líneas del campo se dirigen hacia la izquierda, por lo que la corriente inducida tenderá a generar un campo magnético cuyas líneas se dirijan hacia la derecha en el interior de la bobina, oponiéndose así al aumento del flujo de líneas hacia la izquierda.

En consecuencia, la corriente inducida en la segunda bobina circulará en sentido contrario a la de la bobina de la izquierda.

6 **PAU** **Una bobina de 100 espiras circulares de 2 cm de radio se sitúa con sus espiras perpendiculares a un campo magnético cuyo valor varía según $B = 1{,}5 \cdot e^{0{,}2t}$ T.**

a) **¿Cómo varía la fuerza electromotriz inducida con el tiempo?**

b) **¿Cuál será el valor de dicha fuerza electromotriz inducida a los 10 segundos?**

a) La superficie de la espira es:

$$S = \pi r^2 = 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

La fuerza electromotriz se debe, en este caso, a la variación del campo magnético, y viene dada por:

$$\varepsilon = -NS\frac{dB}{dt}$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -100 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2t}\ \text{V} =$$
$$= -3{,}77 \cdot 10^{-2} \cdot e^{0{,}2t}\ \text{V}$$

b) La fem a los 10 s será:

$$\varepsilon = -0{,}28\ \text{V}$$

7 **PAU** **Una bobina de 500 espiras cuadradas de 4 cm de lado se encuentra inmersa en un campo magnético con sus espiras perpendiculares a las líneas de campo. Si el valor del campo magnético cambia de 0,2 T a 0,9 T en 0,01 s:**

a) **¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida?**

b) **¿Qué dimensiones deberán tener las espiras para triplicar la fuerza electromotriz en las mismas condiciones?**

a) La fem inducida será:

$$\varepsilon = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

donde:

$$S = (0{,}04\ \text{m})^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

Así:

$$\varepsilon = -500 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cdot \frac{0{,}9\ \text{T} - 0{,}2\ \text{T}}{0{,}01\ \text{s}}$$

$$\varepsilon = -56\ \text{V}$$

b) Para triplicar la fuerza electromotriz, ha de triplicarse el valor de la superficie, que deberá ser de $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ m², lo que corresponde a un lado de aproximadamente 6,9 cm si la espira es cuadrada, o a unas dimensiones de 6 cm × 8 cm, si es rectangular.

8 **¿Se induce corriente si una espira rectangular cuyo plano es perpendicular a un campo magnético uniforme entrante en el papel se desplaza hacia arriba o hacia abajo sin cambiar su orientación? Da una explicación desde un punto de vista energético.**

No se induce corriente, pues ni el campo ni la superficie son modificados. Por tanto, no hay variación de flujo.

La razón es que, al desplazar verticalmente la espira, la fuerza ejercida actúa en la dirección del campo, por lo que no da lugar al establecimiento de corriente.

9 **PAU** **Teniendo en cuenta que la fem inducida es igual a IR (donde R es la resistencia del circuito), halla una expresión para la intensidad que circula en una espira, si dispone de un lado móvil que se desplaza perpendicularmente a un campo magnético uniforme sin salir de él.**

Puesto que $|\varepsilon| = IR$, y además $\varepsilon = -Blv$, entonces:

$$IR = Blv \Rightarrow I = \frac{Blv}{R}$$

El signo negativo carece de sentido en el valor de la intensidad de corriente.

10 **PAU** **Una bobina de 150 espiras cuadradas de 3 cm de lado gira en un campo magnético de 0,6 T:**

a) **¿Cuál debería ser su frecuencia para inducir una fuerza electromotriz máxima de 12 V?**

b) **Si la bobina girase a 60 Hz, ¿cuál sería su fuerza electromotriz máxima?**

a) La fem máxima inducida vale:

$$\varepsilon_o = NBS\omega = NBS2\pi f$$

Por lo que:

$$f = \frac{\varepsilon_o}{NBS2\pi} = 23{,}6\ \text{Hz}$$

b) Si la bobina girase a 60 Hz, aplicando la expresión anterior, obtendríamos:

$$\varepsilon'_o = NBS2\pi f = 30{,}5\ \text{V}$$

11 **PAU** **La bobina de un generador de corriente alterna induce una fuerza electromotriz máxima de 50 V a una frecuencia de 60 Hz. Determina el número de espiras de la bobina si las dimensiones de las espiras son de 4 cm × 6 cm y la bobina gira en un campo magnético de 0,92 T.**

Usando la expresión de la fuerza electromotriz máxima:

$$\varepsilon_o = NBS2\pi f$$

obtenemos:

$$N = \frac{\varepsilon_o}{BS2\pi f} = 60\ \text{espiras}$$

12 **Con 50 m de hilo conductor se construye una bobina de 100 espiras circulares. La bobina así construida se hace girar a 50 Hz en un campo magnético uniforme. ¿Cuánto debe valer el campo magnético para que genere una fuerza electromotriz máxima de 12 V?**

A partir de la expresión de la fem inducida máxima, ε_o, se puede obtener el valor del campo magnético necesario para cumplir las condiciones del enunciado:

$$B = \frac{\varepsilon_o}{S \cdot 2\pi f}$$

Para determinar el área de las espiras, sabemos que la longitud total de todas ellas es de 50 m, es decir:

$$L = 2\pi r N$$

Despejamos r:

$$r = L/2\pi N$$

Sustituyendo en la primera expresión, se obtiene:

$$B = \frac{\varepsilon_o}{\pi\dfrac{L^2}{4\pi^2 N^2} \cdot 2\pi f}$$

$$B = \frac{2N^2\varepsilon_o}{L^2 f} = \frac{2 \cdot 100^2 \cdot 12}{50^2 \cdot 50} = 1{,}92\ \text{T}$$

13 **PAU** **Traza la gráfica ε-*t* correspondiente a un período completo para el caso *b)* de la actividad 10. Sobre la misma gráfica, dibuja ahora la que ilustra el caso de una frecuencia de 30 Hz. ¿Qué conclusiones obtienes?**

El período para una frecuencia de 60 Hz es:

$$T = 1/60\ \text{s}$$

La fem máxima, ε_o, es, en este caso, 30,5 V.

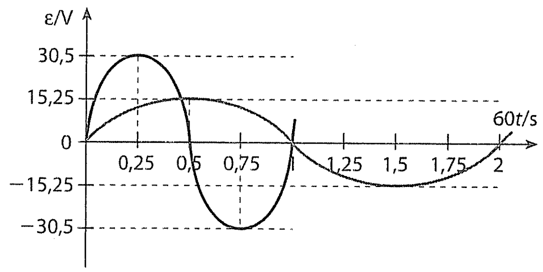
Si la frecuencia se reduce a la mitad, también lo hace la fem máxima, como se desprende de su expresión, por lo que, para una frecuencia de 30 Hz:

$$T' = 1/30\ \text{s} = 2/60\ \text{s y } \varepsilon'_o = 15{,}25\ \text{V}$$

La representación gráfica corresponderá a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_o \operatorname{sen} 2\pi f t$$

Las gráficas de ambas fem serán las siguientes:



Como se deduce, al reducir la frecuencia a la mitad, disminuye también a la mitad la fem máxima y se duplica el período.

14 **Razona el sentido de la corriente autoinducida en el solenoide del circuito de la figura 6.23 al abrir el interruptor. ¿Qué ocurre con el brillo de la bombilla?**

La corriente tendrá el sentido que se indica en la figura, puesto que la corriente autoinducida tratará de contrarrestar la disminución del campo en el interior del solenoide.

La consecuencia es que la bombilla no dejará de lucir de forma instantánea.

15 **PAU** **Un solenoide de 500 espiras apretadas tiene una longitud de 30 cm y un radio de 1 cm. Por él circula una corriente de 4 A. Determina:**

a) **El valor del campo magnético en un punto de la región central de su eje.**

b) **El flujo magnético a través del solenoide, si B es constante en su interior.**

c) **La inductancia del solenoide.**

d) **La fuerza electromotriz autoinducida en el solenoide cuando la intensidad varía a razón de 180 A/s.**

a) El valor del campo en cualquier punto de la región central de su eje es:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{N/A}^2 \cdot 4\,\text{A} \cdot \frac{500}{0{,}3\,\text{m}} =$$
$$= 8{,}37 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$$

b) Por tanto, el flujo valdrá:

$$\Phi = NBS = 1{,}31 \cdot 10^{-3}\,\text{Wb}$$

donde:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

c) La inductancia del solenoide es:

$$L = \frac{\Phi}{I} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{H}$$

d) La fem autoinducida será:

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -3{,}3 \cdot 10^{-4}\,\text{H} \cdot 180\,\text{A/s} = -0{,}059\,\text{V}$$

16 **PAU** **Una bobina rectangular de 100 vueltas y cuyas dimensiones son 10 cm × 15 cm gira a 2 000 rpm alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,8 T. ¿Qué voltaje máximo es capaz de suministrar?**

El voltaje máximo que es capaz de suministrar responde a la expresión:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega$$

donde:

$$S = 0{,}015\,\text{m}^2 \text{ y } \omega = 2\,000 \cdot 2\pi/60\,\text{rad/s} =$$
$$= 66{,}67\pi\,\text{rad/s}$$

Por tanto:

$$\varepsilon_0 = 251\,\text{V}$$

17 **PAU** **Un generador de corriente alterna (AC) está formado por una bobina de 23 espiras de 0,05 m² de área que giran en un campo magnético de 0,6 T con una frecuencia de 50 Hz. Si la resistencia total de la bobina es de 20 Ω, determinar:**

a) **La fuerza electromotriz máxima inducida.**

b) **La intensidad máxima inducida.**

a) La fem inducida máxima es:

$$\varepsilon_0 = 2\pi NSBf = 2\pi \cdot 23 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 50 = 217\,\text{V}$$

b) A partir de la ley de Ohm, se obtiene:

$$I_{máx.} = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{217\,\text{V}}{20\,\Omega} = 10{,}85\,\text{A}$$

18 **PAU** **Un aparato funciona a 9 V y con 0,5 A mediante un transformador cuya bobina primaria tiene 3 000 espiras. Si la tensión de entrada es de 220 V:**

a) **¿Cuántas espiras debe tener la bobina secundaria?**

b) **¿Cuál es la intensidad, en mA, que circula por la primaria?**

a) Aplicando la expresión **6.21**, tenemos que:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} \Rightarrow N_2 = N_1\frac{V_2}{V_1} = 123 \text{ espiras}$$

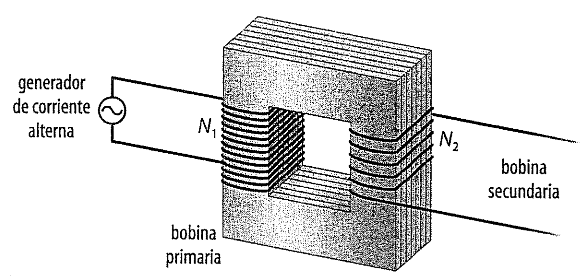
b) A partir de la expresión **6.21**:

$$I_1 = I_2\frac{N_2}{N_1} = 20{,}5\,\text{mA}$$

19 **Un adaptador de corriente para pequeños electrodomésticos se conecta a un enchufe de 220 V de corriente alterna. Dispone de un selector que proporciona tensiones en la salida que van de 3 V a 12 V. Razona cuál puede ser el mecanismo de esta fuente de alimentación.**

Mediante un conector de salida se selecciona el número de espiras adecuadas del secundario que produzcan el voltaje de salida requerido.

El selector variará desde un número de espiras de 1/73 N_1 para obtener la salida de 3 V, hasta 1/18 N_1 para la salida de 12 V.



20 **PAU** **Si se aplica una tensión de entrada de 220 V a un transformador que consta de una bobina de entrada de 200 espiras y de una bobina de salida de 5 espiras, ¿cuál es la tensión de salida?**

La tensión de salida será:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} = 5{,}5\,\text{V}$$

21 **¿Por qué un imán puede perder su capacidad de imantación al ser calentado?**

Porque la agitación térmica produce la desorganización y desorientación de los momentos magnéticos atómicos.

Cuestiones y problemas (páginas 180/181)

Guía de repaso

1 **¿Qué es la inducción electromagnética?**

Es la generación de corriente eléctrica inducida por un campo magnético.

2 **Resume las experiencias de Faraday que condujeron al descubrimiento de la inducción.**

Las experiencias de Faraday consistía en un dispositivo formado por dos bobinas independientes superpuestas pero aisladas la una con respecto a la otra. Solo una de ellas la conectó a una potente batería. Manteniendo esta conectada la movió desplazándola en el interior de la segunda bobina. Luego, desconectó la bobina de la batería y se limitó a mover un imán en el interior de la segunda bobina.

3 **Explica y expresa matemáticamente la ley de Faraday.**

La fem que da lugar a la corriente eléctrica inducida en un circuito es igual a la rapidez con que varía el flujo magnético a través del mismo. La expresión de esta fem es:

$$\varepsilon = -\Delta\Phi/\Delta t$$

4 **¿Qué otros fenómenos de la física o la química tienen un fundamento similar a la ley de Lenz?**

El principio de acción y reacción o la ley de Le Chatelier del equilibrio químico.

5 **¿Cómo se puede inducir una corriente eléctrica?**

Variando el campo magnético, variando el tamaño de la superficie atravesada por las líneas de campo y variando la orientación de la espira en el campo al hacerla girar.

6 **¿Cómo es la corriente que se induce al hacer girar una espira en el seno de un campo magnético uniforme? ¿Qué expresión tiene la intensidad de dicha corriente?**

La corriente inducida es alterna. Su expresión es:

$$I = I_0 \text{sen}\ \omega t$$

7 **¿En qué consiste la autoinducción?**

La autoinducción se produce cuando circula una corriente de intensidad variable por un conductor y se genera una fem en el propio conductor que se opone a la variación que la produce.

8 **¿En qué casos se manifiesta la autoinducción? ¿Cómo puede aumentarse?**

La autoinducción se manifiesta, por ejemplo, al cerrar o abrir un circuito. Puede aumentarse intercalando un solenoide de gran arrollamiento y con un núcleo de hierro en su interior.

9 **¿Conoces algún fenómeno mecánico equivalente a la autoinducción?**

La inercia (véase el texto del margen que aparece en la página 168 del *Libro del alumno*).

10 **¿Qué es la inductancia de un circuito? ¿Qué unidades tiene?**

La inductancia es el factor de proporcionalidad entre el flujo del campo magnético y la intensidad de corriente que lo origina. Se mide en henrios (H).

11 **¿Puede usarse el fenómeno de la inducción con objeto de producir corriente continua? ¿Es exactamente continua la corriente producida? ¿Qué se hace para conseguir que la corriente sea casi continua?**

Sí mediante los generadores de corriente continua. No es totalmente continua porque se produce una pequeña variación que se resuelve haciendo que giren numerosas bobinas y utilizando un conmutador de muchos segmentos.

12 **¿De dónde proviene la energía eléctrica que suministra un generador?**

Proviene de la energía mecánica del agente que hace girar la bobina.

13 **¿Qué diferencia existe entre un motor y un generador?**

Estos dispositivos transforman la energía de modo inverso: un generador convierte energía mecánica en eléctrica, mientras que el motor transforma energía eléctrica en mecánica.

14 **¿Cómo funciona un transformador?**

Los transformadores son una aplicación del fenómeno de la inducción y está compuesto por dos bobinas (primaria y secundaria) enrolladas en un núcleo de hierro. Conectando la bobina primaria a un generador de corriente alterna esta inducirá una corriente en el secundario.

15 **¿En qué consiste la unificación que promueve Maxwell?**

Consiste en la unificación de la electricidad y el magnetismo en lo que se conoce como electromagnetismo.

16 **¿Cómo se clasifican las sustancias según su respuesta ante un campo magnético?**

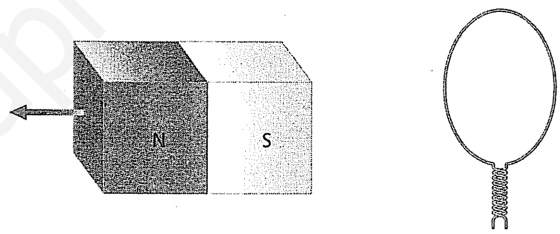
En ferromagnéticos, paramagnéticos y diamagnéticos.

Inducción electromagnética

17 **Explica por qué apenas luce el faro de una bicicleta si vamos muy despacio.**

Al girar despacio, el rotor que contacta con la rueda y hace girar la bobina que finalmente produce la corriente, genera una pequeña fem máxima, como se deduce de la expresión $\varepsilon_0 = NBS\omega$. En consecuencia, disminuye la intensidad que circula será pequeña y el foco lucirá poco.

18 **Si alejamos un imán de una espira como se observa en la figura, ¿cuál será el sentido de la corriente inducida?**



Al disminuir el flujo saliente (hacia la izquierda de la espira), la corriente inducida circulará en sentido antihorario en la espira.

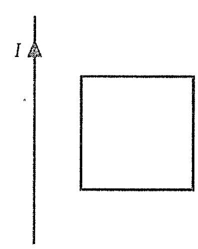
19 **Una espira cuadrada de alambre conductor está próxima a un cable recto, indefinido, recorrido por una corriente I, como indica la figura. Explica, razonadamente, en qué sentido circulará la corriente inducida en la espira:**

a) **Si se aumenta la corriente *I*.**

b) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira hacia la derecha, manteniéndola en el mismo plano.**

c) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira hacia la izquierda, manteniéndola en el mismo plano.**

d) **Si, dejando constante la corriente *I*, se desplaza la espira paralelamente al conductor.**



Hablaremos de flujo entrante si este entra hacia el papel, y saliente, si sale del papel.

a) Si se aumenta la corriente, se incrementa el flujo entrante, por lo que la corriente inducida tratará de contrarrestar dicho incremento, circulando en sentido antihorario y creando un campo con flujo saliente.

b) Puesto que el campo magnético del conductor rectilíneo disminuye con la distancia, al hacer esto, se producirá una disminución del flujo entrante, por lo que la corriente inducida tenderá a contrarrestar dicha disminución, circulando en sentido horario.

c) Al contrario que en el caso anterior, aumentará el flujo entrante. En consecuencia, la corriente circulará en la espira en sentido antihorario.

d) No se induce corriente, pues no se produce variación de flujo.

20 **¿Es correcto afirmar que siempre que movemos una espira en el seno de un campo magnético uniforme se induce una corriente?**

No es correcto. Para que se induzca corriente, debe variar el flujo magnético, esto es, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie de la espira. Si la espira se mueve de modo que no cambia la orientación relativa entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$, no se induce corriente.

21 **¿Se puede afirmar que cuando gira una espira en el seno de un campo magnético uniforme se induce una corriente?**

No es correcto. Debe añadirse que el eje de giro tiene que ser perpendicular a $\vec{B}$. Si la espira gira alrededor de un eje que tenga la orientación del campo, no se produce variación de flujo y, consecuentemente no se induce corriente.

22 PAU **Un solenoide formado por 800 espiras circulares de 2 cm de diámetro y 15 Ω de resistencia se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme de 0,5 T en la dirección del eje del solenoide. Si el campo magnético disminuye uniformemente hasta hacerse nulo en 0,2 s.**

***a)* Determina la fem inducida.**

***b)* Calcula la intensidad recorrida por el solenoide y la carga transportada en ese intervalo de tiempo.**

a) El flujo inicial que atraviesa el solenoide es:

$$\Phi_0 = NB_0S\cos 0° = 800 \cdot 0{,}5 \cdot \pi\,(0{,}01)^2 = 0{,}12\ \text{Wb}$$

Dado que el flujo final es cero, la fem inducida resulta ser:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6\ \text{V}$$

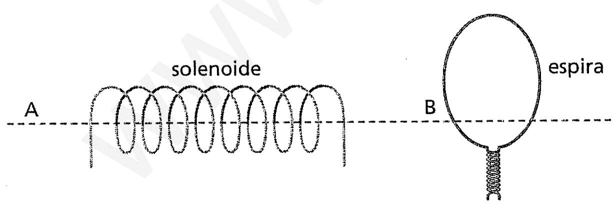
b) La intensidad recorrida por el solenoide en ese tiempo es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 0{,}04\ \text{A}$$

Puesto que $Q = It$, la carga transportada en ese intervalo de tiempo será:

$$Q = It = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

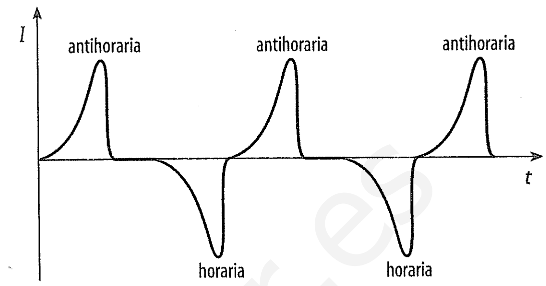
23 PAU **Razona qué es lo que ocurriría si se hace oscilar una espira o bobina de espiras entre los puntos A y B a lo largo del eje de un solenoide, como se indica en la figura.**



Supongamos que por el solenoide circula una corriente en sentido horario; en ese caso, las líneas del campo serían salientes hacia la derecha del solenoide y entrantes por su izquierda. Imaginemos, por simplificar el problema, que el diámetro de la espira es similar al del solenoide. Al mover la espira hacia la izquierda, aumentará el flujo que entra en ella por su izquierda, por lo que se inducirá una corriente antihoraria, que cesará cuando el solenoide discurra por el interior de la espira, donde podemos suponer que el flujo se mantiene constante. Cuando la espira sale por la parte izquierda del solenoide, disminuye el flujo entrante por ese mismo lado, por lo que la corriente inducida circulará ahora en sentido horario, contrarrestando dicha disminución. Al oscilar, a continuación, desde A hacia B, el efecto se invierte: al principio aumenta el flujo entrante por la izquierda, por lo que la corriente inducida circulará en sentido antihorario. No circulará corriente mientras la espira discurra por el solenoide, y, al salir por la derecha, la corriente inducida circulará en sentido horario. Así pues, conseguiremos que por la espira circule una corriente alterna al hacerla oscilar entre A y B.

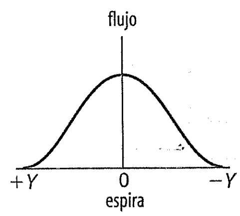
24 PAU **Representa cualitativamente la gráfica intensidad-tiempo que se obtendría en el caso sugerido de la cuestión anterior.**

La gráfica intensidad-tiempo tendría la forma representada en la siguiente figura:

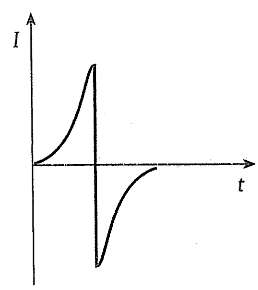


25 PAU **Un imán cae verticalmente a través de una bobina de espiras dispuesta horizontalmente. Representa de forma cualitativa las gráficas flujo-tiempo e intensidad inducida-tiempo que se obtendrían.**

A medida que el imán cae y se introduce en la espira, aumentaría el flujo (entrante hacia la espira si es el polo norte el que se acerca, o saliente de la espira si se aproxima el polo sur). Una vez que el imán atraviesa la espira, el flujo vuelve a disminuir, por lo que la gráfica sería la siguiente:



En cuanto a la intensidad, la gráfica solo representa cualitativamente la circulación en un sentido cuando el imán se acerca, y en el contrario, cuando el imán se aleja después de atravesar la espira. Para saber el sentido real, deberían informarnos acerca del polo con el que se aproxima el imán a la espira. Nótese el brusco cambio en el sentido de la corriente que se aprecia en la gráfica.



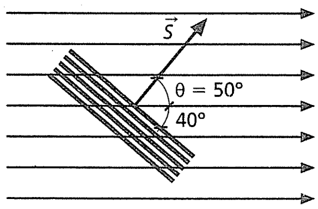
26 PAU **Una bobina de 100 vueltas de 2 cm de radio está orientada en el seno de un campo magnético uniforme de 0,5 T de modo que el plano de las espiras forma un ángulo de 40° con las líneas de fuerza del campo. Si el campo magnético aumenta a razón de 0,8 T/s manteniendo constante la dirección, determina:**

***a)* La expresión del flujo magnético en función del tiempo.**

***b)* La fem inducida en los diez primeros segundos.**

***c)* La intensidad de la corriente inducida si la resistencia de la bobina es de 50 Ω.**

a) Como se aprecia en el siguiente dibujo, si el plano de las espiras forma un ángulo de 40° con el campo, el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{S}$ será de 50°:



Por tanto, la expresión para el flujo magnético en función del tiempo será:

$$\Phi(t) = NB(t)S \cos\theta$$

$$\Phi(t) = 100 \cdot (0{,}5 + 0{,}8t) \cdot \pi \cdot (0{,}02)^2 \cdot \cos 50°$$

$$\Phi(t) = 0{,}04 + 0{,}064t \text{ Wb}$$

b) La ε inducida en los diez primeros segundos es:

$$\varepsilon = \frac{\Phi(10) - \Phi(0)}{\Delta t} = \frac{0{,}68 - 0{,}04}{10} = -0{,}064 \text{ V}$$

c) La intensidad de la corriente inducida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 1{,}28 \text{ mA}$$

27 PAU **Dos espiras rectangulares se hallan enfrentadas con sus planos paralelos. Por la espira A comienza a circular una corriente en sentido antihorario. ¿En qué sentido circulará la corriente inducida en la espira B? ¿Se atraerán o se repelerán las espiras cuando aumente la corriente en A? ¿Y cuando disminuya?**

Circulará en sentido horario. Al aumentar la corriente en A, se producirá una corriente la inducida en B, pero en sentido contrario, por lo que, al tratarse de corrientes paralelas y de sentidos contrarios, ambas espiras se repelerán. Por el contrario, al disminuir la corriente que circula por A, la inducida en B tendrá el mismo sentido que en A; se tratará ahora de corrientes paralelas que circulan en el mismo sentido, por lo que las espiras se atraerán.

28 PAU **Una bobina de 200 espiras cuadradas de 3 cm de lado se dispone perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,8 T. ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida si la bobina gira 90° en una centésima de segundo?**

El flujo inicial vale:

$$\Phi_0 = NBS \cos 0° = 0{,}144 \text{ Wb}$$

mientras que el flujo final será:

$$\Phi_f = NBS \cos 90° = 0$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 0{,}144 \text{ Wb}}{0{,}01 \text{ s}} = 14{,}4 \text{ V}$$

29 PAU **Una espira de 100 cm² de superficie se encuentra orientada de forma perpendicular a un campo magnético cuya magnitud aumenta uniformemente desde 0,2 T hasta 1,4 T en 0,25 s. Determina:**

***a)* ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida en la espira?**

***b)* ¿Cuál será la intensidad de la corriente si la resistencia total de la espira es de 3 Ω?**

a) En este caso, la variación del flujo se debe a la del campo magnético, de modo que:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -0{,}01 \text{ m}^2 \cdot \frac{1{,}4 \text{ T} - 0{,}2 \text{ T}}{0{,}25 \text{ s}} = -0{,}048 \text{ V}$$

b) La intensidad de la corriente que circulará será:

$$I = \frac{|V|}{R} = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}016 \text{ A}$$

30 PAU **Una bobina de 50 espiras circulares de 3 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético unidireccional cuyo valor varía según $B = 0{,}2 + 0{,}005t^2$ T. ¿Cuánto valdrá la fem inducida al cabo de 10 s? Si la resistencia total de la bobina es de 2 Ω, ¿cuál es la intensidad que circula al cabo de ese tiempo?**

La fem inducida debida a la variación de $\vec{B}$ será:

$$\varepsilon = -NS\frac{dB}{dt} = -50\pi\,(0{,}03)^2 \cdot 0{,}01t$$

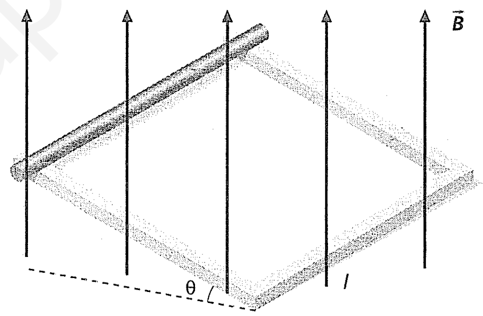
que a los 10 s valdrá:

$$\varepsilon = -0{,}014 \text{ V}$$

Por otro lado, la intensidad que circulará al cabo de ese tiempo será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}007 \text{ A}$$

D31 PAU **Un hilo conductor rectilíneo puede deslizarse sin fricción sobre dos rieles inclinados un ángulo θ y conectados en su parte inferior como se indica en la figura. Sobre la región actúa un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido verticalmente hacia arriba. Si el hilo tiene una masa *m* y una resistencia *R*, y la longitud entre los rieles es *l*, deduce una expresión para la velocidad límite a la que se deslizará el hilo en su descenso sobre los rieles.**



La varilla comienza a descender por acción de la componente tangencial de su peso (*mg* sen θ). Debido a ese desplazamiento, las cargas adquieren una velocidad *v* en el sentido del descenso, lo que provoca la aparición de una fuerza magnética sobre ellas en la dirección del conductor móvil. En resumen, se induce una fem en la varilla, dada por:

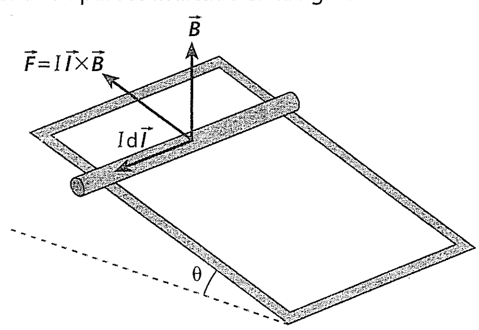
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\vec{B}\cdot\vec{S})}{\Delta t} = -B\frac{\Delta S}{\Delta t}\cos\theta = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\theta =$$

$$= -Blv\cos\theta$$

En consecuencia, se establece una intensidad de corriente:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv\cos\theta}{R}$$

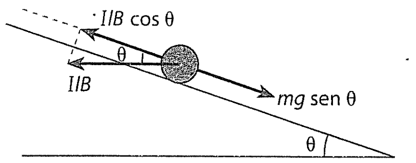
Al circular la intensidad (en el sentido del movimiento de las cargas positivas, esto es, hacia la izquierda de la varilla) en el seno del campo magnético, surge una fuerza de valor *IlB* cuyo sentido aparece indicado en la figura:



Esta fuerza provoca la aparición de una componente en la dirección del movimiento cuyo valor viene dado por la expresión:

$$F_t = IlB \cos \theta$$

como puede apreciarse en el siguiente diagrama de fuerzas:



En consecuencia, la ecuación de movimiento de la varilla será:

$$mg \text{ sen } \theta - IlB \cos \theta = ma$$

Ahora bien, como I aumenta a medida que lo hace v (según la expresión deducida anteriormente), también lo hará en la misma proporción la fuerza que se opone al descenso. Por tanto, la velocidad tendrá un valor límite, que se alcanzará en el momento en que ambas fuerzas igualen sus valores (y en el que $a = 0$). En ese instante, se cumplirá que:

$$mg \text{ sen } \theta = IlB \cos \theta$$

Sustituyendo aquí la expresión de I deducida anteriormente, obtenemos:

$$mg \text{ sen } \theta = \frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{R} v_{\text{máx}}$$

Y, por tanto:

$$v_{\text{máx}} = \frac{mgR}{B^2 l^2} \cdot \frac{\text{tg } \theta}{\cos \theta}$$

32 PAU Una bobina circular de 50 espiras de 5 cm de radio se sitúa en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de 1,2 T. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la bobina si se gira esta bruscamente 180° en 0,2 s. ¿Qué intensidad de corriente inducida circula si la resistencia en la bobina es de 20 Ω?

El flujo magnético inicial vale:

$$\Phi_0 = NBS \cos 0° = 0{,}471 \text{ Wb}$$

mientras que el flujo final, una vez que la bobina ha girado 180°, es:

$$\Phi_f = NBS \cos 180° = -0{,}471 \text{ Wb}$$

Por tanto:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{-0{,}471 \text{ Wb} - 0{,}471 \text{ Wb}}{0{,}2 \text{ s}} = 4{,}71 \text{ V}$$

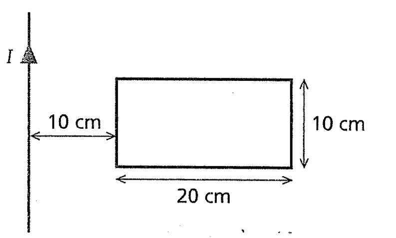
La intensidad de la corriente indicida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = 0{,}235 \text{ A}$$

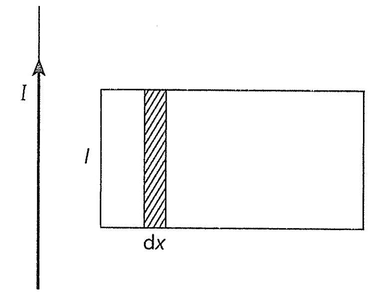
33 PAU Una corriente de 10 A recorre un hilo conductor de gran longitud situado cerca de una espira rectangular, como se indica en la figura.

a) **Calcula el flujo del campo magnético a través de la espira.**

b) **Determina la fuerza electromotriz media y el sentido de la corriente inducida en la espira si se interrumpe la corriente al cabo de 0,02 s.**



a) El campo que atraviesa la espira no es uniforme, ya que su valor varía con el inverso de la distancia al hilo. Debemos, pues, calcular el flujo por integración. Supondremos la superficie dividida en elementos diferenciales de altura l y base dx.



De ese modo, el flujo a través de la espira será:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{0,1}^{0,3} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \int_{0,1}^{0,3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi} [\ln x]_{0,1}^{0,3} = 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

b) La fem inducida al interrumpirse la corriente en 0,02 s será:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 2{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}}{0{,}02 \text{ s}} = 1{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

Puesto que el flujo inicial era entrante hacia el plano del papel, al disminuir, la corriente inducida tenderá a mantener ese flujo entrante, por lo que circulará en sentido horario.

El fenómeno de la autoinducción

34 Con dos hilos iguales de longitud x, construimos sendos solenoides de la misma longitud, l, pero de distinto radio. ¿Cuál de ellos tendrá mayor inductancia?

Al arrollar la misma longitud x de hilo haciendo espiras de distinto radio, variará el número de espiras, pues $x = 2\pi r N$. De esta manera, en cada uno de los solenoides, tendremos que:

$$N = \frac{x}{2\pi r}$$

Y como la inductancia viene dada por la expresión:

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}$$

Podemos expresar la inductancia de los solenoides de la siguiente manera:

$$L = \frac{\mu_0 \pi r^2 \dfrac{x^2}{4\pi^2 r^2}}{l} = \frac{\mu_0 x^2}{4\pi l}$$

Así pues, como en ambos casos x y l tienen el mismo valor, la inductancia, (que no depende del radio), valdrá lo mismo.

35 PAU Con dos hilos de la misma longitud, se construyen dos solenoides del mismo radio. Si la longitud de uno es el doble que la del otro, ¿cómo son en comparación sus inductancias?

Dadas las condiciones de la cuestión, $N = N'$ y $S = S'$. Si llamamos L a la inductancia del solenoide de longitud l, y L', a la del solenoide de longitud l', y consideramos que $l' = 2l$, entonces, al dividir las expresiones que corresponden a la inductancia de los solenoides, obtenemos:

$$\frac{L}{L'} = \frac{l'}{l}$$

Por lo que puede concluirse que:

$$L = 2L'$$

Es decir, el de mitad de longitud tiene el doble de inductancia.

36 **PAU** **Calcula la inductancia de un solenoide de 40 cm de longitud constituido por 400 espiras de 5 cm² de sección. ¿Cuál será la fuerza electromotriz autoinducida si la intensidad disminuye a razón de 30 A/s?**

La inductancia del solenoide viene dada por la siguiente expresión:

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}$$

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 400^2}{0{,}4\ \text{m}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{H}$$

En consecuencia, si la corriente disminuye a razón de 30 A/s, la fem autoinducida será:

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{H} \cdot (-30\ \text{A/s}) = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

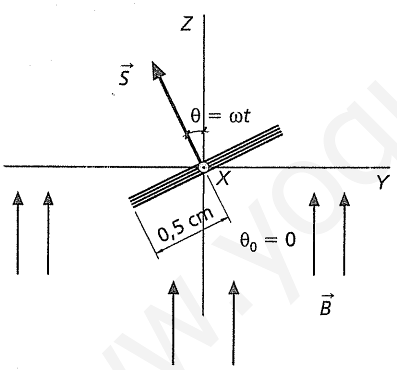
Aplicaciones: fundamentos de corriente alterna y transformadores

37 **PAU** **Una bobina de 10 espiras circulares de cobre de 0,5 cm de radio y resistencia 0,2 Ω gira en torno a un eje diametral en la dirección *X* con una velocidad angular de 3π rad/s. La bobina se encuentra inmersa en una región donde existe un campo magnético $\vec{B} = 0{,}6\,\vec{k}$ T. Considerando que en $t = 0$ las espiras estaban orientadas en el plano *XY*, determina:**

a) **La expresión para la fem inducida en función del tiempo.**

b) **La intensidad máxima de la corriente que circula por la espira y el tipo de corriente que se obtiene.**

La disposición descrita en el enunciado se muestra en la siguiente figura, con una perspectiva según la cual el eje *X* es perpendicular al papel y va hacia el observador:



a) A la vista de la figura, la expresión del flujo magnético en función del tiempo será:

$$\Phi(t) = N\vec{B}\vec{S} = NBS\cos\omega t$$

Por lo que la fem inducida en función del tiempo es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega\ \text{sen}\ \omega t$$

Sustituyendo los datos del enunciado, resulta:

$$\varepsilon(t) = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{sen}\ 3\pi t$$

b) El valor máximo de la corriente inducida viene dado por la expresión:

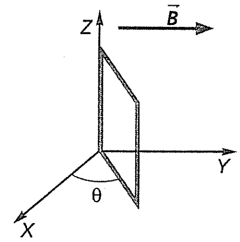
$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{NBS\omega}{R} = 22\ \text{mA}$$

Se obtiene una corriente alterna.

D38 **PAU** **Una espira cuadrada de 5 cm de lado y 2 Ω de resistencia está inmersa en un campo magnético $\vec{B} = 0{,}08\,\vec{j}$ T. La espira forma un ángulo θ variable con el plano *XZ* como se muestra en la figura, y dicho ángulo es de π/2 en el instante $t = 0$.**

a) **Obtén la expresión de la fem inducida en función del tiempo si se hace girar la espira con una frecuencia de 50 Hz alrededor del eje *Z*.**

b) **¿A qué velocidad angular debería girar para que la corriente máxima que circula por ella sea de 5 mA?**



a) El flujo viene dado por el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{S}$, con la particularidad de que en este caso hay un ángulo inicial, $\theta_0 = \pi/2$ rad; luego:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos(\omega t + \theta_0) = BS\cos(\omega t + \pi/2) = -BS\ \text{sen}\ \omega t$$

La fem inducida será:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\cos\omega t = 2 \cdot 10^{-4}\omega\cos\omega t$$

b) Para alcanzar esa corriente máxima, la fem máxima debe valer:

$$\varepsilon_0 = I_0 R = 0{,}01\ \text{V}$$

Puesto que $\varepsilon_0 = BS\omega$, podemos despejar la velocidad angular:

$$\omega = \frac{\varepsilon_0}{BS} = 50\ \text{rad/s}$$

39 **PAU** **La bobina rectangular de un generador simple de corriente alterna alcanza una fuerza electromotriz de 65,3 V a una frecuencia de 50 Hz en un campo de 1,3 T. Si las dimensiones de las espiras son 8 cm × 5 cm, ¿cuántas espiras tiene la bobina?**

La fem máxima de la bobina viene dada por:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega$$

donde $S = 0{,}08\ \text{m} \cdot 0{,}05\ \text{m} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$; $B = 1{,}3$ T, y $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s. Así pues:

$$N = \frac{\varepsilon_0}{BS\omega} = 40\ \text{espiras}$$

40 **PAU** **Una bobina de 300 espiras de 300 cm² gira alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético de 0,2 T. ¿A qué frecuencia debe hacerlo para generar una tensión máxima de 250 V?**

Igual que en el problema anterior, la fem máxima viene dada por:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega = NBS2\pi f$$

Así pues:

$$f = \frac{\varepsilon_0}{NBS2\pi} = 22{,}11\ \text{Hz}$$

41 **PAU** **Un transformador consta de una bobina primaria de 200 espiras y de una bobina secundaria de 50 espiras.**

a) **¿Cuál será su función: elevar o reducir el voltaje?**

b) **Si la tensión de entrada es de 125 V, ¿cuál será la de salida?**

c) **Si la corriente en la bobina primaria es de 50 mA, ¿cuánto valdrá en la secundaria?**

a) Puesto que el número de espiras de la bobina secundaria es inferior, su función consistirá en reducir el voltaje.

b) La tensión de salida viene dada por la expresión:

$$V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1} = 31{,}25\ \text{V}$$

c) La corriente en la bobina secundaria será:

$$I_2 = I_1\frac{N_1}{N_2} = 200\ \text{mA}$$

7 Movimientos oscilatorios. El oscilador armónico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Oscilaciones o vibraciones armónicas** páginas 185/186
  - **1.1. ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios?** páginas 185/186
  - **1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento oscilatorio es armónico?** página 186
- **2. El movimiento armónico simple** páginas 187/192
  - **2.1. Formas de escribir la ecuación de un movimiento armónico simple** páginas 188/189
  - **2.2. Velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple** páginas 190/192
  - **2.3. Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple** página 192
- **3. Consideraciones dinámicas en el movimiento armónico simple** página 193
  - **3.1. Relación del período y la frecuencia con las características dinámicas del oscilador** página 193
- **4. Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple** páginas 194/195
- **5. Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme** páginas 196/197
- **6. Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple** páginas 198/199
- **7. Oscilaciones forzadas y fenómeno de resonancia** páginas 200/201

Cuestiones previas (página 184)

1. ¿Qué casos conoces de movimientos oscilatorios?

Hay numerosos ejemplos de movimientos oscilatorios en la naturaleza; los latidos del corazón, la traslación de la tierra, el movimiento de las olas del mar, un átomo en una red cristalina a una temperatura dada o el movimiento de los planetas. También tenemos aplicaciones técnicas en casos como el péndulo de un reloj, el cigüeñal de un automóvil, las cuerdas de un instrumento musical, etcétera.

2. ¿Qué tiene que suceder para que un cuerpo oscile?

El cuerpo deberá estar apartado de su posición de equilibrio estable y bajo la acción de una fuerza restauradora recupera la posición de equilibrio.

3. ¿Es constante la aceleración en los movimientos oscilatorios?

No es constante porque varía sinusoidalmente con el tiempo, por tanto, tendrá valores máximos y mínimos.

4. ¿Qué fuerza hace que oscile un cuerpo unido a un muelle horizontal? ¿Qué fuerza hace que oscile un péndulo simple?

En el caso de un muelle horizontal la fuerza restauradora del muelle $-kx$ que tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. En el caso de un péndulo simple la fuerza restauradora será la componente tangencial del peso.

5. ¿De qué factores crees que puede depender el período de oscilación de un cuerpo unido a un muelle? ¿Y el de un péndulo?

En el caso de un muelle depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del muelle. En el caso de un péndulo depende de la longitud del péndulo pero es independiente de la masa.

Actividades (páginas 189/199)

1 Se hace oscilar desde la posición de equilibrio un cuerpo unido a un muelle horizontal, de modo que la separación máxima de dicha posición es de 3 cm. Si se han contado 20 oscilaciones en 5 segundos, ¿cuál es la ecuación representativa de dicho movimiento?

La amplitud o máxima elongación es $A = 3$ cm, mientras que el período vale:

$$T = \frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 8\pi \text{ rad/s}$$

Si deseamos representar la ecuación en función del seno, será:

$$x = 3 \text{ sen } 8\pi t \text{ cm}$$

Si lo hacemos en función del coseno, puede escribirse del siguiente modo:

$$x = 3 \cos (8\pi t \pm \pi/2) \text{ cm}$$

2 Indica cómo convendría escribir la ecuación del movimiento anterior si el cuerpo comienza a oscilar hacia la izquierda. ¿Y si lo hiciera hacia la derecha?

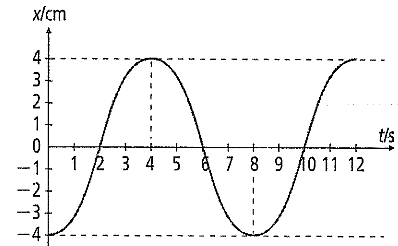
Si queremos dar la información completa, incluyendo el sentido inicial del movimiento, es conveniente usar la ecuación en forma de coseno. Si el cuerpo comienza a moverse hacia la izquierda (x negativas), la ecuación es:

$$x = 3 \cos (8\pi t + \pi/2) \text{ cm}$$

Y si lo hace hacia la derecha (x positivas):

$$x = 3 \cos (8\pi t - \pi/2) \text{ cm}$$

3 ¿Cuál es la ecuación del MAS representado en la siguiente gráfica?

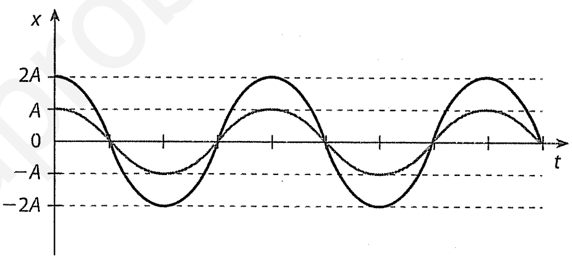


Puesto que $A = 4$ cm, $T = 8$ s y $\omega = \pi/4$ rad/s, la ecuación puede escribirse como:

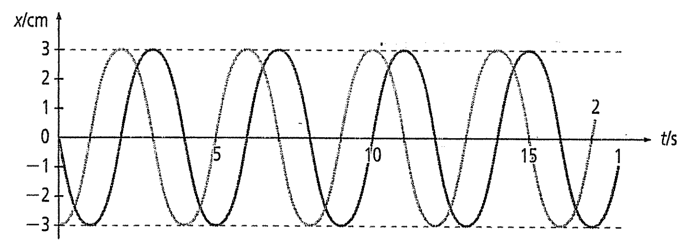
$$x = 4 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

4 Representa en una misma gráfica los movimientos de dos osciladores del mismo período, uno con doble amplitud que otro, que comienzan a oscilar desde el extremo positivo.

La representación gráfica pedida se puede observar en la siguiente figura:



5 PAU ¿Qué ecuaciones representan los movimientos 1 y 2 de la figura 7.14? ¿Cuál es el desfase, o diferencia de fase, entre ambos movimientos?



En ambos movimientos, $A = 3$ cm y $T = 4$ s, por lo que:

$$\omega = \pi/2 \text{ rad/s}$$

en consecuencia, la ecuación que representa el movimiento 1 es:

$$x_1 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

mientras que el movimiento 2 se representaría por:

$$x_2 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t - \pi\right) \text{ cm}$$

El desfase entre ambos es, por tanto, de $\pi/2$ rad.

6 Comprueba la validez de las ecuaciones de posición de los cuatro casos expuestos en la página anterior, teniendo en cuenta los tiempos que se indican y sustituyendo ω por $2\pi/T$ en cada una de las expresiones dadas.

Si partimos de la posición de equilibrio hacia la derecha, la oscilación viene dada por la siguiente expresión:

$$x = A \text{ sen} \frac{2\pi}{T} t$$

Sustituimos los distintos valores de t:

- Cuando $t = 0, x = 0$.
- Cuando $t = T/4, x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = A$.
- Cuando $t = T/2, x = A \text{ sen } \pi = 0$.
- Cuando $t = 3T/4, x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = -A$.

En el resto de los casos se procede de igual modo, a partir de la ecuación representativa de cada situación inicial.

7 **PAU** **Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a 4 cm de la posición de equilibrio, con un período de 0,3 s.**

a) **Determina su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.**

b) **Halla su velocidad cuando $x = 2$ cm.**

Con los datos ofrecidos, podemos deducir que $A = 4$ cm y $\omega = 2\pi/T = 20{,}9$ rad/s.

a) La velocidad del cuerpo al pasar por la posición de equilibrio es máxima y vale:

$$v = \omega A = 83{,}6 \text{ cm/s}$$

b) Cuando pasa por $x = 2$ cm, la velocidad será:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 72{,}4 \text{ cm/s}$$

8 **PAU** **Determina la aceleración en los extremos, en $x = 2$ cm, y en $x = -1$ cm, de un oscilador armónico que tenga las características expuestas en la actividad anterior.**

En los extremos, la aceleración es máxima y vale:

$$a = -\omega^2 A = \pm\, 17{,}48 \text{ m/s}^2$$

En $x = 2$ cm $= 0{,}02$ m valdrá:

$$a = -\omega^2 x = -8{,}74 \text{ m/s}^2$$

Mientras que en $x = -1$ cm $= -0{,}01$ m será:

$$a = -\omega^2 x = 4{,}37 \text{ m/s}^2$$

9 **Consideremos la velocidad y la aceleración máximas de un oscilador:**

a) **¿Cómo varían si se duplica la amplitud sin modificar el período?**

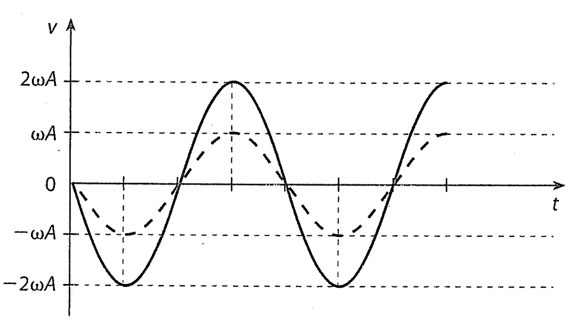
b) **¿Cómo varían si se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud?**

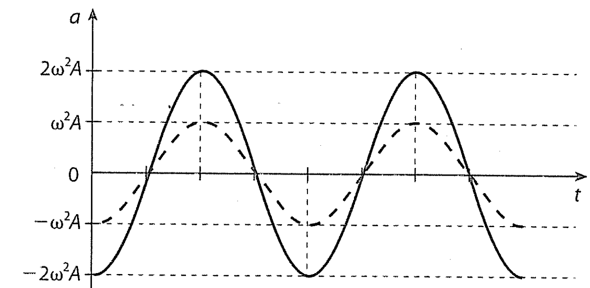
Haz las gráficas comparativas de ambos casos con la oscilación normal.

Las expresiones de la velocidad y de la aceleración máximas son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A$$
$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$$

a) Al ser $\omega = 2\pi/T$, este factor se mantendrá constante si T no cambia. Teniendo esto en cuenta, al duplicar A, se duplicarán $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$; las nuevas gráficas quedan representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).





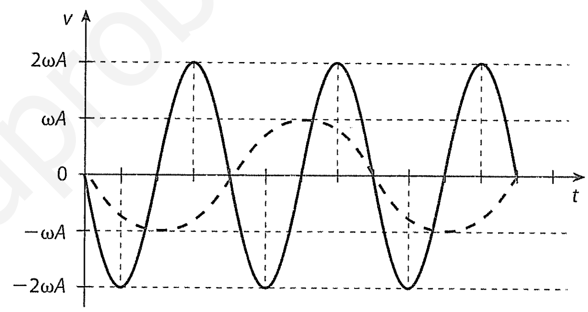
b) Escribiendo las expresiones en función de la frecuencia, tenemos:

$$v_{\text{máx}} = 2\pi f A$$
$$a_{\text{máx}} = -4\pi^2 f^2 A$$

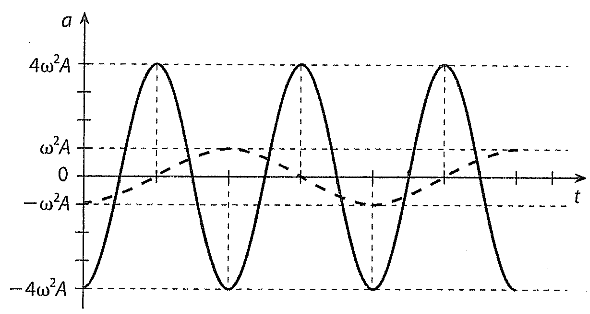
Por tanto, al duplicar f sin variar A, $v_{\text{máx}}$ se duplica y $a_{\text{máx}}$ se cuadruplica.

Por otro lado, al duplicar f, T se reduce a la mitad; las nuevas gráficas son las que aparecen representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).

La gráfica correspondiente a la velocidad será:



La gráfica correspondiente a la aceleración será:



10 **Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a 5 cm de la posición de equilibrio con una frecuencia de 5 Hz.**

La ecuación de posición para $\omega = 2\pi f = 10\pi$ rad/s y $A = 5$ cm, será:

$$x = 5 \cos 10\pi t \text{ cm}$$

Por tanto:

$$v = \frac{dx}{dt} = -50\pi \text{ sen } 10\pi t \text{ cm/s}$$

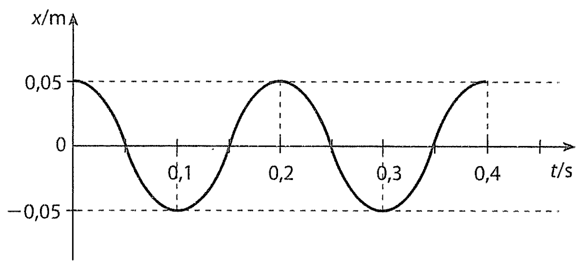
mientras que:

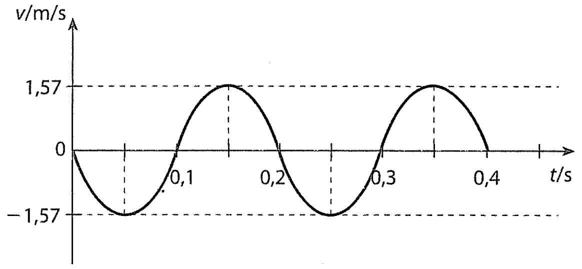
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -500\pi^2 \cos 10\pi t \text{ cm/s}^2$$

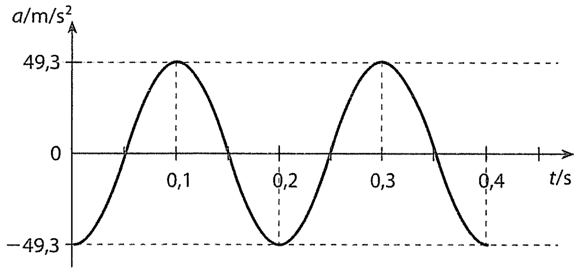
donde:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A = \pm 50\pi \text{ cm/s} = \pm 1{,}57 \text{ m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = \pm\omega^2 A = \pm 500\pi^2 \text{ cm/s}^2 = \pm 49{,}3 \text{ m/s}^2$$

Las representaciones gráficas serán las siguientes:







11 Razona cómo podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte.

Si colgamos las masas de un mismo resorte (misma k), se cumplirá en ambos osciladores que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ y } \omega'^2 = \frac{k}{m'}$$

Por tanto, $m\omega^2 = m'\omega'^2$, y como, además, $\omega = 2\pi f$, se concluye:

$$\frac{m}{m'} = \frac{f'^2}{f^2}$$

Así, la relación entre las masas es igual a la relación inversa entre los cuadrados de las frecuencias de oscilación.

12 La frecuencia de oscilación de cierta masa *m* en un resorte es el triple que la de otra masa *m'*. ¿Qué relación guardan ambas masas entre sí?

Según se desprende de la expresión anterior, m será la novena parte de m', es decir:

$$m = \frac{1}{9} \cdot m'$$

13 PAU Un oscilador consistente en una masa unida a un resorte horizontal de constante restauradora $k = 100$ N/m se mueve según la ecuación:

$$x = 6{,}5 \cos 5\pi\, t \text{ cm}$$

***a)* ¿Cuál es la masa del oscilador?**

***b)* ¿Cuál es la frecuencia de oscilación?**

***c)* ¿Cuál es la velocidad máxima de su movimiento?**

***d)* ¿Cuál es la velocidad cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud?**

***e)* ¿Cuál es su aceleración máxima?**

a) De la ecuación $x = 6{,}5 \cos 5\pi\, t$ cm se deduce que:

$$A = 6{,}5 \text{ cm y } \omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Dado que $\omega^2 = k/m$, podemos determinar m:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{100}{25\pi^2} = 0{,}40 \text{ kg}$$

b) La frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

c) La velocidad máxima de su movimiento es:

$$|v_{máx}| = \omega A = 102{,}1 \text{ cm/s} = 1{,}02 \text{ m/s}$$

d) Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, la velocidad es:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, v_{máx} = 88{,}4 \text{ cm/s} = 0{,}884 \text{ m/s}$$

e) La aceleración máxima es:

$$|a| = \omega^2 A = 16 \text{ m/s}^2$$

14 Demuestra cómo a partir de la igualdad $1/2\, mv^2 + 1/2\, kx^2 = 1/2\, kA^2$ puede obtenerse la expresión 7.7, que relaciona la velocidad con la posición del oscilador.

Puesto que $\omega^2 = k/m$, lo que implica que $k = m\omega^2$, es posible escribir la igualdad dada de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

que, simplificando, se transforma en:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

de donde:

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

es decir:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

15 PAU Si la amplitud de un cuerpo que oscila con MAS es *A*:

***a)* ¿En qué punto son iguales su energía cinética y potencial?**

***b)* ¿En qué punto es su energía potencial el doble que la cinética?**

***c)* ¿En qué punto es su energía cinética el doble que la potencial?**

a) Su energía total es $1/2\, kA^2$. El punto en el que la energía potencial se iguala con la cinética será aquel en el que ambas expresiones valgan la mitad de la energía total. Por tanto: $E_p = E_{total}/2$.

Es decir:

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} kA^2\right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \cdot A$$

b) En este caso: $E_p = 2 \cdot E_c$.

Es decir:

$$\frac{1}{2} kx^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

Sustituyendo la velocidad:

$$\frac{1}{2} kx^2 = m\omega^2 (A^2 - x^2) = k(A^2 - x^2) \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 = A^2 - x^2$$

Es decir:

$$x = \sqrt{2/3} \cdot A = 0{,}82 \cdot A$$

c) En este caso debe cumplirse que $E_c = 2 \cdot E_p$. Es decir:

$$\frac{1}{2} k(A^2 - x^2) = kx^2 \Rightarrow A^2 - x^2 = 2x^2$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{3}} = 0{,}57 \cdot A$$

16 **PAU** **Un cuerpo de 5 kg choca con una velocidad de 10 m/s contra un muelle de constante elástica $k = 25$ N/m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2. Calcula la longitud que se comprime el muelle si consideramos la masa despreciable.**

Al chocar el cuerpo contra el muelle y comprimirlo, parte de la energía mecánica se disipa en forma de trabajo de rozamiento (no conservativo). Dicho trabajo es igual a la variación de energía mecánica del sistema:

$$W_{roz} = \Delta E$$

Por tanto:

$$-F_r x = E_f - E_0$$

El punto final es el de máxima compresión del muelle, arrastrado por la masa de 5 kg. En ese punto, la energía mecánica del sistema es la energía potencial elástica del muelle comprimido, mientras que la energía mecánica inicial era la cinética del cuerpo. Así pues:

$$-F_r x = 1/2\, kx^2 - 1/2\, mv^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\mu mgx = 1/2\, kx^2 - 1/2\, mv^2$$

de donde:

$$1/2\, kx^2 + \mu mgx - 1/2\, mv^2 = 0$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$12{,}5x^2 + 9{,}8x - 250 = 0$$

Resolviendo, obtenemos:

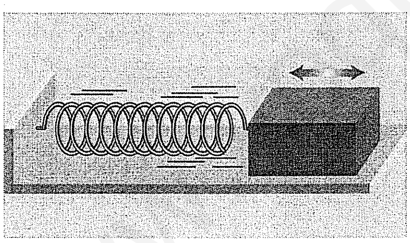
$$x = 4{,}097 \text{ m}$$

17 **PAU** **Un cuerpo de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de constante elástica 15 N/m, y el sistema oscila tal como indica la figura 7.23. La amplitud del movimiento es de 2 cm. Calcula:**

a) **La energía total del sistema.**

b) **Las energías cinética y potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.**

c) **La velocidad máxima del cuerpo.**



a) La energía total del sistema viene dada por:

$$E = 1/2\, kA^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

b) Cuando $x = 1{,}3$ cm, la velocidad del cuerpo es:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3{,}27 \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$v = \pm 4{,}97 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

En consecuencia, la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = 1/2\, mv^2 = 1{,}73 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

y la energía potencial es:

$$E_p = 1/2\, kx^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Puede observarse que la suma de ambos términos da como resultado el valor calculado en el apartado ***a)***.

c) La velocidad máxima del cuerpo es:

$$v = \omega A = 6{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

18 **Deduce la expresión de la aceleración en el MAS mediante la proyección de la aceleración centrípeta del MCU.**

Si el radio es igual a la amplitud, entonces:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{A} = \omega^2 A$$

Este sería el valor de la aceleración máxima en el MAS.

En cualquier otro punto, la proyección de la aceleración centrípeta o normal sería:

$$a = a_c \cos\theta = \omega^2 A \cos \omega t$$

que corresponde a la expresión general (en valor absoluto) de la aceleración del MAS en función del tiempo.

19 **PAU** **¿Cómo varía el período de un péndulo al duplicar la longitud? ¿Y al disminuirla a 1/3 de su longitud original?**

Puesto que el período de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

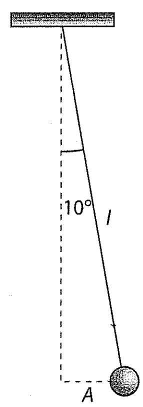
al duplicar la longitud, l, el período aumenta en un factor $\sqrt{2}$. Al reducir la longitud inicial hasta 1/3, el período disminuye en un factor $1/\sqrt{3}$.

20 **¿Bajo qué condiciones podemos decir que un péndulo simple oscila de forma armónica? ¿Cuál es la fuerza restauradora en el caso del péndulo simple?**

Un péndulo simple puede considerarse como un oscilador armónico solo si oscila con amplitudes pequeñas. La fuerza restauradora es la componente tangencial del peso, que actúa en la dirección del movimiento.

21 **PAU** **Se deja oscilar libremente un péndulo de 2 m de longitud después de haberlo desplazado 10° hacia la derecha de la vertical. ¿Cuál es la ecuación que nos da la elongación en función del tiempo? ¿Cuál es el período y la frecuencia de oscilación de dicho péndulo?**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



Como se observa en ella:

$$A = l \text{ sen } 10° = 0{,}35 \text{ m}$$

A su vez, dado que $\omega = \sqrt{g/l}$, su valor es:

$$\omega = 2{,}2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$x = A \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}35 \text{ sen}\left(2{,}2t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

El período de dicho movimiento vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}84 \text{ s}$$

De este modo, la frecuencia será:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}35 \text{ Hz}$$

Cuestiones y problemas (páginas 204/205)

Guía de repaso

1 **¿Qué se entiende por período y frecuencia de un movimiento oscilatorio?**

El período es el tiempo que tarda en repetirse una posición dada, es decir, el que corresponde a una oscilación completa y la frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

2 **¿Cuándo se produce un movimiento oscilatorio?**

Cuando un sistema o cuerpo está apartado de su posición de equilibrio.

3 **¿Qué condiciones deben cumplirse para que un movimiento oscilatorio sea armónico simple?**

Que la partícula oscile bajo la acción de fuerzas restauradoras que obedecen a la ley de Hooke.

4 **¿Puede escribirse la ecuación de posición de un oscilador armónico indistintamente en función del seno o del coseno? ¿En qué se diferencian ambas formas? ¿Cuándo conviene usar una u otra?**

Sí, hay dos formas de escribirlas en función del seno y del coseno. Se diferencian en un pequeño desfase de 90°. Dependiendo de las condiciones iniciales del problema podremos utilizarlo de una forma a otra. Esas condiciones son la posición inicial y el sentido inicial de la partícula que empieza a oscilar.

5 **¿Qué representan los distintos factores que aparecen en la ecuación del oscilador? ¿Hay alguno de ellos que dependa de las propiedades físicas del oscilador?**

x representa la posición del móvil en función del tiempo; A representa el máximo o mínimo valor de la elongación x; ω es la frecuencia angular. $(\omega t + \delta)$ representa la fase; δ es la fase inicial.

De todos los factores, ω es el que depende de las características físicas del oscilador.

6 **¿Qué expresión tiene la velocidad en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero?**

Considerando la ecuación general del movimiento x en función del coseno, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \delta)$$

La velocidad es máxima cuando $x = 0$.

7 **¿Qué expresión tiene la aceleración en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero? ¿Qué sentido tiene en función de la posición?**

Considerando la ecuación general del movimiento x en función del coseno, tendremos:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \delta)$$

La aceleración es máxima en los extremos; $x = +-A$. Es nula en la posición de equilibrio. Su sentido es opuesto a la posición x.

8 **En un movimiento armónico simple, la posición, la velocidad y la aceleración varían periódicamente. ¿Son iguales los períodos en los tres casos?**

Los períodos son iguales en los tres casos, pero las fases no coinciden.

9 **Demuestra que la ecuación del oscilador armónico es congruente con la consideración dinámica del sistema, es decir, con el hecho de que la fuerza obedezca la ley de Hooke.**

Por un lado, cuando el cuerpo es separado de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. Se cumple que:

$$ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

Por otro lado:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \delta) = -\omega^2 A$$

Igualando ambas aceleraciones obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

10 **¿Por qué decimos que la frecuencia angular del oscilador armónico es una característica de las propiedades físicas del sistema?**

Porque es igual a la raíz cuadrada del cociente k/m, que son las constantes físicas del oscilador.

11 **¿De qué depende el período de un oscilador armónico, de la amplitud de la oscilación?**

No depende de la amplitud; depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del sistema.

12 **¿Cómo varían las energías cinética y potencial de un oscilador armónico? ¿Cuál es su valor máximo? ¿Por qué permanece constante la energía mecánica?**

Varían de forma periódica. Su valor máximo es $1/2\ kA^2$ y se conserva debido a que las fuerzas elásticas o restauradoras de tipo Hooke son conservativas.

13 **¿Qué relación hay entre el movimiento circular uniforme y el armónico simple?**

El MAS es el resultado de observar movimientos circulares desde el propio plano del movimiento.

14 **¿De qué depende el período de un péndulo simple si la amplitud de la oscilación es pequeña comparada con la longitud del péndulo?**

Depende de la longitud del hilo y del valor de la aceleración de la gravedad local. Véase el epígrafe 6.

15 **¿Qué es una oscilación forzada?**

Es una oscilación que tiene lugar bajo la acción de una fuerza periódica externa.

16 **¿Cuándo se produce el fenómeno de resonancia en la amplitud?**

El fenómeno de la resonancia se produce cuando la frecuencia angular de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilación del sistema, lo cual se traduce en un aumento de la amplitud de la oscilación.

El movimiento armónico simple

17 **Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes. ¿En qué punto de la trayectoria se cruzan?**

Un ejemplo de movimiento de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes sería el caso de dos osciladores que parten de extremos opuestos o que, partiendo de la posición de equilibrio, comienzan a oscilar en sentidos opuestos. Como se demuestra en el problema de cálculo número 21, los dos osciladores se cruzarán en la posición de equilibrio.

18 **Dos partículas efectúan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y período a lo largo de la misma recta. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas si se cruzan cuando su elongación es la mitad de la amplitud?**

Si $x = A \cos \omega t$ es la ecuación de uno de los osciladores, la correspondiente al otro será $x = A \cos (\omega t + \delta)$. Cuando $x = A/2$, se cumple que:

$$A/2 = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = 1/2$$

Es decir:

$$\omega t = \pi/3 \text{ rad}$$

El otro oscilador se encuentra en ese mismo instante en la misma posición, si bien su sentido de movimiento es opuesto. Por tanto, debe cumplirse que:

$$\omega t + \delta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \Rightarrow \delta = 4\pi/3 \text{ rad}$$

o bien:

$$\delta = -2\pi/3 \text{ rad}$$

19 PAU Una partícula que oscila armónicamente con una amplitud de 15 cm tarda 1,5 s en realizar una oscilación completa. Sabiendo que en $t = 0$ su velocidad es nula y su elongación es positiva, determina:

a) **La ecuación de su movimiento $x(t)$.**

b) **La velocidad y la aceleración de la oscilación en $t = 0{,}5$ s.**

c) **Los valores absolutos de velocidad y aceleración máximas.**

a) Dadas las condiciones iniciales del problema, la ecuación es de la forma $x = A \cos \omega t$, siendo $A = 15$ cm y $\omega = 2\pi/T = 4\pi/3$, pues $T = 3/2$ s. Por tanto:

$$x = 15 \cos \frac{4\pi}{3} t \text{ cm}$$

b) Derivando una y dos veces respecto al tiempo, obtenemos:

$$v = -15 \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} t = -20\pi \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} t$$

$$v\,(t = 0{,}5 \text{ s}) = -54{,}4 \text{ cm/s}$$

$$a = -15 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \cos \frac{4\pi}{3} t = -\frac{80\pi^2}{3} \cos \frac{4\pi}{3} t$$

$$a(t = 0{,}5 \text{ s}) = 131{,}59 \text{ cm/s}^2$$

c) Los valores absolutos de $v_{máx}$ y $a_{máx}$ son, respectivamente:

$$v_{máx} = \omega A = 62{,}8 \text{ cm/s}$$

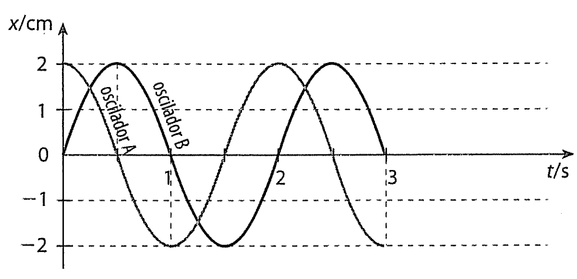
$$a_{máx} = \omega^2 A = 263{,}2 \text{ cm/s}^2$$

20 PAU Representa en una misma gráfica los movimientos de los siguientes osciladores:

- **Oscilador A: se suelta desde el extremo $x = +2$ cm de la posición de equilibrio, y su período es de 2 s.**
- **Oscilador B: idéntico al anterior, pero la oscilación parte de la posición de equilibrio hacia amplitudes positivas.**

¿Qué ecuaciones representan a ambos osciladores? ¿En qué puntos se cruzan estos?

La gráfica correspondiente es la siguiente:



y las ecuaciones son:

- Para el oscilador A:

$$x_A = 0{,}02 \cos \pi t = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi t + \pi/2) \text{ m}$$

- Para el oscilador B:

$$x_B = 0{,}02 \operatorname{sen} \pi t \text{ m}$$

En ambos casos, $T = 2$ s, y $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad.

Los puntos donde se cruzan ambos osciladores se calculan haciendo $x_A = x_B$; por lo que:

$$\cos \pi t = \operatorname{sen} \pi t \Rightarrow \operatorname{tg} \pi t = 1$$

valor que corresponde a un ángulo de $\pi/4$ rad.

Así:

$$\pi t = \pi/4 \Rightarrow t = 0{,}25 \text{ s}$$

Dicho valor también correspondería al de un ángulo de $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$ rad.

Así pues:

$$\pi t = 5\pi/4 \Rightarrow t = 1{,}25 \text{ s}$$

valores de tiempo que corresponden a las dos primeras veces que se cruzan, cosa que ocurre en los puntos:

$$x = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi \cdot 0{,}25) = 0{,}0141 \text{ m} = 1{,}41 \text{ cm}$$

$$x' = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi \cdot 1{,}25) = -0{,}0141 \text{ m} = -1{,}41 \text{ cm}$$

21 PAU Tenemos dos osciladores armónicos cuyas ecuaciones de posición son $x_1 = A \cos (\omega t + \pi/2)$ y $x_2 = A \cos (\omega t - \pi/2)$. Determina:

a) **La posición inicial.**

b) **El sentido en que comienzan a moverse los osciladores.**

c) **El punto en el que se cruzan.**

d) **La diferencia de fase entre los dos.**

a) La posición inicial, para $t = 0$, resulta ser cero en ambos casos.

b) La ecuación del primer oscilador corresponde a un oscilador que comienza a oscilar hacia valores negativos de x desde la posición de equilibrio.

Esto puede comprobarse haciendo $t = T/4$. Dado que, $T = 2\pi/\omega$, entonces:

$$t = \frac{2\pi}{4\omega}$$

por lo que:

$$x = A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos \left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir:

$$x = A \cos \pi = -A$$

Como puede observarse, al cabo de $T/4$ s, el oscilador se encuentra en la posición $x = -A$.

Por el contrario, la segunda corresponde a un oscilador que se mueve hacia valores positivos de x (hacia la derecha) desde la posición de equilibrio. Si se repite el proceso para $t = T/4$, se encontrará que $x = A$.

c) Cuando se cruzan, las posiciones de ambos coinciden, por lo que:

$$A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos (\omega t - \pi/2)$$

Desarrollando la expresión, tenemos:

$$\cos \omega t \cdot \cos \pi/2 - \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \pi/2 =$$
$$= \cos \omega t \cdot \cos \pi/2 + \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \pi/2$$

de donde:

$$2 \operatorname{sen} \omega t = 0$$

o bien, dado que $\omega = 2\pi/T$:

$$2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t = 0$$

igualdad que se cumple siempre que:

$$\frac{2\pi}{T} t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$$

Por tanto, se cumple cuando:

$$t = 0, T/2, T, 3T/2\ldots$$

valores de tiempo que corresponden a $x = 0$. Es decir, como era de prever, se cruzarán siempre en la posición de equilibrio.

d) Como se desprende de las ecuaciones, la diferencia de fase es de π rad.

22 **La ecuación de posición de un oscilador es:**

$$x = 5 \cos (\pi t + \pi) \text{ cm}$$

Determina:

***a)* La frecuencia y el período de oscilación.**

***b)* La amplitud.**

***c)* La posición inicial de la partícula.**

***d)* La gráfica en los cuatro primeros segundos.**

***e)* La velocidad y la aceleración del oscilador en $t = 5$ s.**

***f)* La velocidad y la aceleración máximas.**

a) Dado que $\omega = 2\pi f$, entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

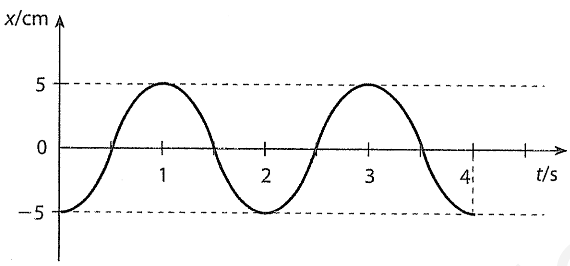
y, por tanto, $T = 2$ s.

b) Como se desprende de la ecuación, $A = 5$ cm.

c) La posición inicial, es decir, para $t = 0$, es:

$$x_0 = 5 \cos \pi = -5 \text{ cm}$$

d) La gráfica en los cuatro primeros segundos es:



e) La velocidad y la aceleración vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \text{ sen } (\pi t + \pi) \text{ cm/s}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \cos (\pi t + \pi) \text{ cm/s}^2$$

cuyos valores en $t = 5$ s son:

$$v(5) = 0$$

$$a(5) = -5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

f) La velocidad máxima es:

$$v_{máx} = \omega A = 5\pi \text{ cm/s}$$

y la aceleración:

$$a_{máx} = \omega^2 A = 5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

23 **PAU** **Una partícula oscila en el eje X con movimiento armónico simple. Si parte de la posición de equilibrio y comienza a oscilar hacia la derecha con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 1/3 Hz, determina:**

***a)* La ecuación de posición.**

***b)* La velocidad y la aceleración cuando $t = 5$ s.**

***c)* La velocidad cuando pasa por la posición $x = -1$ cm.**

***d)* El desplazamiento neto y el espacio recorrido en 1 s.**

a) Con los datos ofrecidos, deducimos que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/3 \text{ rad/s}$$

Si la partícula comienza a oscilar hacia la derecha, su ecuación puede escribirse de estas dos maneras:

$$x = 4 \text{ sen } \frac{2\pi}{3} t \text{ cm} \qquad x = 4 \cos \left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

b) Eligiendo la primera expresión, la velocidad y la aceleración de la partícula vienen dadas por:

$$v = \frac{8\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}$$

$$a = -\frac{16\pi^2}{9} \text{ sen } \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}^2$$

Sustituyendo para $t = 5$ s, obtenemos:

$$v(5) = -4{,}19 \text{ cm/s} \; ; \; a(5) = 15{,}2 \text{ cm/s}^2$$

c) La velocidad en función de la posición es:

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

para $x = -1$ cm, la velocidad será:

$$v = -8{,}11 \text{ cm/s}$$

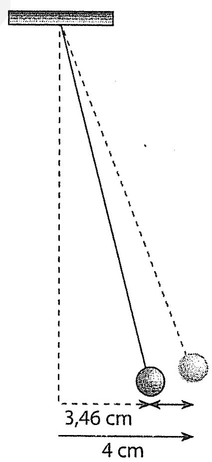
d) El desplazamiento neto será:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}46 - 0 = 3{,}46 \text{ cm}$$

Puesto que $t = 1$ s es un tiempo superior a $T/4$ (0,75 s), la partícula se encuentra a 3,46 cm de la posición de equilibrio, pero encaminándose hacia ella después de pasar por el punto de máxima elongación.

En consecuencia, el espacio recorrido es:

$$s = A + (4 - 3{,}46) = 4{,}54 \text{ cm}$$



Consideraciones dinámicas del MAS

24 **Si tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante k también desconocida. ¿Cómo podríamos averiguar el período de oscilación de dicho sistema sin hacerlo oscilar?**

Bastaría con colgar la masa desconocida del muelle y medir el alargamiento producido. Cuando se consigue el equilibrio, se cumple que:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

Así pues, el período de oscilación de dicho sistema sería:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}}$$

que, como es fácil ver, puede obtenerse sin más que medir el alargamiento del muelle.

25 **Un resorte del que pende una masa m tiene una constante de fuerza k. El resorte se corta por la mitad, y la masa se cuelga de una de las mitades. ¿Oscilará ahora con el mismo período que antes? Razona y demuestra tu afirmación.**

No oscilará con el mismo período, pues el valor de k varía al cortar el muelle por la mitad. Podemos expresar k como $k = F/l$, por lo que, si $l' = l/2$, entonces $k' = 2 \cdot k$. Es decir, al cortar el muelle por la mitad, la constante k se duplica, por lo que el período disminuye en un factor:

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T$$

26 PAU Al colgar una masa del extremo de un muelle vertical, este sufre un alargamiento de 7 cm.

a) **¿De qué magnitudes del sistema depende la relación entre el alargamiento *x* y la aceleración de la gravedad?**

b) **¿Cuál es el período de oscilación del sistema si comienza a oscilar en posición horizontal sin rozamiento?**

a) Cuando el sistema alcanza el equilibrio, el valor del peso y la fuerza restauradora se igualan, es decir:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{x}{g} = \frac{m}{k}$$

Es decir, la relación entre el alargamiento y la aceleración de la gravedad es equivalente a la relación entre la masa y la constante elástica. Por tanto, dicha relación depende de las características dinámicas del sistema.

b) El periodo viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dada la identidad anterior, podemos determinar el periodo conociendo el alargamiento del muelle:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 0{,}53 \text{ s}$$

27 PAU Una masa de 50 g unida a un resorte horizontal de constante k = 200 N/m es soltada después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio.

a) **Determina su período y su frecuencia de oscilación.**

b) **Escribe su ecuación de movimiento.**

c) **Calcula la velocidad y aceleración máxima.**

d) **Establece la velocidad y la aceleración en x = 1 cm.**

e) **Representa con los valores correspondientes las gráficas *x*, *v* y *a* frente al tiempo.**

a) El período del objeto viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}1 \text{ s}$$

Y, por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

b) Su ecuación se escribirá de la siguiente forma:

$$x = A\cos\omega t = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$x = 0{,}02\cos 20\pi t \text{ m}$$

c) Su velocidad máxima es:

$$v_{máx} = \omega A = 1{,}26 \text{ m/s}$$

Su aceleración máxima es:

$$a_{máx} = -\omega^2 A = -79 \text{ m/s}^2$$

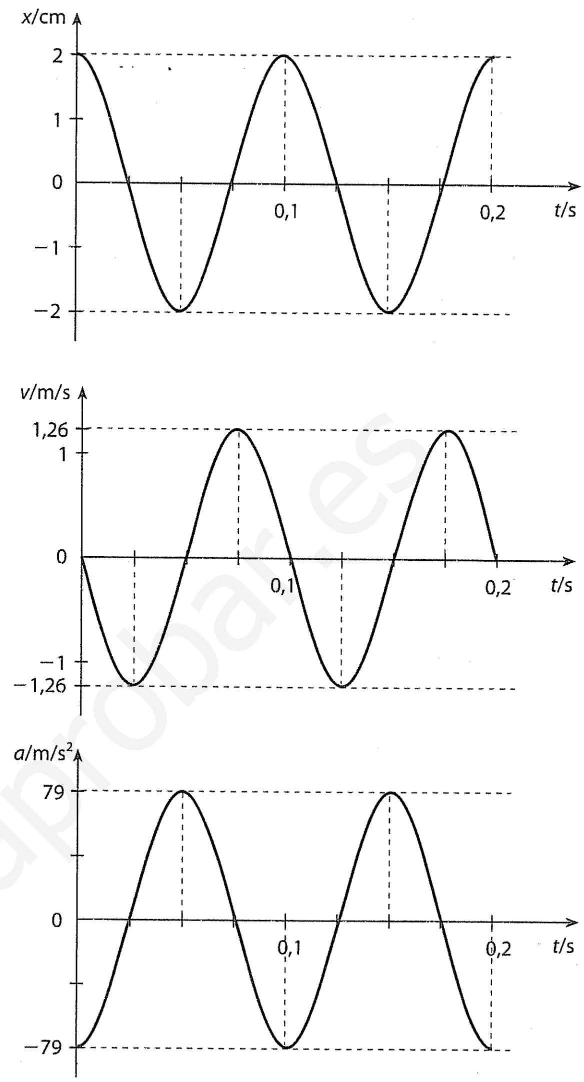
d) La velocidad y la aceleración serán, respectivamente:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \mp 1{,}09 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -39{,}44 \text{ m/s}^2$$

Según el sentido del movimiento, la velocidad será positiva o negativa.

e) Las gráficas son las siguientes:



28 PAU Una masa de 200 g colgada de un resorte de constante k = 10 N/m oscila con una amplitud de 4 cm. Calcula:

a) **La velocidad y la aceleración del oscilador cuando la posición de la partícula es x = 3 cm.**

b) **El valor máximo de la aceleración y la velocidad.**

a) La velocidad y la aceleración en función de la posición vienen dadas, respectivamente, por :

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}18 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -1{,}50 \text{ m/s}^2$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \text{ rad/s}$$

b) Sus valores máximos son:

$$v_{máx} = \omega A = 0{,}28 \text{ m/s}\,;\, a_{máx} = -\omega^2 A = 2 \text{ m/s}^2$$

Consideraciones energéticas en el MAS

29 PAU Una masa de 1,5 kg unida a un muelle realiza oscilaciones armónicas sin rozamiento sobre una superficie horizontal; sabemos que la amplitud es de 3 cm y la frecuencia es de 2 Hz. Si las oscilaciones comienzan desde la máxima elongación positiva, determina:

a) **La ecuación representativa del movimiento.**

b) **La constante elástica del muelle.**

c) **El valor de la velocidad de oscilación en x = 2 cm.**

d) **La energía mecánica del oscilador, así como la posición en que las energías cinética y potencial del oscilador son iguales.**

a) Puesto que la oscilación comienza desde su máxima elongación positiva, la ecuación es del tipo $x = A \cos \omega t$, donde $A = 3$ cm y $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s. Así pues:

$$x = 3 \cos 4\pi t \text{ cm}$$

b) La constante elástica del muelle es:

$$k = m\omega^2 = 1{,}5 \cdot (4\pi)^2 = 236{,}87 \text{ N/m}$$

c) La velocidad de oscilación en $x = 2$ cm, es, en valor absoluto:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi \sqrt{5} = 28{,}1 \text{ cm/s}$$

d) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}106 \text{ J}$$

El valor de la elongación en el que la energía potencial y cinética del oscilador son iguales se obtiene de la igualdad:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

Dado que $m\omega^2 = k$, la igualdad se reduce a:

$$x^2 = A^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} A = 2{,}12 \text{ cm}$$

30 **PAU** **Dos partículas de masas *m* y *m'*, respectivamente, efectúan oscilaciones armónicas de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante *k*. Si $m' > m$:**

a) **¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?**

b) **¿Cuál de las dos tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio?**

c) **¿Son iguales sus velocidades en la posición de equilibrio?**

d) **¿Son iguales sus períodos de oscilación?**

a) Los dos osciladores tienen la misma energía mecánica, pues esta es igual a $1/2\ kA^2$.

b) La energía cinética en ese punto adquiere su máximo valor, que es igual a $1/2\ kA^2$ y la misma para ambos osciladores.

c) En la posición de equilibrio sus velocidades no son iguales, debido a que en ese punto se cumple que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}A^2$$

Dado que k y A son iguales en ambos casos, a mayor masa, menor velocidad. Es decir, la velocidad de m' en ese punto es menor.

d) Los períodos de oscilación no son iguales; dado que el período depende de la masa, el de mayor masa tendrá mayor período.

31 **PAU** **Una partícula de 40 g de masa unida a un muelle horizontal describe un MAS mediante el cual recorre una distancia total de 16 cm en cada ciclo completo de oscilación. Sabiendo que su aceleración máxima es de 36 cm/s^2, halla:**

a) **La frecuencia y el período del movimiento.**

b) **La constante elástica del muelle.**

c) **La energía mecánica del sistema.**

d) **La velocidad del oscilador en $x = 2$ cm.**

En cada ciclo completo, la partícula recorre cuatro veces el espacio equivalente a la amplitud. Al ser ese espacio 16 cm, resulta que la amplitud es $A = 4$ cm. Conocida la amplitud y la aceleración máxima, podemos determinar la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{máx}}{A}} = 3 \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}48 \text{ Hz}$$

El período es $T = 1/f = 2{,}1$ s.

b) La constante elástica es $k = m\omega^2 = 0{,}36$ N/m.

c) La energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2{,}88 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

d) La velocidad viene dada por:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10{,}4 \text{ cm/s}$$

32 **PAU** **Una masa de 500 g unida a un resorte oscila armónicamente con una frecuencia de 0,4 Hz. Si la energía mecánica del oscilador es de 3 J:**

a) **Calcula la constante *k* del resorte.**

b) **Determina la amplitud de la oscilación.**

c) **Representa en una misma gráfica las variaciones de la energía cinética y potencial del oscilador frente al tiempo en los cinco primeros segundos y compara dicha gráfica con la de posición.**

a) Dado que $\omega^2 = k/m$, entonces $k = m\omega^2$, donde:

$$\omega = 2\pi f = 2{,}51 \text{ rad/s}$$

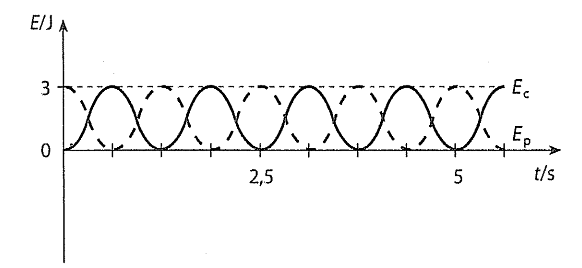
Por tanto:

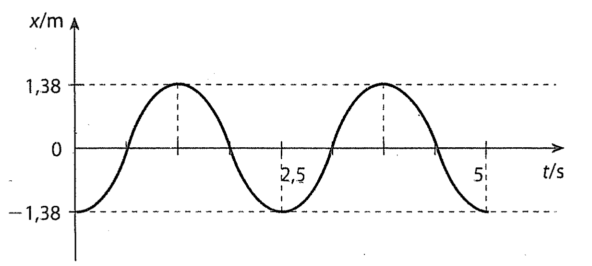
$$k = m\omega^2 = 3{,}15 \text{ N/m}$$

b) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 1{,}38 \text{ m}$$

c) Las gráficas pedidas son:





Nota: la oscilación vertical del muelle no supone mayor problema si consideramos que la posición de equilibrio se halla desplazada una distancia $y_0' = mg/k$ con respecto a la posición de equilibrio y_0 sin ninguna masa colgada. Teniendo en cuenta ese nuevo sistema de referencia, el problema se aborda de idéntica manera que si se tratase de una oscilación horizontal.

Para la gráfica de posición, se ha considerado que el sistema es estirado hacia abajo y luego soltado.

D33 PAU Una masa de 100 g unida a un muelle horizontal de constante elástica k = 30 N/m oscila armónicamente sin amortiguamiento. Sabiendo que su amplitud es de 7 cm, determina:

***a)* La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.**

***b)* La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.**

***c)* La energía cinética del sistema en x = 3 cm.**

***d)* La energía cinética y potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es de 8 m/s².**

a) A partir de los datos ofrecidos, podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{0,1}} = 17,32 \text{ rad/s}$$

Por lo que:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 17,32\sqrt{49 - x^2} \text{ cm/s}$$

b) Cuando la velocidad de oscilación es nula, la energía potencial del sistema alcanza su valor máximo, que coincide con la energía mecánica del sistema, es decir:

$$E_{p\,\text{máx}} = \frac{1}{2}kA^2 = 0,0735 \text{ J}$$

c) Cuando x = 3 cm, la velocidad es:

$$v = 17,32\sqrt{49 - 3^2} = 109,5 \text{ cm/s} \cong 1,1 \text{ m/s}$$

por lo que la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0,0605 \text{ J}$$

d) El valor de x correspondiente a ese valor de la aceleración es:

$$x = \frac{a}{\omega^2} = \frac{8}{300} = 0,0267 \text{ cm}$$

La energía potencial en dicho punto será:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0,0107 \text{ J}$$

Luego la energía cinética será:

$$E_c = E_{\text{mecánica}} - E_p = 0,0628 \text{ J}$$

34 PAU Si la amplitud de un movimiento armónico simple se duplica, calcula cuánto varía:

***a)* Su energía mecánica y período.**

***b)* Su velocidad máxima y aceleración máxima.**

a) La energía mecánica viene dada por $E = 1/2\, kA^2$. Por tanto, si A se duplica, la energía se cuadruplica: $E' = 4 \cdot E$.

El período es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ y depende solo de las características mecánicas del oscilador y no de la amplitud. Por tanto, el período no varía: $T' = T$.

b) Su velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = \pm\omega A$; por tanto, se duplicará: $v' = 2 \cdot v$.

Su aceleración máxima es $|a_{\text{máx}}| = |-\omega^2 A|$, por lo que también se duplicará: $a' = 2 \cdot a$.

El péndulo simple

35 La longitud de un péndulo simple es el cuádruple que la de otro. Compara sus períodos de oscilación.

El período del péndulo de cuádruple longitud será el doble, como se desprende de la expresión **7.15**.

36 PAU Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene un período de 2,84 s para pequeñas oscilaciones:

***a)* Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar de la medición.**

***b)* Si la velocidad de la bolita del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio es de 0,4 m/s, calcula la amplitud de la oscilación.**

***c)* Si la oscilación comienza en uno de los extremos, escribe la ecuación de posición en el eje X y represéntala gráficamente en función del tiempo.**

a) El período del péndulo, para pequeñas oscilaciones, viene dado por:

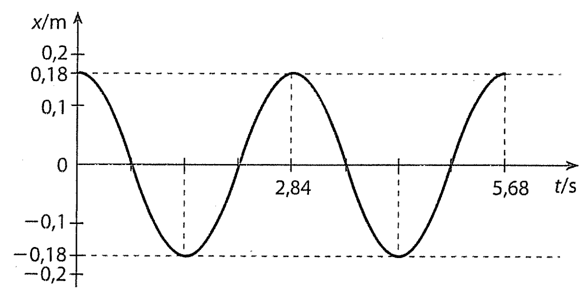
$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \cong 9,79 \text{ m/s}^2$$

b) En la posición de equilibrio, el péndulo alcanza su máxima velocidad, por lo que:

$$v = \omega A = \frac{2\pi}{T}A \Rightarrow A = \frac{vT}{2\pi} = 0,18 \text{ m}$$

c) Si suponemos que la posición inicial es la correspondiente al extremo de amplitud positiva, y considerando que $\omega = 2\pi/T = 2,21$, resulta:

$$x = A\cos\omega t = 0,18\cos 2,21t \text{ m}$$



8 Movimiento ondulatorio: ondas mecánicas

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Concepto de onda** páginas 207/209
  - 1.1. Representación de una onda página 208
  - 1.2. Clasificación de las ondas página 209
- **2. Propagación de ondas mecánicas** páginas 210/212
  - 2.1. Velocidad de propagación de las ondas mecánicas página 210
  - 2.2. Ecuación de propagación de una onda mecánica páginas 211/212
- **3. Ondas armónicas** páginas 213/219
  - 3.1. Parámetros constantes de una onda armónica página 214
  - 3.2. Ecuación de una onda armónica páginas 215/216
  - 3.3. Energía transmitida por las ondas armónicas páginas 217/219
- **4. Estudio cualitativo de algunas propiedades de las ondas** páginas 220/226
  - 4.1. El principio de Huygens páginas 220/222
  - 4.2. El principio de superposición en el movimiento ondulatorio páginas 223/226
- **5. Ondas estacionarias** páginas 227/229
  - 5.1. Localización de los nodos página 227
  - 5.2. Localización de los vientres o antinodos página 228
  - 5.3. Frecuencias de ondas estacionarias en una cuerda fija por varios extremos páginas 228/229
  - 5.4. Explicación gráfica del aspecto de una onda estacionaria página 229

Cuestiones previas (página 206)

1. ¿Es lo mismo un movimiento oscilatorio que uno ondulatorio?

No es lo mismo, la propagación de ese movimiento oscilatorio conduce al movimiento ondulatorio.

La diferencia fundamental radica en que en el movimiento ondulatorio se transporta energía.

2. Cita ejemplos de ondas. ¿Qué se propaga en una onda?

Ejemplos de ondas tenemos: olas en el agua, ondulaciones que se propagan por una cuerda, la luz, el sonido, etcétera.

En una onda se propaga exclusivamente energía.

3. ¿Qué parámetros se usan para caracterizar una onda? ¿Cuál es su significado físico?

Los parámetros que caracterizan una onda son:

- La longitud de onda (la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentran en el mismo estado de vibración); el período (el tiempo que tarda un punto cualquiera en repetir una oscilación).
- La frecuencia (el número de veces que un punto cualquiera repite cierto estado de oscilación por unidad de tiempo); velocidad de propagación (el cociente entre la longitud de la onda y su período).
- El número de onda (número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π).

4. ¿Por qué se concede en física tanta importancia al estudio de las ondas?

La importancia de las ondas radica en la cantidad de aplicaciones técnicas que su estudio ha aportado así como por ejemplo la cobertura de un teléfono móvil, los radares de circulación, etcétera.

También es importante por la cantidad de fenómenos físicos estudiados como los efectos de un seísmo, el movimiento de las olas marinas…

5. ¿Qué propiedades de las ondas conoces?

La reflexión, la refracción, difracción, interferencias, polarización, etcétera.

Actividades (páginas 209/229)

1 Indica cuáles de los siguientes tipos de ondas son transversales y cuáles son longitudinales: las ondas en una cuerda, el sonido, la luz y los rayos X.

El sonido es la propagación de ondas longitudinales. El resto de ondas son transversales.

2 Se tensa una cuerda larga que tiene una densidad lineal de masa de 0,01 kg/m aplicando una fuerza de 60 N. Si se hace oscilar transversalmente un extremo de la cuerda, ¿con qué velocidad se propagarán las ondas en la cuerda?

Dado que la tensión es de 60 N y que la densidad lineal es $\mu = 0{,}01$ kg/m, se obtiene directamente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 77{,}46 \text{ m/s}$$

3 PAU Repite los apartados de la aplicación, para el caso de un pulso con la forma:

$$y(x, t) = \frac{9}{3(x + 2t)^2}$$

donde *x* e *y* se miden en centímetros y el tiempo en segundos.

a) La amplitud del pulso es el valor máximo de $y(x, t)$, que se obtiene para el valor mínimo del denominador, lo cual sucede cuando $x + 2t = 0$; por tanto, la amplitud es $A = 3$ cm.

b) La velocidad de propagación es el factor que multiplica al tiempo en la funcion de onda; por tanto, la velocidad es 2 cm/s hacia la izquierda.

c) En $t = 0$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 0) = \frac{9}{3 + x^2}$$

Es fácil comprobar que esta es una función par en forma de campana, que presenta un máximo para $x = 0$, y sendos puntos de inflexión en $x = -1$ m y $x = +1$ m.

En $t = 1$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 1) = \frac{9}{3 + (x + 2)^2}$$

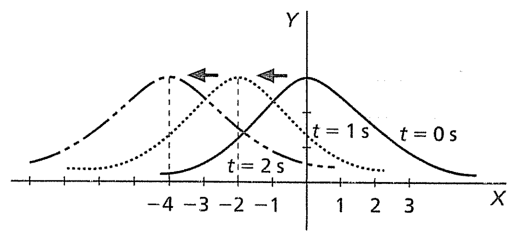
Esta función es idéntica a la anterior, aunque desplazada sobre el eje *X* dos unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para $x = -2$ m.

En $t = 2$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 2) = \frac{9}{3 + (x + 4)^2}$$

Esta función es idéntica a la primera, aunque desplazada sobre el eje *X* cuatro unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para $x = -4$ m.

Así pues, el pulso progresa como se indica en la siguiente figura:



4 PAU Repite la aplicación anterior para la onda armónica $y = 3 \text{ sen } 5\pi\,(0{,}8x - t)$ cm.

La ecuación puede escribirse de este otro modo:

$$y = 3 \text{ sen } (4\pi x - 5\pi t) \text{ cm}$$

a) Por tanto:

$$A = 3 \text{ cm}$$
$$\omega = 5\pi \text{ rad/s}$$
$$k = 4\pi \text{ cm}^{-1} = 12{,}56 \text{ cm}^{-1}$$

b) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5 \text{ cm}$$

La frecuencia valdrá:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

y el período será, por último:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}4 \text{ s}$$

c) La velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 1{,}25 \text{ cm/s}$$

La ecuación de la onda indica que se desplaza hacia la derecha.

5 **PAU** **Cierta onda transversal tiene por ecuación:**

$$y = 0{,}2 \text{ sen } \frac{\pi}{3}(3x - 30t) \text{ m}$$

a) **Calcula la velocidad de propagación de dicha onda.**

b) **Determina la velocidad de oscilación máxima de un punto cualquiera *x*.**

c) **Detalla las diferencias entre las dos velocidades anteriores e indica si existe alguna relación entre ambas.**

d) **Halla la velocidad de oscilación del punto $x = 2$ m cuando $t = 10$ s.**

Según se desprende de la ecuación:

$$A = 0{,}2 \text{ m};\ \omega = 10\pi \text{ rad/s};\ k = \pi \text{ m}^{-1}$$

a) La velocidad de propagación puede expresarse del siguiente modo:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi} = 10 \text{ m/s}$$

b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera es la derivada de la posición *y* con respecto al tiempo. Por tanto:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \cos(\pi x - 10\pi t) \text{ m/s}$$

La velocidad máxima se producirá cuando el coseno alcance su valor máximo, que es 1, por lo que el valor absoluto de dicha velocidad será:

$$v_{máx} = 2\pi \text{ m/s} = 6{,}28 \text{ m/s}$$

c) Ambas velocidades son totalmente distintas, pues una representa la velocidad a la que se propaga la perturbación, mientras que la otra es la velocidad de oscilación (en la dirección perpendicular, si la onda es transversal) de un punto del medio, en el caso de las ondas mecánicas.

Podemos establecer una relación entre ambas velocidades, usando, por ejemplo, la ecuación:

$$y = A \cos k(x - vt)$$

y derivando:

$$v_{oscilación} = Akv \text{ sen } k(x - vt)$$

d) Sustituyendo en la expresión que obtuvimos en en el apartado ***b)***, la velocidad de oscilación del punto $x = 2$ m, cuando $t = 10$ s, valdrá: $v_{oscilación} = -6{,}28$ m/s.

6 **PAU** **Una onda armónica viene dada por:**

$$y = 25 \cos \pi (2x - 5t) \text{ cm}$$

a) **Determina la longitud de onda y el período.**

b) **Calcula la velocidad y la aceleración de oscilación transversal de un punto cualquiera en función del tiempo.**

c) **Calcula la velocidad y la aceleración transversal en $t = 0$, en un punto situado en $x = 5{,}3$ cm.**

a) Puesto que $k = 2\pi$ cm^{-1}, entonces:

$$\lambda = 2\pi/k = 1 \text{ cm}$$

Además, $\omega = 5\pi$ rad/s; por lo que:

$$T = 2\pi/\omega = 0{,}4 \text{ s}$$

b) Derivando una vez con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad de oscilación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 125\pi \text{ sen } \pi (2x - 5t) \text{ cm/s}$$

Al derivar por segunda vez, se calcula la aceleración de oscilación de un punto:

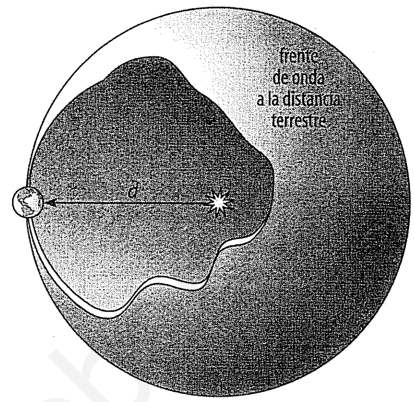
$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -625\pi^2 \cos \pi (2x - 5t) \text{ cm/s}^2$$

c) Para $t = 0$, y $x = 5{,}3$ cm, y sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$v = 373{,}29 \text{ cm/s};\ a = 1\,904{,}24 \text{ cm/s}^2$$

7 **Sabiendo que el radio terrestre es de 6 370 km y que la distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^8$ km, determina qué porción de la energía irradiada en la superficie solar llega a la terrestre (considera como superficie terrestre su sección transversal, de área πr^2).**

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, podemos suponer que toda la energía irradiada por segundo en la superficie solar es la misma que acaba repartiéndose por todo el frente esférico donde se sitúa la Tierra, como puede verse en la siguiente figura:



Considerando que la energía se distribuye uniformemente por todo el frente de onda, se cumplirá que:

$$\frac{E_T}{S_T} = \frac{E}{S}$$

donde E_T es la energía que llega a la superficie terrestre, S_T (considerada como su sección transversal), mientras que E es la energía total correspondiente al frente de onda esférico, cuyo radio es igual a la distancia Tierra-Sol.

Así pues, la energía que llega a la Tierra es:

$$E_T = E\frac{S_T}{S} = E\frac{\pi r_T^2}{4\pi d^2} = 4{,}53 \cdot 10^{-10} \cdot E$$

Es decir, llega aproximadamente la diezmilmillonésima parte de la energía irradiada por la superficie solar. Si tenemos en cuenta que el valor de la llamada constante solar es igual 1,3 kW/m^2 y lo multiplicamos por los metros cuadrados de la superficie transversal terrestre, obtendremos la energía total que llega a la superficie terrestre.

Al dividir dicho valor por $4{,}53 \cdot 10^{-10}$, se calcula la energía irradiada por la superficie solar, cuyo valor figura en el texto del margen de la página 219.

8 **¿Qué diferencias encuentras en el transporte de energía por medio de ondas armónicas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales?**

El transporte de energía en medios isótropos y no disipativos no conlleva amortiguación en el caso de las ondas unidimensionales, pero sí en el de las bidimensionales y tridimensionales.

Las bidimensionales se amortiguan conforme al inverso de la raíz cuadrada de la distancia, mientras que las tridimensionales lo hacen según el inverso de la distancia.

9 **¿Cuál crees que es el motivo por el que se hace imprescindible la instalación de repetidores de TV en montañas para la emisión de señales a distancia?**

La instalación de repetidores se justifica por la inexistencia del fenómeno de difracción, debido a que las longitudes de onda típicas de la TV (del orden de 0,1 a 10 cm) son demasiado pequeñas para producir difracción al encontrarse con obstáculos naturales (montañas y otros accidentes) o artificiales (edificios, por ejemplo).

10 **¿Qué ocurre con la energía en los procesos de interferencia? ¿Se «disipa» o desaparece en los mínimos? Trata de dar una explicación.**

La energía total permanece constante, pero no se distribuye homogéneamente, de modo que en los mínimos es nula y se incrementa en los máximos.

11 **PAU** **Dos ondas armónicas responden a las ecuaciones:**

$$y_1 = 0{,}5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t) \text{ m};$$
$$y_2 = 0{,}5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0{,}3) \text{ m}$$

a) **¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de la interferencia? ¿Cómo calificarías la interferencia que se produce?**

b) **¿Cuál es la frecuencia de dicha onda resultante? Escribe su ecuación.**

La onda resultante de la interferencia tiene por ecuación la siguiente:

$$y = \left(2A \cos \frac{\delta}{2}\right) \cdot \text{sen} \left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

a) La amplitud es:

$$A' = 2A \cos \frac{\delta}{2} = 0{,}99 \text{ m}$$

Así pues, es casi el doble que la amplitud de las ondas componentes, por lo que cabe calificar la interferencia de *prácticamente constructiva.*

b) La frecuencia de la onda resultante es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 250 \text{ Hz}$$

y su ecuación:

$$y = 0{,}99 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0{,}15) \text{ m}$$

12 **PAU** **Un punto, P, se encuentra a 10 m y 11 m, respectivamente, de dos fuentes de ondas, S y S', muy próximas entre sí, que emiten ondas de amplitud *A* con una frecuencia de 1 000 Hz. ¿Qué ocurrirá en dicho punto si las ondas se propagan por el medio con una velocidad de 500 m/s?**

La diferencia de caminos desde cada fuente al punto, Δd, es de 1 m.

Si la frecuencia de las ondas es de 1 000 Hz, su período será:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}001 \text{ s}$$

Como a su vez:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

entonces:

$$\lambda = vT = 500 \text{ m/s} \cdot 0{,}001 \text{ s} = 0{,}5 \text{ m}$$

Como puede comprobarse, se cumple que $\Delta d = 2 \cdot \lambda$, por lo que la interferencia de las ondas será constructiva en el punto P.

13 **PAU** **Una onda se proponga según la expresión:**

$$y = 0{,}1 \text{ sen } 2\pi(100t - x/0{,}40)$$

donde *x* e *y* se expresan en metros, y *t*, en segundos.

Determina:

a) **La longitud de onda, el período y la velocidad de propagación de la onda.**

b) **La distancia entre puntos que están en fase y en oposición de fase.**

a) De la ecuación de la onda, podemos concluir que:

$$\omega = 200\pi \text{ rad/s}$$
$$k = 5\pi \text{ m}^{-1}.$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4 \text{ m}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}01 \text{ s}$$
$$v = \frac{\lambda}{T} = 40 \text{ m/s}$$

b) Dos puntos en consonancia de fase se encuentran separados por una distancia igual a λ, esto es, 0,4 m.

Por el contrario, dos puntos en oposición de fase se encontrarán separados por $\lambda/2$, es decir, por 0,2 m. En general:

$$\text{distancia entre puntos en fase} = n\lambda$$
$$\text{distancia entre puntos en oposición de fase} = (2n + 1)\ \lambda/2$$

14 **PAU** **Cierta cuerda de longitud *l*, fija por ambos extremos, tiene 6 vientres al provocar oscilaciones a 840 Hz.**

a) **¿A qué frecuencia tendrá cuatro vientres?**

b) **¿A qué frecuencia habrá solo uno?**

a) La frecuencia dada corresponde al sexto armónico. Por tanto, la frecuencia del cuarto armónico (donde presentará 4 vientres) es:

$$f^{IV} = 4 \frac{f^{VI}}{6} = 560 \text{ Hz}$$

b) La frecuencia fundamental es la que presenta un solo vientre y valdrá:

$$f_0 = \frac{f^{VI}}{6} = 140 \text{ Hz}$$

15 **PAU** **Dos ondas armónicas vienen descritas por las siguientes ecuaciones:**

$$y_1 = 12 \text{ sen } \pi(2x - 3{,}2t) \text{ cm}$$
$$y_2 = 12 \text{ sen } \pi(2x + 3{,}2t) \text{ cm}$$

a) **Calcula la amplitud de estas ondas en las posiciones $x = 0{,}3$ cm, $x = 0{,}5$ cm, y $x = 1{,}5$ cm.**

b) **Determina la distancia entre nodos consecutivos.**

Al propagarse en sentidos opuestos, las dos ondas darán lugar al establecimiento de una onda estacionaria cuya expresión es:

$$y = (24 \text{ sen } 2\pi x) \cdot \cos 3{,}2\pi t \text{ cm}$$

a) Las amplitudes en los puntos citados serán:

$$x = 0{,}3 \text{ cm} \Rightarrow A = 22{,}8 \text{ cm}$$
$$x = 0{,}5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$
$$x = 1{,}5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$

b) En los nodos ha de cumplirse que:

$$kx = 0, \pi, 2\pi\ldots \Rightarrow 2\pi x = 0, \pi, 2\pi\ldots$$

Por tanto:

$$x = 0, 1/2, 1\ldots$$

Es decir, la distancia entre nodos consecutivos es de 0,5 cm.

Actividades finales (páginas 232/233)

Guía de repaso

1 **¿Qué se entiende por onda?**

Una onda representa el movimiento de propagación de una perturbación de un punto a otro sin que exista transporte neto de materia.

2 **¿Qué es lo que se propaga en una onda?**

Se transporta energía.

3 **Establece los criterios para clasificar las distintas ondas.**

Según el número de dimensiones en que se propaga la onda o según la coincidencia o no entre la dirección de oscilación de la propiedad perturbada y la de la propagación de la onda.

4 **¿Qué ejemplos tomados de la experiencia cotidiana conoces de ondas longitudinales y transversales?**

Ejemplo de onda longitudinal es el sonido y de transversal la luz o las ondas en una cuerda.

5 **¿De qué depende la velocidad de propagación de una onda en un medio?**

Depende de la elasticidad y la inercia del medio.

6 **¿Qué tipo de ecuación representaría una onda que se propaga hacia la derecha, en el sentido positivo de las *x*? ¿Y hacia la izquierda?**

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido positivo de *x*:

$$y = f(x - vt)$$

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido negativo de *x*:

$$y = f(x + vt)$$

7 **¿Qué es una onda armónica? Escribe su ecuación general.**

Una onda armónica es una perturbación que se propaga producida por un oscilador armónico. Su expresión general en función en función seno y coseno respectivamente es:

$$y(x, t) = A \text{ sen } k(x \pm vt)$$

$$y(x, t) = A \cos k(x \pm vt)$$

8 **¿Qué parámetros constantes definen una onda armónica?**

La longitud de onda, período, frecuencia, velocidad de propagación y número de onda.

9 **¿Qué relaciones pueden establecerse entre los parámetros?**

Entre la frecuencia y el período ($f = 1/T$); entre el número de onda y su longitud ($k = 2\pi/\lambda$); y entre la velocidad, longitud y período ($v = \lambda/T$).

10 **¿Se amortigua una onda armónica unidimensional a medida que se propaga, si el medio no disipa energía?**

No se amortigua la onda. Véase el subapartado del subepígrafe 3.3, dedicado a la energía en una onda armónica unidimensional.

11 **¿Por qué se amortiguan las ondas bidimensionales y tridimensionales a medida que se propagan aunque el medio no disipe energía? ¿Lo hacen de la misma manera?**

Debido a la conservación de la energía y a su distribución en frentes de onda. No lo hacen de la misma manera, en el caso de una bidimensional su amplitud decrece: $1/\sqrt{r}$ y en el caso de la tridimensional decrece: $1/r$.

12 **¿Qué fenómenos son específicamente ondulatorios? ¿Cuáles pueden darse tanto en el movimiento ondulatorio como en el de partículas?**

La difracción, la interferencia y la polarización son fenómenos estrictamente ondulatorios; la reflexión y la refracción también se dan en el campo de las partículas.

13 **¿En qué consiste el método de Huygens para explicar la propagación de las ondas?**

Consiste en dos principios:

- Todo punto de un medio hasta el cual llega una perturbación se comporta como un foco emisor de ondas secundarias que se propagan en la dirección de la perturbación.
- La superficie tangente (envolvente) a todas las ondas secundarias en un instante dado constituye el siguiente frente de ondas.

14 **¿Qué es la reflexión?**

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y se refleja propagándose por el mismo medio.

15 **¿En qué consiste la refracción?**

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y pasa propagándose por distinto medio.

16 **¿Qué es la difracción?**

La difracción es el fenómeno por el cual una onda modifica su dirección de propagación al encontrarse con aberturas u obstáculos.

17 **¿Qué es la interferencia entre ondas armónicas?**

Es cuando dos ondas llegan a combinar sus efectos en un punto.

18 **¿Cuándo tiene lugar una interferencia constructiva entre ondas idénticas? ¿Y cuándo es destructiva?**

Una interferencia es constructiva cuando las ondas están en consonancia de fase, mientras que es destructiva cuando se hallan en oposición de fase (véase la página 226).

19 **Dos fuentes de ondas puntuales producen ondas circulares. ¿Qué condición se cumple en los puntos donde se producen máximos de interferencia? ¿Y en los mínimos?**

En los máximos, la diferencia de recorridos de las ondas emitidas por cada fuente es un número entero de longitudes de onda, mientras que en los mínimos dicha diferencia es un número impar de semilongitudes de onda.

20 **¿Cómo se pueden originar ondas estacionarias? ¿Qué tiene de particular la ecuación que las representa?**

Por ejemplo, entre una onda dada y su onda reflejada en el mismo medio, como sucede en las ondas estacionarias en cuerdas fijas por uno o por sus dos extremos. La ecuación tiene de particular que la amplitud depende de la posición.

21 **¿En qué posiciones se encuentran los nodos que se generan en una onda estacionaria producida en una cuerda fija por sus dos extremos? ¿Y los antinodos?**

Los nodos se encuentran ubicados en $x = n\lambda/2$; y los antinodos en $x = (2n + 1)\ \lambda/4$.

22 **¿Qué son los armónicos? ¿Qué relación hay entre las frecuencias del quinto y del tercer armónico?**

Los armónicos son las frecuencias a las que tienen lugar el establecimiento de ondas estacionarias. La frecuencia del tercer armónico es 3/5 de la frecuencia del quinto armónico.

23 **¿Se propaga energía en una onda estacionaria?**

No se propaga energía. Véase el subepígrafe 5.4.

Propagación de ondas mecánicas

24 **Disponemos de una cuerda de cierta longitud; ¿qué debemos hacer si deseamos triplicar la velocidad de propagación de un pulso sobre dicha cuerda?**

Hay que aumentar nueve veces la tensión de la cuerda, como se desprende de la expresión **8.1**.

25 **¿Qué diferencia existe entre un movimiento oscilatorio y otro ondulatorio? Idea un símil que aclare esta diferencia.**

Un movimiento oscilatorio es efectuado por un cuerpo o sistema.

El movimiento ondulatorio consiste en la propagación de la energía sin que exista transporte neto de materia; tampoco es preciso que oscile ninguna partícula del medio, dado que existen ondas que se propagan en el vacío.

Las ondas electromagnéticas, por ejemplo, son generadas por cargas eléctricas oscilantes (este sería el movimiento oscilatorio), pero su propagación consiste en modificaciones del campo electromagnético (que varía de forma ondulatoria).

26 PAU **Un pulso de onda que se desplaza a lo largo del eje *X* viene dado por la siguiente función:**

$$y(x, t) = \frac{2}{1 + (x + 3t)^2}$$

donde *x* se mide en centímetros, y *t*, en segundos.

a) **Determina la amplitud del pulso.**

b) **¿Con qué velocidad y en qué sentido se desplaza?**

c) **Traza la forma de la onda en $t = 0$, $t = 1$ s, y $t = 2$ s, y comprueba el sentido del desplazamiento.**

a) La amplitud o máximo valor de *y* es el que se obtiene cuando el denominador alcanza su valor mínimo (esto es, cuando el paréntesis es cero), de modo que:

$$A = 2 \text{ cm}$$

b) La velocidad es el factor que multiplica al tiempo, por lo que:

$$v = 3 \text{ cm/s}$$

El pulso se desplaza hacia la izquierda, dado el signo positivo.

c) Para $t = 0$:

$$y = \frac{2}{1 + x^2}$$

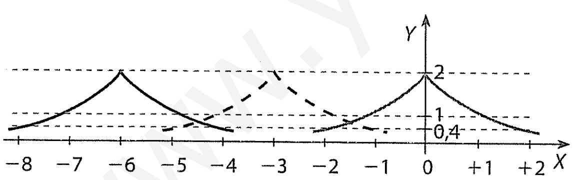
Para $t = 1$ s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 3)^2}$$

Para $t = 2$ s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 6)^2}$$

Al representar la propagación del pulso, observamos cómo se desplaza efectivamente 3 cm cada segundo hacia la izquierda:



27 **Sobre una cuerda tensa de 1,320 kg de masa y una longitud de 7 m, deseamos producir ondas que se propaguen a una velocidad de 30 m/s. ¿A qué tensión debemos someter la cuerda?**

Puesto que:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}}$$

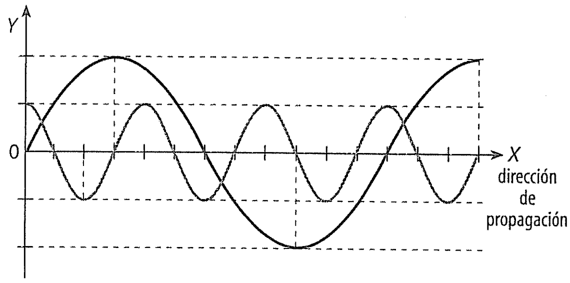
puede concluirse que:

$$T = \frac{mv^2}{l} = 169{,}7 \text{ N}$$

Ondas armónicas

28 **Dibuja dos ondas armónicas tales que una tenga el triple de frecuencia y la mitad de amplitud que la otra y que entre las dos exista un desfase de $\pi/2$.**

Las gráficas pedidas, considerando que las dos ondas tienen la misma velocidad de propagación, son:



29 **En un movimiento ondulatorio que se propaga a velocidad constante, la frecuencia y la longitud de onda:**

a) **Son independientes.**

b) **Están relacionadas.**

c) **Están relacionadas solo si la onda se propaga en un medio material.**

Razona y demuestra tu respuesta.

La respuesta correcta es la *b)*. Están interrelacionadas como se muestra en la expresión **8.6.** Incluso en el caso de que no exista medio material (ondas electromagnéticas), se mantiene la relación, que viene dada por la expresión $c = \lambda f$.

30 **Escribe la función de una onda armónica que se desplaza hacia la derecha en términos de:**

a) ***k* y *v*** ***b)*** **λ y *v*** ***c)*** **λ y *f*** ***d)*** ***v* y *f***

a) $y = A \text{ sen } k(x - vt)$

b) $y = A \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$

c) $y = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$

d) $y = A \text{ sen } 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)$

31 PAU **Una onda armónica se mueve hacia la izquierda con una amplitud de 10 cm, una longitud de onda de 0,5 m y un período de 0,2 s. Escribe la ecuación que representa dicha onda si $y = 10$ cm en $x = 0$ en el instante inicial. Determina igualmente la velocidad de propagación de la onda.**

Dado que en $x = 0$ y $t = 0$, la onda presenta su máxima elongación ($y = 0{,}1$ m), resulta conveniente escribir la ecuación en función del coseno:

$$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

El signo positivo denota la propagación hacia la izquierda. A partir de los datos se obtiene $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \text{ m}^{-1}$ y $\omega = 2\pi/T = 10\pi$ rad/s. Por tanto, en su forma coseno, la ecuación de la onda es:

$$y(x, t) = 0{,}1 \cos(4\pi x + 10\pi t) \text{ m}$$

Si se escribe la ecuación en forma seno, se debe introducir una fase inicial $\delta = \pi/2$:

$$y(x, t) = 0{,}1 \text{ sen } (4\pi x + 10\pi t + \pi/2) \text{ m}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

32 PAU **Escribe la ecuación de una onda armónica que avanza en el sentido positivo de las *x* con una amplitud de 15 cm y una frecuencia de oscilación de 350 Hz, si su velocidad de propagación es de 200 cm/s.**

Del enunciado se desprende que:

$$A = 15 \text{ cm}$$

$$f = 350 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 700\pi \text{ rad/s}$$

$$v = 200 \text{ cm/s} \Rightarrow k = \omega/v = 3{,}5\pi \text{ cm}^{-1}$$

Con esto ya podemos escribir la ecuación de la onda:

$$y = 15 \text{ sen } \pi(3{,}5x - 700t) \text{ cm}$$

33 **PAU** **Una onda armónica transversal se desplaza hacia la derecha (sentido positivo) en la dirección X y tiene una amplitud de 4 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determina:**

a) **La velocidad de propagación de la onda.**

b) **La fase inicial si en $x = 0$ y $t = 0$ la elongación es -2 cm.**

c) **La expresión matemática de la onda.**

d) **La distancia que separa dos puntos del eje X que oscilan con una diferencia de fase de $\pi/3$ rad.**

a) La velocidad de propagación es $v = \lambda f = 32$ cm/s.

b) Si la ecuación se escribe en forma coseno:

$$y(x, t) = A \cdot \cos(kx + \omega t + \delta)$$

Sabemos la elongación en $x = 0$ y $t = 0$, luego:

$$y(0, 0) = 4 \cos \delta = -2 \Rightarrow \delta = 2\pi/3$$

Mientras que si la ecuación se escribe en forma seno:

$$y(0, 0) = 4 \text{ sen } \delta = -2 \Rightarrow \delta = -\pi/6$$

c) Dado que $k = 2\pi/\lambda = \pi/2 \text{ cm}^{-1}$ y $\omega = 2\pi f = 16\pi$ rad/s, la ecuación de la onda es, en forma coseno:

$$y(x, t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{cm}$$

Mientras que en forma seno, será:

$$y(x, t) = 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{cm}$$

d) Sean dos puntos x_1 y x_2. La diferencia de fase entre ellos viene dada por:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)$$

Dado que la diferencia de fase es de $\pi/3$ rad, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$$

34 **PAU** **Una onda armónica viene descrita mediante la ecuación siguiente:**

$$y = 15 \text{ sen}(0{,}4x - 20t) \text{ cm}$$

Determina:

a) **La amplitud, frecuencia angular y el número de onda.**

b) **La longitud de onda, la frecuencia y el período.**

c) **La velocidad de propagación y el sentido de la propagación.**

a) De la ecuacion de la onda armónica se obtiene directamente:

$$A = 15 \text{ cm}$$
$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$
$$k = 0{,}4 \text{ cm}^{-1}$$

b) A partir de los parámetros anteriores, podemos obtener estos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 15{,}7 \text{ cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3{,}18 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}31 \text{ s}$$

c) La velocidad de propagación será $v = \lambda f = 50$ cm/s. Se llega a este mismo valor si se utiliza la expresión $v = \omega/k$.

A la vista del signo que hay dentro de la función seno, sabemos que la onda se propaga hacia la derecha (x crecientes).

35 **PAU** **Una onda armónica viene dada por la ecuación:**

$$y = 10 \text{ sen } 3\pi(3x + 30t) \text{ cm}$$

a) **¿En qué sentido se desplaza?**

b) **Halla su amplitud, frecuencia, período y longitud de onda.**

c) **¿A qué velocidad se propaga?**

a) Se desplaza en el sentido negativo de las x, es decir, hacia la izquierda.

b) De la ecuación se desprende que:

$$A = 10 \text{ cm}$$
$$\omega = 90\pi \text{ rad/s}$$
$$k = 9\pi \text{ cm}^{-1}$$

Por lo que:

$$f = 45 \text{ Hz}$$
$$T = 2{,}22 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}22 \text{ cm}$$

c) Su velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = 10 \text{ cm/s}$$

36 **Si la onda del ejercicio anterior se propaga por una cuerda, ¿cuál sería la velocidad máxima con la que oscilaría un punto cualquiera de dicha cuerda?**

Partiendo de $y = 10$ sen $(9\pi x + 90\pi t)$ cm, y derivando, obtenemos:

$$v = \frac{dy}{dt} = 900\pi \cos(9\pi x + 90\pi t) \text{ cm/s}$$

La velocidad máxima de oscilación se alcanza cuando el valor del coseno es igual a la unidad. Por tanto:

$$v_{\text{máx}} = 900\pi \text{ cm/s} = 28{,}26 \text{ m/s}$$

37 **PAU** **Escribe la ecuación de una onda que se propaga hacia el sentido negativo de las x y que tiene las siguientes características: $A = 15$ cm, $\lambda = 0{,}4$ cm, $f = 5$ Hz. Ten en cuenta que y toma su valor máximo en $x = 0$ y $t = 0$.**

Dado que $\lambda = 0{,}4$ cm y $f = 5$ Hz, entonces:

$$k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ cm}^{-1}$$
$$\omega = 2\pi f = 10\pi \text{ rad/s}$$

Por consiguiente, la ecuación de la onda tendrá la siguiente forma:

$$y = A \text{ sen}(kx + \omega t + \delta)$$

Como $y = A$ en $x = 0$ y $t = 0$, entonces:

$$\text{sen } \delta = 1 \Rightarrow \delta = \pi/2 \text{ rad}$$

Así pues, la ecuación será:

$$y = 15 \text{ sen } \pi(5x + 10t + 1/2) \text{ cm}$$

D38 **PAU** **Una partícula oscila verticalmente en la dirección Y, en torno al origen de coordenadas, con una amplitud de 2 cm y una frecuencia $f = 1/8$ Hz. La posición inicial de la partícula en $t = 0$ es $y = 2$ cm. Las oscilaciones de la partícula originan una onda armónica transversal que se propaga hacia X^+. Sabiendo que la distancia entre dos puntos consecutivos del eje X que oscilan con un desfase de π radianes es de 20 cm, determina:**

a) **La amplitud y frecuencia angular de la onda armónica.**

b) **Su longitud de onda y su velocidad de propagación.**

c) **La expresión matemática de la onda.**

d) **La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para un punto del eje X situado a 20 cm y el valor de dicha velocidad en $t = 10$ s.**

a) La amplitud de la onda es la propia del oscilador, es decir, $A = 2$ cm. Del mismo modo, la frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

b) La distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan con un desfase de π es igual a media longitud de onda. Por tanto:

$$\lambda = 40 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ m}$$

Así pues, la velocidad de propagación es:

$$v = \lambda f = 5 \text{ cm/s} = 0{,}05 \text{ m/s}$$

c) Dada la posición inicial del oscilador, resulta conveniente escribir la ecuación en forma coseno, de modo que:

$$y(x, t) = A \cos (kx - \omega t)$$

Puesto que $k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ m}^{-1}$ y $\omega = \pi/4$ rad/s, resulta:

$$y(x, t) = 0{,}02 \cos \left(5\pi x - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m}$$

d) Derivando y respecto del tiempo, se obtiene:

$$v_{osc} = \frac{dy}{dt} = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ sen} \left(5\pi x - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m/s}$$

Si $x = 20$ cm, resulta:

$$v_{osc} = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ sen} \left(\pi - \frac{\pi}{4}t\right) \text{ m/s}$$

Cuando $t = 10$ s, la velocidad resulta ser:

$$v_{osc} = 1{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ sen}(\pi - 2{,}5\pi) = 1{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

39 PAU **Una onda armónica con una frecuencia de 20 Hz se propaga a una velocidad de 80 m/s. Determina:**

***a)* A qué distancia mínima se encuentran dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados 30°.**

***b)* Cuál es el desfase, en un punto dado, entre dos desplazamientos que se producen en dos tiempos que distan 0,01 s.**

a) La distancia mínima entre dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados 30°, o $\pi/6$ rad, se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{6}$$

A partir de los datos podemos determinar k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \text{ m}$$

b) Al tratarse de un desfase temporal, entonces:

$$\Delta\Phi(t) = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi f \cdot 0{,}01 = 0{,}4\pi \text{ rad} = 72°$$

Propagación de energía en ondas armónicas

40 **¿Cómo podemos duplicar la potencia transmitida por una onda armónica que se propaga en una determinada dirección?**

Partiendo de la expresión **8.17**, puede duplicarse la potencia aumentando la frecuencia en un factor raíz de dos, incrementando la amplitud en la misma medida o haciendo que la velocidad de propagación se duplique, lo que en el caso de las ondas que se desplazan en una cuerda podría conseguirse cuadruplicando la tensión de la misma.

41 **Cuando una onda armónica se amortigua, ¿cambia su frecuencia? ¿Y su longitud de onda? ¿Y su velocidad de propagación? ¿Y su amplitud?**

Por su carácter armónico, no cambia ni su frecuencia ni su longitud de onda; en consecuencia, tampoco varía la velocidad de propagación.

Lo que sí se modifica en una onda amortiguada es la amplitud.

42 PAU **Una cuerda sometida a una tensión constante de 60 N tiene una densidad lineal de 150 g/m. ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para producir ondas armónicas de una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 30 Hz?**

La potencia transmitida a la cuerda viene dada por:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

En esta expresión, conocemos μ (0,15 kg/m), así como la frecuencia y la amplitud, y podemos determinar la velocidad, pues:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 20 \text{ m/s}$$

Sustituyendo todos los datos, resulta:

$$P = 533 \text{ W}$$

D43 PAU **Una cuerda tensa tiene una longitud de 8 m y pesa 8,7 N. Indica la potencia que debemos suministrarle para producir ondas armónicas que respondan a esta ecuación: $y = 10$ sen $\pi(4x - 80t)$ cm.**

Al ser una onda unidimensional, la potencia que debemos suministrar viene dada por la expresión:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

donde:

$$\mu = \frac{m}{l} = 0{,}11 \text{ kg/m}$$

$$A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{80\pi}{4\pi} = 20 \text{ cm/s} = 0{,}2 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

Por tanto:

$$P = 6{,}95 \text{ W}$$

Interferencias y ondas estacionarias

44 **¿Se produce alguna alteración en el avance de ondas que interfieren entre sí? Cita un ejemplo que avale tu respuesta.**

No hay interacción en lo relativo a la propagación de cada onda tomada individualmente. Lo único que puede variar es la amplitud resultante en determinados puntos, como consecuencia de la interferencia.

En el *Libro del alumno* (página 223) hemos proporcionado un ejemplo referido al sonido: varias personas pueden mantener conversaciones cruzadas, sin que las voces se estorben unas a otras.

45 **Al originar oscilaciones en un extremo de una cuerda que se halla unida a la pared por el otro extremo, se produce una onda estacionaria que tiene un solo vientre. ¿Qué debemos hacer si deseamos que tenga tres vientres?**

Hay que triplicar la frecuencia de la oscilación.

46 **¿Es siempre cinco veces mayor que la fundamental la frecuencia de un quinto armónico?**

Siempre es, en efecto, cinco veces mayor, como vemos en el caso de la cuerda fija por ambos extremos, recogido en el *Libro del alumno,* y en el de la cuerda fija por un extremo, en el que no existen los armónicos pares y que figura como ampliación en el material fotocopiable número 2.

47 **PAU** **Dos ondas armónicas que se propagan en sentidos opuestos producen una onda estacionaria de ecuación:**

$$y = 3 \text{ sen } 0{,}2x \cdot \cos 50t \text{ cm}$$

a) **Determina la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de las ondas componentes.**

b) **¿Cuál es la distancia entre dos nodos consecutivos?**

Si las ondas componentes tienen la forma:

$$y_1 = A \text{ sen } (kx + \omega t);\ y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t)$$

entonces la onda estacionaria resultante vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cdot \cos \omega t \text{ cm}$$

a) De la ecuación de la onda se obtiene que:

$$k = 0{,}2 \text{ cm}^{-1};\ \omega = 50 \text{ rad/s}$$

De este modo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 10\pi \text{ cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \text{ Hz}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = 250 \text{ cm/s}$$

b) Los nodos son los puntos de amplitud cero, lo cual se cumplirá cuando:

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots \Rightarrow 0{,}2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$$

De donde:

$$x = 0, 5\pi, 10\pi, 15\pi \ldots$$

Como puede comprobarse, la distancia entre nodos consecutivos es de 5π cm o 15,7 cm.

48 **PAU** **La función de una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos es:**

$$y = 0{,}3 \text{ sen } 0{,}2x \cdot \cos 500t \text{ cm}$$

a) **Determina su longitud de onda y su frecuencia.**

b) **¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda?**

c) **Si está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud?**

a) A partir de la ecuación dada se obtiene:

$$k = 0{,}2 \text{ cm}^{-1};\ \omega = 500 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 31{,}41 \text{ cm};\ f = \frac{\omega}{2\pi} = 79{,}62 \text{ Hz}$$

b) La velocidad es:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2\,500 \text{ cm/s}$$

c) Si vibra en su cuarto armónico, se cumplirá que:

$$f = 4\frac{v}{2l} \Rightarrow l = \frac{2v}{f} = 62{,}82 \text{ cm}$$

49 **PAU** **Una onda estacionaria se establece en una cuerda de 2 m fija por ambos extremos. Cuando la frecuencia de la excitación es de 200 Hz, la cuerda presenta cuatro vientres.**

a) **¿Cuál es la longitud de la onda?**

b) **¿En qué armónico vibra la cuerda?**

c) **¿Cuál es la frecuencia fundamental?**

a) Si la cuerda presenta cuatro vientres, está vibrando en su cuarto armónico, tal como se observa en la figura 8.45 de la página 228. En consecuencia, la longitud de onda es justamente la mitad de la longitud de la cuerda:

$$l = 4\frac{\lambda}{2}$$

En esta expresión, el número 4 indica los vientres que hay. Despejando λ:

$$\lambda = \frac{l}{2} = 1 \text{ m}$$

b) Como hemos visto, la cuerda vibra en el cuarto armónico.

c) La frecuencia fundamental será:

$$f_0 = \frac{f^{IV}}{4} = 50 \text{ Hz}$$

50 **PAU** **Dos ondas armónicas tienen por ecuaciones:**

$$y_1 = 3 \text{ sen } \pi\,(4x - 200t) \text{ m}$$

$$y_2 = 3 \text{ sen } \pi\,(4x - 200t - 0{,}15) \text{ m}$$

Halla la amplitud y frecuencia de la onda resultante

Se trata de dos ondas que se propagan en la misma dirección y sentido, pero que están desfasadas. En consecuencia, interfieren produciendo, en un punto x y un tiempo t, una perturbación que vendrá dada por:

$$y = 6 \cos 0{,}075\pi \cdot \text{sen } \pi\,(4x - 200t - 0{,}075) \text{ m}$$

Así pues, la amplitud será:

$$A' = 6 \cos 0{,}075\pi = 5{,}83 \text{ m}$$

Puesto que $\omega = 200\pi$ rad/s, la frecuencia será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$

9 Ondas sonoras

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Ondas sonoras: qué son, cómo se producen y cómo se propagan** página 235
- **2. Velocidad de propagación del sonido** páginas 236/237
  - 2.1. Velocidad de propagación del sonido en los gases páginas 236/237
- **3. Intensidad del sonido y sensación sonora** páginas 238/240
  - 3.1. Escala de nivel de intensidad sonora página 239
  - 3.2. Sensación sonora página 240
  - 3.3. Contaminación acústica y calidad de vida página 240
- **4. Fenómenos ondulatorios del sonido** páginas 241/243
  - 4.1. La reflexión del sonido página 241
  - 4.2. La refracción del sonido página 242
  - 4.3. La difracción del sonido página 242
  - 4.4. Interferencias sonoras página 243
- **5. Ondas sonoras estacionarias en tubos: instrumentos de viento** páginas 244/245
  - 5.1. Ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por uno de los extremos página 245
  - 5.2. Ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por ambos extremos página 245
- **6. El efecto Doppler** páginas 246/249
  - 6.1. Fuente sonora en movimiento y observador en reposo páginas 246/247
  - 6.2. Fuente sonora en reposo y observador en movimiento página 247
  - 6.3. Fuente sonora y observador en movimiento página 248
  - 6.4. Romper la barrera del sonido página 249

Cuestiones previas (página 234)

1. ¿De qué tipo son las ondas sonoras?

Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales.

Son mecánicas porque necesitan un medio material para propagarse y son longitudinales porque las partículas del medio oscilan en la misma dirección de propagación de la onda.

2. ¿En qué medios pueden propagarse las ondas sonoras? ¿En cuál de ellos lo hacen con mayor velocidad?

Las ondas sonoras se pueden propagar a través de medios materiales sólidos, líquidos o gaseosos.

Las ondas sonoras se propagan a mayor velocidad en líquidos y sólidos que en gases.

3. ¿Cómo se propaga el sonido? ¿Conoces algún hecho que permita demostrar su naturaleza ondulatoria?

Se propagan mediante variaciones alternadas de las densidades del medio, aunque en los gases estas variaciones de densidad equivalen a una secuencia alternada de compresiones y enrarecimientos.

Mediante un sencillo experimento que consiste en fijar una regla por uno de sus extremos a un tornillo de mordaza. Al separar la regla, el vaivén genera compresiones y enrarecimientos del aire generándose una onda mecánica.

4. ¿Por qué percibimos los sonidos de forma tan distinta en una misma habitación cuando está amueblada y cuando está sin amueblar?

Debido a fenómenos como la reflexión y difracción del sonido que hace que tengan distintos comportamientos el sonido en una habitación con mayor objetos que en otra que no tenga ningún objeto.

5. ¿Por qué suena distinto el claxon de un coche según se acerque o aleje de nosotros?

Por el efecto Doppler que debido al movimiento relativo entre la fuente sonora y el observador hace que cambie la frecuencia con que se percibe el sonido.

Actividades (páginas 237/248)

1 Determina la velocidad de propagación del sonido en el aire a la temperatura de 0 °C y de 25 °C. Datos: R = 8,31 J/mol K, γ = 1,4, y M = 29

Usando la expresión **9.2**, cabe concluir que, para $T = 273$ K:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 331 \text{ m/s}$$

donde $M = 29$ g/mol = 0,029 kg/mol.

Así mismo, para $T = 298$ K:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 345{,}7 \text{ m/s}$$

2 Una persona da un golpe en un extremo de una viga de gran longitud. Otra persona que se encuentra en el otro extremo con el oído pegado a la viga percibe dos golpes. ¿Por qué motivo?

La persona en cuestión percibe en primer lugar el sonido que se transmite a través de la viga sólida, que, al propagarse a mayor velocidad, llega antes a sus oídos.

El segundo golpe corresponde al sonido que se transmite por el aire.

3 A partir del dato del coeficiente de dilatación adiabática del hexafluoruro de azufre, determina la velocidad de propagación del sonido en dicho medio a 20 °C.

Dato: masas atómicas en kg/mol: F = 0,019; S = 0,032

La velocidad de propagación del sonido en el SF_6 viene dada, como en cualquier gas, por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Sustituyendo los valores propios de este gas (γ = 1,08 y M = 0,146 kg/mol) se obtiene:

$$v = 129 \text{ m/s}$$

4 El sonido de la sirena de una fábrica llega a un trabajador 7 s después de que aquella haya empezado a funcionar. Calcula la frecuencia de la sirena, sabiendo que la distancia entre el trabajador y la fábrica es $49 \cdot 10^3$ veces la longitud de onda del sonido emitido.

La distancia que separa al trabajador de la fábrica es:

$$d = vt = 2\,317 \text{ m (suponiendo } T = 0\text{ °C)}$$

Por tanto, según se desprende de los datos, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{d}{49\,000} = 4{,}73 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Así pues, la frecuencia será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 6\,998 \text{ Hz}$$

5 ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda del sonido audible que se propaga en el aire?

Considerando la velocidad correspondiente a 0 °C, el intervalo de λ estaría comprendido entre:

$$\lambda_{mín} = \frac{v}{f_{mín}} = \frac{331 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 16{,}5 \text{ m}$$

y

$$\lambda_{máx} = \frac{v}{f_{máx}} = \frac{331 \text{ m/s}}{20\,000 \text{ Hz}} = 1{,}65 \text{ cm}$$

6 PAU Considera una fuente sonora que emite a 500 Hz en el aire. Si este sonido se transmite después a un líquido con una velocidad de propagación de 1 800 m/s, determina:

***a)* La longitud de onda del sonido en el aire.**

***b)* El período del sonido en el aire.**

***c)* La longitud de onda del sonido en el líquido.**

Consideraremos que $T = 0$ °C (en el aire).

a) La longitud de onda del sonido en el aire será:

$$\lambda = \frac{331 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0{,}662 \text{ m}$$

b) El período del sonido en el aire será:

$$T = \frac{1}{500 \text{ Hz}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

c) La longitud de onda del sonido en el líquido es:

$$\lambda = \frac{1\,800 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 3{,}6 \text{ m}$$

7 Halla las amplitudes en los cambios de presión que corresponden a los límites de intensidad del oído humano y compáralos con la presión atmosférica estándar.

A partir de la expresión **9.3**, se obtiene:

$$\Delta p = 2\rho v I$$

Por tanto, para el límite bajo de intensidad:

$$\Delta p = 2 \cdot 1{,}22\ \text{kg/m}^3 \cdot 331\ \text{m/s} \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 8{,}07 \cdot 10^{-10}\ \text{Pa}$$

Y para el límite alto de intensidad:

$$\Delta p' = 2 \cdot 1{,}22\ \text{kg/m}^3 \cdot 331\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{W/m}^2 = 807{,}64\ \text{Pa}$$

Como la presión atmosférica es de 101 300 Pa, hay que admitir que el oído humano es muy sensible a pequeñas variaciones de presión.

8 **Si el nivel de intensidad en una fábrica debe permanecer por debajo de 85 dB, ¿cuál es la máxima intensidad de sonido permitida en dicha fábrica?**

Despejando de la expresión **9.4:**

$$\log I = \frac{\beta + 10 \log I_o}{10}$$

La máxima intensidad es:

$$I = 3{,}16 \cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

9 **PAU** **El nivel de intensidad sonora de una bocina es de 60 dB a 10 m de distancia. Considerando la sirena un foco emisor puntual, determina:**

a) **La intensidad sonora a 100 m y a 1 km de distancia.**

b) **El nivel de intensidad sonora a 100 m y a 1 km de distancia.**

c) **La distancia a la que la sirena deja de ser audible.**

A partir de la expresión **9.4.** podemos determinar la intensidad a ese nivel:

$$60\ \text{dB} = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

a) Teniendo en cuenta que el sonido se propaga como una onda esférica, se cumple la ley del inverso del cuadrado de la distancia, de modo que:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow I r_1^2 = I_2 r_2^2$$

donde $I_1 = 10^{-6}\ \text{W/m}^2$ y $r_1 = 10$ m

Aplicando la expresión a las dos distancias consideradas, se obtiene:

$$I_2\ (100\ \text{m}) = 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

$$I_3\ (1\ \text{km}) = 10^{-10}\ \text{W/m}^2$$

b) Los valores de nivel de intensidad sonora correspondientes a I_2 y I_3 son respectivamente:

$$10 \log \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 40\ \text{dB}$$

$$10 \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20\ \text{dB}$$

c) La sirena deja de ser audible en el punto en que $I' = 10^{-12}$ W/m^2.

Por tanto:

$$r' = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I'}} = 10\,000\ \text{m} = 10\ \text{km}$$

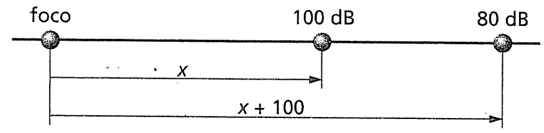
10 **PAU** **Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual. La primera, a una distancia *x* del foco, da como resultado 100 dB, y la segunda, realizada 100 m más lejos de *x* en la misma dirección, da como resultado 80 dB.**

Determina:

a) **Las distancias al foco desde donde se hacen las mediciones.**

b) **La potencia sonora del foco emisor.**

El dibujo representativo de esta situación es el siguiente:



a) Las intensidades correspondientes a 100 dB y 80 dB son, respectivamente, 10^{-2} W/m^2 y 10^{-4} W/m^2. Aplicando la ley del inverso del cuadrado de la distancia se obtiene:

$$10^{-2} \cdot x^2 = 10^{-4}\ (x + 100)^2$$

Resolviendo *x*, obtenemos:

$$x = 11{,}1\ \text{m}$$

b) La potencia se relaciona con la intensidad de una onda esférica según la expresión:

$$P = I \cdot 4\pi x^2 = 10^{-2} \cdot 4\pi\ (11{,}1)^2 = 15{,}5\ \text{W}$$

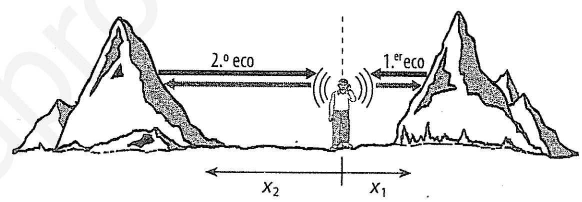
11 **Una persona situada entre dos montañas oye ecos al cabo de 3,2 y 5 segundos.**

a) **¿A qué distancia se encuentran ambas montañas?**

b) **¿Cuándo oirá el tercer eco? ¿Y el cuarto? ¿Y el quinto?**

Dato: velocidad del sonido = 340 m/s

a) La siguiente figura ilustra la situación que plantea el enunciado:



Como puede comprobarse, el primer eco se percibe después de que el sonido haya recorrido una distancia $2x_1$, mientras que el segundo se percibe cuando la distancia recorrida es $2x_2$. Por tanto:

$$x_1 = \frac{vt_1}{2} = 544\ \text{m}$$

$$x_2 = \frac{vt_2}{2} = 850\ \text{m}$$

Así, la distancia a la que se encuentran las montañas es 1394 m (544 m + 850 m).

b) El tercer eco es el que corresponde a la segunda reflexión de los sonidos. En este caso, el eco procedente de ambas montañas llegará a la vez a oídos de la persona al cabo de 8,2 s (3,2 s + 5 s).

El cuarto eco corresponde a la tercera reflexión proveniente de la montaña más cercana y se percibirá a los 11,4 s (8,2 s + 3,2 s).

El quinto eco, por último, corresponde a la tercera reflexión en la montaña más lejana y será escuchado a los 13,2 s (8,2 s + 5 s).

12 **¿Por qué se produce esa sensación tan peculiar de silencio cuando ha caído una copiosa nevada que ha cuajado?**

Entre los copos de la nieve recién caída existen muchos espacios huecos, de modo que aquella se convierte en un material muy absorbente del sonido. De esa manera, desaparece cualquier efecto derivado de la reflexión del sonido.

13 **¿Se te ocurre algún modo de amplificar un sonido producido bajo el agua, mediante el principio de la lente acústica?**

El sonido puede amplificarse, por ejemplo, intercalando entre la fuente y el receptor un globo lleno de aire. Como la velocidad de propagación en el aire es menor, se produce el efecto de refracción.

14 **Determina las tres frecuencias más bajas de un tubo de 2 m que está abierto por un extremo si la velocidad del sonido es de 340 m/s.**

A partir de la expresión:

$$f = (2n + 1)\frac{v}{4l}$$

Las tres frecuencias más bajas corresponden a los valores de $n = 0$, 1 y 2. Así pues:

$$f_1 = \frac{v}{4l} = 42{,}5 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3\frac{v}{4l} = 127{,}5 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5\frac{v}{4l} = 212{,}5 \text{ Hz}$$

15 **Halla las tres frecuencias más bajas de un tubo de 2,5 m que está abierto por ambos extremos si la velocidad del sonido es de 340 m/s.**

Las frecuencias más bajas corresponden a los valores 1, 2 y 3 de n en la siguiente expresión:

$$f = n\frac{v}{2l}$$

Así pues:

$$f_1 = \frac{v}{2l} = 68 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2\frac{v}{2l} = 136 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3\frac{v}{2l} = 204 \text{ Hz}$$

16 **El tren AVE, que se desplaza a 220 km/h, hace sonar su silbato con una frecuencia de 520 Hz. Halla la frecuencia que percibe un observador en reposo cuando el tren se aproxime y se aleje.**

La frecuencia que percibe el observador en reposo cuando el tren se aproxima viene dada por:

$$f' = f\left(\frac{v}{v - v_F}\right)$$

donde $v_F = 220$ km/h $= 61{,}11$ m/s. Por tanto:

$$f' = 520 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 61{,}11 \text{ m/s}}\right) = 634 \text{ Hz}$$

Por el contrario, cuando el tren se aleja:

$$f' = f\left(\frac{v}{v + v_F}\right)$$

$$f' = 520 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 61{,}11 \text{ m/s}}\right) = 440{,}77 \text{ Hz}$$

17 **PAU** **Una ambulancia se mueve con una velocidad de 80 km/h mientras suena su sirena de 450 Hz. En sentido contrario, viaja otro coche a 90 km/h. Determina la frecuencia que percibe el conductor del coche cuando:**

a) **Los dos vehículos se aproximan.**

b) **Los dos vehículos se alejan.**

En este caso, la fuente sonora y el observador están en movimiento con una velocidad de:

$$v_F = 80 \text{ km/h} = 22{,}22 \text{ m/s}$$

$$v_o = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

a) Cuando los dos vehículos se aproximan:

$$f' = f\left(\frac{v + v_o}{v - v_F}\right) = 516{,}86 \text{ Hz}$$

b) Cuando los dos vehículos se alejan:

$$f' = f\left(\frac{v - v_o}{v + v_F}\right) = 391{,}33 \text{ Hz}$$

18 **El sonido de una campana que emite a 450 Hz se percibe a 485 Hz cuando nos acercamos a ella a cierta velocidad. ¿Qué frecuencia percibiremos cuando nos alejemos de ella a la misma velocidad?**

La frecuencia que percibimos a medida que nos acercamos a la campana, viene dada por la siguiente expresión:

$$f' = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$485 \text{ Hz} = 450 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s} + v_o}{340 \text{ m/s}}\right)$$

Resolviendo, obtenemos que: $v_o = 26{,}4$ m/s.

Así pues, cuando nos alejemos de la campana con dicha velocidad, la frecuencia que percibiremos será:

$$f' = f\left(\frac{v - v_o}{v}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 450 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s} - 26{,}4 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}}\right) = 415 \text{ Hz}$$

Cuestiones y problemas (páginas 252/253)

Guía de repaso

1 **¿Cómo se produce una onda sonora?**

Se produce cuando las compresiones y los enrarecimientos del aire se suceden de forma alternada y se propaga por el aire. Además para que estas ondas mecánicas longitudinales sean sonoras sus frecuencias deben estar comprendidas entre 20 y 20 000 Hz.

2 **¿Cómo se propagan las ondas sonoras?**

Se propagan mediante variaciones alternadas de densidad.

3 **¿Puede transmitirse el sonido en el vacío?**

El sonido no puede transmitirse por el vacío, porque es una onda mecánica y como tal necesita un medio material para su propagación.

4 **¿En qué medios pueden propagarse las ondas sonoras? ¿En cuál lo hace con mayor velocidad?**

Se propaga en cualquier medio ya sea líquido, gaseoso o sólido. Pero, lo hace con mayor velocidad en un medio sólido.

5 **¿Entre qué frecuencias se considera sonora una onda mecánica longitudinal?**

Entre 20 y 20 000 Hz.

6 **¿Cómo varía con la temperatura la velocidad de propagación del sonido en un gas?**

La velocidad de propagación del sonido en un gas aumenta con la temperatura.

7 **¿Cómo varía con la distancia la intensidad del sonido si lo consideramos como una onda esférica?**

Disminuye conforme al inverso del cuadrado de la distancia.

8 **¿Cómo se define el nivel de intensidad de una onda sonora? ¿En qué unidades se expresa?**

El nivel de intensidad sonora es la relación entre la intensidad de una onda sonora y la intensidad umbral (umbral de la audición). Su unidad se expresa en decibelios (dB).

9 **¿Qué fenómenos se relacionan con la reflexión del sonido?**

El eco y la reverberación.

10 **¿Qué fenómenos se relacionan con la refracción del sonido?**

Por ejemplo, las lentes acústicas y la audición de sonidos lejanos.

11 **¿Cuándo se produce eco?**

Cuando la distancia a la superficie reflectante es mayor de 17 m.

12 **¿En qué consiste el fenómeno de la reverberación?**

Es cuando la reflexión del sonido no produce eco.

Se produce cuando el tiempo que tarda en llegarnos el sonido reflejado tarda menos de de 0,1 s.

13 **¿Cuál es el requisito para que se establezcan ondas estacionarias en un tubo con un extremo abierto? ¿Cuál es la expresión de las frecuencias posibles?**

Se establecen ondas cuando:

$$l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

Y las posibles frecuencias son:

$$f = (2n + 1)\frac{v}{4l}$$

14 **¿Cuál es el requisito para que se produzcan ondas estacionarias en un tubo con sus dos extremos abiertos? ¿Qué expresión nos da las frecuencias posibles?**

Se establecen ondas cuando:

$$l = \frac{n\lambda}{2}$$

Y las posibles frecuencias son:

$$f = \frac{nv}{2l}$$

15 **¿En qué consiste el efecto Doppler? ¿Qué magnitud de onda varía cuando se mueve el foco? ¿Y cuando es el observador el que se mueve?**

El efecto Doppler es el fenómeno relativo de la fuente sonora y el observador por el que cambia la frecuencia que se percibe de un sonido.

Cuando se mueve el foco varía la longitud de onda y cuando es el observador el que se mueve será la velocidad.

16 **¿Cuándo se producen las ondas de choque?**

Se produce cuando la fuente supera la velocidad del sonido.

Ondas sonoras y velocidad de propagación

17 **La frecuencia de una onda sonora en el aire a 0 °C es de 520 Hz. ¿Cuál es su longitud de onda?**

Puesto que la velocidad de propagación del sonido en el aire a 0 °C es de 331 m/s, tendremos que:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0{,}636 \text{ m}$$

18 **El oído humano puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20 000 Hz, aproximadamente; ¿cuáles son las longitudes de onda en el aire que corresponden a estas frecuencias?**

Las longitudes de onda para 20 Hz y 20 000 serán, respectivamente:

$$\lambda_{\text{umbral}} = \frac{v}{f_{\text{umbral}}} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{v}{f_{\text{máx}}} = 0{,}017 \text{ m}$$

19 **PAU** **Se da un golpe en un extremo de una viga de hierro. Una persona que está situada en el otro extremo percibe dos golpes separados por un intervalo de 1,2 s. ¿Cuál es la longitud de la viga de hierro?**

La velocidad de propagación del sonido en el hierro es 5 130 m/s. La diferencia de tiempo se debe a la distinta velocidad de propagación en el hierro y en el aire. En ambos casos, la distancia recorrida por el sonido es la misma, por lo que tendremos:

$$l = v_{\text{aire}} t \Rightarrow t = \frac{l}{v_{\text{aire}}}$$

$$l = v_{\text{Fe}} t' \Rightarrow t' = \frac{l}{v_{\text{Fe}}}$$

$$t - t' = 1{,}2 \text{ s}$$

Es decir:

$$l\left(\frac{1}{v_{\text{aire}}} - \frac{1}{v_{\text{Fe}}}\right) = 1{,}2$$

de donde:

$$l = 437 \text{ m}$$

Intensidad y nivel de intensidad sonora

20 **Razona la veracidad o falsedad del enunciado: «un sonido de 60 dB tiene el doble de intensidad que uno de 30 dB».**

La afirmación es falsa: la intensidad del sonido es 1 000 veces mayor. Dado que $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, al desarrollar la expresión **9.4** para un sonido de 60 dB, se obtiene:

$$60 \text{ dB} = 10 \log I + 120$$

Es decir:

$$I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

y para el sonido de 30 dB:

$$30 \text{ dB} = 10 \log I' + 120$$

Es decir:

$$I' = 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

Por tanto:

$$I = 10^3 \cdot I'$$

21 **Dos ondas sonoras, una en el aire y otra en el agua, tienen la misma intensidad. ¿Qué relación existe entre sus amplitudes de presión? Y si tuvieran la misma amplitud de presión, ¿qué relación guardarían sus intensidades?**

A partir de la expresión **9.3,** podemos concluir que las amplitudes de presión se relacionan con la intensidad según la siguiente igualdad:

$$\Delta p = 2\rho v I$$

Como la velocidad en el agua es de 1 493 m/s y en el aire (a 25 °C) es de 340 m/s, y teniendo en cuenta los valores de densidad del agua y el aire (1 000 kg/m^3 para la primera y 1,29 kg/m^3 para el segundo), se obtiene que la amplitud de presión en el agua es 3 404 veces la del aire.

Por el contrario, si la amplitud de presión es la misma, la intensidad de la onda en el aire será 3 404 veces la intensidad en el agua.

22 **PAU** **Un foco puntual emite ondas sonoras esféricas de 165 Hz de frecuencia que se propagan a 330 m/s. Si la intensidad de la onda a 1 m del foco es de 1 000 W/m^2, determina:**

a) **La intensidad de la onda a 10 m del foco.**

b) **La diferencia de fase de la onda sonora entre ambos puntos.**

c) **La variación del nivel de intensidad sonora entre ambos puntos.**

a) Aplicando la ley del inverso del cuadrado de la distancia, se obtiene:

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2 \Rightarrow I_2 = 10 \text{ W/m}^2$$

b) La diferencia de fase $\Delta\Phi = kr_2 - kr_1 = k\Delta r$

siendo $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/v = \pi \text{ m}^{-1}$ y $\Delta r = 9$ m

Por tanto:

$$\Delta\Phi = 9\pi$$

c) Los niveles de intensidad correspondientes a 1 000 W/m^2 y 10 W/m^2 son, respectivamente, 150 dB y 130 dB. Así pues, la variación del nivel de intensidad entre ambos puntos es de 20 dB.

23 PAU **El tubo de escape de una moto produce un nivel de intensidad sonora de 70 dB a 5 m de ella. Suponiendo que las ondas sonoras se propagan en frentes de onda esféricos, determina:**

***a)* La velocidad constante a la que debe alejarse la moto para que deje de escucharse por completo su ruido al cabo de 7 minutos.**

***b)* ¿Cuántas motos iguales a la anterior se necesitarían para aumentar el nivel de intensidad sonora a 5 m de ellas hasta 80 dB?**

a) La intensidad correspondiente a 70 dB es 10^{-5} W/m^2. El ruido dejará de percibirse cuando la intensidad adquiera su valor umbral 10^{-12} W/m^2, cosa que sucede a la distancia d deducida de la ley del inverso del cuadrado de la distancia:

$$d = d_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} = 15\,811 \text{ m}$$

Por tanto, el desplazamiento de la moto en esos 7 minutos (420 s) ha sido $\Delta d = 15\,806$ m. Así pues, su velocidad es:

$$v = \frac{\Delta d}{t} = 37{,}6 \text{ m/s} = 135 \text{ km/h}$$

b) La intensidad correspondiente a 80 dB es 10^{-4} W/m^2. Dado que la intensidad emitida por cada moto es de 10^{-5} W/m^2, se necesitan 10 motos identicas.

24 **Una ventana de 2 m^2 de superficie está abierta a una calle cuyo tráfico produce un nivel de intensidad, a la distancia a la que se encuentra la ventana, de 70 dB. ¿Cuál es la potencia acústica de las ondas sonoras que atraviesan la ventana?**

Los 70 dB medidos corresponden a una intensidad de 10^{-5} W/m^2. Por tanto, la potencia acústica de las ondas que atraviesan la ventana es de:

$$P = I \cdot S = 10^{-5} \text{ W/m}^2 \cdot 2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

25 PAU **Una fuente sonora puntual emite con una potencia de salida de 70 W. Determina:**

***a)* La intensidad sonora a 5 m y a 50 m.**

***b)* El nivel de intensidad sonora a esas distancias.**

***c)* La distancia a la que el nivel de intensidad se reduce a 20 dB.**

***d)* La distancia a la que deja de percibirse el sonido.**

a) Puesto que las ondas son esféricas, la intensidad en función de la distancia viene dada por la expresión:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Sustituyendo para $r = 5$ m, se obtiene $I = 2{,}2 \cdot 10^{-1}$ W/m^2

Sustituyendo para $r = 5$ m, se obtiene $I' = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ W/m^2

b) Los niveles de intensidad correspondientes a esos valores son, por aplicación de la expresión 9.4:

113,5 dB para $I = 2{,}2 \cdot 10^{-1}$ W/m^2

93,5 db para $I' = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ W/m^2

c) La intensidad correspondiente a 20 dB es 10^{-10} W/m^2, por lo que:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I^2}} = 236\,077 \text{ m} = 236 \text{ km}$$

Obviamente no se trata de un resultad muy realista, pues no se considera más amortiguación que la inherente a su propagación en frentes de ondas esféricas.

d) Corresponde a $I = 10^{-12}$ W/m^2. Aplicando la expresión anterior, eso sucede a:

$$r = 2\,360 \text{ km}$$

Puede utilizarse el resultado poco realista de este problema para discutir qué procesos de amortiguación por pérdida de energía pueden tener lugar en una propagación sonora en el ambiente.

26 **Determina el nivel de intensidad, en dB, correspondiente a una onda sonora de intensidad:**

***a)* 10–^{8} W/m^2** ***b)* 10^{-3} W/m^2**

a) Para $I = 10^{-8}$ W/m^2:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 40 \text{ dB}$$

b) Para $I = 10^{-3}$ W/m^2:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 90 \text{ dB}$$

27 **Una fuente sonora emite un sonido de cierta intensidad. ¿Se duplica el nivel de intensidad al hacer sonar a la vez otra fuente sonora de la misma intensidad? Si no es así, ¿en qué factor aumenta?**

No se duplica el nivel de intensidad. Lo que realmente se duplica es la intensidad, de modo que ahora $I' = 2 \cdot I$.

Para una sola fuente:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 (\log I - \log I_0)$$

Para las dos fuentes:

$$\beta' = 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 [(\log 2 + \log I) - \log I_0]$$

Como puede observarse en la expresión anterior, el nivel de intensidad $\beta' = \beta + 10 \log 2$. Por tanto, no se duplica sino que aumenta en 3 dB, pues $10 \log 2 = 3$.

28 PAU **¿En qué fracción de intensidad debe reducirse un sonido para rebajar de 80 dB a 60 dB su nivel de intensidad?**

Llamando I_1 a la intensidad correspondiente a 80 dB, e I_2, a la correspondiente a 60 dB, tenemos, en cada caso:

$$80 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$60 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}$$

Restando ambas expresiones se obtiene:

$$20 = 10 \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0}\right)$$

Es decir:

$$20 = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$$

Por tanto:

$$\log \frac{I_1}{I_2} = 2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$$

En consecuencia, la intensidad I_2 debe ser la centésima parte de I_1:

$$I_2 = \frac{I_1}{100} = 10^{-2} \cdot I_1$$

29 **Un secador de pelo tiene un nivel de intensidad de 85 dB. ¿Cuál es la intensidad de su sonido en W/m²?**

Despejando directamente de la expresión **9.4** de la página 239 del *Libro del alumno*:

$$85 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log I = -3{,}5$$

Es decir:

$$I = 3{,}1\cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

Fenómenos ondulatorios del sonido

30 **¿Por qué navegando de noche cerca de la costa se oyen sonidos provenientes de ella que de día no se perciben?**

Durante la noche, el aire más próximo a la superficie del agua suele estar a menor temperatura que el aire que se encuentra a mayor altura (recuérdese el fenómeno de las brisas costeras). En consecuencia, los sonidos procedentes de la costa se refractan en las capas donde la temperatura es mayor, con lo que sufren una desviación parecida a una reflexión, de modo que los sonidos pueden llegar al barco situado a cierta distancia.

31 **¿Hasta qué ángulo límite de incidencia podría sufrir refracción y propagarse por el agua una onda sonora que se desplazara por el aire?**

El máximo valor del ángulo de refracción será 90° y marcará el límite entre refracción y reflexión total. Así pues, aplicando la ley de Snell, tendremos:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,90°} = \frac{v_{aire}}{v_{agua}}$$

Usando los datos de la tabla 9.1, obtenemos que el máximo ángulo de incidencia posible sería de 13°.

32 **Si el sonido es capaz de propagarse por la madera a mayor velocidad que por el aire, ¿por qué es tan difícil escuchar una conversación cuando la puerta está cerrada?**

Dado que la velocidad de propagación del sonido en la madera es muy elevada (3 850 m/s para la madera de encina), el ángulo máximo de incidencia del sonido que puede transmitirse a través de la puerta sería de 5°. Todas las ondas sonoras que incidan sobre la puerta con un ángulo mayor serán reflejadas.

33 **Dos altavoces emiten simultáneamente ondas sonoras de 680 Hz que se propagan por el aire a 340 m/s. Si colocamos enfrente de los altavoces un micrófono de modo que quede situado a 5 m de un altavoz y a 6,25 m del otro altavoz, ¿percibirá sonido?**

Se percibirá un máximo de sonido si la interferencia es constructiva, cosa que sucede si se cumple:

$$\Delta x = n\lambda$$

Por el contrario, no se percibirá si la interferencia es destructiva, es decir, si:

$$\Delta x = (2n + 1)\lambda$$

donde 2n + 1 es un número impar. La longitud de onda correspondiente al sonido emitido es $\lambda = v/f = 0{,}5$ cm.

Dado que $\Delta x = 1{,}25$ m, puede comprobarse que:

$$\Delta x = 5\lambda/2$$

Por lo que el micrófono no recogerá sonido en esa posición.

34 **Fíjate en la figura de la página 253 y responde a las siguientes cuestiones:**

a) **¿A qué es debido que oigamos a través de la puerta abierta el sonido producido en la otra habitación? ¿Qué fenómenos físicos tienen lugar?**

b) **¿Qué sucedería si suprimiéramos la pared A? ¿Seguiría percibiendo el receptor el sonido emitido por el emisor?**

a) Es debido a tres fenómenos:

- El primero es la difracción del sonido a través de la abertura de la puerta.
- El segundo es la reflexión en la pared A del sonido que pasa por la puerta.
- La tercera razón es la refracción (y, en consecuencia, transmisión) del sonido al atravesar la pared que separa las dos habitaciones. Este último fenómeno no suele ser despreciable en muchas viviendas de tabiques delgados.

b) Si se suprimiese la pared A, desaparecería el mecanismo de reflexión, pero se mantendrían los otros dos mecanismos, por lo que seguiría percibiéndose el sonido.

35 **PAU** **Un sonido cuya longitud de onda en el aire es de 2 m penetra en el agua, en donde se mueve con una velocidad de 1 493 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda en el agua?**

La frecuencia del sonido en el aire es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{m/s}}{2\ \text{m}} = 170\ \text{Hz}$$

Puesto que la frecuencia no varía al pasar de un medio a otro, su longitud de onda en el agua es:

$$\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{1\,493\ \text{m/s}}{170\ \text{Hz}} = 8{,}78\ \text{m}$$

36 **PAU** **Un barco emite ondas sonoras con su sonar. El eco procedente de la reflexión del sonido en el fondo del mar se escucha a los 4 s de ser emitido aquel. Calcula a qué profundidad está el fondo del mar.**

Dato: velocidad del sonido en el agua de mar = 1 533 m/s

El sonido reflejado recorre una distancia 2*d* (ida y vuelta), es decir:

$$2d = vt$$

de donde:

$$d = \frac{1\,533\ \text{m/s}\cdot 4\ \text{s}}{2} = 3\,066\ \text{m}$$

37 **PAU** **Calcula la desviación que experimenta un «rayo» sonoro al pasar del aire al agua si forma con la normal a la superficie de separación un ángulo de 20°. ¿Y si pasa del agua al aire con el mismo ángulo de incidencia?**

Datos: velocidad de propagación en el aire = 340 m/s; velocidad de propagación en el agua 1 493 m/s

Como se desprende de la ley de Snell, no se produce refracción si el sonido pasa del aire al agua.

La razón es que de la expresión:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{v_{aire}}{v_{agua}}$$

se obtiene esta otra:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{v_{agua}}{v_{aire}}\,\text{sen}\,\hat{i} > 1$$

Por tanto, no es posible la refracción. Es un hecho que habremos comprobado alguna vez al hablar desde fuera del agua a alguien que está sumergido en ella; sencillamente, nunca podrá oír lo que le decimos.

Si el sonido pasa del agua al aire, entonces:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{v_{aire}}{v_{agua}}\,\text{sen}\,\hat{i} = 0{,}0778$$

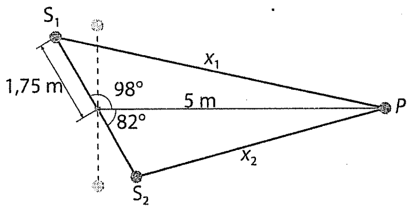
Es decir:

$$\hat{r} = 4{,}46°$$

Efectivamente, es fácil comprobar que un sonido emitido bajo el agua puede escucharse en el exterior.

D38 **PAU** **Dos altavoces que emiten en la misma frecuencia están separados 3,5 m entre sí. A 5 m del punto medio de los altavoces, en dirección perpendicular, se sitúa un micrófono. Al girar la caja de los altavoces, se registra un máximo para un ángulo de 8°. ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del sonido?**

La situación descrita en el problema se reproduce en la siguiente figura:



El primer máximo tiene lugar cuando:

$$x_1 - x_2 = \lambda$$

Aplicando el teorema de los cosenos, obtenemos, en primer lugar:

$$x_1^2 = (1{,}75\ \text{m})^2 + (5\ \text{m})^2 - 2 \cdot 1{,}75\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} \cdot \cos 98°$$

es decir:

$$x_1 = 5{,}52\ \text{m}$$

y, en segundo lugar:

$$x_2^2 = (1{,}75\ \text{m})^2 + (5\ \text{m})^2 - 2 \cdot 1{,}75\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} \cdot \cos 82°$$

es decir:

$$x_2 = 5{,}06\ \text{m}$$

Por tanto, la longitud de onda valdrá:

$$\lambda = x_1 - x_2 = 0{,}46\ \text{m}$$

y la frecuencia será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 739{,}13\ \text{Hz}$$

Ondas sonoras estacionarias

39 **¿Cómo podríamos conseguir una frecuencia más baja que la fundamental en un tubo de cierta longitud, abierto por sus dos extremos?**

Podría conseguirse tapando uno de los extremos del tubo.

De ese modo, la frecuencia más baja viene dada por $\frac{v}{4l}$ en lugar de por $\frac{v}{2l}$.

40 **Es corriente ver que, en los intermedios de un concierto, los músicos afinan los instrumentos debido al aumento de temperatura en la sala. ¿Cómo afecta este aumento de temperatura a los instrumentos de viento? ¿Y a los de cuerda?**

Con el aumento de temperatura de la sala, se incrementa ligeramente la velocidad de propagación del sonido, con lo que las frecuencias de los instrumentos de viento aumentan un poco y las notas son más altas.

En el caso de los instrumentos de cuerda, el propio uso y la dilatación debida al aumento de temperatura hacen que la cuerda se destense ligeramente; como se desprende de la expresión **8.29**, la frecuencia disminuye.

Por tanto, el efecto es el contrario en los dos tipos de instrumentos.

41 **¿Por qué cuando aplicamos el oído a una caracola escuchamos un rumor parecido al del mar?**

Porque la caracola actúa como cavidad resonante que amplifica ciertos ruidos ambientales, lo que origina ese peculiar «ruido de mar» tan característico.

42 **PAU** **En un laboratorio que se encuentra a una temperatura de 27 °C se lleva a cabo el experimento descrito en el dispositivo representado en la figura 9.20. Usando un diapasón de 512 Hz, se obtienen resonancias cuando las longitudes de la columna de aire son de 17 cm, 51 cm, 85 cm, etcétera. ¿Cuál es la velocidad de propagación del sonido a la temperatura indicada?**

La condición que debe cumplirse para que se establezcan ondas estacionarias es que:

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{2n+1}$$

Sus frecuencias permitidas estarán regidas por la siguiente expresión:

$$f = (2n+1)\frac{v}{4l}$$

De ella se desprende que:

$$v = \frac{4lf}{2n+1}$$

Las longitudes dadas corresponden al primer, tercer y quinto armónico (para n igual a 0, 1 y 2, respectivamente). Empleando cualquiera de ellas, obtenemos:

$$v = \frac{4 \cdot 0{,}17\ \text{m} \cdot 512\ \text{Hz}}{1} = 348{,}16\ \text{m/s}$$

43 **PAU** **La distancia que separa dos nodos consecutivos en un sistema de ondas sonoras estacionarias en el aire es de 80 cm. Calcula la frecuencia y el período del sonido.**

La distancia entre dos nodos consecutivos es igual a $\lambda/2$, pues, como se desprende de la ecuación **8.23** (página 226), los nodos tienen lugar cuando:

$$kx = 0, \pi, 2\pi \ldots$$

Como $k = 2\pi/\lambda$, las posiciones x serán:

$$x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2 \ldots$$

Así pues:

$$\Delta x = \lambda/2$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$\lambda = 160\ \text{cm} = 1{,}6\ \text{m}$$

Así pues:

$$f = \frac{v}{\lambda} = 212{,}5\ \text{Hz};\ T = \frac{1}{f} = 4{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

44 **PAU** **Un tubo de órgano de 1,2 m se encuentra abierto por sus dos extremos:**

a) **¿Cuál es su frecuencia fundamental?**

b) **¿Cuál es el armónico más alto posible para este tubo, dentro del intervalo audible?**

a) Su frecuencia fundamental es:

$$f = \frac{v}{2l} = 141{,}66\ \text{Hz}$$

b) Considerando 20 000 Hz la máxima frecuencia audible, tendremos:

$$f = n\frac{v}{2l} \Rightarrow n = \frac{2lf}{v}$$

Sustituyendo los datos:

$$n = \frac{2 \cdot 1{,}2\ \text{m} \cdot 20\,000\ \text{Hz}}{340\ \text{m/s}} = 141$$

Por tanto, el armónico más alto es el 141.

Efecto Doppler

45 **Cuando el murciélago vuela emite unos gritos estridentes (f = 60 Hz). Al incidir estas ondas sonoras en un objeto sólido, por ejemplo una presa, emiten un eco que es captado por los finos oídos del murciélago. ¿Cómo sabe el murciélago si su presa está acercándose, alejándose o si permanece estacionaria? ¿Cómo calcula la distancia a la que se encuentra?**

El hecho de saber si la presa se acerca o se aleja está relacionado con el efecto Doppler: si el murciélago percibe una frecuencia mayor que la de la onda reflejada, es que él y su presa se aproximan. Por el contrario, si la frecuencia es menor, la presa se está alejando. Si la frecuencia no varía, la presa se encuentra estacionaria con respecto al murciélago. La distancia a la presa o al obstáculo la estima en función del tiempo que tarda en percibir el eco.

D46 **Un observador en reposo percibe que la frecuencia del claxon de un vehículo que se le acerca disminuye su frecuencia en un 18 % después de pasar por delante de él. Si la velocidad de propagación del sonido en esas condiciones es de 340 m/s, determina la velocidad a la que se mueve el vehículo.**

Cuando la fuente se aproxima al observador, la frecuencia f' que este percibe, viene dada por:

$$f' = f\left(\frac{v}{v - v_F}\right)$$

Cuando se aleja, después de pasar por delante del observador, la frecuencia f'' que este percibe es:

$$f'' = f\left(\frac{v}{v + v_F}\right) \text{ siendo } f'' = 0{,}82\, f'$$

Así pues, dividiendo ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{v + v_F}{v - v_F} \Rightarrow \frac{1}{0{,}82} = \frac{340 + v_F}{340 - v_F}$$

Resolviendo, se obtiene para la velocidad del vehículo:

$$v_F = 33{,}6 \text{ m/s}$$

47 **PAU** **La sirena de una ambulancia que viaja a 110 km/h emite un sonido intermitente de 400 Hz de frecuencia. Calcula la frecuencia que percibe el pasajero de un autocar que viaja en sentido contrario a 100 km/h cuando:**

a) **Se aproxima hacia la ambulancia.**

b) **Se aleja de la ambulancia después de cruzarse.**

a) La frecuencia que percibe el observador a medida que se aproxima mutuamente es:

$$f' = f\left(\frac{v + v_0}{v - v_F}\right)$$

Siendo v_F = 110 km/h = 30,5 m/s y v_o = 100 km/h = 27,7 m/s. Sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$f' = 475 \text{ Hz}$$

b) Por el contrario, a medida que se alejan, la expresión de la frecuencia percibida viene dada por:

$$f'' = f\left(\frac{v - v_0}{v + v_F}\right)$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$f'' = 337 \text{ Hz}$$

48 **Un coche que circula a 120 km/h adelanta a otro que va a 90 km/h, haciendo sonar su claxon. Si la frecuencia de la bocina es de 480 Hz, halla la que percibe el conductor adelantado antes y después de ser adelantado.**

a) Es posible considerar al conductor adelantado como si estuviese en reposo y el contrario (la fuente sonora) se aproximara a una velocidad relativa de 30 km/h (120 km/h − 90 km/h) o 8,33 m/s. En ese caso, la frecuencia que percibe el conductor adelantado antes de serlo es:

$$f' = f\left(\frac{v}{v - v_F}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 480 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 8{,}33 \text{ m/s}}\right) = 492 \text{ Hz}$$

b) Después de que se haya efectuado el adelantamiento, el resultado es equivalente a suponer que la fuente se mueve con una velocidad relativa igual a 8,33 m/s, pero alejándose.

Por tanto:

$$f' = f\left(\frac{v}{v + v_F}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$f' = 480 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 8{,}33 \text{ m/s}}\right) = 468{,}5 \text{ Hz}$$

Nota: obsérvese que en este ejercicio no se han aplicado las expresiones **9.9** y **9.10,** pues estas implican el supuesto de que fuente y observador se mueven en sentidos opuestos.

10 Naturaleza de la luz

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 256)

1. ¿Por qué se habla de la naturaleza dual de la luz?

Se habla de naturaleza dual debido a su doble naturaleza: corpuscular y ondulatoria.

2. ¿Se propaga la luz a la misma velocidad en todos los medios? ¿A qué se llama índice de refracción?

No se propaga a la misma velocidad porque depende del medio en el que se propaga. El índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio.

3. ¿Qué principio ilustra el funcionamiento de las fibras ópticas?

El principio de la de la reflexión total interna.

4. ¿Por qué algunas sustancias son transparentes y otras son opacas?

Depende de la interacción de la luz con la materia desde un punto de vista ondulatorio. Así, las sustancias transparentes transmiten todas las radiaciones hasta emerger por el lado opuesto. En cambio, los materiales opacos reflejan todas las radiaciones.

5. ¿A qué se deben los colores de los cuerpos?

Se debe a la absorción selectiva. Un determinado color se forma cuando un material iluminado con luz blanca absorbe todas las radiaciones salvo la correspondiente a ese color.

6. ¿Por qué el cielo se ve azul durante el día?

Se debe a un fenómeno llamado esparcimiento de la luz que consiste en que la intensidad esparcida es considerablemente mayor en el azul y el violeta que en el rojo. Como nuestra sensibilidad al azul es mucho mayor que al violeta, por este motivo el color del cielo que observamos es azul.

Actividades (páginas 259/281)

1 ¿Qué fenómenos relativos a la luz pueden ser explicados desde el punto de vista corpuscular y cuáles no?

Desde el punto de vista corpuscular pueden explicarse la reflexión (asumiendo que los corpúsculos colisionan de forma elástica contra la superficie de separación de los dos medios) y la refracción. Sin embargo, no pueden explicarse ni la difracción ni la polarización ni las interferencias.

2 Teniendo en cuenta el valor obtenido por Fizeau para la velocidad de la luz y los datos referidos a su dispositivo, determina a qué velocidad angular en rps y en rad/s giraba la rueda cuando el pulso reflejado se hacía visible.

En el tiempo que tarda el pulso de luz en recorrer los 17 266 m de ida y vuelta, la rueda dentada habrá girado 1/720 de vuelta. Con el valor de velocidad obtenido por Fizeau, el tiempo empleado por el pulso será:

$$t = \frac{d}{v} = 5{,}516 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$$

Por tanto, la velocidad angular de la rueda en revoluciones por segundo será:

$$\omega = \frac{1/720\ \text{revoluciones}}{5{,}516 \cdot 10^{-5}\ \text{s}} = 25{,}18\ \text{rps}$$

valor que, multiplicado por 2π, nos da la velocidad de la rueda en rad/s:

$$\omega = 25{,}18 \cdot 2\pi = 158{,}13\ \text{rad/s}$$

3 Considerando el valor actual de la luz, y teniendo en cuenta que la distancia media Tierra-Sol es de $1{,}496 \cdot 10^8$ km, trata de estimar la diferencia de períodos de Ío, observado desde el punto más próximo y más distante de nuestra órbita.

Tomando $3 \cdot 10^8$ m/s como velocidad de la luz, y teniendo en cuenta que la diferencia de períodos se debe al tiempo que tarda la luz en recorrer el diámetro de la órbita terrestre ($D = 2 \cdot d_{T\text{-}S}$), dicha diferencia será:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot d_{T\text{-}S}}{c} = 997{,}3\ \text{s} = 16\ \text{min}\ 37\ \text{s}$$

4 ¿Qué ocurrirá si el rayo incidente es perpendicular a la superficie de separación de dos medios?

En ese caso no se produce ninguna desviación del rayo refractado. La razón es evidente si se considera la igualdad:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r}$$

Si $\operatorname{sen} \hat{i} = 0$, debe cumplirse también que $\operatorname{sen} \hat{r} = 0$.

5 ¿Se producirá refracción si el ángulo de incidencia se aproxima a 90°?

Sí se producirá refracción, siempre que el índice de refracción del medio de incidencia sea menor que el del medio de refracción, como ocurre si el rayo pasa del aire al agua, por ejemplo. En esas condiciones, si $\operatorname{sen} \hat{i} = 1$ ($\hat{i} = 90°$), entonces:

$$n_1 = n_2 \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = \frac{n_1}{n_2}$$

Como se observa, la exigencia de que sen $\hat{r}$ pueda valer como máximo 1 implica que $n_2 \geq n_1$.

6 PAU Un haz fino de luz amarilla de sodio de 589 nm pasa de propagarse en el aire (n = 1,000 293) a hacerlo en cristal de cuarzo. Cuando el ángulo de incidencia es de 30°, se observa que el de refracción es de 18,9°. Determina:

***a)* El índice de refracción del cristal de cuarzo para esa luz.**

***b)* La velocidad a la que se propaga dicha luz en el cuarzo.**

***c)* La longitud de onda en el nuevo medio.**

a) De la ley de Snell se desprende que:

$$n_2 = \frac{n_1 \operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = 1{,}544$$

b) De la definición del índice de refracción obtenemos lo siguiente:

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = 1{,}943 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

c) La longitud de onda en el nuevo medio se obtiene a partir de la expresión **10.6:**

$$\lambda' = \lambda \frac{n_1}{n_2} = 381{,}59\ \text{nm}$$

7 ¿Qué ocurrirá cuando un haz de luz incide con cierto ángulo sobre una superficie de separación de dos medios si el segundo medio tiene menor índice de refracción? ¿Podemos garantizar que siempre se producirá refracción?

Si el segundo medio tiene un índice $n_2 < n_1$, entonces $\operatorname{sen} \hat{r} > \operatorname{sen} \hat{i}$, es decir, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. Puede llegar un momento en el que $\hat{r} = 90° \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = 1$. Esto ocurrirá cuando:

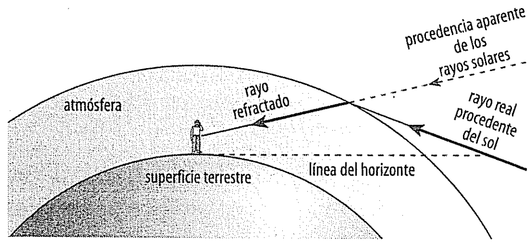
$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{i} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como $n_2 < n_1$, sí existe un ángulo de incidencia para el que ya no se produce refracción. Luego, no podemos garantizar que siempre se produzca refracción.

8 **Suele decirse que, cuando observamos un bello atardecer, el Sol hace ya rato que se ocultó realmente. Trata de explicar este fenómeno.**

Efectivamente, al pasar la luz solar de propagarse en el medio interplanetario (que se halla prácticamente vacío) a hacerlo en la atmósfera, que tiene un mayor índice de refracción, sufre una desviación, que será tanto mayor cuanto mayor sea sen $\hat{i}$.

Como puede verse en la figura, el Sol, que está por debajo de la línea del horizonte, es, sin embargo, visible antes de su salida o después de su puesta en virtud de este fenómeno de refracción, ya que el ojo sitúa su imagen en la prolongación de los rayos que le alcanzan.



Esto ocurre fundamentalmente al atardecer y cuando amanece.

9 **Teniendo en cuenta el fenómeno de la refracción, responde de forma razonada a las siguientes preguntas:**

a) **¿Sufre desviaciones la luz al pasar de un medio a otro si ambos tienen distinto índice de refracción?**

b) **¿Cambia la luz de velocidad de propagación al pasar de un medio a otro con distinto índice de refracción?**

a) Efectivamente, debido al cambio de velocidad que sufre la luz al pasar de un medio a otro, varía también la dirección de propagación.

b) Por la propia definición del índice de refracción, si dos medios tienen distinto índice de refracción, la luz se propagará con diferente velocidad en ellos.

10 PAU **Una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, suspendida en el aire, tiene un espesor de 8 cm y un índice de refracción de 1,6. En la cara superior de la lámina incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 45°.**

a) **Calcula los valores correspondientes del ángulo de refracción en el interior de la lámina y del ángulo de emergencia.**

b) **Determina el desplazamiento lateral experimentado al atravesar la lámina.**

c) **Dibuja la trayectoria geométrica del rayo.**

a) El ángulo de refracción en el interior del vidrio se obtiene por la ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r}$$

de donde:

$$\operatorname{sen} \hat{r} = \frac{n_1 \operatorname{sen} \hat{i}}{n_2} = \frac{1{,}000\,293 \cdot \operatorname{sen} 45°}{1{,}6}$$

$$\operatorname{sen} \hat{r} = 0{,}44$$

Por tanto:

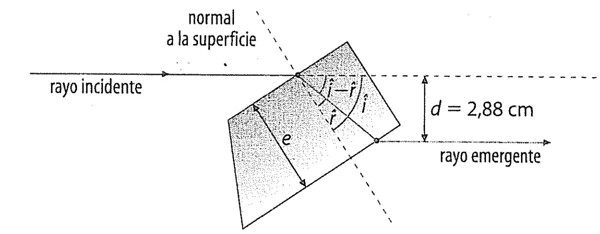
$$\hat{r} = 26{,}10°$$

El ángulo de emergencia es igual al de incidencia, es decir, de 45°.

b) El desplazamiento lateral que experimenta el rayo al atravesar la lámina de vidrio es:

$$d = e\,\frac{\operatorname{sen}(\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}} = 2{,}88 \text{ cm}$$

c) La trayectoria geométrica del rayo es:



11 **Si observas un objeto rojo a través de un filtro transparente azul-verdoso, ¿de qué color se verá?**

El objeto rojo se verá negro, pues el filtro deja pasar el azul y el verde, pero absorbe justamente el rojo.

12 PAU **¿De qué color veremos una rosa roja iluminada con luz verde?**

La luz verde no tiene componente roja. Puesto que la rosa absorbe todos los colores salvo el rojo, al iluminarla con luz verde se verá negra.

13 **¿Por qué el humo de los cigarrillos tiene un tono azulado?**

El tono azulado se observa cuando el humo sale del cigarro en reposo, pero no si es exhalado. Cuando sale del cigarro en reposo, se cumplen las condiciones del esparcimiento Rayleigh: el pequeño tamaño de las partículas y la gran separación que hay entre ellas hacen que se esparza mayoritariamente la luz azul. Por el contrario, si el humo es exhalado, consta en realidad de vapor de agua condensado sobre las partículas del humo, por lo que estas son ahora demasiado grandes y ocurre un fenómeno similar al explicado para las nubes: el humo se percibe grisáceo-blanquecino.

14 **Puede explicarse de la manera aquí expuesta el tono azulado de los mares o crees que se debe a otro fenómeno? Busca información al respecto.**

El color del mar no puede explicarse mediante el fenómeno del esparcimiento. El color de la superficie se debe en realidad a la reflexión del azul celeste. Sin embargo, hay un hecho que puede comprobarse fácilmente: un bañador de color rojo, bajo el agua, se ve de un tono más apagado. La explicación es que las moléculas de agua tienen frecuencias naturales en el rango del infrarrojo.

No obstante, también resuenan muy débilmente con las frecuencias rojas visibles, por lo que a medida que aumenta la profundidad, el color rojo va siendo absorbido de forma paulatina. De este modo, a unos 30 m, apenas llega la componente roja de la luz solar, por lo que el agua adquiere ese color verde-azulado tan característico y los objetos rojos se ven negros.

Así pues, el tono verde-azulado del mar en las profundidades es un fenómeno de absorción selectiva.

Cuestiones y problemas (páginas 284/285)

Guía de repaso

1 **¿Qué fenómenos relativos a la luz pueden ser explicados desde el punto de vista ondulatorio y cuáles no?**

Se pueden estudiar la reflexión, refracción, difracción e interferencias. No se pueden estudiar la propagación rectilínea de la luz.

2 **¿A qué resultados conducía el tratamiento mecánico corpuscular que daba Newton a la refracción?**

Conducía a la ley de la reflexión, es decir, el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

3 **¿Qué concepción se tiene hoy en día acerca de la naturaleza de la luz?**

Que la naturaleza de la luz es dual.

4 **Detalla cómo midió Römer la velocidad de la luz.**

Römer estudió las ocultaciones de los satélites galileanos al pasar por detrás del planeta. Centró su atención en Ío y llegó a determinar que, cuando Júpiter se hallaba a la mínima distancia de la Tierra, el tiempo o período entre dos «salidas sucesivas de la sombra» de Ío era de 42 h 28 min, período que se mantenía con asombrosa regularidad.

Sin embargo, si efectuaba la medida cuando la Tierra se encontraba en su posición más alejada de Júpiter, el período se incrementaba en 22 min. Si esa distancia adicional era el diámetro de la órbita terrestre alrededor del Sol (d), la diferencia de períodos era igual al tiempo que tardaba la luz en recorrer esa distancia. Con los datos sobre el diámetro de la órbita terrestre de que se disponía en aquel momento (no demasiado precisos), llegó a establecer la velocidad de la luz.

5 **Explica el método de Fizeau para medir la velocidad de la luz. ¿Cuál es la razón por la que la rueda debía tener numerosos dientes?**

Su dispositivo constaba básicamente de una rueda dentada giratoria de numerosos dientes y un espejo situado a una cierta distancia. Se mandaba un pulso de luz que, después de pasar entre los dientes de la rueda, llegaba al espejo, donde se reflejaba y emprendía el camino de vuelta. Esto quería decir que el pulso, en su viaje de ida y vuelta había tardado lo mismo que la rueda en girar desde un hueco al siguiente.

Conociendo la velocidad de rotación de la rueda, Fizeau llegó a estimar la velocidad de la luz. La rueda debería tener numerosos dientes para hacer coincidir con el viaje de ida y vuelta de la luz.

6 **¿Cómo se produce una onda electromagnética?**

Se produce cuando una carga eléctrica se encuentra oscilando.

7 **¿Qué magnitudes se ven perturbadas en la propagación de una onda electromagnética? ¿Cómo son esas perturbaciones con respecto a la dirección de propagación?**

Se ven perturbadas el campo eléctrico y el magnético. Son perpendiculares con respecto a la dirección de propagación.

8 **¿Cómo se relaciona la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío con las propiedades eléctricas y magnéticas del mismo?**

A través de la expresión 10.1.

9 **¿Qué es el espectro electromagnético? ¿Cómo se clasifican las ondas de menor a mayor frecuencia?**

Se clasifican en siete zonas: radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos γ.

10 **¿Entre qué valores de longitud de onda se encuentran las llamadas ondas de radio? ¿Y las microondas?**

Ondas de radio entre 10^3 y 10^4 m. Y las microondas desde 10^{-3} m hasta 21 cm.

11 **¿Cómo se subdividen las ondas electromagnéticas visibles? ¿Entre qué frecuencias se encuentran?**

Se subdivide en los famosos colores del arco iris: rojo: 620 a 1 000 nm; verde: 490 a 550 nm; naranja: 590 a 620 nm; azul: 430 a 490 nm; amarillo: 550 a 590 nm; violeta: 390 a 430 nm.

12 **¿Qué fenómenos demuestran inequívocamente la naturaleza ondulatoria de la luz? ¿Por qué?**

La interferencia, la difracción y la polarización son fenómenos que solo pueden ser explicados desde una concepción ondulatoria, mientras que la reflexión y la refracción pueden ser entendidos también desde el punto de vista corpuscular.

13 **Resume en un mismo esquema las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz.**

Ley de la reflexión:

- El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia.
- El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Ley de refracción:

- El ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia.
- El ángulo de refracción depende de la relación entre los índices de refracción de los medios.

14 **¿Se encuentran en distintos planos los rayos incidente, reflejado y refractado?**

No, los rayos se encuentran en el mismo plano.

15 **Explica el concepto de la reflexión especular y el de la difusa.**

Cuando la reflexión es perfecta y el haz luminoso emerge en una sola dirección es la reflexión especular. Cuando las reflexiones se producen en las mismas direcciones es difusa.

16 **¿Qué magnitudes propias de la onda se ven afectadas al pasar esta de un medio a otro que tiene distinto índice de refracción?**

La longitud de onda y la velocidad de la luz.

17 **¿A qué llamamos ángulo límite o ángulo crítico? ¿Cómo funcionan las fibras ópticas?**

El ángulo límite es el mayor ángulo posible de refracción que tiene lugar cuando la incidencia sea prácticamente rasante. El funcionamiento de las fibras ópticas se basan en la reflexión total.

18 **¿Cómo se producen los espejismos?**

Se produce cuando los rayos de luz sufren diversas refracciones que lo alejan progresivamente de su normal, entonces los rayos refractados parecen provenir de una imagen especular.

19 **¿Qué requisitos deben cumplirse para que se produzcan interferencias luminosas? ¿Cómo consiguió Young que se cumplieran esos requisitos?**

Las luces deben de ser coherentes, es decir, deben tener la misma frecuencia y una diferencia de fase constante. Young lo consiguió utilizando el experimento de la doble rendija.

20 **¿Por qué es tan difícil observar los fenómenos de difracción de la luz?**

Para que la difracción sea observable el tamaño de la abertura debe ser comparable a la longitud de onda de la luz incidente. Este es el motivo por el cual es tan difícil observar la difracción.

21 **¿Por medio de qué fenómeno queda demostrada la polarización de la luz?**

Por la absorción de la luz.

22 **¿En qué consiste la dispersión de la luz? ¿Y la absorción?**

La dispersión de la luz se produce cuando un medio presenta una dependencia entre el índice de refracción y la frecuencia. Debido a esta dependencia cuando la luz blanca incide sobre un prisma, cada color sufrirá su refracción particular en distinto ángulo. Al salir del prisma sufrirá una segunda refracción, distinguiéndose los colores claramente divididos.

La absorción se produce cuando incide la luz sobre un material, parte de esa energía se transforma en interna y parte vuelve a ser emitida.

23 ¿A qué llamamos materiales opacos? ¿Y a los materiales transparentes?

Los materiales transparentes transmiten todas las radiaciones, en cambio los materiales opacos reflejan todas las radiaciones.

Reflexión y refracción de la luz

24 Cuando una luz que se propaga por el aire atraviesa un vidrio, disminuye su velocidad. Cuando haya atravesado el vidrio, ¿se moverá con la velocidad que adquirió en él?

La velocidad de la luz en un medio determinado depende del índice de refracción de este y no del lugar del que procede o de los medios que haya atravesado. En consecuencia, al salir del vidrio volverá a propagarse con la velocidad correspondiente al aire como medio.

25 ¿Cuál es la razón física por la que la velocidad de la luz disminuye al propagarse por un medio material? ¿Crees que esa razón está avalada por los valores del índice de refracción correspondientes a cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos?

En un medio transparente, la luz es absorbida por los átomos, para inmediatamente ser reemitida. Esta luz reemitida es absorbida por los átomos vecinos y vuelve a ser emitida, y así sucesivamente. El tiempo implicado en este proceso explica que la velocidad de transmisión de la luz sea menor al atravesar un medio transparente. Por otra parte, la velocidad de la luz en el medio interatómico es la correspondiente al vacío. Por este motivo, la velocidad de propagación es mayor, en general, cuanto mayor sea la distancia interatómica, como es el caso de los gases frente a los líquidos y los sólidos.

26 En algunos países nórdicos son famosas las leyendas de los «barcos que navegan por el aire». ¿Se te ocurre alguna explicación física de esto?

En dichos países es frecuente que las capas de aire que están más próximas al agua se hallen a menor temperatura que las capas que se encuentran algo más altas. En consecuencia, la luz que proviene de los barcos, se refracta en las capas más altas curvando su trayectoria en un fenómeno que aparenta ser una reflexión, para llegar finalmente a un observador que estuviese en la costa. Para este, la luz del barco parecería provenir del aire y no del agua; de ahí, las leyendas de barcos fantasmas.

27 ¿Por qué al conducir de noche con el pavimento mojado se ve la carretera con más dificultad?

Se ve peor la carretera porque se produce mayor reflexión especular sobre el pavimento mojado, de modo que la luz reflejada ya no se dirige hacia nosotros, sino en dirección contraria. Cuando el asfalto está seco, la reflexión difusa hace que parte de la luz reflejada llegue a nuestros ojos, lo que posibilita la visión de la carretera.

28 PAU Sobre un prisma de 60° como el de la figura, rodeado de aire ($n = 1$), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 42° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:

***a)* Determina el índice de refracción del prisma.**

***b)* Realiza el esquema gráfico de la trayectoria total del rayo.**

***c)* Determina el ángulo de desviación del rayo al atravesar el prisma.**

***d)* Razona si varían la frecuencia y la longitud de onda del rayo dentro y fuera del prisma.**

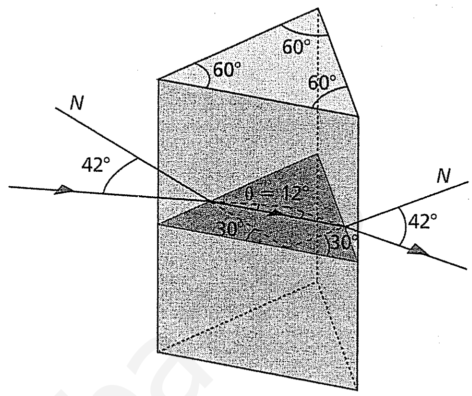
a) Dada la geometría del problema el haz refractado forma un ángulo de 30° con la normal. Considerando $n_{aire} = 1$, se tiene:

$$n_{aire} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{prisma} \cdot \text{sen}\,\hat{r}$$

Por tanto:

$$n_{prisma} = n_{aire} \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = 1{,}34$$

b) El esquema gráfico que representa la trayectoria del rayo es:



c) El ángulo δ de desviación, es la diferencia angular entre el rayo de entrada (incidente) y el de salida. Como se desprende de la geometría del problema:

$$\delta = 2\theta = 24°$$

d) La frecuencia es invariable, pues según incide un frente de onda sale otro refractado.

Sin embargo, el cambio de velocidad supone un cambio de la longitud de onda en el interior del prisma, de modo que:

$$\lambda_{prisma} = \lambda_{aire} \cdot \frac{n_{aire}}{n_{prisma}} \cong 0{,}75 \cdot \lambda_{aire}$$

29 PAU Un rayo láser de 660 nm emite en el aire una luz roja monocromática. Desde el aire, se hace penetrar el haz en el agua ($n = 1{,}333$).

***a)* ¿Cuál es la velocidad del haz en el agua?**

***b)* ¿Cuál es su longitud de onda en este medio?**

***c)* ¿De qué color lo verá una persona que esté dentro del agua?**

a) De la definición del índice de refracción se obtiene:

$$v = \frac{c}{n} = 2{,}25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) Al pasar del aire (consideremos $n_1 = 1$) al agua, se cumplirá que:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Como $v = \lambda f$, y f no varía, obtenemos:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

De donde:

$$\lambda_2 = \frac{n_1\lambda_1}{n_2} = \frac{1 \cdot 660 \text{ nm}}{1{,}333} = 495 \text{ nm}$$

c) La frecuencia de la luz no varía al penetrar en otro medio por el que puede transmitirse, por lo que se seguirá viendo rojo.

Comentario: al considerar medios transparentes, no tenemos en cuenta la absorción del agua para frecuencias próximas al infrarrojo, lo que hace que absorba débilmente el rojo. Este fenómeno, sin embargo, solo es apreciable a grandes profundidades.

D30 **PAU** **Un rayo de luz incide en un prisma como se indica en la figura. Si deseamos que se produzca la reflexión total:**

a) **¿Cuál debe ser el mínimo valor que puede tener n?**

b) **Cuando se sumerge el prisma en un líquido de $n' = 1{,}20$ aún se produce la reflexión total, pero deja de producirse al sumergirse en agua ($n_{agua} = 1{,}33$). Con esta información, determina entre qué valores está el valor real del índice de refracción del prisma.**

a) El mismo valor para el que se produce reflexión total interna viene dado por la condición:

$$n_{prisma} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{aire} \cdot \text{sen}\,90°$$

Dado que el ángulo de incidencia sobre la cara inclinada es 45°, entonces el mínimo valor del índice de refracción del prisma es:

$$n_{prisma} = n_{aire} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\hat{i}} = 1{,}41$$

b) Al sumergirlo en un líquido de $n' = 1{,}20$, aún se produce reflexión total interna, por lo que el mínimo valor de n_p en ese caso es:

$$n_{prisma} = n' \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\hat{i}} = \frac{1{,}2}{\text{sen}\,45°} = 1{,}69$$

Sin embargo, deja de haber reflexión total interna cuando se sumerge en agua, por lo que el valor límite del índice del prisma es:

$$n_{prisma} = n_{aire} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,45°} = \frac{1{,}33}{\text{sen}\,45°} = 1{,}88$$

Por tanto, el índice real se encuentra comprendido entre 1,69 y 1,88.

31 **PAU** **Una lámina de cuarzo de caras planas y paralelas de 10 cm de espesor, tiene un índice de refracción de 1,458. Si un rayo de luz monocromática incide sobre una de las caras con un ángulo de 60°, calcula:**

a) **Los valores del ángulo de refracción en el interior de la lámina y el ángulo de emergencia al volver a salir al aire por la otra cara.**

b) **El desplazamiento lateral experimentado por dicho rayo al atravesar la lámina.**

c) **Dibuja correctamente la marcha geométrica del rayo, especificando todos los fenómenos que tienen lugar en cada interfase de separación de los medios.**

a) El ángulo de refracción viene dado por la ley de Snell, de modo que:

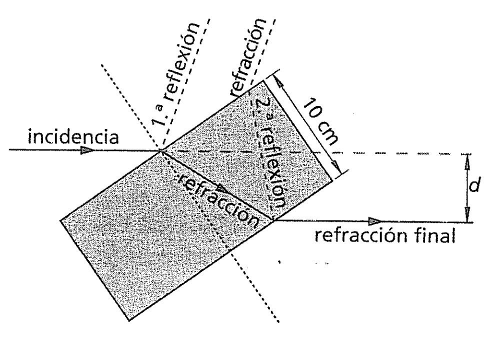
$$n_{prisma} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{cuarzo} \cdot \text{sen}\,\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = 36{,}4°$$

Por la simetría del problema, el ángulo de emergencia es igual al de incidencia, es decir 60°.

b) El desplazamiento lateral del haz es:

$$d = e\,\frac{\text{sen}\,(\hat{i} - \hat{r})}{\cos\hat{r}} = 10\,\frac{\text{sen}\,23{,}6°}{\cos\,36{,}4°} = 4{,}97\text{ cm}$$

c) La marcha geométrica del rayo está representado en el siguiente dibujo:



32 **PAU** **Un haz monocromático incide con cierto ángulo sobre una lámina de material transparente de caras planas y paralelas de 15 cm de espesor. Se observa que el ángulo de refracción del haz en el interior del material es de 30° y que al salir de él muestra un desplazamiento de 8 cm. Determina:**

a) **¿Cuál era el ángulo de incidencia del haz?**

b) **¿Cuál es el índice de refracción del material relativo al aire (medio de incidencia)?**

a) A partir de la expresión del desplazamiento se obtiene:

$$\text{sen}\,(\hat{i} - \hat{r}) = \frac{d\cos\hat{r}}{e} = \frac{8\cos 30°}{15} = 0{,}46$$

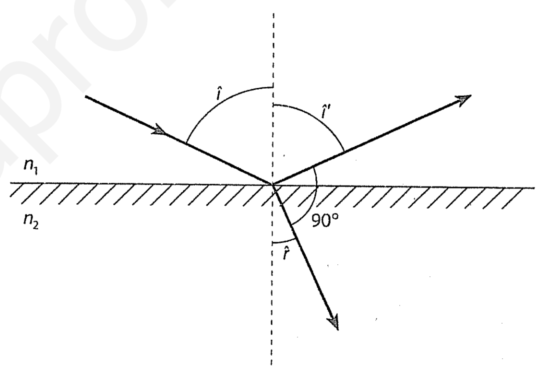
Por tanto: $\hat{i} - \hat{r} = 27{,}5 \Rightarrow \hat{i} = 57{,}5°$

b) Por aplicación de la ley de Snell:

$$n = \frac{n_{aire} \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = 1{,}68$$

33 **PAU** **Un rayo luminoso llega a la interfase de dos medios con un ángulo de incidencia Si los rayos reflejado y refractado forman entre sí 90°, halla la relación que existe entre el ángulo de incidencia y el índice de refracción relativo de los dos medios.**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema, donde $\hat{i}$ es el ángulo de incidencia, $\hat{i}'$ es el de reflexión, y $\hat{r}$, el de refracción:



Si aplicamos la ley de Snell:

$$n_1\,\text{sen}\,\hat{i} = n_2\,\text{sen}\,\hat{r}$$

donde $\hat{r} = 180° - (90° + \hat{i}')$

Puesto que $\hat{i}' = \hat{i}$, entonces:

$$\hat{r} = 90° - \hat{i}$$

Por lo que:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,(90° - \hat{i}) = \cos\hat{i}$$

Así pues:

$$n_1\,\text{sen}\,\hat{i} = n_2\cos\hat{i}$$

de donde:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\cos\hat{i}} = \text{tg}\,\hat{i}$$

o bien:

$$n_{21} = \text{tg}\,\hat{i}$$

34 **Dibuja la trayectoria exacta de todos los rayos que se forman en la experiencia de la figura del ejercicio 34 página 287 (especificando cómo salen) e indica los valores de los ángulos que intervengan, así como los puntos exactos donde los rayos entran en contacto con las superficies.**

El haz es de luz amarilla de sodio e incide con un ángulo de 45° en un punto que se encuentra situado a 2,5 cm de la superficie inferior. La altura de cada bloque es de 5 cm, y el medio que los rodea es aire. (Considera que el valor del índice de refracción del aire es 1 y desprecia el efecto de la interfase de cristal que contiene el agua.)

Los fenómenos que tendrán lugar son la reflexión y la refracción al cambiar de medio.

Cuando el haz incidente entra en el vidrio, sufrirá una refracción bajo un ángulo dado por:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{r} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} 45°}{1{,}46}$$

Y por tanto:

$$\hat{r} = 28{,}96°$$

A continuación, este haz refractado llega a la cara inferior del bloque de vidrio a una distancia que, como puede verse en la figura que aparece al final, será de:

$$\operatorname{tg} \hat{r} = \frac{2{,}5}{x_1} \Rightarrow x_1 = 4{,}5 \text{ cm}$$

Al llegar a la cara inferior con un ángulo de incidencia de $90° - 28{,}96° = 61{,}04°$, sufrirá una reflexión total interna, pues este ángulo es superior al ángulo crítico correspondiente a la interfase vidrio-aire, que es de:

$$\operatorname{sen} \hat{r}_c = \frac{1}{1{,}46} \Rightarrow \hat{r}_c = 43{,}23°$$

Este rayo reflejado llegará ahora a la interfase vidrio-agua en el punto B, a una distancia horizontal de 9 cm con respecto al punto A. Parte del haz que incide (con un ángulo de 61,04°) se reflejará y parte se refractará.

El ángulo de refracción al pasar al agua será:

$$\operatorname{sen} \hat{r}' = \frac{n_v}{n_a} \operatorname{sen} \hat{i}'$$

Y sustituyendo los datos:

$$\operatorname{sen} \hat{r}' = \frac{1{,}46}{1{,}333} \cdot \operatorname{sen} 61{,}04° \Rightarrow \hat{r}' = 73{,}4°$$

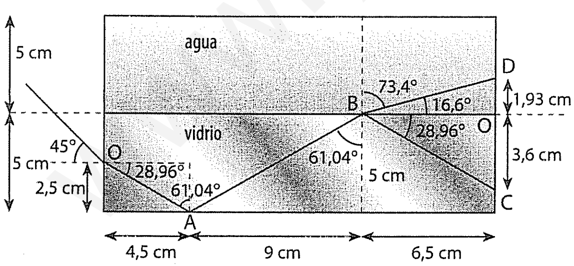
Así pues, al final ambos emergerán del bloque por los puntos C y D, situados a 3,6 cm por debajo de la interfase vidrio-agua y a 1,93 cm por encima, respectivamente, pues, como se deduce de la figura:

$$\operatorname{tg} (90° - 73{,}4°) = \frac{\text{OD}}{6{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow \text{OD} = 1{,}93 \text{ cm}$$

Mientras que:

$$\operatorname{tg} 28{,}96° = \frac{\text{OC}}{6{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow \text{OC} = 3{,}6 \text{ cm}$$

Así pues, el sistema sirve como divisor del haz.



35 **Un haz de luz monocromática de sodio, de 589 nm, incide con un ángulo de 45° sobre una lámina de caras planas y paralelas de circonita (n = 1,92) de 10 cm de espesor. Calcula el desplazamiento lateral que ha sufrido el haz cuando sale.**

El ángulo de refracción en la circonita será:

$$\operatorname{sen} \hat{r} = \frac{n_1 \operatorname{sen} \hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} 45°}{1{,}92} \Rightarrow \hat{r} = 21{,}57°$$

El desplazamiento lateral que sufre al atravesar una lámina de espesor e viene dado por:

$$d = e \frac{\operatorname{sen} (\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}} = 4{,}27 \text{ cm}$$

D36 **PAU** **Un haz de luz láser de 550 nm incide en un bloque de vidrio:**

a) **Describe los fenómenos ópticos que ocurren y represéntalos fielmente en un dibujo.**

b) **Si el ángulo de incidencia es de 40° y el de refracción es de 25°, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?**

c) **¿Sería diferente el valor anterior si la longitud de onda fuese de 710 nm?**

d) **Razona cómo calcularías el ángulo límite y ofrece su valor a partir de los datos del apartado *b).***

En todos los casos considera aproximadamente 1 el valor del índice de refracción en el aire.

a) Parte del haz incidente se refleja, y otra parte pasa a propagarse por el vidrio, es decir, se refracta.

b) Considerando $n_1 = 1$ (para el aire), el índice de refracción del vidrio será:

$$n_2 = \frac{n_1 \operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 25°} = 1{,}52$$

c) El valor calculado es para luz amarilla (550 nm). El valor deducido sería ligeramente distinto si se hubiese calculado para luz roja (710 nm), pues el vidrio es un medio dispersivo, por lo que el índice de refracción depende ligeramente de λ. Sin embargo, el valor obtenido afectaría tan solo a la segunda cifra decimal considerada, como puede observarse en la gráfica de la página 277. Podemos suponer, pues, que apenas variará.

d) El ángulo límite o crítico será aquel que corresponde a una incidencia rasante ($\operatorname{sen} \hat{i} = 1$, puesto que $\hat{i} = 90°$). De este modo:

$$\operatorname{sen} \hat{r}_c = \frac{1}{n_2} \Rightarrow \hat{r}_c = 41{,}1°$$

Interferencia y difracción de la luz

37 **¿Se te ocurre algún procedimiento para medir el ancho de una rendija submilimétrica? Explica el procedimiento y la forma de llevarlo a cabo.**

Habría que situar la rendija a cierta distancia de una pantalla y producir un patrón de difracción con un láser de longitud de onda conocida. De esa manera, conociendo la longitud de onda y la distancia entre la rendija y la pantalla, y midiendo la mitad del ancho del máximo principal, podemos averiguar la anchura de la rendija, utilizando la expresión **10.10** del texto.

38 **¿Podrían interferir dos haces de luz polarizada, de la misma frecuencia y con diferencia de fase constante, si el plano de polarización entre ambos es perpendicular?**

No podrían interferir. La condición de coherencia exige que, si la luz es polarizada, el plano de polarización sea el mismo.

39 **Si aproximas, hasta casi juntarlos, los dedos índice y corazón y miras hacia alguna luz a través de ellos, verás que los bordean ciertas líneas oscuras. ¿A qué se debe esto?**

Se debe al patrón de difracción que se origina en la ranura que forman los dos dedos casi juntos.

40 **PAU** **En un experimento como el de Young se hace incidir sobre dos rendijas luz amarilla de sodio de 589 nm. En una pantalla que está situada a 3 m de las rendijas se cuentan 30 franjas brillantes por centímetro. ¿Cuál es la separación entre las rendijas?**

Puesto que hay 30 máximos en cada centímetro, la distancia entre máximos será:

$$\Delta y = \frac{1}{30} = 0{,}033 \text{ cm} = 3{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Según el experimento de Young la distancia entre máximos viene dada por:

$$\Delta y = \frac{d}{a}\lambda$$

donde d es la distancia entre pantallas, y a es la distancia o separación entre rendijas. De este modo:

$$a = \frac{d\lambda}{\Delta y} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

41 PAU **Se efectúa el experimento de Young iluminando con luz amarilla de sodio de 589 nm dos rendijas separadas una de la otra 2 mm. Si la pantalla en la que se observa el patrón de interferencias está a 5 m, ¿cuál es la separación que se observará entre las franjas?**

La separación entre las franjas será de:

$$\Delta y = \frac{d}{a}\lambda = \frac{5\ \text{m}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Es decir:

$$\Delta y = 1{,}47 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Luego, la separación entre máximos es de 1,47 mm.

42 PAU **Sobre una pantalla que se encuentra situada a 3,5 m de una rendija se observa el patrón de difracción de un haz de 650 nm. Calcula la anchura del máximo central si la de la rendija es:**

***a)* 0,1 mm** ***b)* 0,01 mm** ***c)* 0,001 mm**

La anchura de la banda central es el doble que la distancia del centro del patrón al primer mínimo, por lo que vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\text{anchura de la banda} = \frac{2d}{a}\lambda$$

Así pues, según las anchuras de las rendijas, las de los máximos centrales serán:

a) Para la rendija de 0,1 mm:

$$\text{anchura máxima} = 0{,}046\ \text{m}$$

b) Para la rendija de 0,01 mm:

$$\text{anchura máxima} = 0{,}46\ \text{m}$$

c) Para la rendija de 0,001 mm:

$$\text{anchura máxima} = 4{,}6\ \text{m}$$

Interacción luz-materia

43 **¿Por qué los diamantes y otras piedras preciosas talladas con varias caras presentan un brillo extraordinario así como esos bellos centelleos o irisaciones tan característicos?**

La razón es que precisamente por el elevado índice de refracción del diamante, la reflexión total interna en las distintas caras talladas se ve favorecida, lo que hace que presenten ese brillo de reflejos tan peculiar y característico.

Además, como el índice de refracción depende ligeramente de la frecuencia, la luz blanca se descompone en el interior del cristal, lo que da lugar a esas irisaciones tan característica.

44 **¿Podemos broncearnos en días nublados? ¿Y tomando el sol a través de una ventana de cristal?**

Las nubes son, en realidad, semitransparentes a la radiación ultravioleta, por lo que, en efecto, podemos broncearnos algo en días nublados.

Por el contrario, sería una pérdida de tiempo pretender broncearse a través de una ventana de cristal, pues el vidrio es opaco a la radiación ultravioleta.

45 **Explica por qué en los eclipses de Luna esta aparece sombreada con un tono rojizo a diferencia del eclipse que tuvo lugar inmediatamente después de la explosión del volcán Pinatubo (Filipinas), en el que la sombra era prácticamente negra.**

La componente de la luz que sufre menos esparcimiento Rayleigh es la roja, que es la que logra, por tanto, propagarse y atravesar grandes extensiones atmosféricas. Durante un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se proyecta sobre nuestro satélite; sin embargo, parte de la luz solar atraviesa nuestra atmósfera, aunque de ella solo trasciende la componente roja que menos se esparce y que finalmente se proyecta sobre la Luna, dando lugar a esa típica coloración rojiza.

Sin embargo, los eclipses de Luna que sucedieron después de la explosión del Pinatubo fueron especialmente oscuros por la gran cantidad de polvo en suspensión que quedó en la atmósfera y que produjo, debido al tamaño de las partículas en suspensión, un esparcimiento de tipo no Rayleigh. Esto provocó un esparcimiento similar en cualquier frecuencia, incluidas las correspondientes a la componente rojiza de la luz.

11 Óptica geométrica

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. Introducción a la óptica geométrica** — páginas 287/288
  - 1.1. ¿De qué trata la óptica geométrica? — página 288
- **2. Óptica de la reflexión. Espejos planos y esféricos** — páginas 289/297
  - 2.1. Espejos planos — página 289
  - 2.2. Sistemas de espejos planos — página 290
  - 2.3. Espejos esféricos desde la aproximación paraxial — páginas 291/294
  - 2.4. Formación de las imágenes en espejos esféricos: diagramas de rayos y aumento de la imagen — páginas 295/297
- **3. Óptica de la refracción. Lentes delgadas** — páginas 298/311
  - 3.1. Formación de imágenes por refracción en superficies esféricas — páginas 298/301
  - 3.2. Imágenes formadas por refracción en superficies planas — página 302
  - 3.3. Lentes delgadas — páginas 303/306
  - 3.4. Formación de imágenes en lentes delgadas. Diagramas de rayos para lentes — páginas 307/309
  - 3.5. Sistemas de dos lentes delgadas — páginas 310/311
- **4. El ojo humano** — páginas 312/313
  - 4.1. Defectos comunes de la vista — página 313
- **5. Algunos instrumentos ópticos** — páginas 314/317
  - 5.1. La lupa o lente de aumento — página 314
  - 5.2. El microscopio compuesto — página 315
  - 5.3. Telescopios en el visible — páginas 316/317

Cuestiones previas (página 372)

1. ¿Cómo se ven las imágenes cuando nos miramos en un espejo plano?

La imagen que vemos en un espejo plano es virtual (se forma detrás del espejo), tiene el mismo tamaño que el objeto y presenta inversión lateral izquierda-derecha.

2. ¿Qué tipo de espejo se utiliza en algunos cruces de calles? ¿Por qué?

Se suelen utilizar espejos convexos porque permiten una amplia visión al aparecer la imagen disminuida.

3. ¿Para qué sirven las lentes? ¿Qué clase de lentes conoces?

Las lentes sirven sobretodo para el aumento de la imagen, corrección de problemas visuales, etcétera.

Se utilizan para la fabricación de lupas, telescopios, prismáticos, objetivos de cámara, etcétera.

Las lentes delgadas que pueden ser convergentes o divergentes.

4. ¿Qué es la distancia focal? ¿Qué es lo que hacemos cuando «enfocamos» el objetivo de una cámara?

Es la distancia entre el centro óptico O y el foco F.

Cuando enfocamos el objetivo de una cámara estamos variando la distancia focal para que la imagen se vea con mayor nitidez.

5. ¿Representan lo mismo los aumentos microscópicos que los aumentos telescópicos?

No representan lo mismo, los aumentos telescópicos son angulares y los microscópicos son laterales.

6. ¿Cuáles son los defectos más habituales de la visión ocular?

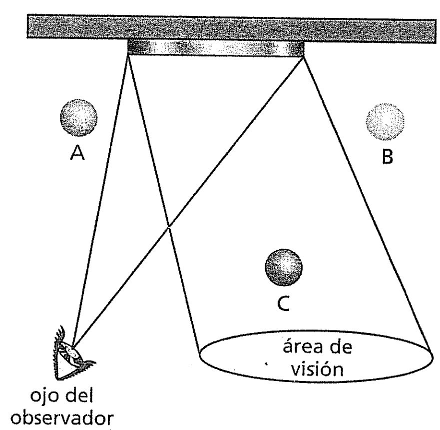
Los más habituales son: miopía, hipermetropía, astigmatismo, vista cansada o presbicia y cataratas.

Actividades (páginas 289/317)

1 Razona cuál de los objetos, A, B o C es visible a través del espejo para el observador de la figura 11.7.

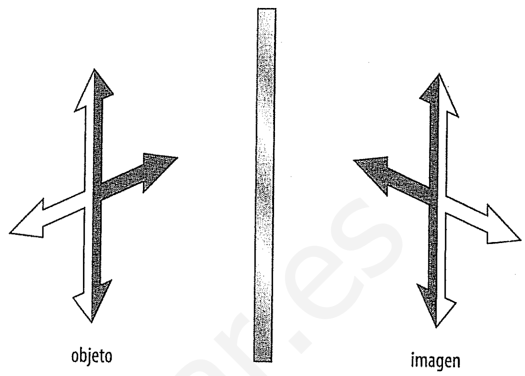
Los objetos observables a través del espejo son los que se encuentran dentro del área abarcada por los «rayos límite» que se reflejan en los bordes del espejo, según la ley de la reflexión, para confluir en el ojo del observador.

En consecuencia, como puede apreciarse, solo el objeto C es visible para el observador a través del espejo.



2 Si los espejos planos producen inversión lateral, ¿por qué no originan inversión vertical?

Esto ocurre por la propia naturaleza de la reflexión. Como puede observarse en el dibujo, la imagen de la flecha superior es otra flecha superior (por tanto, no presenta inversión vertical), pero invertida lateralmente.



3 Una persona de 1,70 m de altura se coloca delante de un espejo plano a una distancia de 0,80 m.

***a)* ¿Qué tamaño tiene la imagen?**

***b)* ¿Cuál debe ser la altura mínima del espejo para que la persona se vea de cuerpo entero?**

a) La imagen en un espejo plano tiene el mismo tamaño que la persona.

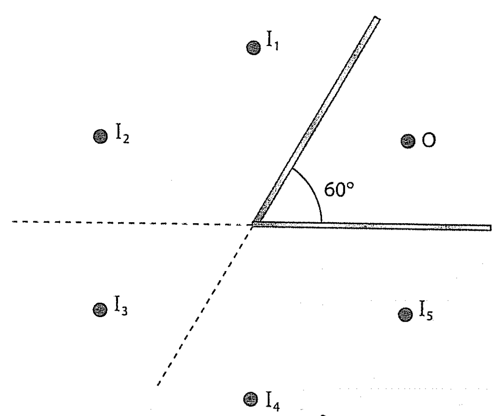
b) Como puede comprobarse en la cuestión resuelta número 1 de la página 318 del *Libro del alumno,* la altura mínima del espejo ha de ser de 85 cm, es decir, la mitad de la altura de la persona. La parte superior del espejo ha de estar a la altura del punto medio de la frente de la persona. La distancia a la que la persona se sitúe con respecto al espejo carece de toda importancia.

4 Comenta la formación de las siete imágenes del objeto O que aparecen cuando los dos espejos forman un ángulo de 45°, como se indica en la figura 11.12.

Las imágenes I_1 e I_7 son las imágenes directas de O en el espejo plano e inclinado, respectivamente. La imagen I_6 puede considerarse como la imagen o proyección de I_1 en el espejo inclinado, mientras que I_2 es la imagen de I_7 en el espejo plano. A su vez, I_3 puede considerarse la proyección o imagen de I_6 en el espejo plano. Por último, I_4 sería la imagen de I_3 en el espejo oblicuo, e I_5, la de I_4 en el espejo plano.

5 ¿Cuántas imágenes de O se obtendrán si los espejos planos forman 60°? Localízalas.

Se formarían cinco imágenes, como puede comprobarse en el dibujo.



Las imágenes I_1 e I_5 son las producidas directamente por O en los espejos oblicuo y horizontal, respectivamente. La imagen de I_1 es I_4 en el espejo horizontal, mientras que I_2 es la imagen de I_5 en el oblicuo. Por último, I_3 puede considerarse la imagen de I_4 en el espejo oblicuo o la de I_2 en el plano.

6 **Comprueba que en los casos de las actividades 4 y 5 se cumplen las propiedades:**

- **Todos los puntos (tanto los del objeto como los de las imágenes) se encuentran en una circunferencia centrada en el punto de corte del sistema.**
- **El número de imágenes que se obtiene para ángulos divisores exactos de 360° responde a la expresión:**

$$N = \frac{360°}{\theta} - 1$$

Efectivamente, si se toma un compás, se comprobará que en ambos casos, todas las imágenes, junto con el objeto, se encuentran en la circunferencia centrada en la intersección de los espejos. Obsérvese, igualmente, que los dos supuestos cumplen con la expresión expuesta:

- Ángulo de 45°:

$$N = \frac{360°}{45°} - 1 = 7$$

- Ángulo de 60°:

$$N = \frac{360°}{60°} - 1 = 5$$

También puede comprobarse esto en el caso que se aprecia en la figura 11.8 (ángulo de 90°):

$$N = \frac{360°}{90°} - 1 = 3$$

7 **Explica en qué lado se forma la imagen en un espejo esférico cóncavo cuando:**

a) **$s_o < f$.** ***b)*** **$s_o = f$.** ***c)*** **$s_o > f$.**

Las tres posibilidades pueden deducirse a partir de la expresión:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

a) Si $s_o < f$, entonces:

$$\frac{1}{s_o} > \frac{1}{f}$$

Por tanto, la distancia $s_i < 0$, es decir, la imagen se forma en el lado virtual.

b) Si $s_o = f$, entonces:

$$\frac{1}{s_i} = 0$$

Es decir, $s_i = \infty$, por lo que no se forma imagen.

c) Si $s_o > f$, entonces $s_i > 0$, y la imagen se forma en el lado real.

8 **Un objeto se encuentra situado a 20 cm del vértice de un espejo esférico convexo de 25 cm de radio de curvatura. Determina la posición de la imagen.**

Al ser un espejo convexo, y según el criterio de signos, la distancia focal $f = r/2$ es negativa. Dicha distancia es de 12,5 cm. Así pues, sustituyendo los datos en:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

tenemos:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-12{,}5\text{ cm}} - \frac{1}{20\text{ cm}} \Rightarrow s_i = -7{,}69\text{ cm}$$

Por tanto, la imagen se forma en el lado virtual, a 7,69 cm del vértice.

9 **Se desea formar una imagen invertida de 30 cm de altura sobre una pantalla que se encuentra a 4,2 m del vértice de un espejo esférico cóncavo. El objeto que produce la imagen mide 5 mm. Determina:**

a) **La distancia respecto del espejo a la que debe colocarse el objeto.**

b) **La distancia focal y el radio de curvatura del espejo.**

a) Puesto que la imagen es invertida, $h' = -30$ cm, mientras que $h = 0{,}5$ cm, y $s_i = 420$ cm, lugar donde queremos que se forme la imagen. Con estos datos, podemos calcular la distancia a la que debe situarse el objeto a partir de:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} \Rightarrow s_o = -s_i\frac{h}{h'}$$

Sustituyendo los datos:

$$s_o = 7\text{ cm}$$

Por consiguiente, el objeto debe situarse a 7 cm del espejo.

b) A partir de la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

y sustituyendo los datos:

$$\frac{1}{7\text{ cm}} + \frac{1}{420\text{ cm}} = \frac{1}{f}$$

se obtiene que la distancia focal vale:

$$f = 6{,}88\text{ cm}$$

y como esta distancia es la mitad del radio:

$$r = 2f = 13{,}76\text{ cm}$$

10 **Un objeto de 10 cm de altura se sitúa a 1 m de un espejo esférico convexo cuya distancia focal es de 3 m. Describe la imagen que se formará.**

La distancia a la que se formará la imagen se obtiene de la ecuación de los espejos, teniendo en cuenta que $f < 0$. Así:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

de donde:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-3\text{ m}} - \frac{1}{1\text{ m}} \Rightarrow s_i = -0{,}75\text{ m}$$

Así pues, la imagen es virtual.

Analicemos ahora el aumento de la imagen:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} \Rightarrow \frac{h'}{h} = -\frac{0{,}75}{1}$$

De modo que el tamaño de la imagen es:

$$h' = 0{,}75 \cdot h = 7{,}5\text{ cm}$$

Se comprueba, pues, que la imagen es virtual ($s_i < 0$), derecha ($h'/h > 0$) y disminuida ($h' < h$).

11 **¿Qué tipo de espejo necesitamos y con qué radio de curvatura si deseamos que un objeto situado a 1 m de su vértice produzca una imagen derecha que tenga la mitad de su tamaño?**

Obviamente tiene que ser convexo, pues las imágenes derechas que se obtienen con los cóncavos son siempre aumentadas y con los planos son de tamaño natural. Si el aumento ha de ser 0,5, entonces:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} = 0{,}5 \Rightarrow s_i = -0{,}5 \cdot s_o$$

Conocidas s_i y s_o, podemos calcular el radio de curvatura mediante la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{1\text{ m}} + \frac{1}{-0{,}5\text{ m}} = \frac{2}{r} \Rightarrow r = -2\text{ m}$$

El signo negativo de r nos confirma que es un espejo convexo.

12 **PAU** **Desde el interior de una pecera de forma esférica de 50 cm de diámetro, un pez observa los ojos de un gato que se encuentran a 20 cm de la superficie de la pecera. Describe la imagen que ve el pez (distancia a la que se produce, aumento y características de la imagen). Dato: $n_{agua} = 1{,}333$**

Consideramos $n_1 = 1$, y $n_2 = 1{,}333$. Los datos que nos ofrece el problema son $s_o = 20$ cm, y $r = 25$ cm, ambos positivos. Por tanto, aplicando la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

cabe concluir:

$$\frac{1{,}333}{s_i} = \frac{0{,}333}{25\text{ cm}} - \frac{1}{20\text{ cm}} \Rightarrow s_i = -36{,}34\text{ cm}$$

Por otra parte, el aumento de la imagen será:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_o}$$

que, al sustituir los datos, nos da:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{1 \cdot (-36{,}34\text{ cm})}{1{,}333 \cdot 20\text{ cm}} = 1{,}36$$

Es decir, el pez vería al gato como si estuviera algo más alejado (a 36,34 cm de la pecera), pero lo percibe con un tamaño 1,36 veces mayor que el real. Puesto que el signo de aumento es positivo, lo ve derecho.

13 **Una superficie convexa separa dos medios de índices 1 y 1,6, respectivamente. Si un objeto que se encuentra a 40 cm del vértice en el primer medio tiene su imagen en el segundo a 64 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la superficie?**

Aplicamos directamente la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Sustituyendo los datos, y teniendo en cuenta que $s_o = 40$ cm, y $s_i = 64$ cm (positiva según el criterio para la refracción):

$$\frac{1}{40\text{ cm}} + \frac{1{,}6}{64\text{ cm}} = \frac{0{,}6}{r} \Rightarrow r = 12\text{ cm}$$

14 **¿Cuáles serían las distancias focales objeto e imagen de la superficie de la actividad 13?**

La distancia focal objeto correspondería al caso en que $s_i = \infty$, por lo que:

$$f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = 20\text{ cm}$$

mientras que la distancia focal imagen correspondería al caso en que $s_o = \infty$, por lo que:

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = 32\text{ cm}$$

15 **PAU** **Una varilla de vidrio de gran longitud tiene un extremo en forma de superficie semiesférica convexa con un radio de curvatura de 10 cm. Teniendo en cuenta que el índice de refracción del vidrio es 1,5, halla dónde se formará la imagen de un objeto puntual y describe el tipo de imagen en los siguientes casos:**

a) **El objeto está situado sobre el eje, en el aire, a 30 cm de la superficie.**

b) **El objeto está situado a 5 cm de la superficie.**

c) **El objeto está muy alejado de la superficie.**

Teniendo en cuenta que $r = 10$ cm, $n_1 = 1$, y $n_2 = 1{,}5$ y aplicando la ecuación del dioptrio:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

llegamos a:

$$\frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{s_o}$$

a) Como $s_o = 30$ cm, la imagen se forma a 90 cm en el interior de la varilla, es decir:

$$s_i = +90\text{ cm}$$

Si se tratara de un objeto no puntual, la imagen tendría el doble de tamaño y sería invertida.

b) En este caso, $s_o = 5$ cm, por lo que $s_i = -10$ cm. Es decir, la imagen se forma en el lado de incidencia (fuera de la varilla) a 10 cm de la superficie. Si el objeto no fuese puntual, la imagen sería derecha y estaría aumentada 1,33 veces.

c) Si $s_o = \infty$, la imagen se forma en el foco imagen:

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = 30\text{ cm}$$

En este caso, la imagen es puntual.

16 **PAU** **En algunas zonas del planeta aún existen pueblos que pescan peces sirviéndose de lanzas. Si una de estas personas desea atrapar una pieza, ¿hacia dónde crees que tendría que apuntar?**

Deberá apuntar un poco más abajo, ya que la profundidad aparente del pez es, concretamente, 3/4 partes la profundidad real.

17 **¿A qué profundidad real estaría una piedra del fondo de un río si la vemos como si se hallase a 40 cm de distancia con respecto a la superficie?**

Su profundidad real sería:

$$s_o = -\frac{n_1}{n_2} s_i = -\frac{1{,}333}{1} \cdot (-40\text{ cm}) = 53{,}32\text{ cm}$$

18 **¿Cuál es la profundidad a la que vemos un objeto bajo el agua, en comparación con su profundidad real? ¿Depende dicha profundidad aparente del ángulo desde el que mire el observador? Ayúdate de los diagramas de rayos.**

Se verá siempre a tres cuartas partes de la profundidad real. Dicha profundidad aparente no depende del ángulo desde el que mire el observador, pues la relación entre el ángulo de incidencia y el de refracción es siempre constante e igual a $n_2/n_1 = 0{,}75$, factor que determina la distancia a la que se forma la imagen.

19 **PAU** **Se tiene un sistema constituido por dos lentes delgadas biconvexas de distancias focales 10 cm y 15 cm respectivamente, separadas 10 cm entre sí. Describe las características de la imagen formada de un objeto de 5 cm de altura situado a 20 cm de la primera lente. Dibuja posteriormente el diagrama de rayos correspondiente.**

La imagen formada por la primera lente se obtiene de la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i}$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{10_i} \Rightarrow s_i = 20\text{ cm}$$

Esta imagen es ahora objeto para la segunda lente. Dado que si $s_i > d$, la distancia objeto $s'_o = -10$ cm, pues está en el lado de transmisión de la segunda lente, por lo que:

$$\frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f_2}$$

Sustituyendo sus respectivos valores:

$$\frac{1}{-10} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{15} \Rightarrow s'_i = 6\text{ cm}$$

Por otra parte, el aumento total es igual al producto de los aumentos de cada lente:

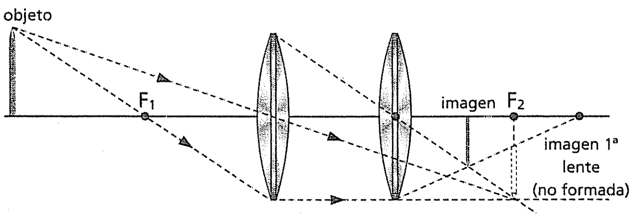
$$M_{total} = M_1 \cdot M_2$$

siendo:

$$M_1 = -\frac{s_i}{s_o} = -1 \qquad M_2 = -\frac{s'_i}{s'_o} = -\frac{6}{-10} = 0{,}6$$

Por lo que el aumento total es $M_{total} = -0{,}6$

Lo que quiere decir que la imagen se forma a 6 cm de la segunda lente, es real, invertida y de tamaño igual a 3 cm como vemos en el siguiente dibujo:



20 **PAU** **Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es bicóncava (convergente) y con distancia focal de 20 cm, y la segunda, situada a 50 cm de la primera, es biconvexa (divergente) y con una distancia focal de 15 cm. Delante de la primera se sitúa un objeto de 4 cm de altura a una distancia de 40 cm.**

a) **Halla la posición de la imagen producida por el sistema.**

b) **Describe la naturaleza y el tamaño de la imagen final producida por el sistema óptico.**

c) **Dibuja mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.**

a) La imagen producida por la primera lente viene dada por la expresión:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f_i}$$

Sustituyendo los valores del problema, $s_o = 40$ cm y $f_i = 20$ cm, obtenemos $s_i = 40$ cm.

Puesto que la separación entre lentes es de 50 cm, entonces la imagen de la primera lente actúa como objeto situado a 10 cm de la segunda lente.

En este caso, siendo biconvexa, se tiene:

$$\frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{-15} - \frac{1}{10}$$

por lo que:

$$s'_i = -6 \text{ cm}.$$

b) Así pues, la imagen final se forma 6 cm por delante de la segunda lente. El aumento total es el producto de los momentos de cada lente, $M_{total} = M_1 \cdot M_2$, siendo:

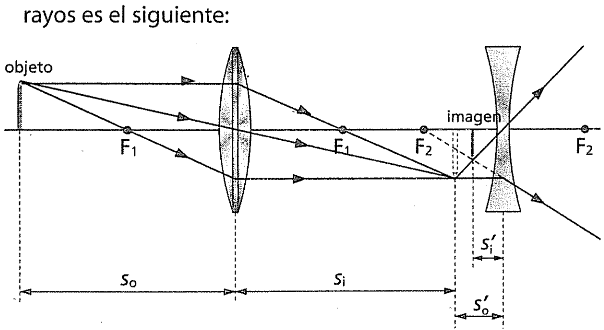
$$M_1 = -\frac{s_i}{s_o} = -1 \qquad M_2 = -\frac{s'_i}{s'_o} = -\frac{-6}{10} = 0{,}6$$

Así pues es aumento total será:

$$M_{total} = -0{,}6$$

Lo que significa que la imagen es virtual, invertida y de 2,4 cm de tamaño.

c) El dibujo de la imagen obtenida mediante el diagrama de rayos es el siguiente:



21 **«Observa» tu punto ciego. Sitúate a unos 30 cm del papel y, con un ojo tapado, fija tu vista en la X de la figura 11.58. Si te acercas lentamente, llegará un momento en el que no verás la B. Si sigues aproximándote, la B reaparecerá y desaparecerá la A.**

Actividad de observación.

22 **Se desea obtener un aumento 300x en un microscopio compuesto. ¿Cuál es la distancia focal del ocular si el aumento lateral que produce el objetivo es de 30x y la imagen se forma en el punto próximo a 25 cm del ojo?**

El aumento total, *m*, es:

$$m = m_{obj} \frac{x_p}{f_{ocular}}$$

Por tanto:

$$f_{ocular} = \frac{m_{obj}\, x_p}{m} = 2{,}5 \text{ cm}$$

23 **Un telescopio Schmidt-Cassegrain tiene una focal de objetivo de 2 000 mm. Determina los aumentos que se consiguen en cada caso si se utilizan oculares de focales de 4 mm, 12 mm, 20 mm y 40 mm.**

Los aumentos angulares obtenidos son, en cada caso:

Para el ocular de 4 mm: $M_1 = \frac{D_{objetivo}}{d_{ocular}} = \frac{2\,000}{4} = 500$ aumentos.

Para el ocular de 12 mm: $M_2 = \frac{D_{objetivo}}{d_{ocular}} = \frac{2\,000}{12} = 167$ aumentos.

Para el ocular de 20 mm: $M_3 = \frac{D_{objetivo}}{d_{ocular}} = \frac{2\,000}{20} = 100$ aumentos.

Para el ocular de 40 mm: $M_4 = \frac{D_{objetivo}}{d_{ocular}} = \frac{2\,000}{40} = 50$ aumentos.

Cuestiones y problemas (páginas 320/321)

Guía de repaso

1 **¿Sobre qué conjunto de leyes se estructura la denominada óptica geométrica?**

Sobre las leyes de propagación rectilínea de la luz, independencia de los rayos luminosos, reflexión, refracción y reciprocidad.

2 **¿Cuáles son las características de la imagen formada en un espejo plano? aumento angular que produce?**

Es virtual, del mismo tamaño que el objeto y presenta inversión lateral (izquierda-derecha).

3 **¿Puede conseguirse, mediante espejos planos, que la imagen no presente inversión lateral? ¿Cómo?**

Puede conseguirse mediante un sistema de dos espejos planos que formen ángulo recto, por ejemplo. Véase el subepígrafe 2.2.

4 **¿Qué es la aproximación paraxial? ¿Por qué motivo se hace uso de ella?**

La aproximación paraxial consiste en considerar que la imagen de un objeto O se forma en un único punto, I.

Se hace uso de ella para determinar con claridad la posición de la imagen.

5 **¿Cuál es la ecuación de los espejos en función del radio de curvatura? ¿Qué signo tiene dicho radio si el espejo es cóncavo? ¿Y si es convexo?**

Véase la expresión **11.4**. En cuanto al signo, es positivo si el espejo es cóncavo y negativo si es convexo.

6 **¿Cuál es la ecuación de los espejos en función de la distancia focal? ¿Qué relación tiene la distancia focal con el radio de curvatura del espejo?**

Véase la expresión **11.7.** La distancia focal es la mitad del radio de curvatura.

7 **¿Qué criterio de signos se emplea para los espejos?**

Se emplea el signo positivo cuando las distancias (s_o, s_i, r, f) están por delante del espejo o en el lado real y signo negativo cuando las distancias (s_o, s_i, r, f) quedan por detrás del espejo o en el lado denominado virtual.

8 **Detalla en qué consiste el procedimiento del diagrama de rayos en el caso de los espejos.**

El diagrama de rayos nos permite averiguar como es la imagen formada y consiste en trazar tres rayos: Rayo 1. Se traza desde la parte superior del objeto y transcurre paralelo al eje óptico. Al reflejarse según la ley de la reflexión, pasará por el foco F. Rayo 2. Se traza desde la parte superior del objeto y pasa por el centro de curvatura C. El rayo reflejado tiene la misma dirección que el incidente. Rayo 3. Se traza desde la parte superior del objeto y pasa por el foco F. El rayo reflejado sale paralelo al eje óptico.

9 **¿Cómo podemos averiguar el aumento de la imagen que produce un espejo esférico?**

Mediante la expresión **11.8.**

10 **Valiéndote de los diagramas de rayos correspondientes, describe de forma resumida cómo son las imágenes formadas en un espejo esférico cóncavo, según la distancia entre el objeto y el vértice del espejo.**

Si $s_o > r$; real, invertida, disminuida; si $s_o = r$, real, invertida, tamaño natural; si $r > s_o > f$; real, invertida, aumentada; si $s_o > f$; no se forma imagen nítida; si $s_o < r$, virtual, derecha, aumentada.

11 **Repite la cuestión anterior para el caso de un espejo esférico convexo.**

Para cualquier posición es virtual, derecha y aumentada.

12 **¿Cuál es la ecuación de un dioptrio esférico teniendo en cuenta la aproximación paraxial?**

Véase la expresión **11.12.**

13 **¿Cómo puede determinarse el aumento de la imagen formada por refracción al pasar de un medio a otro de distinto índice?**

Véase la expresión **11.13.**

14 **¿Cuántas distancias focales tiene un dioptrio esférico? ¿Cuáles son y qué significado físico tienen? ¿Qué relación existe entre ellas?**

Tiene dos; la distancia focal imagen, f_i, es la distancia donde convergen todos los rayos refractado y la distancia focal objeto, f_o, es la distancia al punto desde donde deberían partir los rayos incidentes para que salieran refractados.

Se relacionan a través de la expresión **11.16** y son directamente proporcionales a sus respectivos índices de refracción.

15 **¿Qué tipos de lentes conoces en función de la forma de sus superficies?**

Lentes convergentes o convexas (biconvexa, plano-convexa y menisco-convexa) y lentes divergentes o cóncavas (bicóncava, plano-cóncava y menisco-cóncava).

16 **¿Cuál es la fórmula de las lentes delgadas? Escríbela también considerando la distancia focal de la lente.**

Véanse las expresiones **11.17** y **11.18.**

17 **¿A qué se llama potencia de una lente? ¿En qué unidades se mide?**

La potencia de una lente es la inversa de su distancia focal, f.

Cuando f se mide en metros, la potencia viene dada en dioptrías.

18 **¿De qué factores depende la distancia focal de una lente? Desea usarse un espejo esférico para configurar**

Como vemos en la expresión **11.18** depende del índice de refracción del medio y del radio de curvatura de la lente.

19 **Describe el procedimiento conocido como diagrama de rayos para la formación de imágenes en el caso de las lentes delgadas.**

Rayo 1; es paralelo al eje óptico y, tras ser refractado en la lente, pasa por el foco imagen de la misma.

Rayo 2; pasa por el centro óptico de la lente y atraviesa la lente en línea recta.

Rayo 3; pasa por el foco anterior a la lente, foco objeto, y, tras ser refractado en la lente, emerge paralelo al eje óptico.

20 **¿Cómo se calcula el aumento de la imagen producido por una lente?**

Mediante la expresión **11.20.**

21 **¿Cómo es el tipo de imagen formada por una lente biconvexa en función de la distancia del objeto comparada con la focal de la lente? Ayúdate de los diagramas de rayos.**

$s_i > s_o > 2f$; real, invertida, disminuida; si $s_o = 2f$, real, invertida, tamaño natural; si $2f > s_o > f$; real, invertida, aumentada; si $s_o = f$; no se forma imagen nítida; si $s_o < r$, virtual, derecha, aumentada.

22 **Repite la cuestión anterior con una lente bicóncava.**

Para cualquier posición la imagen es virtual, derecha y disminuida.

23 **¿Cuáles son las partes principales del ojo humano? ¿Qué defectos visuales son los más comunes? ¿En qué consisten y cómo se corrigen?**

Las partes más principales del ojo son: la córnea, el iris, el cristalino, el humor vítreo, la coroides y la retina.

Los defectos visuales más comunes son: la miopía, que se debe a una deformación del globo ocular y se corrige con lentes ligeramente divergentes; hipermetropía, que es la alteración opuesta a la miopía y se corrige con lentes ligeramente convergentes; astigmatismo, que se debe a irregularidades en la cornea, se corrige también con el uso de lentes.

24 **Cómo funciona una lupa? ¿Cómo se determina el aumento angular que produce?**

Una lupa es una lente biconvexa y si se sitúa prácticamente pegado al ojo se forma la imagen en el infinito y será derecha, virtual y aumentada.

Se determina el aumento mediante la expresión **11.21.**

25 **¿Qué diferencia existe entre los aumentos de un telescopio y los de un microscopio?**

Los aumentos de los telescopios son angulares y los de un microscopio son laterales.

26 **¿Cómo se determinan los aumentos de un telescopio?**

Mediante la expresión **11.25.**

Óptica de la reflexión. Espejos

27 Indica las características de la imagen de un objeto situado ante un espejo cóncavo que se encuentra en el punto medio entre el foco y el centro del espejo.

Si el objeto está situado en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura del espejo, entonces $s_o = 3/2 \cdot f$. En consecuencia, usando la fórmula de los espejos, se obtiene:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3 \cdot f}$$

Por tanto, $s_i = 3 \cdot f$, es decir, la imagen se forma delante del espejo (lado real) y a una distancia igual al triple de la distancia focal. Por otra parte, el aumento de la imagen será igual a $-s_i/s_o$. Sustituyendo los valores, podemos comprobar que el resultado de esta expresión es -2. Así pues, la imagen es real, invertida y aumentada al doble del tamaño del objeto y se forma a una distancia igual al triple de la focal.

28 Indica las condiciones necesarias para que se forme en un espejo esférico, ya sea cóncavo o convexo:

***a)* Una imagen real.**

***b)* Una imagen disminuida.**

***c)* Una imagen derecha (no invertida).**

a) Una imagen real solo se puede formar con un espejo cóncavo siempre que el objeto se sitúe a una distancia mayor que la focal.

b) Una imagen disminuida puede conseguirse con un espejo cóncavo si el objeto se sitúa a una distancia superior al radio de curvatura del espejo o en cualquier otra circunstancia siempre y cuando se emplee un espejo convexo.

c) Una imagen derecha se forma con un espejo cóncavo si el objeto se sitúa a una distancia menor que la focal o en cualquier otra posición en un espejo convexo.

29 Sirviéndote de diagramas de rayos, describe las características de la imagen de un objeto en un espejo esférico cóncavo cuando dicho objeto se encuentra:

***a)* Entre el foco y el vértice.**

***b)* A una distancia mayor que el radio de curvatura.**

a) Véase la figura 11.24.e.

b) Véanse las figuras 11.24.a y 11.24.b.

30 Completa la tabla de la actividad referida a espejos esféricos (las distancias se dan en cm).

Las expresiones que hay que utilizar para completar la tabla son las siguientes:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f};\ r = 2f;\ \text{aumento} = -\frac{s_i}{s_o}$$

	Cóncavo	Cóncavo	Convexo	Convexo
f	+30	+16,66	−20	−25
r	+60	+33,33	−40	−50
s_i	−15	+25	−4	−11,1
s_o	+10	+50	+5	+20
Aumento	+1,5	−0,5	0,8	0,55
Imagen real	No	Sí	No	No
Imagen invertida	No	Sí	No	No

31 PAU Un objeto de 10 cm de altura se sitúa a 1,5 m de un espejo esférico convexo de −3,5 m de distancia focal. Determina las características de la imagen formada.

La distancia a la que se forma la imagen responde a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o}$$

Es decir:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{-3{,}5\ \text{m}} - \frac{1}{1{,}5\ \text{m}} \Rightarrow s_i = -1{,}05\ \text{m}$$

Y su tamaño será:

$$h' = -\frac{s_i h}{s_o} = -\frac{-1{,}05\ \text{m}}{1{,}5\ \text{m}} \cdot 10\ \text{cm} = 7\ \text{cm}$$

Puesto que h' es positiva, la imagen es derecha.

Por tanto, la imagen es virtual ($s_i = -1{,}05$ m), derecha ($h' > 0$) y disminuida ($h' = 7$ cm), como corresponde a un espejo convexo.

32 PAU Desea usarse un espejo esférico para configurar una imagen 4 veces mayor que el tamaño del objeto en una pantalla situada a 4 m de este. Describe el tipo de espejo que se requiere y dónde deberá colocarse con relación al objeto.

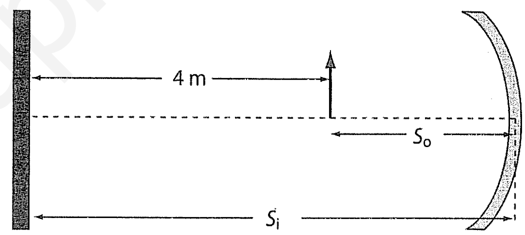
El espejo ha de ser cóncavo, pues uno convexo produce imágenes virtuales y disminuidas.

Puesto que $s_i = 4$ m, y $-s_i/s_o = -4$ (pues la imagen es invertida si es real), entonces $s_o = 1$ m.

El espejo debe situarse, por tanto, a 1 m del objeto.

El enunciado del problema puede dar lugar a otra interpretación, que es considerar que la pantalla se sitúa a 4 m del objeto y no a 4 m del espejo.

En este caso, el problema sería distinto y también la solución. Como se ve en el dibujo:



$$s_i = 4 + s_o$$

Como la imagen es real (pues se proyecta en pantalla) y, en consecuencia, invertida, se cumplirá:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -4 \Rightarrow \frac{4 + s_o}{s_o} = 4$$

despejando queda:

$$s_o = 1{,}33\ \text{m}$$

Es decir, el espejo habría de situarse a 1,33 m del objeto.

33 PAU Se tiene un espejo esférico cóncavo de 40 cm de distancia focal. Determina la distancia que debe situarse un objeto para que la imagen sea:

***a)* Real y de doble tamaño que el objeto.**

***b)* Virtual y de doble tamaño que el objeto.**

a) Si la imagen ha de ser real (si y so positivas) y de doble tamaño, debe cumplirse:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -2 \Rightarrow s_i = 2\,s_o$$

Utilizando esta expresión en la ecuación de espejo, tenemos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{2\,s_o} = \frac{1}{40} \Rightarrow s_o = 60\ \text{cm}$$

b) En este caso, si la imagen ha de ser virtual y de doble tamaño, se cumplirá:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -2 \Rightarrow s_i = 2\,s_o$$

Que, aplicada a la ecuación del espejo, conduce a:

$$s_o = 20\ \text{cm}$$

Óptica de la refracción. Lentes delgadas

34 **¿De qué manera puede producir una lente un aumento igual a + 1? ¿Y a − 1?**

Un aumento igual a +1 podría conseguirse con una lente biconvexa si el objeto estuviera pegado a la lente. En ese caso, la imagen sería virtual y, como puede comprobarse mediante el diagrama de rayos, tendría el mismo tamaño que el objeto y estaría derecha. Podemos comprobar esto considerando que $s_o <<< f$, en cuyo caso $1/s_o >>> 1/f$. De este modo, aplicando la ecuación de las lentes en la forma:

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}$$

podemos concluir que:

$$\frac{1}{s_i}\cong-\frac{1}{s_o}\Rightarrow s_i=-s_o$$

En consecuencia, el aumento es igual a +1 y la imagen es virtual. Puedes comprobar este hecho pegando una lupa al objeto: lo verás de tamaño natural y derecho. Un aumento igual a −1 supone que $s_i = s_o$, situación que, aplicada a la ecuación de las lentes, conduce a que $s_o = 2 \cdot f$. Así pues, se obtendrá situando el objeto a una distancia igual al doble de la focal de la lente biconvexa.

En el caso de una lente bicóncava, solo podría conseguirse un aumento igual a +1 aplicando las mismas condiciones que para la lente biconvexa, es decir, con el objeto pegado a la lente. Sin embargo, nunca conseguiríamos un aumento de −1.

35 **¿A qué distancia de una lente biconvexa debe situarse un objeto para que la imagen tenga su mismo tamaño?**

Como acabamos de ver en la cuestión anterior, habría que situarlo a una distancia igual a $2 \cdot f$ o pegado a la lente.

36 **Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «Una lente biconvexa siempre es convergente».**

La afirmación es falsa, pues la distancia focal y, en consecuencia, el carácter convergente o divergente de la lente no dependen tan solo de las características estructurales de la lente, sino de la relación que existe entre el índice de refracción del vidrio de la lente y el del medio en el que está inmersa, de modo que, si este último índice de refracción es mayor que el de la lente, esta se comportará como divergente.

37 **Indica razonadamente cuál es el comportamiento de los rayos que parten del foco objeto en una lente convergente:**

a) **Convergen en el foco imagen.**

b) **Emergen paralelos.**

c) **No se desvían.**

La respuesta correcta es la ***b)***, por la propia definición de foco objeto.

38 **Indica razonadamente cuál es el comportamiento de un rayo paralelo al eje óptico al atravesar una lente delgada:**

a) **No se desvía.**

b) **Se desvía o no, dependiendo del tipo de lente.**

c) **Se desvía siempre.**

La respuesta correcta es la ***c)***.

39 **Repite la pregunta anterior para el caso de que el rayo coincida con el eje óptico.**

La respuesta correcta es la ***a)***.

40 **Una superficie esférica convexa separa dos medios, uno de los cuales es aire. El radio de curvatura de la superficie es de + 20 cm, y cuando un objeto puntual se sitúa a 40 cm del vértice, su imagen se forma a 100 cm en el otro medio. ¿Cuál es el índice de refracción de este medio?**

Se parte de la ecuación del dioptrio esférico:

$$\frac{n_1}{s_o}+\frac{n_2}{s_i}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

Como, además, $n_1 = 1$, $s_o = +40$ cm, $s_i = +100$ cm, y $r = +20$ cm, obtenemos:

$$n_2 = 1{,}875$$

41 **PAU** **Un objeto se sitúa 40 cm a la izquierda de una lente biconvexa de índice de refracción 1,54. La superficie izquierda de la lente tiene un radio de curvatura de 25 cm y en estas condiciones forma una imagen real a 65 cm. ¿Cuál es el radio de curvatura de la segunda superficie?**

Hay que aplicar la fórmula de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Al sustituir los datos $s_o = 40$ cm, $s_i = 65$ cm, $n = 1{,}54$, y $r_1 = 25$ cm, y resolver la expresión, se obtiene:

$$r_2 = -28{,}75 \text{ cm}$$

42 **PAU** **Se fabrica una lente biconvexa hueca (llena de aire) con superficies de vidrio de grosor despreciable y de radios de curvatura de 15 cm y 20 cm. Determina la distancia focal y el comportamiento de esta lente de aire cuando se sumerge en agua y en benceno (n = 1,501).**

El índice de refracción de la lente es $n = 1$. Su comportamiento y su focal en un medio vienen dados por:

$$\frac{1}{f}=(n_{rel}-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

donde $n_{rel} = n/n'$, $r_1 = 15$ cm, y $r_2 = -20$ cm. Aplicando la expresión, obtenemos:

en agua; $n' = 1{,}333 \Rightarrow f = -34{,}28$ cm

en benceno; $n' = 1{,}501 \Rightarrow f = -25{,}68$ cm

En ambos casos, el foco queda en el lado de incidencia y la lente biconvexa se comporta como divergente.

43 **PAU** **¿Cuál es la distancia focal de una lente bicóncava de índice de refracción 1,46 si sus radios de curvatura son de 15 cm y 20 cm? Resuelve el problema suponiendo que la luz puede incidir por ambas caras de la lente.**

Al ser una lente bicóncava e incidir la luz por el lado izquierdo, $r_1 = -15$ cm y $r_2 = 20$ cm. Como además $n = 1{,}46$, entonces:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f}=0{,}46\cdot\left(\frac{1}{-15\text{ cm}}-\frac{1}{20\text{ cm}}\right)\Rightarrow f=-18{,}63\text{ cm}$$

De manera análoga, si la luz incide por la derecha, $r_1 = -20$ cm, y $r_2 = 15$ cm, por lo que:

$$\frac{1}{f}=0{,}46\cdot\left(\frac{1}{-20\text{ cm}}-\frac{1}{15\text{ cm}}\right)\Rightarrow f=-18{,}63\text{ cm}$$

El comportamiento en el aire es, pues, divergente, al estar el foco en el lado de incidencia en ambos casos. Compruébese que la distancia focal es una característica de la lente e independiente del lado de incidencia de la luz.

44 **PAU** **¿Cuál sería la distancia focal de la lente del problema anterior si se está sumergida en agua?**

En este caso:

$$\frac{1}{f}=(n_{rel}-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

donde $n_{rel} = 1{,}095$.

Sustituyendo y resolviendo, obtenemos:

$$f = -89{,}97 \text{ cm}$$

Sigue siendo, pues, divergente, aunque en menor medida.

45 **PAU** **Los radios de curvatura de una lente biconvexa de vidrio de $n = 1{,}5$ guardan una relación de 3 a 2. Determina una expresión para el menor de ellos en función de la distancia focal.**

La relación entre r_1 y r_2 es:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$$

Puesto que la lente es biconvexa, r_1 y r_2 tienen signos distintos, por lo que escribiremos:

$$r_1 = \frac{3}{2} \cdot r_2$$

Así pues:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\frac{1}{f} = 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{-3/2 \cdot r_2} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow f = -\frac{6}{5} \cdot r_2$$

Por lo que:

$$r_2 = -\frac{5}{6} \cdot f$$

46 **PAU** **Una lente biconvexa elaborada con vidrio de refracción de índice 1,53 tiene dos radios de curvatura de 10 cm y 16 cm, respectivamente. Si se sitúa una estatuilla de 5 cm de altura a 15 cm de la lente, ¿a qué distancia apreciaremos la imagen? Determina las características de la imagen.**

La distancia a la que se forma la imagen se obtiene de la ecuación de las lentes expresada de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

con $s_o = 15$ cm, $n = 1{,}53$, $r_1 = +10$ cm, y $r_2 = -16$ cm. Sustituyendo y despejando s_i, obtenemos:

$$s_i = 51{,}37 \text{ cm}$$

Como es positivo, la imagen es real.

Por otra parte, los aumentos serán:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{s_i}{s_o} = -3{,}42$$

De donde:

$$h' = 17{,}12 \text{ cm}$$

Por tanto, la imagen es aumentada (3,42 veces) e invertida.

47 **PAU** **La estatuilla del problema anterior es contemplada ahora a través de una lente divergente cuyos radios de curvatura miden 10 cm cada uno y su índice es 1,53. Halla la distancia y las características de la imagen (calculando el aumento) cuando se coloca a una distancia de la lente de:**

a) **6 cm**

b) **15 cm**

c) **1 m**

Según este planteamiento, $r_1 = -10$ cm, $r_2 = 10$ cm, $n = 1{,}53$, y s_o varía en cada caso.

Procediendo como hemos hecho antes, obtenemos:

a) $s_o = 6 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -3{,}67 \text{ cm} \Rightarrow h' = 3{,}06 \text{ cm}$

La imagen es virtual ($s_i < 0$), derecha y disminuida.

b) $s_o = 15 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -5{,}80 \text{ cm} \Rightarrow h' = 1{,}93 \text{ cm}$

Ahora la imagen es virtual, derecha ($h/h' > 0$) y disminuida.

c) $s_o = 100 \text{ cm} \Rightarrow s_i = -8{,}62 \text{ cm} \Rightarrow h' = 0{,}43 \text{ cm}$

La imagen es virtual, derecha y disminuida.

D48 **PAU** **Con una lente convergente, de un objeto real se obtiene una imagen también real, invertida y aumentada 4 veces. Al desplazar el objeto 3 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual, derecha y con el mismo aumento en valor absoluto. Determina:**

a) **La distancia focal imagen y la potencia de la lente.**

b) **La distancia del objeto a la lente en los dos casos.**

c) **Las respectivas distancias imagen.**

d) **Las construcciones geométricas correspondientes.**

a) Al tratarse de la misma lente, su distancia focal no cambia, de modo que aplicaremos en ambos casos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \text{ y } \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s'_i}$$

En la primera posición del objeto, la imagen es real, invertida y aumentada 4 veces, por lo que:

$$-\frac{s_i}{s_o} = -4 \Rightarrow s_i = 4\, s_o$$

Mientras que en la segunda posición, la imagen es virtual, derecha y del mismo aumento. En consecuencia:

$$-\frac{s'_i}{s'_o} = 4 \Rightarrow s'_i = -4\, s'_o$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{4\, s_o} = \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{4\, s'_o} \Rightarrow \frac{5}{4 \cdot s_o} = \frac{3}{4\, s'_o} \Rightarrow 5\, s'_o = 3\, s_o$$

Y puesto que $s'_o = s_o - 3$, sustituyendo se obtiene que $s_o = 7{,}5$ cm. Dado que:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{4\, s_o} = \frac{1}{f}$$

La distancia focal imagen vale: $f = 6$ cm

y la potencia de la lente: $P = 1/f = 1/6$ dioptrías

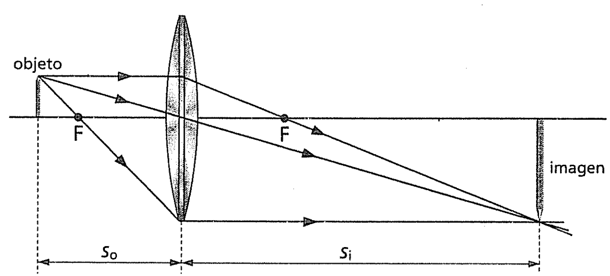
b) Las distancias objeto son:

$$s_o = 7{,}5 \text{ cm};\ s'_o = 4{,}5 \text{ cm}$$

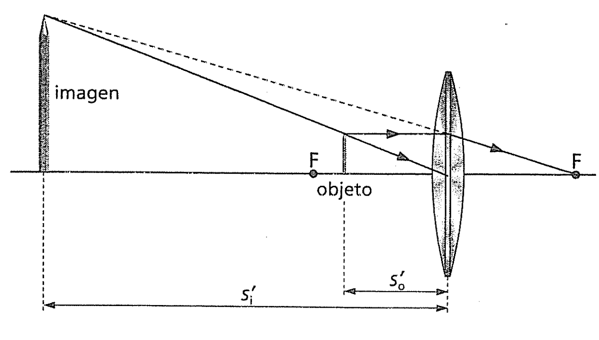
c) Las distancias imagen son:

$$s_i = 4,\ s_o = 30 \text{ cm};\ s'_i = -4,\ s'_o = -18 \text{ cm}$$

d) Para el primer caso tenemos:



Cuando desplazamos la lente 3 cm tendremos:



D.49 PAU Una lente convergente de 10 cm de distancia focal se encuentra a 30 cm de otra lente convergente cuya distancia focal es de 5 cm. Se sitúa un objeto de 3 cm de altura a 30 cm de la primera lente:

a) ¿Cuál es la posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada por el sistema óptico?

b) Si las dos lentes se ponen en contacto, ¿cuál es la distancia focal efectiva de la combinación?

c) ¿Cuál sería la ubicación de la imagen de un objeto que se situara a 10 cm frente a las dos lentes en contacto?

a) La imagen producida por la primera lente se obtiene de:

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_o}=\frac{1}{10}-\frac{1}{30}\Rightarrow s_i=15\text{ cm}$$

Dado que la distancia entre lentes es de 30 cm, la imagen de la primera lente (ahora objeto para la segunda) se encuentra a 15 cm de esta última (s'_o = 15 cm). Aplicando la misma expresión para la segunda lente:

$$\frac{1}{s'_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s'_o}=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\Rightarrow s'_i=7{,}5\text{ cm}$$

El aumento total es:

$$M=M_1\cdot M_2=\left(\frac{s_i}{s_o}\right)\cdot\left(-\frac{s'_i}{s'_o}\right)=\frac{1}{4}$$

Por tanto, el tamaño de la imagen es de 0,75 cm, siendo la imagen real y derecha y formándose a 7,5 cm detrás de la segunda lente.

b) La distancia focal efectiva de dos lentes en contacto es:

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}\Rightarrow f'=3{,}\widehat{3}\text{ cm}$$

c) Si s'_o = 10 cm y f' = 3,$\widehat{3}$ cm, entonces:

$$\frac{1}{s'_i}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{s'_o}=\frac{1}{3{,}\widehat{3}}-\frac{1}{10}\Rightarrow s'_i=5\text{ cm}$$

Se formará la imagen a 5 cm por detrás de las lentes.

50 PAU Una lente biconvexa de índice de refracción 1,5 tiene un radio de curvatura de 15 cm en la superficie de incidencia y de 30 cm en la superficie de transmisión. Si se desea que proyecte una imagen de la mitad del tamaño del objeto:

a) ¿Cuáles deben ser las distancias a las que deben situarse el objeto y la pantalla con respecto a la lente?

b) Construye el correspondiente diagrama de rayos.

a) La distancia focal de la lente así construida se obtiene de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=0{,}5\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{-30}\right)$$

Por lo que:

$$f=20\text{ cm}$$

Dado que la imagen debe proyectarse, es real ($s_i > 0$), y si debe ser la mitad del tamaño del objeto, entonces:

$$M=\frac{s_i}{s_o}=-\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$s_o=2\,s_i\Rightarrow s_i=s_o/2$$

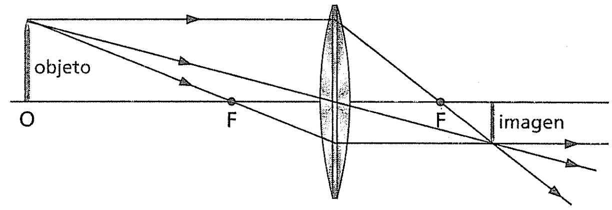
Sustituyendo estas identidades en la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{s_o}+\frac{2}{s_o}=\frac{1}{20}\Rightarrow s_o=60\text{ cm}$$

Y, en consecuencia,

$$s_i=30\text{ cm}$$

b) El correspondiente diagrama de rayos es:



Instrumentos ópticos

51 Por qué hay que introducir las diapositivas invertidas en un proyector? Dado que la imagen en la pantalla resulta aumentada, ¿a qué distancia deben situarse las diapositivas con respecto a la distancia focal de la lente?

Se introducen las diapositivas de ese modo porque la imagen aumentada que se obtiene con una lente biconvexa (la del objetivo del proyector) es siempre invertida (salvo en el caso de la lupa). Por este motivo, si deseamos ver la imagen derecha, el objeto (la diapositiva) tendrá que estar invertido.

Las diapositivas han de encontrarse a una distancia comprendida entre f y $2\cdot f$. Dicha distancia se regula con el enfoque del proyector.

52 ¿Qué tipo de lente se usa en las mirillas de las puertas?

La lente que se utiliza es bicóncava, pues de ese modo la imagen de los objetos, sea cual sea la distancia a la que se encuentran, se ve siempre derecha aunque la imagen esté disminuida.

Además, el campo de visión es mayor.

53 Los astrónomos aficionados saben que para apreciar al telescopio imágenes de muy débil luminosidad (galaxias, nebulosas planetarias, etcétera) es mejor mirar ligeramente de reojo. ¿Se te ocurre alguna explicación?

La razón es que en la zona de la retina situada en la dirección del eje óptico en visión directa se encuentra la fóvea, donde se concentra el mayor número de conos, pero donde no existen bastoncillos, que son los responsables de la visión nocturna de la luz de baja intensidad, como la que se observa en los objetos captados a través del telescopio.

Para evitar la fóvea, es mejor mirar ligeramente de reojo.

54 PAU El aumento deseable de un microscopio compuesto es de 200x. Si el aumento lateral que produce el objetivo es de 20x, ¿cuál será la distancia focal del ocular si la imagen se forma en el punto próximo a 25 cm del ojo?

Los aumentos del microscopio compuesto responden a la siguiente expresión:

$$m=m_{obj}\frac{x_p}{f_{ocular}}$$

Por tanto:

$$f_{ocular}=\frac{m_{obj}x_p}{m}$$

y sustituyendo los datos:

$$f_{ocular}=2{,}5\text{ cm}$$

12 Principios de la relatividad especial

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. El conflicto entre la electrodinámica y la mecánica de Newton** — página 325
- **2. Antecedentes de la relatividad especial** — páginas 326/332
  - 2.1. La relatividad de Galileo y Newton — páginas 326/329
  - 2.2. La relatividad galileana y el problema de la luz — página 329
  - 2.3. Experimento de Michelson y Morley — páginas 330/331
  - 2.4. Proposición de Lorente y Fitzgerald — página 332
- **3. Postulados de la relatividad especial de Einstein** — páginas 333/335
  - 3.1. La relatividad del tiempo y del concepto de simultaneidad — páginas 334/335
- **4. Consecuencias de los postulados de Einstein** — páginas 336/339
  - 4.1. Dilatación del tiempo — páginas 336/337
  - 4.2. Contracción de la longitud — página 338
  - 4.3. La paradoja de los gemelos — página 339
- **5. Transformaciones de Lorentz** — páginas 340/342
  - 5.1. Transformación de Lorente de la velocidad — página 341
  - 5.2. La velocidad de la luz: una constante en cualquier sistema y un límite infranqueable — página 342
- **6. Principios de la dinámica a la luz de la relatividad** — páginas 343/344
  - 6.1. Masa y momento relativistas — página 343
  - 6.2. Masa y energía relativistas — página 344
- **7. Evidencias experimentales de la teoría de la relatividad** — página 345

Cuestiones previas (página 324)

1. Como sabes, la velocidad de la luz en el vacío de unos 300 000 km/s. Ahora bien, ¿qué valor tendría para un observador que se desplazara a 50 000 km/s en la misma dirección de propagación de la luz?

Si el observador se desplaza en la misma dirección y sentido que la velocidad de la luz, la velocidad relativa entre ambos sistemas sería la velocidad de la luz que observa la persona:

$\vec{v} = \vec{v}_{O'} - \vec{v}_O = 300\,000$ km/h $- 50\,000$ km/h $= 250\,000$ km/h

2. ¿Es el tiempo una variable independiente, es decir, transcurre por igual para todos los observadores, con independencia de si se mueven o no?

No es independiente, el tiempo será distinto para dos observadores en movimiento relativo de uno con respecto al otro.

3. Imagínate un objeto que se mueve a la velocidad de la luz con respecto a un observador O' que, a su vez, se mueve a la velocidad de la luz en relación con otro observador O que está en reposo. ¿A qué velocidad se mueve el objeto con respecto a O?

Se mueve a la velocidad c, debido a que la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas inerciales, con independencia de su movimiento relativo.

4. ¿En qué consiste la «paradoja de los gemelos»?

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

Actividades (páginas 328/345)

1 Una trainera emplea 10 min en recorrer 4 km cuando navega a favor de la corriente. Esos mismos 4 km los recorre en 24 minutos al navegar a contracorriente.

¿Cuál es la velocidad de la trainera y la de la corriente con respecto a un observador que se halla en reposo en la orilla?

La velocidad de la trainera cuando navega a favor de la corriente es, desde el punto de vista de un observador situado en tierra $v + v_c$, donde v es la velocidad de la trainera con respecto al agua, y v_c es la velocidad de la corriente.

Por tanto, al navegar a favor de la corriente, se debe cumplir que:

$$d = (v + v_c)\, t$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v + v_c) \cdot 600 \text{ s}$$

Por otro lado, al navegar a contracorriente:

$$d = (v - v_c)\, t'$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v - v_c) \cdot 1\,440 \text{ s}$$

De ambas expresiones obtenemos que:

$$v + v_c = 6{,}67 \text{ m/s}$$

$$v - v_c = 2{,}78 \text{ m/s}$$

Resolviendo el sistema, encontramos que:

$$v = 4{,}73 \text{ m/s}$$

$$v_c = 1{,}94 \text{ m/s}$$

2 La posición de una partícula según el sistema O es $\vec{r} = (4t^2 - 2t)\vec{i} - t^3\vec{j} + 2\vec{k}$ m, mientras que con respecto a O' es $\vec{r}\,' = (4t^2 + 3t)\vec{i} - t^3\vec{j} - 4\vec{k}$ m.

a) **¿Cuál es la velocidad relativa entre ambos sistemas?**

b) **¿Se cumplen las leyes físicas por igual en ambos sistemas? Demuéstralo.**

a) La velocidad relativa entre ambos sistemas vendrá dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'}$$

donde:

$$\vec{v}_O = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t - 2)\,\vec{i} - 3t^2\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = (8t + 3)\,\vec{i} - 3t^2\vec{j} \text{ m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'} = -5\vec{i} \text{ m/s}$$

Es decir, O' se aleja relativamente de O hacia la izquierda.

b) Si la aceleración de la partícula que miden ambos observadores es la misma, las leyes físicas serán iguales para ambos.

Como las aceleraciones coinciden (bajo la suposición de que el tiempo transcurre por igual en ambos sistemas):

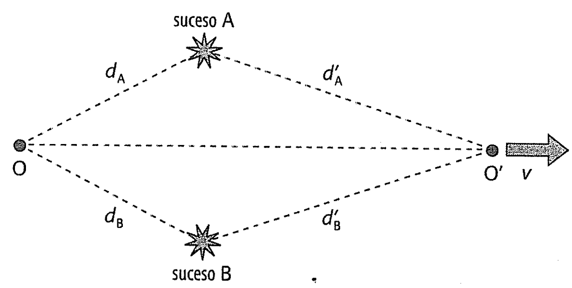
$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = 8\vec{i} - 6t\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = 8\vec{i} - 6t\,\vec{j} \text{ m/s}^2$$

las leyes físicas que describen ambos observadores serán también las mismas.

3 Dos observadores se mueven relativamente uno con respecto al otro; ¿podrían estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos sucesos en alguna circunstancia?

Podrían estar de acuerdo, por ejemplo, si los dos sucesos ocurren en posiciones equidistantes para cada uno de los observadores:



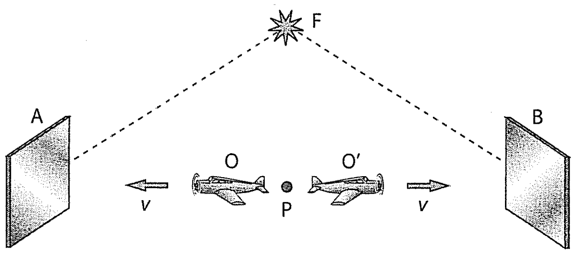
Para O, $d_A = d_B$, y, del mismo modo, para O', $d'_A = d'_B$.

Por tanto, ambos observadores estarían de acuerdo en este caso sobre la simultaneidad de los sucesos.

4 Para cierto sistema de referencia, un suceso A ocurre antes que otro B. ¿Podría ocurrir lo contrario en otro sistema de referencia?

Podría ocurrir, en efecto, lo contrario en otro sistema de referencia. Supongamos, por ejemplo, que una misma señal de luz es enviada desde un foco F equidistante con respecto a las pantallas A y B reflectantes.

Para el observador O, que se dirige hacia A desde el punto P con una velocidad v, la luz llega a A antes que a B. Por el contrario, para el observador O' que se dirige hacia B desde P, la luz llega a B antes que a A.



5 **Un viaje interestelar a un sistema planetario extrasolar ha durado, según los relojes de a bordo de la nave, 4 años, a una velocidad constante de 0,9 · *c*. ¿Cuánto tiempo ha durado el viaje según el centro de control de Tierra?**

Para el control de Tierra, la duración del viaje es de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}9 \cdot c)^2}{c^2}}} = 2{,}29$$

Por tanto:

$$\Delta t = 9{,}16 \text{ años}$$

6 **Una vara de 1 m de longitud se mueve con respecto a nuestro sistema de referencia con una velocidad de 0,7 · *c*. ¿Cuál sería la longitud que mediríamos? ¿A qué velocidad debería moverse la vara para que su longitud fuera de 50 cm para nosotros?**

La longitud que mediríamos vendría dada por:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}714 \text{ m}$$

Para que su longitud fuese de 0,5 m medida en nuestro sistema, su velocidad tendría que ser de $0{,}867 \cdot c$, como vamos a comprobar.

Si $l' = 0{,}5$ m, entonces:

$$0{,}5 = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}25$$

Es decir:

$$v = \sqrt{0{,}75} \cdot c = 0{,}867 \cdot c$$

7 **Los astronautas de una nave interestelar que viaja al 99 % de la velocidad de la luz deciden emplear una hora de su tiempo para la comida. ¿Cuánto dura esta para el centro de control de Tierra?**

Para el control de Tierra, la comida duraría siete horas, pues:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y sustituyendo los datos:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}99 \cdot c)^2}{c^2}}} = 7 \text{ h}$$

8 **¿Podría una persona que viviera 90 años hacer un viaje de ida y vuelta a un sistema estelar que se encontrara a 100 años luz? Explica tu respuesta.**

Podría, en efecto, realizar el viaje. Si se desplazara, por ejemplo, a una velocidad de $0{,}99 \cdot c$, la distancia entre la Tierra y el sistema estelar, medida en su sistema, sería:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}99 \cdot c)^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$l' = 14{,}1 \text{ años luz}$$

Por tanto, el tiempo que emplearía en su trayecto de ida y vuelta sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 14{,}1 \cdot c}{0{,}99 \cdot c} = 28{,}48 \text{ años}$$

Por el contrario, para una persona en Tierra habrían transcurrido 202 años.

9 **¿Qué contracción de longitud experimentaría el diámetro terrestre (12 740 km) desde un sistema de referencia con respecto al cual la Tierra se moviera a 30 km/s?**

La longitud medida desde el sistema de referencia sería de:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos:

$$l' = 12\,740 \cdot \sqrt{1 - \frac{30^2}{300\,000^2}}$$

Es decir:

$$l' = 12\,739{,}999\,94 \text{ km}$$

Por tanto, la contracción del diámetro terrestre vendría dado por:

$$\Delta l = l - l' = 6{,}37 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 0{,}063\,7 \text{ m} = 6{,}37 \text{ cm}$$

10 **¿Podría viajar un equipo de astronautas a un sistema estelar que se encontrara a 500 años luz (suponiendo que no hubiese problemas técnicos y que la tripulación dispusiese de métodos de protección frente a la radiación inducida)?**

Podría viajar si se desplazase a una velocidad de $0{,}999 \cdot c$, en cuyo caso, para el equipo de astronautas, la distancia al sistema estelar sería de:

$$l' = 500 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}999 \cdot c)^2}{c^2}} = 22{,}35 \text{ años luz}$$

El tiempo que emplearían en el viaje de ida y vuelta el equipo de astronautas, sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 22{,}35 \cdot c}{0{,}999 \cdot c} = 44{,}74 \text{ años}$$

Por el contrario, para un observador en Tierra habrían transcurrido 1 001 años.

11 **Dos cuerpos, A y B, se alejan de un observador O en el mismo sentido y con una velocidad de 0,5 · *c* y de 0,3 · *c*, respectivamente, en relación con O.**

a) ¿Cuál es la velocidad de A medida desde B?

b) ¿Concuerda el resultado anterior con el que se obtendría aplicando la transformación galileana?

a) La velocidad de A medida desde B vendría dada por la expresión de la transformación de Lorentz de la velocidad (**12.16**):

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$v'_x = \frac{0{,}5 \cdot c - 0{,}3 \cdot c}{1 - \frac{0{,}3 \cdot c}{c^2} \cdot 0{,}5 \cdot c} = 0{,}235 \cdot c$$

b) El resultado, evidentemente, no concuerda con el que obtendríamos aplicando la transformación de Galileo, que sería:

$$v'_x = v_x - v = 0{,}5 \cdot c - 0{,}3 \cdot c = 0{,}2 \cdot c$$

12 **Un fotón en reposo tiene una energía cero, lo que significa que su masa en reposo es también cero. ¿Qué sentido físico encierra esta aseveración?**

El significado físico de esta aseveración es que un fotón no puede existir en reposo, lo que es consistente con la propia naturaleza de la luz: no es posible que la luz esté en reposo. Como se ha demostrado en el subepígrafe 5.2, incluso para un observador que se moviera a la velocidad de la luz, esta seguiría moviéndose a la velocidad c; en consecuencia, un fotón nunca podría estar en reposo. Su existencia solo es posible a la velocidad de la luz.

13 **Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV y se mueve con una velocidad igual a 0,7 · *c*. Calcula su energía total, su energía cinética y su momento lineal.**

La energía total es:

$$E_{total} = \gamma m_o c^2 = \gamma E_o$$

donde E_o es la energía en reposo.

Puesto que $v = 0{,}7 \cdot c$, entonces:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}4$$

Y por tanto:

$$E_{total} = 147{,}98 \text{ MeV}$$

La energía cinética del muón es la diferencia entre la energía total y la energía en reposo, E_o, por lo que:

$$E_c = E_{total} - E_o = \gamma m_o c^2 - m_o c^2 = 42{,}28 \text{ MeV}$$

Por otra parte, el momento lineal será:

$$p = \gamma m_o v = \gamma m_o \cdot 0{,}7 \cdot c = \frac{\gamma m_o c^2 \cdot 0{,}7}{c} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot E_{total}}{c} = 103{,}586 \text{ MeV}/c$$

Esta unidad, MeV/c, es la más conveniente para el momento lineal relativista.

Cuestiones y problemas (páginas 348/349)

Guía de repaso

1 **¿Qué propiedades mecánicas se le asignaban al «éter lumínifero» para explicar el elevado valor de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas?**

La elasticidad y rigidez.

2 **¿Qué es lo que afirma el principio de relatividad de Galileo y Newton?**

Las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

3 **¿Es distinta la distancia entre dos puntos medida por observadores situados en sistemas de referencia inerciales galileanos? ¿Por qué?**

La distancia medida entre dos puntos es la misma. Es una de las consecuencias de las transformaciones galileanas.

4 **¿Es distinta la velocidad de un cuerpo observada desde dos sistemas de referencia inerciales galileanos que se desplazan con movimiento relativo uno con respecto al otro? ¿Por qué?**

Es distinta ya que depende del moviendo relativo entre ambos.

5 **¿Es invariable la aceleración en todos los sistemas de referencia inerciales galileanos? Explica qué implicaciones tiene este hecho.**

Sí es invariable y tiene dos implicaciones muy importantes: la primera que las leyes físicas son las mismas para observadores que se encuentren en sistemas de referencias inerciales; la segunda, que es imposible conocer si un sistema de referencia está en reposo absoluto o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.

6 **¿Por qué motivo se esperaba observar un desplazamiento de las franjas de interferencia en el experimento llevado a cabo por Michelson y Morley? ¿Qué significaba la ausencia de ese desplazamiento?**

Debido a la diferencia de velocidades entre ambos haces estos llegarían con un ligero desfase de tiempo. Esta ausencia de desplazamiento se debe a que los haces se movían con una velocidad constante, independiente de su orientación.

7 **¿Qué concluyeron Michelson y Morley acerca del éter lumínífero y de la velocidad relativa de la Tierra con respecto a aquel?**

Que la velocidad de la luz es siempre constante, independientemente del movimiento del foco emisor. Además supusieron que el éter pertenecía en reposo con respecto a la superficie terrestre.

8 **¿Qué propusieron Lorentz y Fitzgerald para explicar los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley? ¿ En qué se basaban su propuesta?**

Propusieron la hipótesis de la contracción de la longitud de los cuerpos en movimiento a través del éter. Se basaban en que las interacciones electrostáticas entre átomos y moléculas, al propagarse por el éter, se verían afectadas por el movimiento de traslación a través del mismo.

9 **¿Cuáles son los dos postulados de la relatividad especial de Einstein?**

Primer postulado: todas las leyes físicas se cumplen por igual en todos los sistemas de referencias inerciales.

Segundo postulado: la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencias inerciales y es, además, independiente del movimiento de la fuente emisora y del observador.

10 **¿Qué consecuencia se deriva de los postulados de Einstein en relación con el tiempo?**

Que el tiempo es relativo, y el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del sistema de referencia.

11 **Dos sucesos son simultáneos en un sistema de referencia determinado; ¿lo son también en cualquier otro sistema de referencia inercial? ¿Por qué motivo?**

En otro sistema de referencia no serían simultáneos. El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos es distinto para sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo.

12 **¿Es igual el intervalo de tiempo entre dos sucesos para dos observadores inerciales estacionarios uno con respecto al otro?**

El intervalo de tiempo es igual si los dos sucesos ocurren en el mismo punto.

13 **¿En qué consiste la dilatación del tiempo? ¿Cuál es su fórmula?**

Que el tiempo no es algo absoluto y que transcurre más lentamente para observadores que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. Su fórmula es la expresión **12.11.**

14 **¿Es igual la distancia entre dos puntos para dos observadores inerciales einsteinianos?**

Debido a una de las consecuencias de los postulados de Einstein; la contracción de la longitud.

15 **¿Qué fórmula expresa la relación existente entre las longitudes medidas por dos observadores inerciales que se desplazan con velocidad relativa v? ¿Con qué nombre se conoce dicha fórmula?**

Se conoce con el nombre de la fórmula de la contracción de la longitud y viene formulada en la expresión **12.12.**

16 **¿Por qué se les atribuye significados físicos tan distintos a la contracción de Lorentz-Fitzgerald y a la de Einstein a pesar de tener idéntica formulación?**

En la contracción de Lorentz-Fitzgerald no cuestiona el marco newtoniano, lo único que pretende es adaptar la realidad a los resultados. En cambio, la proposición de Einstein altera de manera notable los conceptos de espacio y tiempo.

17 **¿En qué consiste la paradoja de los gemelos?**

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

18 **¿Cuáles son las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espacio-temporales de un observador O' con las de O?**

Las expresiones son las siguientes:

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

19 **¿Qué ocurre con las transformaciones de Lorentz cuando se cumple que $v <<< c$?**

Se convierten en las transformaciones galileanas.

20 **¿Por qué se afirma que la velocidad de la luz constituye un límite insuperable? ¿Qué implicaciones tiene este hecho en las leyes de la dinámica de Newton?**

La velocidad de la luz constituye un límite insalvable porque no existe ningún cuerpo que pueda desplazarse a velocidades mayores que la de la luz. Fue un resultado que se deduce de las transformaciones de Lorentz y viene avalado por el experimento de Michelson.

Tiene implicaciones sobre dos conceptos; masa y momento lineal; en relación con la masa, esta permanece invariable y no depende del estado de movimiento, en cuanto al momento lineal permanece constante en sistemas o cuerpos aislados.

21 **¿Por qué se define una masa relativista? ¿Qué condiciones ha de cumplir dicha masa?**

De la formulación original de la segunda ley de Newton, como la velocidad no puede crecer infinitamente, tendremos que admitir que la masa se incrementa con la velocidad. Dicha masa debe alcanzar un valor infinito cuando $v = c$. Además la masa debe coincidir con la del cuerpo medida en reposo relativista (cuando $v = 0$).

22 **¿Qué es la energía en reposo de un cuerpo o partícula? ¿Tenemos evidencias experimentales de su existencia?**

Es una energía que no presenta dependencia con la velocidad y su expresión es: $E = mc^2$.

Las evidencias experimentales quedan demostradas en las reacciones nucleares.

23 **¿Qué concluye la teoría de la relatividad acerca de la masa y la energía?**

La masa es una forma de energía.

24 **Elabora un cuadro-esquema que recoja las relaciones y diferencias entre la relatividad galileana y la einsteiniana.**

El siguiente cuadro-esquema tiene carácter orientativo:

Relatividad galileana	Relatividad einsteiniana
Concepto de tiempo. El tiempo entre dos sucesos es siempre el mismo medido desde cualquier sistema de referencia. El tiempo es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	**Concepto de tiempo.** El tiempo es relativo, y el intervalo entre dos sucesos depende del sistema de referencia y del movimiento relativo.
Concepto de distancia. La distancia entre dos puntos es invariable para cualquier sistema de referencia inercial. El espacio es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	**Concepto de distancia.** La distancia entre dos puntos es distinta según la mida un observador estacionario o uno que se encuentre en movimiento relativo entre ambos. Únicamente tiene sentido hablar de espacio-tiempo y no de espacio como realidad absoluta.
Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales. Se llevan a cabo mediante las transformaciones galileanas.	**Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales.** Se realizan mediante las transformaciones de Lorentz, que conducen a la constancia de c, a su carácter de velocidad límite y a la paradoja de que $c + c = c$.

Transformaciones de Galileo

25 **Dentro de un vagón de tren que se mueve con una velocidad de 90 km/h, un pasajero lanza una pelota con una velocidad de 30 km/h a una persona que viaja en la parte trasera. ¿A qué velocidad se desplaza la pelota para esta última persona?**

Puesto que ambos se encuentran en el mismo sistema inercial, la velocidad que miden para la pelota es la misma, es decir, 30 km/h.

Relatividad especial de Einstein

26 **¿Podrían ser simultáneos dos sucesos para dos observadores inerciales si la velocidad relativa que existe entre ambos es de 0,5 · c?**

Sí podría ser simultáneo, pero con la condición expuesta y explicada en la actividad número 3.

27 **¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial, tampoco lo serán en otro estacionario con respecto al anterior»?**

La proposición es falsa. Imaginemos que el observador O se encuentra situado entre los puntos A y B a la misma distancia de ambos, en los que se hallan dos potentes reflectores.

Por el contrario, el observador O' está, por ejemplo, en la misma dirección, pero más próximo a B que a A. Si el observador O lanza un destello, percibirá los reflejos de A y B a la vez. Por tanto, los sucesos A y B son simultáneos para él.

Sin embargo, para O', el suceso B tiene lugar antes que A y no son, por tanto, simultáneos. En consecuencia, no estarían de acuerdo sobre la simultaneidad, pese a hallarse ambos observadores estacionarios uno con respecto al otro.

28 **¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial determinado, no lo serán en ningún sistema inercial»?**

Como acabamos de ver en la cuestión anterior, la proposición es falsa, pues es más general que la anterior.

29 **¿Sería posible rejuvenecer viajando a velocidades próximas a las de la luz?**

No sería posible en absoluto. La percepción del tiempo para el viajero no cambia con respecto a la que tenía en Tierra; por tanto, no rejuvenece ni envejece más lentamente según su propia percepción. Sin embargo, sí parecería hacerlo para un observador que estuviera en la Tierra, el cual percibiría que el tiempo transcurre más lentamente para aquel.

30 **Si la velocidad de la luz es la mayor posible, ¿resulta congruente afirmar que un astronauta que viaja a una velocidad inferior a la de la luz tarda 6 años en recorrer cierta distancia si la luz lo hace en 10 años?**

La luz tarda diez años desde la percepción temporal de un observador que esté en Tierra. Sin embargo, el astronauta solo puede tardar seis años desde su propia percepción, es decir, según los relojes de a bordo. El que el tiempo empleado según sus relojes sea menor se debe a que, en su sistema, la longitud resulta contraída.

En cualquiera de los casos, el viaje, según los relojes terrestres, nunca sería inferior a diez años. Por tanto, la aparente incongruencia radica en que el tiempo se ha medido en distintos sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo.

31 **¿Implica el fenómeno de la dilatación del tiempo que una persona vive más tiempo al viajar en una nave que se desplaza a velocidades próximas a las de la luz? ¿Percibe esta persona un envejecimiento más lento?**

No lo implica. Véase la explicación de la actividad final número 30.

32 **En el interior de una nave que se mueve con una velocidad de 0,8 · *c* hay una vara de dos metros. ¿Qué longitud medirá el astronauta de su interior?**

La longitud que medirá el astronauta del interior de la nave será de 2 m, pues la vara no se mueve con respecto al astronauta.

33 **Si pasáramos junto a un planeta con una velocidad próxima a la de la luz, ¿veríamos contraídas las dimensiones del planeta?**

Solo veríamos contraída la dimensión en la dirección del movimiento. Así pues, a ojos del observador de la nave, el planeta adquiriría la forma de un elipsoide, es decir, la que tiene un balón de rugby.

D34 **¿Por qué no apreciamos nunca la contracción de la longitud en las experiencias cotidianas?**

No apreciamos esto porque a las velocidades cotidianas, el factor γ es básicamente igual a 1.

35 **PAU** **Si la vida media propia de un muón es de 2 microsegundos, determina:**

a) **Su vida media desde el sistema terrestre si se mueve con una velocidad de 0,99 · *c*.**

b) **La distancia que recorrerá, desde el punto de vista del sistema terrestre, antes de desintegrarse.**

c) **La distancia que recorrerá desde el punto de vista de su propio sistema.**

a) Desde el sistema terrestre, la vida propia de un muón sería de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 7{,}088$$

Por tanto:

$$\Delta t = 14{,}17\ \mu s$$

b) La distancia que recorrerá desde el punto de vista terrestre será:

$$d = v\Delta t = (0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s) \cdot 14{,}17 \cdot 10^{-6}\ s = 4\,208{,}5\ m$$

c) Desde el punto de vista del sistema centrado en el muón, dicha distancia es:

$$d' = v\Delta t' = (0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s) \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ s = 594\ m$$

D36 **¿A qué velocidad relativa debería moverse una nave para que la distancia entre dos puntos se redujera en un 40 % con respecto a la distancia medida desde la Tierra?**

Si la distancia entre dos puntos ha de reducirse un 40 %, entonces:

$$l' = 0{,}6 \cdot l$$

Por lo que:

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$0{,}6 \cdot l = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

La velocidad relativa de la nave es:

$$v = 0{,}8 \cdot c$$

37 **PAU** **Una astronauta de 40 años de edad deja en la Tierra a una hija de 10 años. ¿Cuánto tiempo debería estar viajando en una nave que surca el espacio a 0,95 · *c*, para que, al regresar, su hija sea 10 años mayor que ella? Determina el tiempo en ambos sistemas.**

La edad de la astronauta, a su regreso, es de $40 + \Delta t'$ años, mientras que la de la hija que dejó en Tierra será de $10 + \Delta t$. Puesto que la madre es a su regreso, diez años más joven que la hija, debe cumplirse que:

$$40 + \Delta t' = (10 + \Delta t) - 10 \Rightarrow 40 + \Delta t' = \Delta t$$

Por otra parte, $\Delta t = \gamma \Delta t'$, por lo que tendremos que:

$$40 + \Delta t' = \gamma \Delta t' \Rightarrow 40 = \Delta t'(\gamma - 1)$$

Es decir:

$$\Delta t' = \frac{40}{\gamma - 1}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3{,}2$$

Por tanto:

$$\Delta t' = 18{,}18 \text{ años}$$

mientras que:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 58{,}18 \text{ años}$$

Es decir, desde el punto de vista del sistema terrestre, la astronauta debería estar viajando durante un período de 58,18 años a esa velocidad, mientras que desde el punto de vista de la propia astronauta, habrán transcurrido 18,18 años.

38 **María y Ana son dos gemelas que tienen 30 años de edad. María emprende un viaje de ida y vuelta a la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz de la Tierra, a una velocidad de 0,95 · *c*. ¿Qué edades tendrán las dos hermanas cuando María regrese a la Tierra?**

Desde el punto de vista de Ana, que se ha quedado en Tierra, el tiempo transcurrido ha sido de:

$$\Delta t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \cdot 8{,}7 \cdot c}{0{,}95 \cdot c} = 18{,}31 \text{ años}$$

mientras que el tiempo transcurrido en el sistema de María es:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 5{,}72 \text{ años}$$

pues:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3{,}2$$

De este modo, a su regreso, María se conservará más joven (35,72 años), mientras que Ana tendrá 48,31 años.

39 **PAU** **Una nave realiza un viaje interestelar a 0,999 · *c*. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido según los relojes terrestres si, según los de a bordo, la nave lleva 4 años viajando?**

El tiempo transcurrido según los relojes terrestres viene dado por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 22{,}36$$

Por tanto:

$$\Delta t = 89{,}44 \text{ años}$$

40 **PAU** **Con respecto a un observador estacionario, la longitud de una nave en reposo es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueva con una velocidad de 2,4 · 10⁸ m/s?**

La longitud que medirá vendrá dada por:

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos ofrecidos, se obtiene:

$$l' = 50 \cdot \sqrt{1 - \frac{(2{,}4 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} = 30 \text{ m}$$

Transformaciones de Lorentz

41 **¿Por qué motivo no cambia el parámetro γ en las transformaciones de Lorentz de O a O′ con respecto a las transformaciones de O′ a O?**

Dicho parámetro no cambia porque no puede admitirse ningún sistema de referencia privilegiado fijo o en reposo. Es decir, dos sistemas se mueven relativamente entre sí, de modo que cada uno percibe que el otro se aleja con cierta velocidad. Por este motivo, el factor γ debe ser el mismo en las transformaciones directa e inversa.

42 **PAU** **Un móvil, A, se desplaza con una velocidad de 0,9 · c en la dirección positiva del eje *X* con respecto a un observador O. Otro móvil, B, se desplaza con una velocidad de 0,8 · c con respecto a A, también en la dirección positiva del eje *X*. ¿Cuál es la velocidad de B con respecto a O?**

Denominamos v_x' a la velocidad de B con respecto a A. Del mismo modo, denominaremos v a la velocidad de A con respecto a O. Así pues, para determinar la velocidad de B con respecto a O, hay que realizar la transformación inversa de la velocidad de Lorentz.

Para ello, partimos de la expresión **12.16:**

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Se trata de determinar v_x, conocidas $v_x' = 0{,}8 \cdot c$, y $v = 0{,}9 \cdot c$. Despejando, obtenemos:

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} v_x'}$$

Sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$v_x = \frac{0{,}8 \cdot c + 0{,}9 \cdot c}{1 + \frac{0{,}9 \cdot c}{c^2} \cdot 0{,}8 \cdot c} = 0{,}988 \cdot c$$

Observa que el resultado de la transformación galileana nos habría llevado a una velocidad superior a c.

$$v_x = v_x' + v = 0{,}8 \cdot c + 0{,}9 \cdot c = 1{,}7 \cdot c$$

D43 **PAU** **Una nave espacial avanza en la dirección negativa del eje *X* con una velocidad de 0,9 · c con respecto a la Tierra, mientras otra lo hace en la dirección positiva del eje *X* con la misma velocidad en relación con nuestro planeta.**

Determina:

a) **La velocidad relativa de una nave con respecto a la otra.**

b) **Esa velocidad, pero aplicando las transformaciones galileanas.**

a) Consideremos como sistema O′ la nave que avanza en el sentido negativo del eje *X*. En ese caso:

$$v = -0{,}9 \cdot c$$

$$v_x = 0{,}9 \cdot c$$

Por tanto, la velocidad de la otra nave con respecto a la primera será:

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = 0{,}994 \cdot c$$

b) Aplicando las transformaciones galileanas, esta velocidad sería:

$$v_x' = v_x - v = 1{,}8 \cdot c$$

Masa y energía relativistas

44 **¿Qué significado físico tiene afirmar que la masa en reposo de un fotón es nula?**

Véase la resolución de la actividad número 12.

45 **Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona tu respuesta: «A velocidades próximas a la de la luz, la masa de las partículas aumenta».**

La proposición puede considerarse verdadera, pero haciendo una matización: la masa de las partículas aumenta si se incrementa la velocidad, hasta un valor próximo al de la luz.

Así pues, la masa no aumenta por el hecho de moverse a una velocidad próxima a la de la luz que sea constante, sino por el incremento de la velocidad.

46 **¿Qué le sucede a la masa de una partícula cuando aumenta su energía cinética? ¿Y a la velocidad?**

Para velocidades no relativistas, un aumento de la energía cinética no supone ningún cambio en la masa de una partícula, pero sí un incremento de su velocidad. Sin embargo, a velocidades relativistas, una elevación de la energía cinética sí puede conllevar un aumento de la velocidad.

Ahora bien, la velocidad tiene un límite superior y para $v = c$, la energía cinética sería infinita. Esto se debe a que, a velocidades relativistas, un aumento de energía cinética se traduce en un incremento de masa.

¿A qué velocidad será la masa de un cuerpo el doble que la que tiene en reposo?

Si la masa relativista ha de ser el doble que la masa en reposo, entonces:

$$\gamma m_o = 2 \cdot m_o \Rightarrow \gamma = 2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

la velocidad pedida es:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

Comentario: resulta conveniente expresar v como $v = xc$ y determinar x como se explica en el problema resuelto número 4 (página 347). Haciéndolo así, se obtiene:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

48 Un neutrón tiene una energía en reposo de 939,573 MeV. ¿Cuál es su masa (en kg) en dicho estado?

La energía en reposo viene dada por la siguiente expresión:

$$E_o = m_o c^2$$

Luego, si:

$$E_o = 939{,}573 \cdot 10^6 \text{ eV} = 1{,}5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

entonces:

$$m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{1{,}5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

49 PAU Un neutrón se mueve con una velocidad de 0,9 · c.

***a)* ¿Cuál es su masa relativista?**

***b)* ¿Cuál será entonces su momento lineal?**

a) La masa relativista del neutrón será:

$$m_{relativista} = \gamma m_o$$

donde $m_o = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2{,}29$$

Por tanto:

$$m_{relativista} = \gamma m_o = 3{,}84 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

b) El momento lineal valdrá, entonces:

$$p = m_{relativista} v = \gamma m_o \cdot 0{,}9 \cdot c = 1{,}03 \cdot 10^{-18} \text{ kg m/s}$$

50 PAU Un haz de protones se acelera hasta alcanzar una energía de 900 MeV. Calcula la velocidad de dichas partículas. Datos: $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Si la energía cinética que adquieren es de 900 MeV ($1{,}44 \cdot 10^{-10}$ J), entonces:

$$E_c = \gamma m_o c^2 - m_o c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1) = 1{,}44 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

De donde:

$$\gamma - 1 = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{m_o c^2} = 0{,}956 \Rightarrow \gamma = 1{,}956$$

Si consideramos v en términos de c (véase problema resuelto número 4), x valdrá:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0{,}86$$

Por tanto:

$$v = 0{,}86 \cdot c = 2{,}57 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

51 PAU Un mesón π^0 tiene una energía en reposo de 135 MeV y se mueve con una velocidad de 0,85 · *c*. Determina:

***a)* Su energía total.**

***b)* Su energía cinética.**

***c)* Su momento lineal.**

a) La energía total del mesón viene dada por:

$$E_{total} = \gamma m_o c^2 = \gamma E_o$$

donde E_o es la energía en reposo y, por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}898$$

De este modo:

$$E_{total} = 256{,}23 \text{ MeV}$$

b) La energía cinética es:

$$E_c = E_{total} - E_o = 121{,}23 \text{ MeV}$$

c) El momento lineal es:

$$p = \gamma m_o v = \frac{\gamma m_o c^2 \cdot 0{,}85}{c} = 217{,}80 \text{ MeV}/c$$

52 PAU La energía total de una partícula es el doble que su energía en reposo. ¿Con qué velocidad se mueve?

Puesto que $E_{total} = \gamma m_o c^2$, y $E_o = m_o c^2$, si $E_{total} = 2 \cdot E_o$:

$$\gamma = 2$$

Por tanto, la velocidad de la partícula será $v = xc$, donde x valdrá:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0{,}866$$

Así pues, la velocidad es de $0{,}866 \cdot c$.

13 Fundamentos de la mecánica cuántica

E S Q U E M A   D E   L A   U N I D A D

- **1. La crisis de la física cuántica en el micromundo**
  página 351
- **2. Antecedentes de la mecánica cuántica**
  páginas 352/361
  - **2.1. La radiación del cuerpo negro y la hipótesis de Planck**
    páginas 352/354
  - **2.2. El efecto fotoeléctrico y la explicación de Einstein**
    páginas 355/356
  - **2.3. Los espectros atómicos y el átomo de Bohr**
    páginas 357/361
- **3. Nacimiento y principios de la mecánica cuántica**
  páginas 362/367
  - **3.1. Ondas que son corpúsculos y corpúsculos que son ondas: la hipótesis de De Broglie**
    páginas 362/364
  - **3.2. El principio de indeterminación de Heisenberg**
    página 365
  - **3.3. La función de probabilidad de Schrödinger**
    páginas 366/367
- **4. Consecuencias de la mecánica cuántica**
  página 369

Cuestiones previas (página 350)

1. Un cuerpo que se calienta emite, en un primer momento, radiación térmica no visible. ¿Qué pasa a medida que seguimos calentándolo?

A medida que calentamos el cuerpo irá cambiando de color. Ese calor que inicialmente percibimos es radiación infrarroja invisible.

Conforme vamos calentando el cuerpo pasará por el color rojo, por tanto, emite en la frecuencia más baja del espectro visible. Si seguimos calentado al cuerpo, este cambiará a tonos más brillantes, se convierte en un cuerpo amarillo e incluso llegando al blanco. Esto significa que la frecuencia que emite un cuerpo irá aumentando con la temperatura.

2. ¿En qué momento aparece la idea de que la energía está cuantizada? ¿Qué fenómeno se logra explicar con dicha idea?

El primero que sugirió la cuantización de la energía fue Max Planck quién entonces enunció la hipótesis de que la radiación electromagnética es absorbida y emitida por la materia en forma de cuantos de luz o fotones de energía.

Einstein retomó el trabajo de Planck y extendió su estudio a la propia naturaleza y propagación de la luz. Se logra dar una explicación al efecto fotoeléctrico.

3. ¿Qué son los espectros atómicos? ¿Qué modelo de átomo logra dar una primera explicación satisfactoria del espectro más simple del átomo de hidrógeno?

El espectro atómico de un elemento es el conjunto de frecuencias de las ondas electromagnéticas emitidas por ese elemento y es característico de cada elemento.

El primer modelo de átomo que logra dar una explicación es el modelo de Bohr.

4. ¿Sigue vigente la división tradicional entre ondas y partículas?

Sí sigue vigente sobretodo para explicar insospechados efectos y fenómenos que tienen lugar a escala subatómica.

5. Si los electrones son partículas, como parece demostrado, ¿podrían dar lugar a fenómenos de difracción?

Si pueden los electrones dar lugar al fenómeno de la difracción. Fue de formas accidental C. J. Davisson y L. H: Germen, estudiando la dispersión de electrones en un blanco de niquel.

Actividades (páginas 353/365)

1 Vega es una estrella azulada de la constelación de Lira, mientras que Aldebarán es una gigante roja de la constelación de Tauro. ¿Cuál de las dos tiene una mayor temperatura superficial?

Como se desprende de la ley de Wien, puesto que la longitud de onda del azul es menor que la del rojo, la temperatura superficial de Vega es mayor que la de Aldebarán.

2 Dada la temperatura superficial de nuestro cuerpo, ¿qué tipo de radiación emiten los seres humanos?

La temperatura de nuestro cuerpo es de unos 37 °C (310 K), por lo que, en virtud de la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0{,}2897 \text{ cm K}}{310 \text{ K}} = 9{,}345 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 9\,345 \text{ nm}$$

Esta longitud de onda corresponde al infrarrojo, que es el tipo de radiación que emiten los seres humanos.

3 ¿Cuál es el tamaño energético de un cuanto de luz amarilla de 510 nm?

El tamaño energético será:

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

y sustituyendo los datos:

$$E = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{5{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 3{,}9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2{,}44 \text{ eV}$$

4 Sustituyendo los valores de las constantes que figuran en la expresión 13.21 de Bohr, demuestra que la constante que aparece fuera del paréntesis tiene el mismo valor que la constante de Rydberg.

Los valores de las constantes son las siguientes:

- $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
- $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
- $\varepsilon_o = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ C^2/N m^2
- $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s
- $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s

Al sustituirlos en la expresión **13.21,** se obtiene el valor de la constante de Rydberg:

$$\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_o^2 h^3 c} = 107\,643{,}9 \text{ cm}^{-1}$$

La desviación del conocido valor se debe a las aproximaciones decimales de las constantes involucradas.

5 PAU Cuando un electrón pasa a órbitas superiores, ¿aumenta su energía total? ¿Y su energía cinética? Demuéstralo utilizando las expresiones pertinentes.

La energía total del electrón (para el átomo de hidrógeno) sí aumenta, como se puede ver en la siguiente expresión:

$$E_{\text{total}} = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ eV}$$

Según esto, al incrementarse el valor de n y ser la energía total negativa, aumentará la energía total. Por el contrario, la energía cinética del electrón viene dada por la expresión:

$$E_c = \frac{1}{8} \cdot \frac{m_e e^4}{\varepsilon_o^2 n^2 h^2}$$

por lo que al aumentar el valor de n, disminuye la energía cinética.

6 Calcula la longitud de onda asociada a:

***a)* Un electrón que tiene una energía cinética de 200 eV.**

***b)* Un protón que tiene una energía cinética de 104 eV.**

a) Teniendo en cuenta que $E_c = p^2/2m$ (desde el punto de vista clásico, aplicable cuando $v << c$, como es el caso del electrón de esta actividad), tenemos que:

$$p = \sqrt{2mE_c}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 8{,}687 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0{,}086\,8 \text{ nm}$$

donde se ha considerado que la energía cinética vale 200 eV ($3{,}2 \cdot 10^{-17}$ J).

b) Procediendo de idéntico modo:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 2{,}865 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

7 **Halla la longitud de onda asociada a los siguientes cuerpos e indica a qué zona del espectro corresponde cada una de ellas:**

a) **Un neutrón que se mueve con una velocidad de 10 km/s.**

b) **Una pelota de 20 g de masa que se mueve a una velocidad de 20 m/s.**

a) En este caso:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10^{4}\ \text{m/s}} = 3{,}96 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

Se trata de una longitud de onda correspondiente a radiaciones gamma.

b) En este caso:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot 20\ \text{m/s}} = 1{,}66 \cdot 10^{-33}\ \text{m}$$

Evidentemente, para cuerpos y velocidades del dominio clásico, la longitud de onda tiende a cero, como es el caso, pues no se contemplan propiedades ondulatorias en el movimiento de dichos cuerpos.

8 **Calcula la indeterminación mínima de la cantidad de movimiento de un electrón confinado en un átomo de 1 Å de diámetro, así como su energía cinética mínima.**

Asumiremos que el tamaño del átomo es la indeterminación posible en la posición del electrón.

Así pues, la mínima indeterminación posible en la cantidad de movimiento del electrón se obtendrá de este modo:

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2\pi \Delta x}$$

Puesto que $\Delta x = 10^{-10}$ m, al sustituir, se obtiene:

$$\Delta p = 1{,}056 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m/s}$$

Según esto, el mínimo valor posible de momento lineal del electrón sería igual a su incertidumbre. Dado que $E_c = p^2/2m$, la energía cinética mínima será:

$$E_{c\ \text{mín}} = \frac{\Delta p^2}{2m} = 6{,}11 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}82\ \text{eV}$$

Cuestiones y problemas (páginas 370/371)

Guía de repaso

1 **¿Qué problema dio pie a la introducción del concepto de cuanto de energía?**

No explicaba la curva de emisión de un cuerpo negro debido a que los cuantos de mayor frecuencia podrían emitir mayores energías.

2 **¿Cómo varía la longitud de onda de la radiación emitida por un cuerpo caliente conforme se aumenta la temperatura? ¿Sabrías citar ejemplos que lo avalen?**

Disminuye su longitud de onda que viene determinada por la ley de desplazamiento de Wien.

Por ejemplo, los cambios de coloración del carbón o de un metal fundido cuando aumentamos su temperatura.

3 **¿Qué es un cuerpo negro? ¿Cómo podemos «construir» un cuerpo negro?**

Un cuerpo negro es aquel que absorbe todas las radiaciones; en consecuencia, es también un emisor ideal.

Podemos construir un cuerpo negro mediante una caja herméticamente cerrada y practicando un pequeño orificio en ella.

4 **¿Cómo es posible que un cuerpo negro se considere el emisor o radiador ideal si absorbe todas las radiaciones?**

Si un cuerpo se encuentra en equilibrio térmico, la energía que absorbe debe ser igual a la que emite. En consecuencia, un cuerpo negro en equilibrio térmico es un emisor ideal por ser un absorbente ideal.

5 **¿Qué leyes empíricas describen la radiación de un cuerpo negro? Enúncialas.**

- Ley de Stefan-Boltzmann: La intensidad de la radiación térmica de un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.
- Ley de desplazamiento de Wien: El producto de la longitud de onda correspondiente al máximo de emisión por la temperatura absoluta es constante.

6 **¿A qué resultados conducían las teorías clásicas en su intento de interpretar el problema del cuerpo negro?**

Conducían a la llamada «catástrofe ultravioleta».

7 **¿A qué se llama catástrofe ultravioleta?**

Se llama catástrofe ultravioleta al hecho de que, según los resultados clásicos del problema de la emisión del cuerpo negro, para longitudes de onda muy pequeñas (del orden de las ultravioletas), la potencia irradiada tendería a infinito.

8 **¿Cuál es el procedimiento que sigue Planck al abordar el problema del cuerpo negro?**

En primer lugar formuló la ecuación matemática que se ajustara de una manera general a todas las gráficas y, una vez encontradas, buscó una interpretación física.

9 **¿Por qué decimos que la constante de Planck es universal? ¿Hay hechos que puedan demostrarlo?**

Puesto que la radiación electromagnética se rige por las mismas leyes, con independencia del origen de su emisión, y estas radiaciones encuentran explicación en la teoría de Planck, la constante *h* se convierte en universal.

10 **¿Qué hipótesis plantea Planck en la resolución del problema del cuerpo negro?**

El número de osciladores de baja frecuencia es muy superior al de osciladores de alta frecuencia.

11 **¿Qué es el efecto fotoeléctrico? ¿Conoces algunas aplicaciones de este efecto?**

El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones por un material cuando se le ilumina con radiación electromagnética. Las células fotoeléctricas basan su funcionamiento en dicho efecto.

12 **¿Cómo se descubrió el efecto fotoeléctrico?**

Mediante el experimento de Hertz.

13 **¿Cómo puede determinarse la energía cinética de los electrones que saltan en el efecto fotoeléctrico?**

Mediante la expresión **13.7** conocida también como la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico. Si conocemos el trabajo de extracción necesario para arrancar un electrón y la energía del fotón incidente podremos calcular dicha energía cinética.

14 **¿Qué características presenta el efecto fotoeléctrico?**

Solo se emiten electrones cuando la frecuencia de la luz que incide sobre la placa supera cierto valor que se denomina frecuencia umbral, y que es característico de cada metal. Por debajo de dicha frecuencia umbral no hay emisión de electrones. Por encima de dicha frecuencia umbral, un aumento de intensidad luminosa produce un incremento del número de electrones emitidos, pero no de su energía cinética máxima.

El número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación luminosa recibida.

15 ¿Qué diferencia hay entre la idea de los cuantos de Planck y la de los de Einstein? ¿Qué son los fotones?

Los cuantos de Planck se introducen para explicar los fenómenos de absorción y emisión de energía por parte de los átomos. Por tanto, en realidad, están relacionados únicamente con la naturaleza de los átomos. La idea de Einstein es que es la propia luz la que está constituida por cuantos de energía de diversos «tamaños», de modo que la energía que transporta una radiación electromagnética no está repartida de manera uniforme, sino que se encuentra concentrada en forma de cuantos, a los que se dio el nombre de fotones. De ese modo, la luz recuperaba su naturaleza corpuscular.

16 ¿Qué significa la ecuación de Einstein que describe el efecto fotoeléctrico?

Significa que un aumento de intensidad solo supone un incremento del número de fotones que llegan a la superficie, con lo que es mayor el número de electrones arrancados, pero no su energía cinética.

17 ¿Qué reconocimiento experimental tuvo la teoría de los cuantos en 1916?

La demostración experimental que hizo Millikan de h a partir del efecto fotoeléctrico.

18 ¿Cómo calculó Millikan la constante de Planck?

Midiendo en un mismo metal los potenciales de frenado necesarios para distintas radiaciones incidentes de frecuencias conocidas. El valor que obtuvo concordaba con el que Planck había usado en su explicación de la emisión del cuerpo negro.

19 ¿Qué es un espectro atómico? Describe el dispositivo experimental que nos permite obtenerlos.

Es el conjunto de frecuencias de las ondas electromagnéticas emitidas por átomos de ese elemento. Haciendo pasar luz blanca por una rendija estrecha y se descompone luego en un prisma (ver figura 13.8).

20 ¿Qué características hicieron que los espectros se convirtieran en objeto de estudio de muchos científicos?

Debido a que como el espectro es algo característico de cada elemento esta relacionado con la naturaleza de los átomos que constituyen dicho elemento.

21 ¿Qué regularidad observó Balmer? ¿Para qué espectro? ¿Cómo la formuló matemáticamente?

La regularidad que encontró fue la constante de Rydberg para el átomo de hidrógeno a través de la expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

22 ¿Qué expresión general representa las series espectrales? ¿Cuántas series espectrales se conocen para el hidrógeno atómico?

La expresión general es:

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{v} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Se conocen las series: Lyman, Blamer, Parchen, Brackett, Pfund y Humphreys.

23 ¿Qué problema se le planteó al modelo atómico propuesto por Rutherford?

La estabilidad de los átomos requería que los electrones giraran alrededor del núcleo en diferentes órbitas. En este punto, sin embargo, la física clásica volvía a introducir otra contradicción: los electrones en movimiento circular periódico debían emitir radiación electromagnética de modo continuo. Esto llevaba inexorablemente a concluir que su trayectoria acabaría en el núcleo.

24 ¿Cómo resuelve Bohr el problema de Rutherford?

Mediante la condición de cuantización de la energía de Planck y Einstein y la condición de cuantización del momento angular.

25 ¿Qué expresión nos da el radio permitido (en Å) de las órbitas de Bohr?

La expresión:

$$r = 0{,}53 \cdot n^2 \text{ Å}$$

26 ¿Cuál es la explicación que da el modelo de Bohr del espectro del hidrógeno?

Por un lado explica que los átomos solo emitirán aquellas energías que corresponden a diferencias de energía entre las distintas órbitas y, por otro lado, que la separación energética entre niveles superiores sea menor que entre niveles inferiores.

27 ¿Por qué la serie de Lyman aparece en el ultravioleta según este modelo?

Porque equivale a los valores del espectro dentro de la zona del ultravioleta.

28 ¿Qué hipótesis plantea De Broglie? ¿Obtuvo confirmación experimental?

Consiste en sugerir que la naturaleza debía regirse por leyes simétricas, de modo que si una onda (como la luz) tenía propiedades corpusculares, un corpúsculo (como el electrón) debía tener propiedades ondulatorias.

Consiguió confirmación experimental a través de la difracción e interferencia de los electrones.

29 ¿Cómo explica De Broglie el concepto de órbita estacionaria de Bohr? ¿Cómo obtiene el segundo postulado?

Para De Broglie una órbita estacionaria es aquella que corresponde al establecimiento en su seno de una onda estacionaria del electrón.

El segundo postulado lo obtiene desde un punto de vista ondulatorio y con la condición de cuantización de Bohr.

30 ¿Qué afirma el principio de indeterminación? ¿Tiene correlación este principio con la mecánica clásica?

El principio de indeterminación afirmna que el producto de las indeterminaciones de medida de la posición y del momento lineal es, como mínimo, igual a la constante de Planck dividida por 2π, de modo que cuanto mayor sea la precisión en la medida de la posición, mayor será la imprecisión del momento lineal, y viceversa.

Sí tiene correlación ya que en la mecánica clásica a medida que aumenta la masa, el producto de las indeterminaciones tiende a disminuir y se acerca a cero.

31 ¿Qué es la energía del punto cero?

La energía del punto cero es la energía cinética a 0 K que implica que existe movimiento.

32 ¿Qué significado tiene la función de onda introducida por Schrödinger?

Representa la probabilidad máxima de encontrar un electrón en un determinado volumen.

33 ¿Existe algún símil clásico de la ecuación ondulatoria de Schrödinger?

Sí existe un símil clásico que es el cálculo de la energía de un sistema se realiza a partir de la energía cinética y potencial.

34 **¿Mantiene la mecánica cuántica el concepto de órbita del átomo de Bohr?**

No la mantien, la idea de las trayectorias precisas de Bohr se sustituye por zonas o regiones donde existe máxima probabilidad de hallar al electrón.

Radiación del cuerpo negro

35 **Si el color negro es el que más radiaciones absorbe, ¿por qué los exploradores de los polos utilizan habitualmente colores claros en las ropas que llevan?**

Dado que un buen absorbente es también un buen emisor, podemos concluir, igualmente, que un mal absorbente es también un mal emisor.

Al ser el color blanco un mal absorbente (pues refleja todas las radiaciones), será también un mal emisor, lo que hace que disminuya la pérdida de la propia energía del cuerpo por radiación. Por ese motivo, la ropa aconsejable en zonas polares para preservar la temperatura corporal sería la blanca.

En cualquier caso, los exploradores de los polos suelen usar colores claros y no blancos, con el objeto de no ser confundidos con la nieve y poder ser localizados en caso de extraviarse.

36 **Cuando se representa un cuerpo negro ideal, suele elegirse como cavidad un orificio esférico. ¿A qué es debido esto?**

Porque de ese modo el número de reflexiones es mucho mayor, lo que permite que la energía sea absorbida paulatinamente en cada reflexión y evita que vuelva a salir por el orificio.

37 **Al calentar un alambre de platino, este va tomando distintas tonalidades; rojas, naranjas, amarillas, para llegar finalmente al blanco brillante. ¿Por qué no se vuelve verde o azul?**

Según puede observarse en la figura 13.3 (página 353), a medida que la temperatura aumenta, el pico de emisión se desplaza hacia longitudes de onda menores; sin embargo, también se observa que aumenta la intensidad de las emisiones correspondientes a las demás longitudes de onda adyacentes. Esto, combinado con la distinta sensibilidad de nuestros ojos a los colores, conduce a que percibamos finalmente un blanco rojizo brillante como resultado de la combinación de las intensidades de los colores presentes.

38 **¿Cómo se puede determinar la temperatura de la superficie de una estrella?**

Se determina analizando la longitud de onda correspondiente a la luz que se emite con máxima intensidad y aplicando la ley de Wien.

39 **La temperatura superficial del Sol es de aproximadamente 6 000 K. ¿A qué longitud de onda y a qué color corresponde el pico de emisión?**

Teniendo en cuenta la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0{,}2897 \text{ cm K}}{6\,000 \text{ K}} = 4{,}82 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 482 \text{ nm}$$

El pico de emisión correspondería al azul.

Efecto fotoeléctrico

40 **Cuando un fotón choca con un electrón en la superficie de un material, el fotón transfiere toda su energía al electrón.**

a) **¿De qué magnitudes depende la energía que tiene el fotón?**

b) **¿Será siempre emitido el electrón con la energía transferida o es preciso que se dé alguna otra condición? Razona tu respuesta.**

a) Depende de la frecuencia de la radiación incidente, así como de la constante de Planck.

b) Parte de la energía transferida se emplea en el trabajo de extracción, por lo que la energía cinética del electrón emitido será siempre menor que la del fotón incidente.

41 PAU **Sabiendo que el valor de la longitud de onda umbral de la plata es de 262 nm. Determina la energía cinética de los electrones emitidos si se ilumina la superficie con una radiación incidente de 200 nm.**

Puesto que:

$$hf = hf_o + E_c$$

entonces:

$$E_c = h\,(f - f_o) = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right) = 2{,}35 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

42 PAU **El potencial de ionización del litio es 5,38 eV. Deduce el valor de la frecuencia y la longitud de onda umbral para que pueda producirse efecto fotoeléctrico. ¿Qué tipo de radiación produce emisión fotoeléctrica en el litio?**

Dado que el potencial de ionización es lo mismo que el trabajo de extracción del electrón:

$$f_o = \frac{E_o}{h} = 1{,}30 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

donde hemos considerado que 5,38 eV equivale a $8{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

La longitud de onda umbral será:

$$\lambda_o = \frac{c}{f_o} = 230 \text{ nm}$$

que corresponde a la radiación ultravioleta.

43 PAU **El valor del umbral fotoeléctrico para cierto metal es de 2,9 eV. Determina:**

a) **La frecuencia a partir de la cual un haz de luz podrá arrancar electrones de ese material.**

b) **La energía cinética máxima, expresada en julios, que podrán tener los electrones arrancados por otro haz cuya longitud sea de $2 \cdot 10^{-7}$ m.**

a) La frecuencia que corresponde al valor umbral es:

$$f_o = \frac{E_o}{h} = \frac{4{,}64 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} = 6{,}99 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

b) La energía incidente para esa longitud de onda es:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 9{,}945 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por otro lado:

$$E = E_{\text{umbral}} + E_c \Rightarrow E_c = E - E_{\text{umbral}}$$

Sustituyendo los datos:

$$E_c = (9{,}945 - 4{,}64) \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5{,}31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

D44 **Sobre un metal inciden fotones cuya longitud de onda es de 500 nm. Si la longitud de onda umbral correspondiente a dicho metal es de 612 nm:**

a) **Indica si se extraen o no electrones.**

b) **Determina, en su caso, la energía cinética que tienen los mismos.**

c) **Calcula la energía de extracción en eV.**

a) Sí se extraen electrones, pues, al ser la longitud de onda incidente menor que la umbral, la energía asociada es mayor.

b) La energía cinética de los fotones es:

$$E_c = E_{\text{incidente}} - E_{\text{umbral}} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right) =$$
$$= 7{,}29 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0{,}455 \text{ eV}$$

c) La energía de extracción o umbral es:

$$E_{\text{umbral}} = h\frac{c}{\lambda_o} = 3{,}25 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2{,}03 \text{ eV}$$

45 **PAU** **Se ilumina una superficie pulida y limpia de litio con una radiación de 200 nm de longitud de onda. ¿Con qué velocidad salen los electrones de la superficie?**

Puesto que el potencial de ionización del litio es de 5,38 eV ($8{,}608 \cdot 10^{-19}$ J), si se ilumina con radiación de 200 nm, le corresponde una energía asociada de:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 9{,}945 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

entonces, la energía cinética comunicada a los electrones es de:

$$E_c = E - E_o = 1{,}337 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

De este modo, la velocidad de los electrones será de:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 5{,}42 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

46 **PAU** **¿Qué potencial debe aplicarse para detener los electrones más rápidos emitidos por una superficie de cobre sometida a la acción de una radiación de 1 500 Å de longitud de onda, sabiendo que el valor de la energía umbral del cobre es de 4,4 eV?**

El potencial de frenado es igual a:

$$V_f = \frac{E_c}{e}$$

Y la energía incidente es:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 1{,}326 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Puesto que $E_{umbral} = 7{,}04 \cdot 10^{-19}$ J, entonces:

$$E_c = E - E_{umbral} = 6{,}22 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Por tanto:

$$V_f = 3{,}88\ \text{V}$$

Espectros atómicos

47 **Los espectros de absorción atómicos se fundamentan en el análisis de la luz que llega de cierta fuente después de atravesar una muestra gaseosa de algún elemento. El resultado es un conjunto de líneas negras (ausencia de radiación de ciertas frecuencias) sobre un fondo de espectro continuo. ¿Qué relación guardan dichas líneas negras con el espectro de emisión del elemento gaseoso?**

Dichas líneas aparecen exactamente en los mismos lugares (mismas longitudes de onda) del registro gráfico que las líneas de emisión. Un espectro de absorción registra la luz no absorbida por la muestra, apareciendo como líneas negras las zonas cuya longitud de onda o frecuencia corresponde a la luz absorbida. Sin embargo, la energía que un átomo absorbe al excitarse es la que emite cuando vuelve a su estado fundamental; por esa razón, las líneas de absorción y emisión de un espectro son coincidentes.

D48 **PAU** **El postulado de cuantización del momento angular de Bohr establece valores discretos para esta magnitud. Haciendo uso del principio de correspondencia, demuestra que en la mecánica clásica se llega a la ausencia de dicha cuantización.**

El principio de correspondencia, formulado por el propio Bohr, establece que, para números cuánticos grandes, se obtienen las predicciones clásicas. En la mecánica clásica, el momento angular, puede adquirir cualquier valor y no existe cuantización alguna. La condición de cuantización del momento angular (en realidad, arbitraria) fue impuesta con el fin de conseguir que las diferencias energéticas entre niveles correspondiesen a las transiciones energéticas de las líneas espectrales.

Dado que la energía de las órbitas de Bohr para el átomo de hidrógeno viene dada por la expresión $-13{,}6/n^2$ eV, la diferencia de energía entre niveles tiende a cero para valores grandes de n, de modo que en estos casos la energía puede suponerse continua, lo cual se corresponde con la predicción clásica. De ese modo, desaparece también la condición de cuantización del momento angular, que puede adquirir cualquier valor.

49 **PAU** **¿Cómo puede deducirse el potencial de ionización de un elemento a partir del modelo de Bohr?**

El potencial de ionización es la mínima energía necesaria para que un electrón deje de estar ligado al núcleo y, por tanto, su energía sea cero (recordemos que la energía de un electrón ligado a un átomo es negativa). En consonancia, con el modelo de Bohr, este valor de energía sería el correspondiente a n infinito. Por tanto, se trataría de calcular la energía absorbida cuando n_2 es infinito.

50 **¿Qué relación existe entre el espectro de un átomo de helio ionizado y el del hidrógeno?**

Ambos son monoelectrónicos, pero, en el caso del helio ionizado, la carga nuclear es Ze. Si se desarrolla la expresión de la energía emitida al pasar de una órbita superior a una inferior, aparecerá el término Z^2, lo que significa que las líneas correspondientes a las series espectrales aparecen desplazadas en el caso del helio con respecto al hidrógeno. Concretamente, como $Z = 2$, los números de onda de las líneas del helio ionizado serán cuatro veces mayores.

51 **PAU** **Al excitar un átomo de hidrógeno, su electrón pasa a otro nivel energético y absorbe 12 eV. Calcula la frecuencia y la longitud de onda de la radiación emitida cuando vuelve a su estado fundamental.**

La energía emitida al volver a su estado fundamental será también de 12 eV $= 1{,}92 \cdot 10^{-18}$ J. Así pues:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} = 2{,}9 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}$$

mientras que:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 103\ \text{nm}$$

52 **PAU** **Con respecto a un átomo de hidrógeno, calcula:**

a) **La energía necesaria, en eV, para excitar el electrón hasta el nivel 5.**

b) **La longitud de onda de la radiación emitida al volver a su estado fundamental.**

c) **La energía que se necesita si se quiere excitar todos los electrones de 1 mol de átomos hasta el nivel 5. Exprésala en J/mol.**

a) En el átomo de hidrógeno, la energía correspondiente a cada nivel viene dada, en eV, por la expresión de Bohr:

$$E = -\frac{13{,}6}{n^2}\ \text{eV}$$

Por tanto, la energía requerida para excitar un electrón hasta el nivel 5 es:

$$E_5 - E_1 = -0{,}544 - (-13{,}6) = 13{,}056\ \text{eV}$$

b) Al volver al estado fundamental, emitirá la energía absorbida, por lo que:

$$\Delta E = 13{,}056\ \text{eV} = 2{,}08 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

Por tanto:

$$\Delta E = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 95\ \text{nm}$$

c) Se requerirá una energía igual a:

$$E = N_A \Delta E = 7{,}86 \cdot 10^{24}\ \text{eV/mol} = 1{,}252 \cdot 10^6\ \text{J/mol}$$

53 **¿Cuál es la longitud de onda más corta de la serie de Lyman? ¿Y de la de Balmer?**

La longitud de onda más corta es la que corresponde a la mayor transición posible en cada serie y, por tanto, a la mayor energía.

En cada caso, pues, $n_2 = \infty$.

De este modo:

- Para la serie de Lyman:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2}\right)$$

despejando queda:

$$\lambda = \frac{n_1^2}{R} = 9{,}11 \cdot 10^{-6}\ \text{cm} = 91{,}1\ \text{nm}$$

- Para la de Balmer:

$$\lambda = \frac{n_1^2}{R} = 364\ \text{nm}$$

54 **Determina la longitud de onda correspondiente a la tercera raya espectral de la serie de Paschen y calcula luego su frecuencia.**

En la serie de Paschen, $n_1 = 3$, por lo que:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36}\right) \Rightarrow \lambda = 1\,094\ \text{nm}$$

valor que corresponde, pues, a la zona del infrarrojo.

Por otro lado, la frecuencia de esta raya espectral es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 2{,}74 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Mecánica cuántica

55 **PAU** **¿Qué significa que las órbitas de Bohr sean estacionarias a la luz de la hipótesis de De Broglie?**

Significa que corresponden al establecimiento de ondas estacionarias del electrón en dicha órbita.

Esta condición sí tiene significado físico real y conduce a la cuantización del momento angular.

56 **Se determina la posición de una partícula y su momento lineal con un error de 10^{-5} m y 10^{-7} kg m/s, respectivamente.**

a) **Es imposible, pues esto va en contra del principio de incertidumbre.**

b) **Es posible, ya que no viola dicho principio.**

c) **No se puede asegurar si es o no posible; es necesario conocer la energía de la partícula.**

El producto de las indeterminaciones es 10^{-12} y, por tanto, mayor que $h/2\pi$, por lo que la respuesta correcta es la ***b).***

57 **Un electrón tiene una longitud de onda de 250 nm. ¿A qué velocidad se mueve?**

Según el principio de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = 2\,912\ \text{m/s}$$

58 **¿Con qué diferencia de potencial tendríamos que acelerar un electrón para que su longitud de onda fuese de 10 nm?**

El momento lineal de un electrón que tuviera esa longitud de onda sería de:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-26}\ \text{kg m/s}$$

por lo que su energía cinética sería:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = 2{,}41 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$$

Así, la diferencia de potencial que habría que aplicar sería:

$$e\Delta V = \Delta E_c \Rightarrow \Delta V = 0{,}015\ \text{V}$$

59 **¿Cuál sería la longitud de onda asociada a una pelota de 50 g que se moviera con una velocidad de 30 m/s?**

La longitud de onda asociada será:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 4{,}4 \cdot 10^{-34}\ \text{m}$$

Es decir, es prácticamente cero.

D 60 **PAU** **Una partícula de 2 μg se mueve con una velocidad de 5 cm/s. Calcula la indeterminación mínima de su posición teniendo en cuenta que la indeterminación de su velocidad es de un 0,002 %.**

La indeterminación de la velocidad es:

$$\Delta v = 0{,}05\ \text{m/s} \cdot \frac{0{,}002}{100} = 10^{-6}\ \text{m/s}$$

Por tanto, la indeterminación del momento lineal será:

$$\Delta p = m\Delta v = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{kg} \cdot 10^{-6}\ \text{m/s} = 2 \cdot 10^{-15}\ \text{kg m/s}$$

En consecuencia, la indeterminación de la posición viene dada por la expresión:

$$\Delta x = \frac{h}{2\pi\Delta p} = 5{,}28 \cdot 10^{-20}\ \text{m}$$

61 **PAU** **Si la posición de un electrón puede medirse con una exactitud de $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ m, ¿con qué precisión se puede conocer su velocidad?**

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-36}$ J s; m_e 9,1 · 10^{-31} kg

Si la indeterminación de la posición es $\Delta x = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ m, la de la velocidad será:

$$\Delta v = \frac{h}{2\pi m\Delta x} = 7{,}2 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}$$

62 **Un fotón posee una longitud de onda de $2{,}0 \cdot 10^{-11}$ m. Calcula:**

a) **Su cantidad de movimiento.**

b) **Su energía.**

a) El momento lineal o cantidad de movimiento del fotón es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3{,}31 \cdot 10^{-23}\ \text{kg m/s}$$

b) La energía es:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 9{,}94 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

14 Física nuclear

ESQUEMA DE LA UNIDAD

- **1. El camino hacia el núcleo atómico** página 373
- **2. El descubrimiento del núcleo** páginas 374/375
  - 2.1. Constitución básica del núcleo página 375
- **3. Tamaño y densidad de los núcleos** páginas 376/377
- **4. Estabilidad del núcleo** páginas 378/380
  - 4.1. La estabilidad desde el punto de vista energético: energía de enlace páginas 379/380
- **5. Núcleos inestables: la radiactividad natural** páginas 381/387
  - 5.1. Tipos de radiactividad páginas 381/382
  - 5.2. Leyes del desplazamiento radiactivo páginas 382/384
  - 5.3. Ley de la desintegración radiactiva: período de semidesintegración o semivida páginas 385/386
  - 5.4. Datación arqueológica por el método del carbono-14 página 387
  - 5.5. Series radiactivas y geocronología página 387
- **6. Reacciones nucleares** páginas 388/391
  - 6.1. Reacciones nucleares artificiales página 388
  - 6.2. Fisión nuclear páginas 389/390
  - 6.3. Fusión nuclear páginas 390/391
- **7. La estructura más íntima de la materia** páginas 392/393
  - 7.1. Quarks y leptones páginas 392/393

Cuestiones previas (página 372)

1. ¿Qué experimento evidenció la naturaleza nuclear del átomo? ¿Qué características tenía que tener el núcleo atómico para dar cuenta de los resultados de dicha experiencia?

El experimento fue llevado a cabo por Rutherford mediante un dispositivo que permitía medir las dispersiones de las partículas alfas que atravesaban una lámina de oro. Estableció después del experimento que toda la masa del átomo se encontraba concentrada en una zona muy pequeña y superdensa que era el núcleo. Y que los electrones giran alrededor del núcleo en ciertas órbitas en una zona mucho menos densa.

2. ¿Qué es la radiactividad? ¿Cuál es su origen y su naturaleza?

La radiactividad es un fenómeno por el cual algunas sustancias son capaces de emitir radiaciones. Estas radiaciones pueden ser de tres tipos: la radiación alfa constituida por las partículas alfas (núcleos de helio), la radiación beta que son electrones que se mueven a gran velocidad y las radiaciones gamma que son radiaciones electromagnéticas.

3. ¿Puede explicarse la estabilidad nuclear acudiendo a la ley de Coulomb?

No porque las fuerzas electrostáticas serían fuertemente repulsivas a la distancia que se encuentra los protones en el núcleo.

4. ¿Qué son las reacciones nucleares? ¿Cómo se producen?

Las reacciones nucleares consisten en modificar artificialmente los núcleos de los átomos. Se producen, en general, bombardeando núcleos con protones, neutrones o incluso con átomos de menor tamaño.

5. ¿De dónde proviene la enorme cantidad de energía que se libera en las reacciones nucleares?

Es debida al defecto de masa entre los productos y los reactivos y esta se transforma en energía.

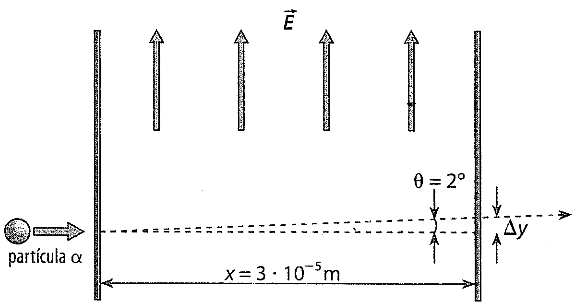
6. ¿Qué son las series radiactivas? ¿Conoces algunas aplicaciones de los isótopos radiactivos?

Son la serie de reacciones que se produce que se inicia con un núcleo inestable hasta llegar a su núcleo estable. Aplicaciones de los isótopos radiactivos puede ser la datación arqueológica, el diagnóstico y tratamiento de determinadas enfermedades, etcétera.

Actividades (páginas 373/391)

1 Deduce la expresión que permitió a Rutherford estimar el valor del campo eléctrico capaz de producir desviaciones de cierto ángulo al atravesar un espesor de mica de 30 μm. ¿De qué factores depende?

Si suponemos la existencia de un campo eléctrico uniforme transversal que actúe a lo largo del grosor de la mica, se explicaría la desviación que experimentan las partículas α:



La trayectoria seguida por el haz en el interior de la mica vendría dada por:

$$x = vt$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2$$

por lo que:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\cdot a\frac{x^2}{v^2}$$

De la figura se deduce que:

$$\Delta y = x \operatorname{tg}\theta$$

Y como:

$$a = \frac{QE}{m}$$

entonces:

$$x \operatorname{tg}\theta = \frac{QEx^2}{2mv^2}$$

Despejando E, obtenemos:

$$E = \frac{2mv^2 \operatorname{tg}\theta}{Qx}$$

Esta es la expresión que permitió a Rutherford estimar el valor del campo transversal que tenía que actuar en el grosor de la mica. Los factores que debían conocerse, aparte de los citados, era la relación Q/m de las partículas α y su velocidad.

2 Haciendo uso de la expresión 14.3, calcula los valores aproximados de los radios nucleares de los siguientes núclidos:

a) $^{179}_{79}\text{Au}$ ***b)*** $^{16}_{8}\text{O}$ ***c)*** $^{239}_{92}\text{U}$

a) Para el oro (A = 197): $r = 1{,}2 \cdot A^{1/3} = 6{,}98$ fm

b) Para el oxígeno (A = 16): r = 3,02 fm

c) Para el uranio (A = 235): r = 7,4 fm

3 ¿Por qué en los experimentos de dispersión de electrones por los núcleos los electrones deben tener un momento lineal elevado?

El momento lineal debe ser elevado porque de ese modo la longitud de onda de los electrones ($\lambda = h/p$) es muy pequeña y comparable al tamaño de los núcleos atómicos, lo que posibilita la difracción de aquellos por estos.

4 Las masas atómicas del $^{7}_{4}$Be y del $^{9}_{4}$Be son 7,016 930 u y 9,012 183 u, respectivamente. Determina cuál es el átomo más estable.

El defecto de masa para el $^{7}_{4}$Be es:

$$\Delta m = (4 \cdot m_p + 3 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}} = 0{,}038\,169 \text{ u}$$

Por tanto, la energía liberada en la formación del núcleo de $^{7}_{4}$Be es:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 35{,}55 \text{ MeV}$$

Por su parte, el defecto de masa para el $^{9}_{4}$Be es:

$$\Delta m = (4 \cdot m_p + 5 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}} = 0{,}060\,246 \text{ u}$$

y la energía liberada:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 56{,}12 \text{ MeV}$$

Por consiguiente, el núcleo más estable es el de número másico 9.

5 ¿Qué energía se libera por núcleo en una reacción nuclear en la que se produce un defecto de masa de 0,1 u?

Se libera una energía de:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 93{,}15 \text{ MeV}$$

6 **Calcula la energía nuclear de enlace correspondiente al $^{7}_{3}Li$, sabiendo que su masa es de 7,016 01 u.**

La energía de enlace es la misma que la que resulta del defecto de masa, pues sería la que debe suministrarse para separar el núcleo en sus componentes. Por tanto:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} =$$
$$= [(3 \cdot m_p + 4 \cdot m_n) - m_{\text{atómica}}] \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} =$$
$$= 0{,}040\,047\,8 \text{ u} \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 37{,}7 \text{ MeV}$$

7 **Calcula la energía de enlace del helio-4 a partir de los datos de tabla 14.2.**

Puesto que el defecto de masa es $\Delta m = 0{,}030\,4$ u, entonces:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 28{,}32 \text{ MeV}$$

8 **PAU** **Considera los núcleos de litio Li-6 y Li-7 de masas 6,015 2 u y 7,016 0 u, respectivamente, siendo 3 el número atómico de estos dos isótopos. Calcula para ambos núcleos:**

***a)* El defecto de masa.**

***b)* La energía de enlace.**

***c)* La energía de enlace por nucleón.**

Datos: 1 uma = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; 1 uma = 931 MeV; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$J; $m_{\text{protones}} = 1{,}007\,3$ u; $m_{\text{neutrón}} = 1{,}008\,7$ u

a) Calculamos el defecto de masa utilizando la expresión **14.4**:

$$\Delta m = (Z_{\text{protón}} \cdot m_{\text{protón}} + (A + Z)_{\text{neutrón}} \cdot m_{\text{neutrón}}) - m_{\text{núcleo}}$$

Para el $^{6}_{3}Li$ su valor es:

$$\Delta m = (3 \cdot 1{,}007\,3 + 3 \cdot 1{,}008\,7) \text{ u} - 6{,}015\,2 \text{ u} = 0{,}032\,8 \text{ u}$$

Para el $^{7}_{3}Li$:

$$\Delta m = (3 \cdot 1{,}007\,3 + 4 \cdot 1{,}008\,7) \text{ u} - 7{,}016 \text{ u} = 0{,}040\,7 \text{ u}$$

b) Para calcular la energía de enlace utilizamos el equivalente energético de 1 u = 931, 5 MeV:

Para el $^{6}_{3}Li$:

$$\Delta E = 0{,}032\,8 \text{ u} \cdot 931 \text{ MeV/u} = 30{,}54 \text{ MeV}$$

Para el $^{7}_{3}Li$:

$$\Delta E = 0{,}040\,7 \text{ u} \cdot 931 \text{ MeV/u} = 37{,}9 \text{ MeV}$$

c) La energía de enlace por nucleón se consigue dividiendo la energía de enlace por el número de nucleones.

Para el $^{6}_{3}Li$:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{30{,}54 \text{ MeV}}{6} = 5{,}09 \text{ MeV}$$

Para el $^{7}_{3}Li$:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{37{,}9 \text{ MeV}}{7} = 5{,}41 \text{ MeV}$$

9 **PAU** **Calcula la energía cinética y la velocidad de la partícula alfa emitida en la desintegración del uranio-238.**

Datos: masa del U-238 = 238,050 786 u; masa del Th-234 = = 234,043 583 u; masa de la partícula α = 4,002 603 u

La desintegración del $^{238}_{92}U$ es:

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

Hay que tener en cuenta que:

$$p_\alpha = p_{Th}$$

y que la energía que se transfiere a los productos de desintegración es:

$$E_{c\alpha} + E_{cTh} = E = [m_U - (m_{Th} + m_\alpha)] \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u}$$

Como:

$$E_{c\alpha} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}$$

$$E_{cTh} = \frac{p_{Th}^2}{2m_{Th}} = \frac{p_\alpha^2}{2m_{Th}}$$

entonces:

$$E = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}\right) = E_{c\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}\right)$$

de donde:

$$E_{c\alpha} = \frac{E}{1 + \dfrac{m_\alpha}{m_{Th}}} = 4{,}21 \text{ MeV}$$

energía cinética que corresponde a una velocidad de:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_\alpha}} = 1{,}42 \cdot 10^{7} \text{ m/s}$$

10 **¿Tendrá lugar de modo espontáneo el decaimiento alfa del rutenio-102? Datos: masa del Ru-102 = 101,904 348 u; masa del Mo-98 = 97,905 405 u**

No ocurrirá de modo espontáneo, pues el defecto de masa de la hipotética desintegración α es negativo:

$$^{102}_{44}Ru \rightarrow {}^{98}_{42}Mo + {}^{4}_{2}He$$

Por tanto, dicha desintegración es inviable.

11 **PAU** **Sabiendo que la desintegración de un átomo de U-235 produce unos 200 MeV de energía, calcula la energía total liberada por cada gramo de dicho elemento.**

Un átomo de $^{235}_{92}U$ tiene $235 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ g = $3{,}9 \cdot 10^{-22}$ g de masa. Por tanto, la energía total liberada en la desintegración de 1 g de esta sustancia será de:

$$E = \frac{200 \text{ MeV}}{3{,}9 \cdot 10^{-22} \text{ g}} = 5{,}12 \cdot 10^{23} \text{ MeV/g} = 8{,}2 \cdot 10^{10} \text{ J/g}$$

12 **PAU** **Completa la siguiente secuencia radiactiva (la letra situada encima de cada flecha indica la partícula emitida por el núcleo de la izquierda):**

$$^{232}_{90}Th \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots$$

La secuencia radiactiva completa es la siguiente:

$$^{232}_{90}Th \xrightarrow{\alpha} {}^{228}_{88}Ra \xrightarrow{\beta} {}^{228}_{89}Ac \xrightarrow{\beta} {}^{228}_{90}Th \xrightarrow{\alpha} {}^{224}_{88}Ra$$

13 **PAU** **¿Cuál es el núclido que falta en las siguientes reacciones de desintegración?**

$$^{215}_{84}Po \rightarrow \ldots + {}^{4}_{2}He$$

$$\ldots \rightarrow {}^{40}_{19}K + {}^{0}_{-1}e$$

Las reacciones completas son estas:

$$^{215}_{84}Po \rightarrow {}^{211}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He;\ {}^{40}_{18}Ar \rightarrow {}^{40}_{19}K + {}^{0}_{-1}e$$

14 **Completa la gráfica de la figura 14.14 de la página 384 del libro de texto.**

Los núcleos que completan la gráfica son:

$$^{241}_{94}Pu \xrightarrow{\beta} {}^{241}_{95}Am \xrightarrow{\alpha} {}^{237}_{93}Np \xrightarrow{\alpha} {}^{233}_{91}Pa \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} {}^{233}_{92}U \xrightarrow{\alpha} {}^{229}_{90}Th \xrightarrow{\alpha} {}^{225}_{88}Ra \xrightarrow{\beta} {}^{225}_{89}Ac \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} {}^{221}_{87}Fr \xrightarrow{\alpha} {}^{217}_{85}At \xrightarrow{\alpha} {}^{213}_{83}Bi \xrightarrow{\beta} {}^{213}_{84}Po \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} {}^{209}_{82}Pb \xrightarrow{\beta} {}^{209}_{83}Bi$$

Como se ve en el subepígrafe 5.5, esta es la serie $4n + 1$ del $^{241}_{94}Pu$, con respecto a la cual solo se tiene constancia de su producto final, el $^{209}_{83}Bi$.

15 **Determina el número atómico y másico del isótopo que resultará del $^{238}_{92}U$ después de emitir tres partículas alfa y dos beta.**

El isótopo tendrá $3 \cdot 4 = 12$ unidades menos de número másico y $3 \cdot 2 + 2\,(-1) = 4$ unidades menos del número atómico, es decir, $A = 226$, y $Z = 88$; por tanto, será:

$$^{226}_{88}Ra$$

16 **PAU** **El período de semidesintegración de un núclido es de 50 años. Una muestra original de 50 g contiene en la actualidad 30 g del núclido original. Calcula la antigüedad y actividad actual de la muestra.**

Aplicando la ley de la desintegración radiactiva en la forma:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

y teniendo en cuenta que:

$$N = \frac{30}{50} \cdot N_0 = \frac{3}{5} \cdot N_0$$

cabe concluir que:

$$\frac{3}{5} = 2^{-t/T}$$

tomando logaritmos queda:

$$\ln \frac{3}{5} = -\frac{t}{T} \ln 2$$

de donde:

$$t = 36{,}79 \text{ años}$$

Luego, la antigüedad de la muestra es de 36,79 años. Su actividad actual será 3/5 de la inicial (λN_0).

17 **PAU** **El cobalto 60 (^{60}Co) se utiliza frecuentemente como fuente radiactiva en medicina. Su periodo de semidesintegración es 5,25 años determinar cuánto tiempo, después de entregada una muestra nueva a un hospital habrá disminuido su actividad a una octava parte del valor original.**

Hallamos la constante radiactiva mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{5{,}25} = 0{,}132 \text{ años}^{-1}$$

Y como la actividad tiene que disminuir a la octava parte de su valor inicial ($N = 1/8 N_0$), sustituimos en la expresión:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} N_0 = N_0 \cdot e^{-0{,}132t} \Rightarrow 0{,}125 = e^{-0{,}132t}$$

Y tomando logaritmos neperianos obtenemos:

$$\ln 0{,}125 = -0{,}132t$$

despejando:

$$t = 15{,}75 \text{ años}$$

18 **PAU** **La actividad de una muestra que contiene carbono 14, ^{14}C es de $5 \cdot 10^7$ Bq.**

a) **Halla el número de núcleos de ^{14}C en la muestra.**

b) **Calcula la actividad de la muestra dentro de 11 460 años.**

a) Primero expresamos el período de semidesintegración en segundos:

$$T_{1/2} = 5\,730 \text{ años} \cdot 365{,}25 \text{ días/año} \cdot 24 \text{ h/día} \cdot 3\,600 \text{ s/h} = 1{,}8 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

La constante radiactiva se calcula mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{1{,}8 \cdot 10^{11} \text{ s}} = 3{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Como la actividad de la muestra es $5 \cdot 10^7 \text{ Bq} = \lambda N$, despejando N:

$$N = \frac{5 \cdot 10^7}{3{,}9 \cdot 10^{-12}} = 1{,}28 \cdot 10^{19} \text{ núcleos de } ^{14}\text{C}$$

b) Ya que 11 460 años son dos períodos del ^{14}C. Utilizando la expresión **14.12** tenemos que:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = 5 \cdot 10^7 \text{ Bq} \cdot e^{\frac{-0{,}693}{5730 \text{ años}} \cdot 11\,460 \text{ años}} = 1{,}25 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

19 **La fisión de un núcleo de plutonio-239 produce rubidio-93 y lantano-144. Escribe la reacción completa.**

La reacción completa es:

$$^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{93}_{37}\text{Rb} + {}^{144}_{57}\text{La} + 2\,{}^{1}_{0}n$$

20 **Calcula cuánta masa pierde el Sol cada segundo en forma de energía liberada. Compárala con su masa estimada (aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ Kg). ¿Cuánto tardaría el Sol en perder una millonésima parte de su masa?**

Teniendo en cuenta que la energía irradiada por el Sol es de $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J/s, la pérdida de masa por segundo será:

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = 4{,}22 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Esto, comparado con la masa solar, supone:

$$\frac{\Delta m}{m_S} = 2{,}1 \cdot 10^{-21}$$

Es decir, constituye una fracción insignificante. A ese ritmo, el tiempo que tardaría el Sol en perder una millonésima parte de su masa sería:

$$\frac{10^{-6}}{2{,}1 \cdot 10^{-21}} \cdot 1 \text{ s} = 4{,}76 \cdot 10^{14} \text{ s} \cong 15 \text{ millones de años}$$

Cuestiones y problemas (páginas 396/397)

Guía de repaso

1 **¿Quién descubrió la radiactividad? ¿Cómo lo hizo?**

Lo descubrió **Antoine Henri Becquerel** que investigaba la posibilidad de producir radiaciones similares a los rayos X en sales de uranio que presentaban el fenómeno de la fosforescencia.

2 **¿Cuántos tipos de radiactividad hay? ¿Cómo pueden diferenciarse? ¿Qué poder de penetración tienen?**

Existen tres tipos: radiaciones alfa, beta y gamma. Se distinguen por su distinto poder de penetración y peligrosidad.

Las radiaciones gamma son las de mayor poder de penetración seguidas de las beta y las alfa.

3 **¿Qué llevó a Rutherford a investigar la dispersión de las partículas alfa?**

El fenómeno de dispersión de los rayos alfa al atravesar una lámina de mica.

4 **¿Qué hecho peculiar condujo a la consideración de la existencia del núcleo?**

Mediante el detector-contador descubrió que había partículas alfa que rebotaban.

5 **Detalla el procedimiento usado por Rutherford para determinar de un modo aproximado el tamaño de los núcleos.**

A partir de sus experimentos de dispersión de partículas alfa, Rutherford calculó, de un modo aproximado, cuál podría ser el tamaño del núcleo. Las partículas que salían rebotadas tenían que haber colisionado frontalmente contra el núcleo; sin embargo, este choque no implicaba contacto físico entre núcleo y partícula, sino que el rebote se debía a la intensa repulsión culombiana que existía entre ambos. Mediante consideraciones energéticas llegó a una expresión matemática de la distancia de máxima aproximación entre el núcleo y la partícula alfa debe ser ligerísimamente mayor que el radio nuclear.

6 **¿Cuál es el tamaño relativo que tiene un núcleo con respecto al átomo?**

Del orden de 10^{-10} m.

7 **¿Qué hecho parece demostrar que los núcleos tienen bordes difusos?**

Empleando técnicas de dispersión de electrones de elevado momento lineal se observó que la intensidad de los mínimos que se producen no es nula.

8 **¿Cuál es la fórmula empírica que relaciona el radio de los núcleos con el número másico?**

La siguiente expresión:

$$r \simeq 1{,}2 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$$

9 **Demuestra que la densidad de los núcleos es constante y determina su valor.**

Véase el procedimiento de la página 377, en el que partiendo de la fórmula de la densidad y considerando la expresión que relaciona el radio con el número másico se llega a que:

$$P = 2{,}4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

10 **¿Cómo es posible que los protones puedan coexistir en un espacio tan reducido como el núcleo?**

Debido a que las fuerzas nucleares son atractivas, de gran intensidad y de muy corto alcance.

11 **¿Qué hecho hace suponer que las fuerzas nucleares son de corto alcance?**

El corto alcance de estas fuerzas se debe al hecho de que la densidad nuclear es constante, lo que supone que cada nucleón solo interacciona con los vecinos.

12 **¿Muestran dependencia de la carga eléctrica las fuerzas nucleares?**

No, las fuerzas nucleares no dependen de la carga eléctrica.

13 **¿Cuándo puede afirmarse que un núcleo es estable?**

El defecto de masa.

14 **¿A qué se denomina defecto de masa?**

El defecto de masa es la variación de la masa de los nucleones (protones y neutrones) y la masa de los núcleos.

15 **¿Qué parámetro sirve para comparar las estabilidades relativas de los diversos núclidos? ¿Cómo se define?**

El parámetro es la energía de enlace que corresponde a cada nucleón y viene determinada por la expresión:

$$E_{\text{enlace/nucleón}} = \frac{\Delta E}{A}$$

16 **¿Cuál es el equivalente energético de 1 u? Calcúlalo.**

El equivalente energético de 1 u es de 931,5 MeV. Se calcula mediante la expresión $\Delta E = mc^2$:

$\Delta E = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931{,}5 \text{ MeV}$

17 **¿Qué núcleos son los más estables? ¿Qué hechos experimentales lo avalan?**

Los núcleos medianos.

18 **¿Por qué aumenta el número de neutrones por encima del de protones a medida que se incrementa el número atómico de un núcleo?**

A medida que aumenta el número de protones, la creciente repulsión exige un número cada vez mayor de neutrones presentes.

19 **¿A partir de qué número atómico resultan inestables los núcleos?**

A partir del número atómico 83 que corresponde el bismuto.

20 **¿En qué consiste el decaimiento alfa? ¿Y el beta?**

El decaimiento alfa es cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, este se transforma en otro cuyo número atómico es dos unidades menor y cuya masa es aproximadamente cuatro unidades menor. El decaimiento beta es cuando un núcleo radiactivo emite un electrón beta, este se transforma en otro cuyo número atómico es una unidad mayor y cuya masa es prácticamente igual.

21 **¿Cómo podemos saber si un núclido puede sufrir un decaimiento alfa?**

Si aplicamos la expresión **14.8** y nos sale positiva, habría transferencia cinética a las partículas finales, con lo cual conlleva a un decaimiento alfa.

22 **Enuncia y representa las leyes del desplazamiento radiactivo.**

Las leyes de desplazamiento radiactivo se enuncian:

- Cuando un **núcleo radiactivo emite una partícula alfa,** el elemento resultante se desplaza dos lugares a la izquierda en el sistema periódico, es decir, se transforma en otro cuyo número atómico es dos unidades menor y cuya masa es aproximadamente cuatro unidades menor.
- Cuando un **núcleo radiactivo emite un electrón beta,** el elemento resultante se desplaza un lugar a la derecha en el sistema periódico, esto es, se transforma en otro cuyo número atómico es una unidad mayor y cuya masa es prácticamente igual.
- Cuando un **núcleo radiactivo excitado emite radiación gamma,** se desexcita energéticamente, pero no sufre transmutación alguna.

23 **¿Son emitidas con igual velocidad las partículas alfa y beta?**

No, las beta tienen mayor velocidad que las alfa.

24 **¿Existen realmente electrones en el núcleo?**

No existen electrones en el núcleo.

25 **¿Cómo varía con el tiempo la actividad de una sustancia radiactiva?**

A través de la ley de la desintegración radiactiva (expresión **14.10**) vemos que su variación es exponencial y negativa.

26 **¿Qué es el período de semidesintegración? ¿Coincide con la vida media?**

El período de semidesintegración es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos iniciales. Es el mismo concepto que la vida media.

27 **¿Cuál es la ley de la desintegración radiactiva? Escríbela también en función de la constante de desintegración radiactiva.**

La ley de desintegración radiactiva nos relaciona el número de núcleos que quedan sin desintegrar con el tiempo.

En función de la constante de desintegración radiactiva, λ, es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

28 **¿En qué consiste el método de datación arqueológica del carbono-14?**

Consiste en medir la proporción residual de C-14 en la muestra y teniendo en cuenta que su período de semidesintegración es de 5 730 años, poder determinar la antigüedad de un resto arqueológico.

29 **¿Qué son las series radiactivas? ¿Cuántas series se conocen? ¿Qué particularidad tienen todos los núclidos de una serie?**

Las series o familias radiactivas son la serie de elementos que mediante deseintegraciones alfa y beta a partir de un elemento radiactivo. Se conocen cuatro series radiactivas: torio-232, plutonio-241, uranio-238 y uranio-235.

Los núclidos de cada serie tiene sus números másicos proporcionales a un número.

30 **¿Qué procedimiento se usa para la cronología geológica?**

En la aplicación de la ley de desintegración radiactiva a rocas y minerales.

31 **¿Qué es una reacción nuclear?**

Las reacciones nucleares consisten en modificar artificialmente los núcleos de los átomos bombardeando núcleos con protones, neutrones o incluso con átomos de menor tamaño.

32 **¿Cómo se descubrió el protón? ¿Y el neutrón?**

El protón se descubrió mediante una reacción nuclear que consistía en bombardear núcleos de nitrógeno con partículas alfa, liberando núcleos de hidrógenos o protones. Y los neutrones, bombardeando núcleos de berilio con partículas alfa.

33 **¿Qué puede ocurrir cuando un núcleo captura un neutrón lento?**

Puede producir cuatro procesos distintos: radiaciones gamma, emitir partículas alfa, emitir un protón y la fisión nuclear.

34 **¿Qué es la fisión nuclear? ¿Cómo se produce?**

La fisión nuclear consiste en fragmentar un núcleo desestabilizado en dos núcleos más pequeños. Cuando el núcleo absorbe un neutrón, se excita y se deforma. Debido que las fuerzas de repulsión son mayores que las de atracción se va separando hasta dividirse el núcleo en dos partes iguales.

35 **¿Qué hay que hacer para mantener controlada una reacción de fisión en cadena? ¿Qué pasa si se descontrola?**

Utilizando grafito para moderar la velocidad de los neutrones y barras de cadmio para absorberlos.

Si la reacción no se controla se libera energía de forma explosiva.

36 **¿Qué es la masa crítica?**

Es cuando el número de neutrones producidos es igual al número de neutrones que se escapan; a partir de aquí se descontrola la cadena.

37 **¿Qué es la fusión nuclear? ¿Qué proceso tiene lugar en el Sol? Escribe las reacciones que pueden producirse en él.**

La fusión nuclear es cuando núcleos pequeños se unen para formar núcleos mayores.

En el Sol se produce la fusión del hidrógeno cuyas reacciones están descritas en la página 390 del *Libro del alumno*.

38 **¿De dónde proviene la enorme cantidad de energía liberada en los procesos de fisión y de fusión?**

Es debida al defecto de masa entre los productos y los reactivos y al ser menor la masa de los productos, esta se transforma en energía.

39 **¿Cuáles son los constituyentes básicos de la materia según las teorías modernas?**

Los quarks y los leptones.

40 **¿Qué partículas están constituidas por quarks?**

Los quarks están constituidos por: **u** (up, «arriba»), **d** (down, «abajo»), **s** (strange, «extraño»), **c** (charm, «encanto»), **b** (bottom, «fondo») y **t** (top, «cima»).

41 **¿En qué se diferencian los bariones y los mesones?**

Los bariones están constituidos por tres quarks y los mesones por un quark y un antiquark.

42 **¿Qué propiedades se asigna a los quarks?**

Se le asigna una tercera propiedad adicional a la carga y al espín; el color.

43 **¿Qué leptones forman parte de la materia ordinaria?**

Solamente el electrón y su correspondiente neutrino.

El núcleo atómico y estabilidad

44 **PAU** **Determina qué isótopo debemos usar como blanco para formar Na-24 si se emplean:**

a) **Protones.**

b) **Neutrones.**

c) **Partículas alfa.**

a) Ne-23.

b) Na-23.

c) F-20.

En todos los casos hemos supuesto que la reacción es de captura.

45 **PAU** **Determina el radio nuclear y el volumen de una partícula alfa. A partir de los datos obtenidos, determina el volumen de un nucleón.**

El número másico de la partícula α es 4, por lo que:

$$r \cong 1{,}2 \cdot A^{1/3}\ \text{fm} = 1{,}9\ \text{fm}$$

Suponiendo que la partícula α es esférica, su volumen será:

$$V = 4/3\ \pi r^3 = 2{,}8 \cdot 10^{-44}\ \text{m}^3$$

Puesto que consta de 4 nucleones, el volumen de un nucleón será:

$$V_{\text{nucleón}} = 7 \cdot 10^{-45}\ \text{m}^3$$

46 **PAU** **Calcula la energía de enlace del deuterón si su masa es de 2,014 102 u.**

El deuterón se compone de un protón y un neutrón, por lo que su energía de enlace, igual a la liberada en el proceso de constitución, será:

$$E = \Delta m \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = [(m_p + m_n) - m] \cdot 931{,}5\ \text{MeV}$$

Por tanto:

$$E = 1{,}713\ \text{MeV}$$

47 **PAU** **Calcula la energía de ligadura por nucleón del Ne-20 y del Ca-40. Datos: masa atómica del Ne-20 = 19,992 440 u; masa atómica del Ca-40 = 39,962 591 u**

El $^{20}_{10}$Ne tiene 10 protones y 10 neutrones. Su energía de enlace es:

$$E = \Delta m \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = 155{,}53\ \text{MeV}$$

Por tanto, la energía de enlace por nucleón será:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{155{,}53\ \text{MeV}}{20} = 7{,}77\ \text{MeV}$$

En el caso del $^{40}_{20}$Ca, con 20 protones y 20 neutrones, la energía de enlace es:

$$E = \Delta m \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = 331{,}83\ \text{MeV}$$

Así, la energía de enlace por nucleón será:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{331{,}83\ \text{MeV}}{40} = 8{,}29\ \text{MeV}$$

48 **PAU** **La masa atómica del plomo-208 es 207,976 6 u.**

a) **¿Qué energía se desprende en la formación del núcleo?**

b) **¿Cuál es la energía de enlace por nucleón correspondiente a este núclido?**

El $^{208}_{82}$Pb consta de 126 neutrones y 82 protones. Por tanto:

a) La energía que se desprende en la formación del núcleo es:

$$E = \Delta m \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = 1\ 594{,}56\ \text{MeV}$$

b) La energía de enlace por nucleón es:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{1\ 594{,}56\ \text{MeV}}{208} = 7{,}66\ \text{MeV}$$

Radiactividad y desplazamiento radiactivo

49 **¿Podría ocurrir que un mismo núcleo emitiera a la vez radiación alfa y beta? ¿Y alfa y gamma?**

Evidentemente, un núcleo se transforma en otro de distinta naturaleza después de emitir una partícula alfa, por lo que nunca puede darse el caso de que el mismo núcleo emita radiación alfa y beta a la vez. Sí puede ocurrir esto en procesos independientes, es decir, en distintas series, como ocurre en el caso del Bi-214, que emite radiación alfa en una serie y beta en la otra. Por el mismo motivo, un núcleo tampoco puede emitir simultáneamente radiación alfa y gamma; la emisión gamma es consecuencia del proceso de estabilización del núcleo resultante, pero no del emisor. En este último caso, el proceso inverso sí es posible y, de hecho, frecuente.

50 **¿Qué diferencia existe entre un proceso radiactivo y uno químico?**

En un proceso radiactivo se modifica la naturaleza del núcleo, mientras que en uno químico no.

D51 **PAU** **Halla la energía cinética y la velocidad de la partícula alfa emitida en el decaimiento alfa del uranio-236.**

Datos: masa atómica del U-236 = 236,045 563 u; masa atómica del Th-232 = 232,038 054 u; masa de la partícula alfa = 4,002 603 u

El decaimiento alfa del U-236 es:

$$^{236}_{92}\text{U} \rightarrow ^{232}_{90}\text{Th} + ^{4}_{2}\text{He}$$

Procediendo como se expone en la aplicación de la página 383, obtenemos:

$$E_{c\alpha} = \frac{E}{1 + \dfrac{m_\alpha}{m_{Th}}}$$

La energía transferida a los productos de la desintegración es:

$$E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 4{,}57 \text{ MeV} = 7{,}31 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{c\alpha} = 4{,}49 \text{ MeV} = 7{,}18 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Así pues, su velocidad será:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{c\alpha}}{m_\alpha}} = 1{,}48 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Desintegración radiactiva

52 **¿Por qué no puede utilizarse la prueba del C-14 para averiguar la edad de rocas o minerales?**

No puede utilizarse la prueba del C-14 en este caso porque solo es válida para restos de seres vivos, durante la existencia de los cuales se ha producido un intercambio de materia con el medio.

53 **¿Por qué no sufre variaciones la actividad de una sustancia aunque se encuentre en disolución o combinada con otras?**

La combinación química o la disolución son procesos químicos en los que solo intervienen los electrones de las capas más externas, por lo que ni los núcleos ni su actividad resultan afectados.

54 **El número atómico de un núclido ha disminuido dos unidades, y su número másico, ocho unidades; por consiguiente, el núclido ha sufrido:**

a) **Dos desintegraciones alfa y una beta.**

b) **Tres desintegraciones beta y una alfa.**

Ninguna de las dos respuestas es correcta. Ha sufrido dos desintegraciones alfa y dos beta.

55 **Una sustancia tiene un período de semidesintegración de 5 minutos. De aquí puede deducirse que, al aislar 100 átomos de la muestra:**

a) **Quedan 50 átomos al cabo de 5 minutos.**

b) **Pueden quedar los 100, un número indeterminado o ninguno.**

La respuesta correcta es la ***b)***. Como todo concepto estadístico, el período de semidesintegración solo es válido considerando un número muy grande de núcleos. Es obvio que 100 átomos no lo es.

56 **PAU** **Una muestra de cierta sustancia radiactiva sufre 10 200 desintegraciones por segundo en su instante inicial. Al cabo de 10 días, presenta una tasa de 510 desintegraciones por segundo.**

a) **¿Cuál es su período de semidesintegración?**

b) **¿Y su vida media?**

a) La muestra disponible, al cabo de 10 días se ha reducido a 1/20 de la muestra inicial, por lo que:

$$N = N_0 2^{-t/T} \Rightarrow \frac{1}{20} N_0 = N_0 2^{-t/T}$$

Despejando T, obtenemos:

$$T = 2{,}314 \text{ días}$$

b) Puesto que la vida media se define como:

$$\tau = \frac{T}{\ln 2}$$

entonces:

$$\tau = 3{,}338 \text{ días}$$

57 **PAU** **La semivida del yodo-131 es 8,04 días. Calcula:**

a) **Su constante de decaimiento.**

b) **Su vida media.**

c) **El porcentaje de muestra inicial que queda al cabo de 1 mes.**

a) Su constante de decaimiento λ será:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}086 \text{ días}^{-1}$$

b) Su vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 11{,}60 \text{ días} = 1{,}003 \cdot 10^6 \text{ s}$$

c) Puesto que:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

sustituyendo t (30 días) y T (8,04 días), obtenemos:

$$N = 0{,}075 \cdot N_0$$

Por tanto, queda un 7,5 % de la muestra inicial.

58 **La actividad radiactiva de una madera antigua es cuatro veces menor que la de otra madera de la misma clase y con igual masa. ¿Qué edad tiene la madera analizada?**

Dato: semivida del C-14 = 5 730 años

La muestra actual es 1/4 de la inicial. Por tanto:

$$N = N_0 2^{-t/T} \Rightarrow \frac{1}{4} N_0 = N_0 2^{-t/T}$$

Operando para despejar t, y teniendo en cuenta que $T = 5\,730$ años, obtenemos:

$$t = 11\,460 \text{ años}$$

59 **PAU** **Una muestra radiactiva contenía 10^9 núcleos radiactivos hace 40 días y en la actualidad posee 10^8. Calcula:**

a) **La constante de desintegración.**

b) **La vida media.**

c) **La actividad de la muestra al cabo de una semana.**

a) La muestra actual es 1/10 de la inicial.

Operando como en el ejercicio anterior, obtenemos:

$$T = 12{,}04 \text{ días}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}057\,56 \text{ días}^{-1} = 6{,}66 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

b) Su vida media es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ s} = 17{,}34 \text{ días}$$

c) La actividad al cabo de una semana vendrá dada por λN, donde N es el número de núcleos sin desintegrar, y se obtiene de la expresión:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

Considerando $N_0 = 10^9$ núclidos, $t = 7$ días, y $T = 12{,}04$ días, entonces:

$$N = 6{,}68 \cdot 10^8 \text{ núclidos}$$

En consecuencia, la actividad de la muestra al cabo de una semana es:

$$\text{actividad} = \lambda N = 6{,}66 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \cdot 6{,}68 \cdot 10^8 = 445 \text{ Bq}$$

D 60 PAU El bismuto-210 ($Z = 83$) emite una partícula beta y se transforma en polonio; este, a su vez, emite una partícula alfa y se transforma en un isótopo del plomo.

***a)* Escribe las reacciones de desintegración.**

***b)* Si la semivida del bismuto-210 es de 5 días, ¿cuántos núcleos se han desintegrado en 10 días si inicialmente se tenía 1 mol de átomos de este elemento?**

a) Las reacciones son, respectivamente, las siguientes:

$$^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^{210}_{84}\text{Po} + ^{0}_{-1}e$$

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Pb} + ^{4}_{2}\text{He}$$

b) Si $N_0 = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ núcleos/mol, al cabo de 10 días quedan sin desintegrar:

$$N = N_0 2^{-t/T} = N_0\, 2^{-10/5} = 0{,}25 \cdot N_0$$

Por tanto, se ha desintegrado el 75 % de los núcleos, es decir:

$$0{,}75 \cdot N_0 = 4{,}516 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}$$

61 PAU Una muestra contiene 10^{20} núcleos radiactivos con un período de semidesintegración de 27 días. Halla:

***a)* La constante de desintegración.**

***b)* El número de núcleos radiactivos al cabo de un año.**

***c)* La actividad de la muestra al cabo de un año.**

a) La constante de semidesintegración es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 2{,}96 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

b) Al cabo de 1 año (365 días):

$$N = N_0 2^{-t/T} = 8{,}52 \cdot 10^{15} \text{ núcleos}$$

c) Por tanto, la actividad de la muestra al cabo de un año es:

$$\lambda N = 2{,}52 \cdot 10^9 \text{ Bq}$$

D 62 ¿Qué masa de yodo-131, cuyo período de semidesintegración es de 8 días, quedará a los 15 días si se partió de una muestra inicial que contenía 200 g de dicho isótopo?

Si se parte de la expresión:

$$N = N_0 2^{-t/T}$$

y sustituyendo t (15 días) y T (8 días), se obtiene:

$$N = 0{,}272\,6 \cdot N_0$$

Por tanto, quedará una muestra de 54,52 g sin desintegrar al cabo de 15 días.

63 PAU Los dos primeros pasos de la cadena de desintegración del $^{238}_{92}$U son:

$$^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{?}_{?}\text{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{?}_{?}\text{Pa}$$

Completa las correspondientes ecuaciones de desintegración e indica el número másico y atómico de los núcleos que se obtienen durante y al final del proceso.

La ecuación de desintegración completa es:

$$^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{91}\text{Pa}$$

Así, para el Th, $Z = 90$, y $A = 234$; y para el Pa, $Z = 91$, y $A = 234$.

Reacciones nucleares

64 PAU Cuando se bombardea con un protón un núcleo de $^{7}_{3}$Li este se descompone en dos partículas alfa.

***a)* Escribe y ajusta la reacción nuclear del proceso.**

***b)* Calcula la energía liberada en dicha desintegración.**

Datos: masa atómica del litio = 7,016 01 u; masa atómica del hidrógeno = 1,007 276 u; masa atómica del helio = = 4,002 603 u

a) La reacción del proceso es:

$$^{7}_{3}\text{Li} + ^{1}_{1}\text{H} \rightarrow 2\, ^{4}_{2}\text{He}$$

b) La energía liberada procede del defecto de masa:

$$\Delta m = [(m_{\text{Li}} + m_{\text{H}}) - 2m_\alpha] = 0{,}018\,08 \text{ u}$$

Por tanto:

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931{,}5 \text{ MeV/u} = 16{,}88 \text{ MeV}$$

Partículas elementales

65 A partir de la información dada en el texto, deduce qué tríos de quarks formarán los protones y los neutrones.

Puesto que la materia ordinaria está formada por los quarks **u** y **d**, y dado que la carga del protón es +1 y la del neutrón es cero, entonces, los tríos de quarks que los compondrán serán **u, u, d,** para el caso del protón (los **u** son de distinto color), y **u, d, d,** para el del neutrón (los **d** son ahora de distinto color).

66 Teniendo en cuenta que los mesones π están formados por los sabores u y d, ¿cuáles serán los pares quark-antiquark constituyentes del mesón π^+, del mesón π^- y del mesón π^0 neutro?

El mesón π^+ estará constituido por **u, $\bar{\text{d}}$** (antiquark *d*); el mesón π^-, por **$\bar{\text{u}}$, d,** y π^0, por **u, $\bar{\text{u}}$,** o por **d, $\bar{\text{d}}$.**

N O T A S

N O T A S

N O T A S

N O T A S

N O T A S