Programación lineal

1º) Representa la región factible que determina el conjunto $R \equiv \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **de restricciones y halla de forma razonada el punto o puntos de la región factible donde las funciones siguientes alcanzan su máximo y su mínimo:**

a) $f(x) = 2x + 3y$
b) $g(x) = y - x$

Solución a) Máximo en el punto P(0,5) y mínimo en el punto Q(0, 3)
b) Máximo en el punto P(0,5) y mínimo en el punto Q(3, 2)

2º) En la región del plano determinada por $x + y \geq 2,\ x \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$ **hallar las coordenadas de los puntos en los que la función** $f(x, y) = 3x + 4y$ **alcanza su valor mínimo y máximo.**

Solución

Máximo: No tiene ; Mínimo: El punto $P(1,1)$.

3º) Minimizar la función $F(x, y) = x + 4y$ **sobre la región delimitada por** $\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución

Mínimo en el punto P(1, 0) con valor $F(P) = 1$.

4º) Determinar el valor de a **y** b **para que la función objetivo** $F(x, y) = x + y$ **alcance su valor máximo en el punto** $P(3, 2)$ **de la región definida por las inecuaciones:**

$$x \geq 0\ ;\ y \geq 0\ ;\ x + 3y \leq a\ ;\ 2x + y \leq b$$

Solución

$a = 9; b = 8$

5º) Los alumnos de un instituto pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragarse los gastos del viaje de estudios. Cada lote de tipo A consta de una caja de mantecados y cinco participaciones de lotería; cada lote de tipo B consta de dos cajas de mantecados y dos participaciones de lotería. Por cada lote del tipo A vendido los alumnos obtienen un beneficio de 12,25 € y, por cada lote de tipo B de 12,50 €. Por razones de almacenamiento, pueden disponer a lo sumo de 400 cajas de mantecados. Los alumnos cuentan con 1200 participaciones de lotería y desean maximizar sus beneficios.
a) Determinar la función objetivo y exprésese mediante inecuaciones las restricciones del problema.
b) ¿Cuántas unidades de cada tipo deben vender los alumnos para que el beneficio obtenido sea máximo?. Calcúlese dicho beneficio.

Solución

a) $x \equiv$ *número de lotes de tipo A*; $y \equiv$ *número de lotes de tipo B*

$$\textit{Función Objetivo}:\ maximizar\ z = f(x, y) = 12{,}25x + 12{,}5y$$

$$\textit{Restricciones}:\quad s.a \equiv \begin{cases} x + 2y \leq 400 \\ 5x + 2y \leq 1200 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Se deben vender $x = 200$ lotes de tipo A e $y = 100$ lotes de tipo B con un beneficio máximo de 3700 euros.

6º) Una empresa organiza a su personal en dos categorías: primera y segunda. Cada trabajador de primera fabrica tres objetos diarios y controla la calidad de dos, cobrando 100 euros diarios.

Cada trabajador de segunda cobra 80 euros diarios, fabrica dos objetos diarios y controla la calidad de cuatro objetos cada día. Determinar el coste mínimo del personal necesario para fabricar y controlar un número mínimo de 3000 objetos al día. Determinar el personal requerido para ello y su distribución por categorías.

Solución

El personal requerido es 750 trabajadores de primera y 375 de segunda con un coste mínimo de 105.000 $euros$.

7º) Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos A y B. El modelo A requiere, para su elaboración, 20 cm² de papel, 120 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es de 1,20 € el A y 1,30 € el B. El precio de venta es de 1,80 € cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de láminas de madera y 70 enganches:

a) Determina el número de abanicos de cada modelo que ha de hacer para obtener un beneficio máximo.
b) Calcula cuál es ese beneficio.

Solución

a) $x \equiv número\ de\ abanicos\ de\ tipo\ A$; $\quad y \equiv número\ de\ abanicos\ de\ tipo\ B$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x,y) = 0{,}6x + 0{,}5y$$

$$Restricciones:\quad s.a \equiv \begin{cases} x + 3y \leq 150 \\ 3x + 2y \leq 180 \\ x + y \leq 70 \\ x \geq 0\ ;\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Se han de fabricar $x = 40$ abanicos de tipo A e $y = 30$ abanicos de tipo B.

b) Beneficio máximo de 39 $euros$.

8º) Un entusiasta de la salud quiere tener un mínimo de 36 unidades de vitamina A, 28 unidades de vitamina C y 32 unidades de vitamina D al día. Cada pastilla de la marca 1 cuesta 0,03 € y proporciona 2 unidades de vitamina A, 2 de C y 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 cuesta 0,04 y proporciona 3 unidades de vitamina A, 2 de C y 2 de D. ¿ Cuántas pastillas de cada marca tendrá que comprar para cada día si quiere tener cubiertas sus necesidades básicas con el menor coste posible?.

Solución

$x \equiv número\ de\ abanicos\ de\ tipo\ A$; $\quad y \equiv número\ de\ abanicos\ de\ tipo\ B$

$$Función\ Objetivo:\ mnimizar\ z = f(x,y) = 0{,}03x + 0{,}04y$$

$$Restricciones:\quad s.a \equiv \begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ x + y \geq 14 \\ 4x + y \geq 16 \\ x \geq 0\ ;\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Debe comprar $x = 6$ pastillas de la marca 1 e $y = 8$ pastillas de la marca 2.

9º) Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 200 € por mecánico.
a) ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?
b) ¿Cuál es ese beneficio?

Solución

$x \equiv número\ de\ electricistas$; $\quad y \equiv número\ de\ mecánicos$

$$\text{Función Objetivo}: \ maximizar \ \ z = f(x,y) = 150x + 200y$$

$$\text{Restricciones}: \ s.a \equiv \begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 30 \ ; \ \ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

a) $x = 20$ electricistas ; $y = 20$ mecánicos
b) Beneficio máximo $z = f(20, 20) = 7000$ euros

10º) Una empresa fabrica dos tipos de colonia: A y B. La colonia A contiene un 15% de extracto de jazmín, un 20% de alcohol y el resto es agua. La colonia B lleva un 30% de extracto de jazmín, un 15% de alcohol y el resto de agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de colonia B. El precio de venta, por litro, de la colonia A es de 50 € y el de la B de 40 €. Halla los litros de cada tipo de colonia que deben producirse diariamente para que el beneficio obtenido sea máximo.

Solución

$x \equiv número\ de\ litros\ de\ colonia\ de\ tipo\ A; \quad y \equiv número\ de\ litros\ de\ colonia\ de\ tipo\ B$

$$\text{Función Objetivo}: \ maximizar \ \ z = f(x,y) = 50x + 20y$$

$$\text{Restricciones}: \ s.a \equiv \begin{cases} x + 2y \leq 400 \\ 4x + 3y \leq 1000 \\ x \geq 0 \ ; \ \ 0 \leq y \leq 150 \end{cases}$$

Deben producirse diariamente $x = 160$ litros de colonia de tipo A e $y = 120$ litros de colonia de tipo B con un beneficio máximo de 12800 euros.

11º) Una fábrica produce mesas y sillas. Cada mesa da un beneficio de 10 euros y cada silla de 4 euros. Cada mesa requiere 3 kilos de madera y cada silla 1 kilo. La fábrica dispone de 21 toneladas de madera por semana. Sabiendo que por cada cuatro sillas se debe fabricar al menos una mesa, determinar la producción semanal de mesas y sillas que da lugar al beneficio máximo. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución

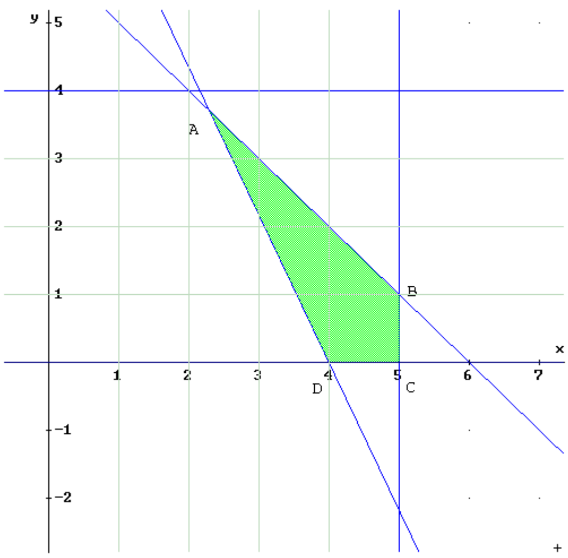
$x \equiv producción\ semanal\ de\ mesas; \quad y \equiv producción\ semanal\ de\ sillas$

$$\text{Función Objetivo}: \ maximizar \ \ z = f(x,y) = 10x + 4y$$

$$\text{Restricciones}: \begin{cases} 3x + y \leq 21000 \\ 4x - y \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Deben producirse semanalmente 3000 mesas y 12000 sillas con un beneficio máximo de 78000 euros.

12º) Un club de jubilados quiere organizar un viaje para 200 socios. Contratan una agencia que dispone de 4 microbuses de 23 plazas y 5 autobuses de 50 plazas, pero sólo dispone de 6 conductores. El alquiler de los autobuses cuesta 160 euros por día y el de los microbuses, 70 euros. Calcula cuántos microbuses y autobuses deben alquilar para que el viaje cueste lo menos posible así como ese coste.



Resolución

$x \equiv número\ de\ autobuses; \quad y \equiv número\ de\ microbuses$

$$\text{Función Objetivo}: \ minimizar \ \ z = f(x,y) = 160x + 70y$$

$$\text{Restricciones}: \begin{cases} x + y \leq 6 \\ 50x + 23y \geq 200 \\ 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

El mínimo del problema se encuentra en el punto $A\left(\frac{62}{27},\frac{100}{27}\right)$. Sin embargo, al tratarse de un problema de programación entera, evaluamos la función objetivo en las soluciones enteras factibles:

$B(5,1): f(5,1) = 780\ euros$; $C(5,0): f(5,0) = 800\ euros$; $D(4,0): f(4,0) = 640\ euros$
$E(4,2): f(4,2) = 780\ euros$; $F(3,3)$: $f(3,3) = 690\ euros$
El coste mínimo es de 640 euros y se obtiene alquilando 4 autobuses.

13º) Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo?. ¿Cuál es dicho ingreso máximo?.

Selectividad: Modelo Madrid 2014

Solución

$x \equiv número\ pesqueros;\quad y \equiv número\ de\ yates$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x,y) = 50.000x + 10.000y$$

$$Restricciones:\quad s.a \equiv \begin{cases} 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases}$$

Se deben reparar $x = 12$ pesqueros e $y = 8$ yates con un ingreso máximo de 680.000 €.

14º) Se desea maximizar la función $f(x,y) = 64{,}8x + 76{,}5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700,\ \ 2x + 3y \leq 300,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$$

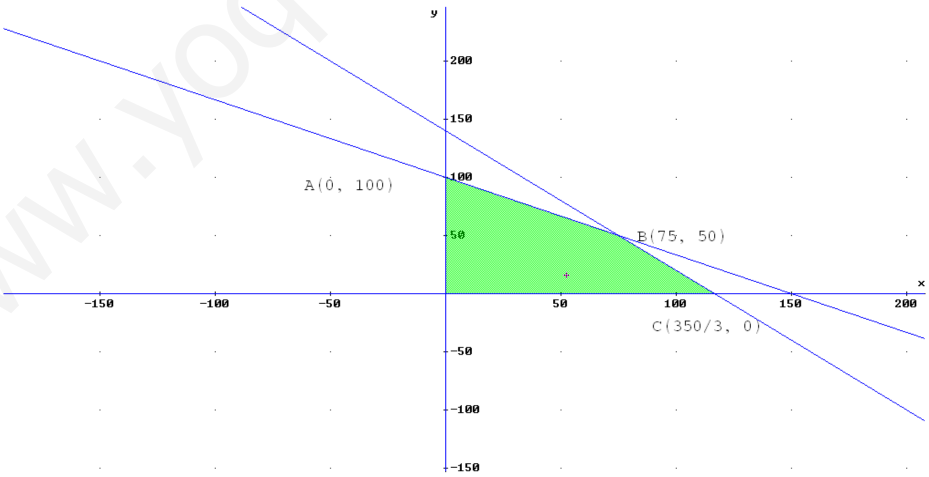
a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Selectividad: Madrid Junio 2013

Resolución

a)



Las coordenadas de los vértices de la región de soluciones factibles son:

$$O(0,0);\ A(0,100);\ B(75,50)\ y\ C\left(\frac{350}{3},0\right)$$

b) **Método analítico**

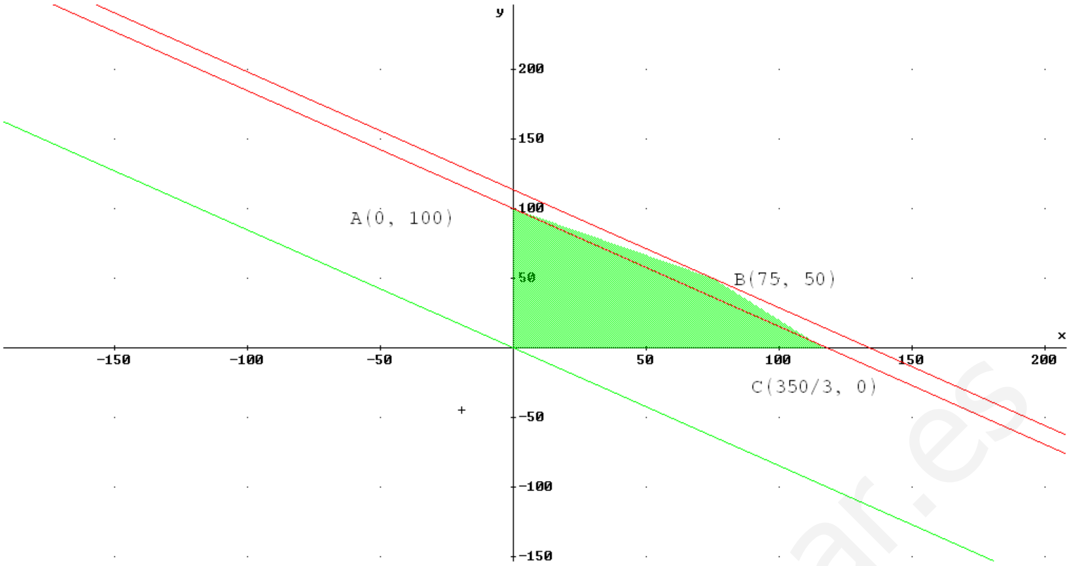
Evaluando la función objetivo $f(x,y) = 64{,}8 + 76{,}5y$ en cada uno de los vértices, se tiene:

$$f_O = f(0,0) = 0;\ \ f_A = f(0,100) = 7650;\ \ f_B = f(75,50) = 8685;\ \ f_C\left(\frac{350}{3},0\right) = 7560$$

Por tanto, el máximo de f sobre la región es 8685 y se alcanza en el punto $B(75,50)$.

Método gráfico

Trazamos las rectas de nivel (en rojo) desde cada vértice, paralelas a la dirección de la función objetivo (en verde):



El valor máximo de f sobre la región es 8685 y se alcanza en el punto $B(75,50)$.

15º) Sea R la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones $R \equiv \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

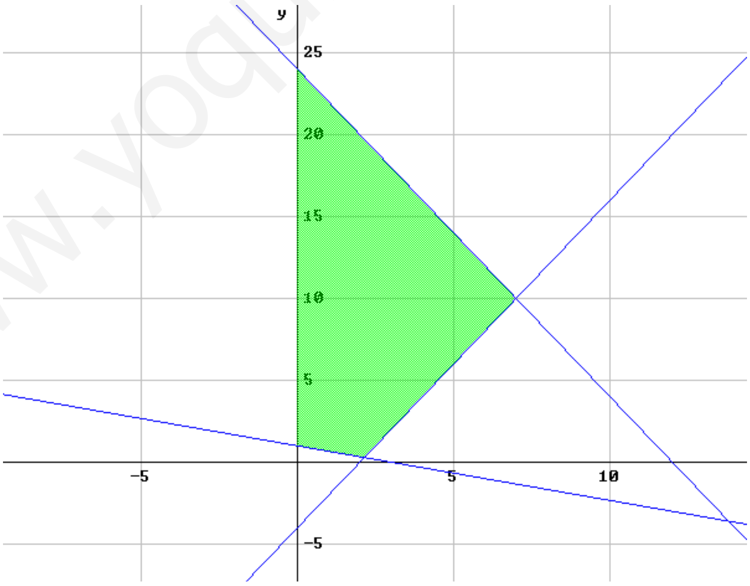
a) Represéntese la región R y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de R donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Selectividad: Madrid Septiembre 2013

Resolución

a) La región R del plano es:



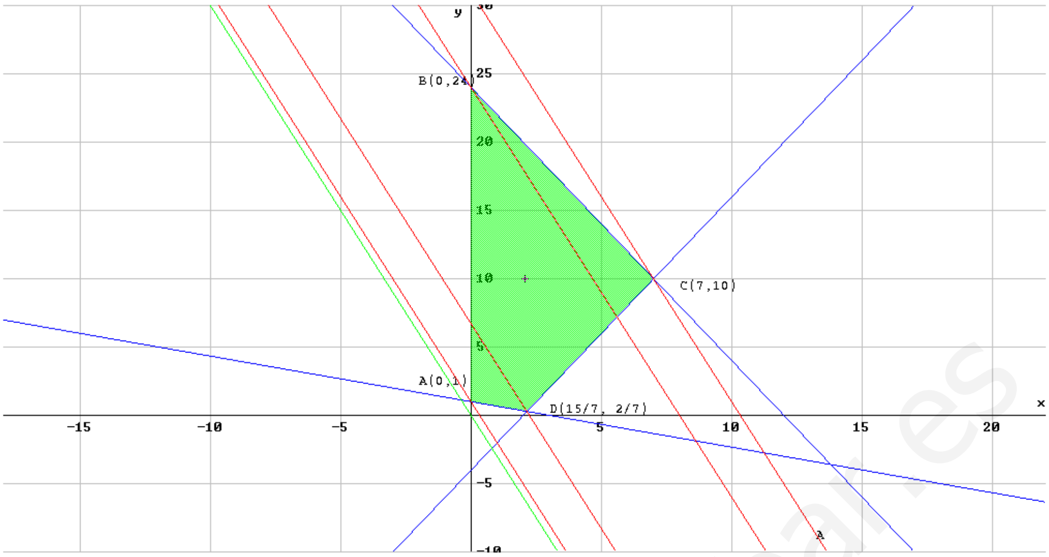
Las coordenadas de los vértices de la región R son: $A(0,1)$, $B(0,24)$, $C(7,10)$ y $D\left(\frac{15}{7},\frac{2}{7}\right)$,

b) **Método analítico**: Evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices, tenemos:

$$f_A = f(0,1) = 1;\ f_B = f(0,24) = 24;\ f_C = f(7,10) = 31;\ f_D = f\left(\frac{15}{7},\frac{2}{7}\right) = \frac{47}{7} = 6.714285714$$

El valor máximo de $f(x,y)$ se alcanza en el punto $C(7,10)$ y su valor es $f(7,10) = 31$

Método gráfico: trazamos las rectas de nivel (en rojo) desde los vértices anteriores, paralelas a la dirección de la función objetivo (en verde). La que alcanza más altura en el corte con el eje de ordenadas OY es la trazada desde el vértice $C(7, 10)$.



El valor máximo de la función $f(x, y) = 3x + y$ se alcanza en el punto $C(7, 10)$ y su valor es $f(7, 10) = 31$.

16º) Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de $3m^2$ por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de $4m^2$ por litro, con un coste de 1,2 euro por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura.
Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Selectividad: Madrid Septiembre 2012

Resolución

$x \equiv número\ de\ litros\ de\ pintura\ de\ tipo\ 1; \quad y \equiv número\ de\ litros\ de\ pintura\ de\ tipo\ 2$

$Función\ Objetivo$: $maximizar\ \ z = f(x, y) = 3x + 4y$

$$Restricciones: \begin{cases} x + 1{,}2y \leq 480 \\ x + y \leq 450 \\ x \geq 120; y \geq 120 \end{cases}$$

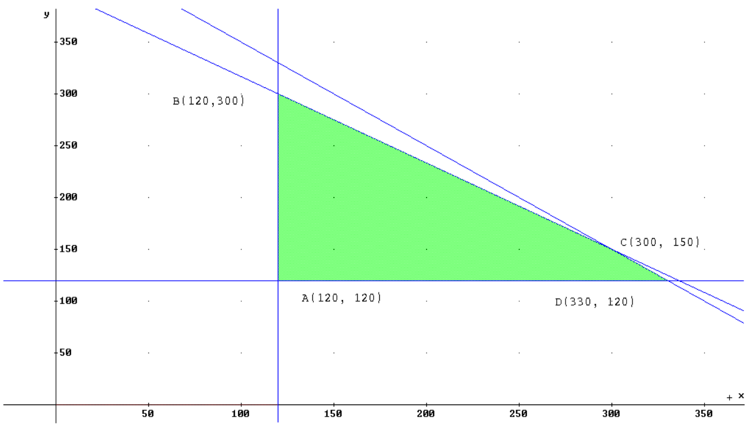
Método analítico: Evaluamos la función objetivo $f(x, y) = 3x + 4y$ en cada vértice de la región factible:

$f_A = f(120, 120) = 840$

$f_B = f(120, 300) = 1560$

$f_C = f(300, 150) = 1500$

$f_D = f(330, 120) = 1470$



El pintor debe utilizar $x = 120$ litros de pintura de tipo 1 e y= 300 litros de pintura de tipo 2 y la máxima superficie pintada es de $1560\ m^2$.

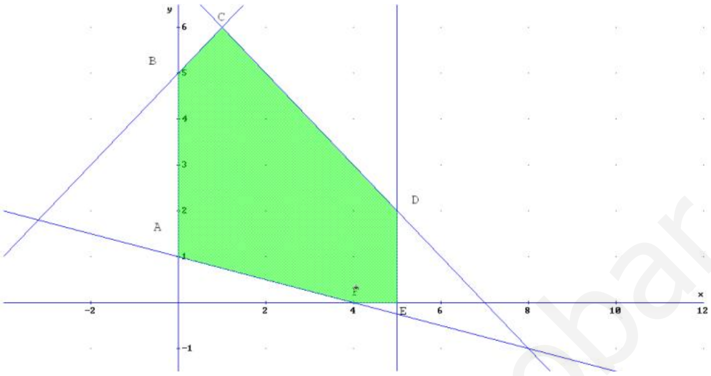
17º) Se considera la función $f(x, y) = -0{,}4x + 3{,}2y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 7 \\ x + 4y \geq 4 \\ x + 5 \geq y \\ 0 \leq x \leq 5, y \geq 0 \end{cases}$

a) Represéntese la región S del pJano determinada por el conjunto de restricciones.
b) Calcúlense los puntos de la región S donde la función f alcanza sus valores máximo y mínimo.
c) Calcúlense dichos valores máximo y mínimo.

Selectividad: Madrid Junio 2010 Fase General

Resolución

a)



b) **Método analítico**

Las coordenadas de los vértices de la región acotada determinada por las restricciones son:

$$A(0, 1);\ B(0, 5);\ C(1, 6);\ D(5, 2);\ E(5, 0);\ F(4, 0)$$

Evaluamos la función objetivo $f(x, y) = -0{,}4x + 3{,}2y$ en dichos vértices:

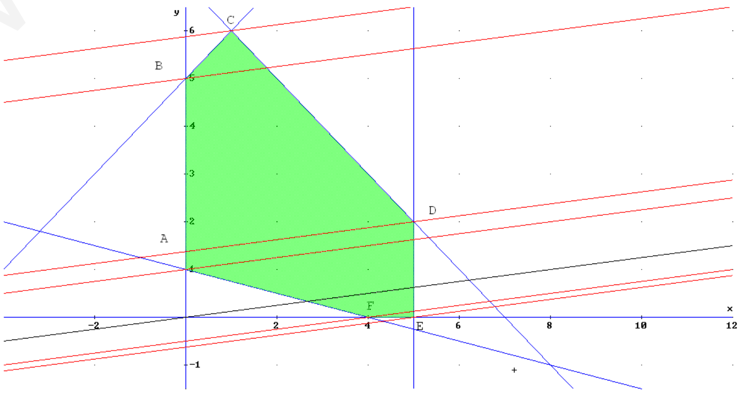
$f_A = f(0, 1) = 3{,}2;\ f_B = f(0, 5) = 16;\ f_C = f(1, 6) = 18{,}8$
$f_D = f(5{,}2) = 4{,}4; f_E = f(5{,}0) = -2;\ \ f_D = f(4{,}0) = -1{,}6$

El punto en el que la función f alcanza su valor máximo es $C(1, 6)$.
El punto en el que la función f alcanza su valor mínimo es $E(5, 0)$.

c) Valor máximo de f: $f_C = f(1, 6) = 18{,}8$
Valor mínimo de f: $f_E = f(5{,}0) = -2$

b) **Método gráfico**

Trazamos las rectas de nivel (en rojo) en los vértices.
La dirección de la función objetivo se traza en negro.



Observamos, a partir de las rectas de nivel, que el punto en el que la función f alcanza su valor máximo es $C(1, 6)$ y el punto en el que la función f alcanza su valor mínimo es $E(5, 0)$.

c) Valor máximo de f: $f_C = f(1, 6) = 18{,}8$
Valor mínimo de f: $f_E = f(5{,}0) = -2$

18º) Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15% de la cantidad total invertida por el club en fichajes de extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800.000 euros la inversión total en fichajes extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de futbolistas españoles sea como mínimo de 500.000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles debe ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros.
a) ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo?.
b) Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.
Selectividad: Madrid Junio 2010 Fase Específica

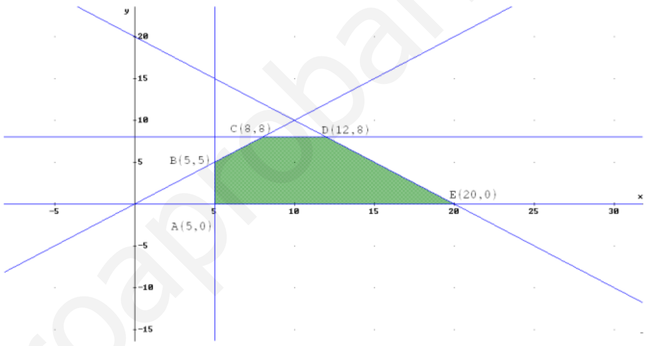
Resolución

$x \equiv euros\ invertidos\ en\ fichajes\ de\ futbolistas\ españoles;\ (unidad \equiv\ 100.000\ euros)$

$y \equiv euros\ invertidos\ en\ fichajes\ de\ futbolistas\ extranjeros;$

Función Objetivo: $maximizar\ z = f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}15y$

Restricciones: $s.a \equiv \begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x \geq y \end{cases}$



Los vértices son:
$A(5,0);\ B(5,5);\ C(8,8);\ D(12,8)\ y\ E(20,0).$
Evaluamos la función f en vértices:
$f_A = 0{,}5;\ f_B = 1{,}25;\ f_C = 2;\ f_D = 2{,}7;\ f_E = 2$
a) Máximo en vértice $D(12,8)$.

Se deben invertir 1.200.000 € en jugadores españoles y 800.000 € en jugadores extranjeros.
b) El importe máximo de camisetas vendidas por el club asciende a $f(12{,}8) = 240.000$ euros

19º) Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, Ay B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6 m^2por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.
Selectividad: Madrid Septiembre 2010 Fase General

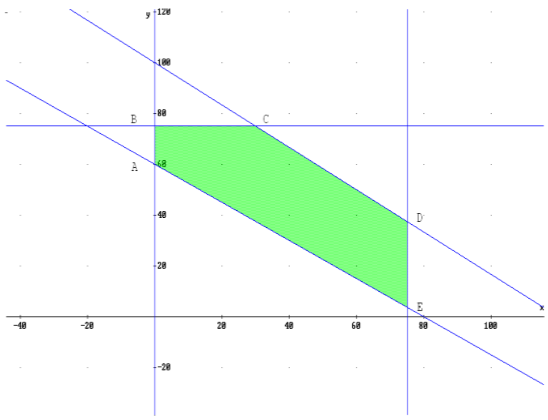
Resolución

$x \equiv Kg\ de\ pintura\ que\ compra\ al\ proveedor\ A$

$y \equiv g\ de\ pintura\ que\ compra\ al\ proveedor\ B$

Función Objetivo: $minimizar\ z = f(x,y) = x + 1{,}2y$

Restricciones: $s.a \equiv \begin{cases} 3x + 4y \geq 240 \\ 0 \leq x \leq 75 \\ 0 \leq y \leq 75 \\ x + 1{,}2y \leq 120 \end{cases}$



Las coordenadas de los vértices de la región factible y su valor en $f(x,y) = x + 1{,}2y$ son:
$A(0,60):\ f_A = 72;\ B(0{,}75):\ f_B = 90;\ C(30,75):$
$f_C = 120;\ D\left(75,\frac{75}{2}\right):\ f_D = 120;\ E\left(75,\frac{15}{4}\right):\ f_E = 79{,}5$
Por tanto se deben comprar 60 Kg de pintura al proveedor B con un coste mínimo de 72 euros.

20º) Un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir en dos tipos de fondos de inversión, A y B. El fondo de inversión del tipo A tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima. El fondo de inversión del tipo B tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión. El grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A. ¿Qué cantidad debe invertir el grupo en cada tipo de fondo para obtener el máximo beneficio anual? Calcúlese dicho beneficio máximo.

Selectividad: Madrid Septiembre 2010 Fase Específica

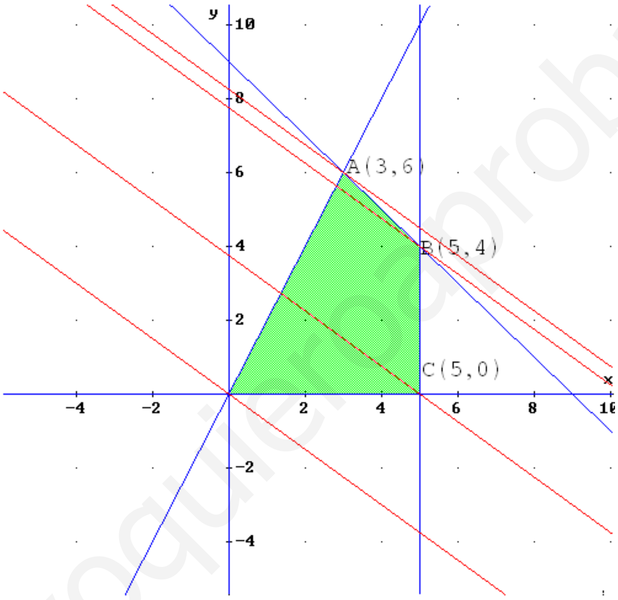
Resolución

$x \equiv inversión\ en\ el\ fondo\ \ A \quad ; \qquad y \equiv inversión\ en\ el\ fondo\ B$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x,y) = 0{,}03x + 0{,}04y$$

$$Restricciones:\ \ s.a \equiv \begin{cases} x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ \ \ y \leq 2x \\ \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Método gráfico



Las rectas de nivel nos indican que el máximo de la función objetivo se alcanza en el vértice $A(3{,}6)$. Por tanto se deben invertir 3 millones de euros en el fondo A y 6 millones de euros en el fondo B, con un beneficio máximo de 330.000 euros $(Observemos\ que\ \ f(3,6) = 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}04 \cdot 6 = 0{,}33)$.

21º) Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Selectividad: Madrid Junio 2009

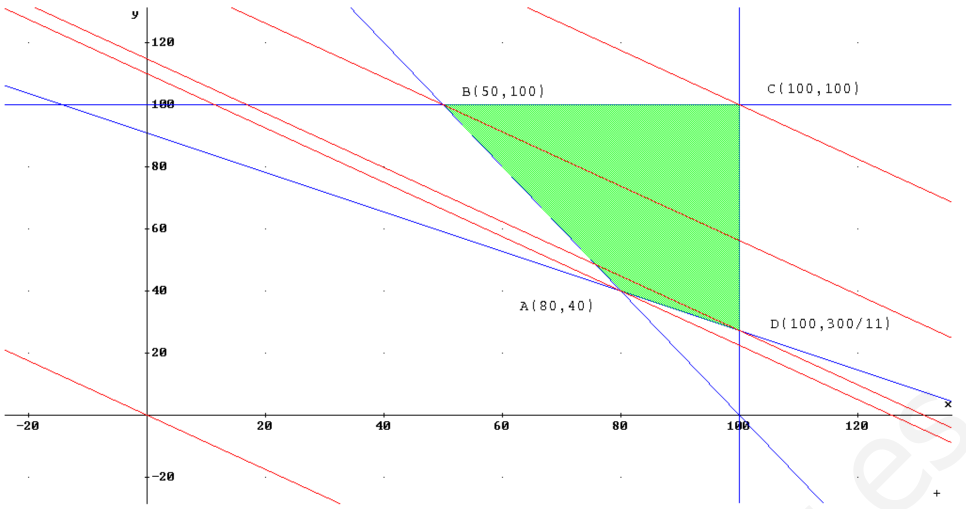
Resolución

$x \equiv toneladas\ de\ petróleo\ A; \quad y \equiv toneladas\ de\ petróleo\ B$

$$Función\ Objetivo:\ minimizar\ \ z = f(x,y) = 350x + 400y$$

$$Restricciones: \begin{cases} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ 0 \leq x \leq 100; 0 \leq y \leq 100 \end{cases}$$

Método gráfico



El mínimo se alcanza en el punto $A(80,40)$.
La refinería debe comprar 80 toneladas de petróleo A y 40 toneladas de petróleo B, con un coste mínimo de 44000 euros.

22º) Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0, 3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Selectividad: Madrid Septiembre 2009

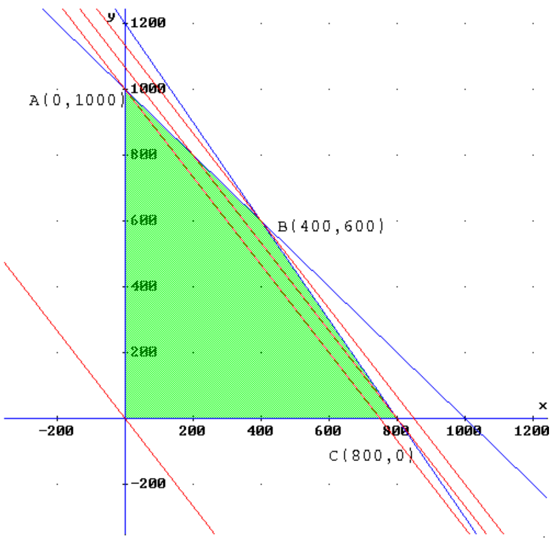
Resolución

$x \equiv m^2$ *de panel tipo* A; $\quad y \equiv m^2$ *de panel tipo* B

Función Objetivo: $maximizar\ \ z = f(x,y) = 4x + 3y$

Restricciones: $\begin{cases} 3x + 2y \leq 2400 \\ x + y \leq 1000 \\ 0 \leq x; 0 \leq y \end{cases}$

Método gráfico



El máximo se alcanza en el punto $B(400, 600)$.
Se deben vender 400 m^2 de panel tipo A y 600 m^2 de panel tipo B con un beneficio de $f(B) = 3400$ €.

23º) Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Selectividad: Madrid Junio 2008 Opción B

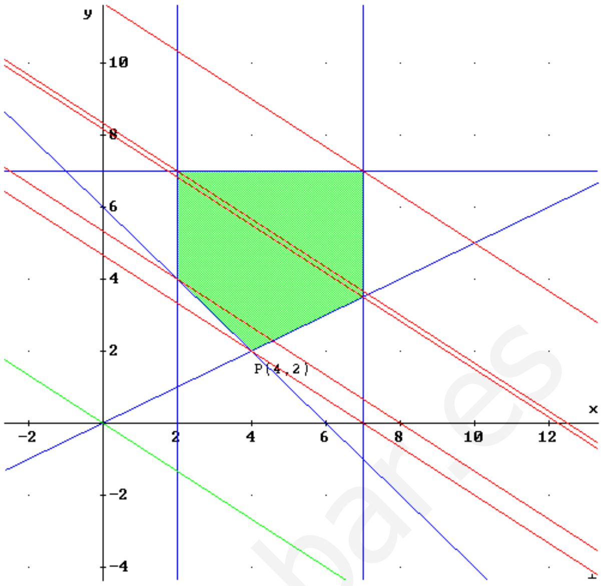
Resolución

$x \equiv Litros\ de\ aceite, en\ toneladas, en\ almazara\ \ A$

$y \equiv Litros\ de\ aceite, en\ toneladas, en\ almazara\ B$

Función Objetivo: $minimizar\ \ z = f(x,y) = 2000x + 3000y$

Restricciones: $\begin{cases} x \leq 2y \\ x + y \geq 6 \\ 2 \leq x \leq 7; 2 \leq y \leq 7 \end{cases}$



Método gráfico

Las rectas de nivel indican el mínimo de la función objetivo $f(x,y)$ en el punto $P(4,2)$.

Por tanto, el distribuidor debe comprar 4 toneladas a la almazara A y 2 toneladas a la almazara B,con un coste mínimo de 14000 €.

24º) Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿ Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Selectividad: Madrid Septiembre 2008

Resolución

$x \equiv cantidad\ invertida\ en\ acciones\ tipo\ A$; $\ \ y \equiv cantidad\ invertida\ en\ acciones\ tipo\ B$

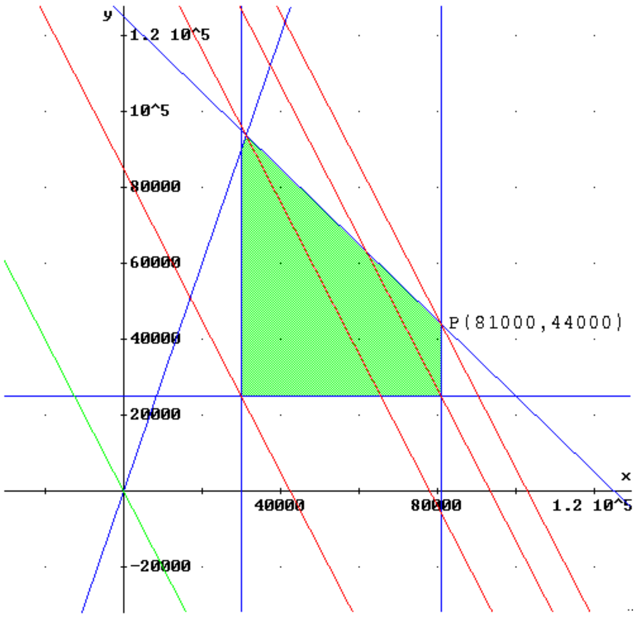
Función Objetivo: $maximizar\ \ z = f(x,y) = 0{,}1x + 0{,}05y$

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 125000 \\ y \leq 3x \\ y \geq 25000 \\ 30000 \leq x \leq 81000 \end{cases}$

Método gráfico

Las rectas de nivel (en rojo), paralelas a la dirección objetivo (en verde), muestran que el máximo se alcanza en el punto $P(81000, 44000)$ con $f(P) = 0{,}1 \cdot 81000 + 0{,}05 \cdot 44000 = 10300$.

La distribución de la inversión debe ser: invertir 81.000 euros en acciones de tipo A y 44.000 euros en acciones de tipo B con una ganancia máxima de 10.300 euros.



25º) Una empresa de instalaciones dispone de 195 Kg de cobre, 20 Kg de titanio y 14 Kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 Kg de cobre, 2 Kg de titanio y 1 Kg de aluminio; mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 Kg de cobre, 1 Kg de titanio y 1 Kg de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500 €, y por 100 metro de cable de tipo B, 1000 €.
Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa y Obtener dicho beneficio.
Selectividad: Madrid Junio 2007

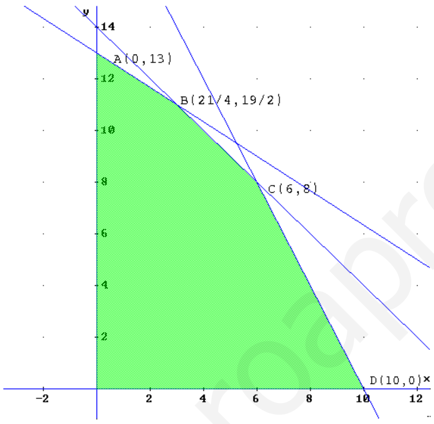
Resolución

$x \equiv hectómetros\ de\ cable\ tipo\ A; \quad y \equiv hectómetros\ de\ cable\ tipo\ B$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x,y) = 1500x + 1000y$$

$$Restricciones: \begin{cases} 2x + 3y \le 39 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$$

Método analítico



Evaluamos la función objetivo $f(x,y) = 1500x + 1000y$ en los vértices $A(0,13)$, $B\left(\frac{21}{4}, \frac{19}{2}\right)$, $C(6,8)$ y $D(10,0)$:

$$f(A) = 13000; \quad f(B) = 17375; \quad f(C) = 17000; \quad f(D) = 15000$$

El beneficio máximo se obtiene en el punto $B(5'25, 9'5)$.

Se tienen que fabricar 525 metros de cable tipo A y 950 metros de cable tipo B con un beneficio máximo de 17375 euros.

26º) Una empresa de automóviles tiene dos plantas P y Q de montaje de vehículos en las que produce tres modelos A, B y C. De la planta P salen semanalmente 10 unidades del modelo A, 30 del B y 15 del C. DE la planta Q salen semanalmente 20 unidades del modelo A, 20 del B y 70 del C. La firma necesita al menos 800 unidades de A, 1600 de B y 1800 de C. Si el gasto de mantenimiento de cada planta es de 60.000 euros semanales, determinar el número de semanas que ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo.

27º) Una empresa de transportes tiene dos tipos de camiones: los del tipo A, con un espacio refrigerado de 20 m^3 y no refrigerado de 40 m^3 y los del tipo B, con igual cubicaje total, al 50% de espacio refrigerado y no refrigerado. Se contrata la empresa para que transporte 3.000 m^3 de un producto que necesita refrigeración y 4.000 m^3 de otro que no la necesita. El coste por Km de un camión de tipo A es de 3000 euros y de uno del tipo B, 4000 euros.
¿Cuántos camiones de cada tipo ha de utilizar para que el coste sea mínimo?

28º) El departamento de policía de una ciudad dispone de 60 coches patrulla y de 140 agentes para ocuparlos. Existen dos tipos de servicios: el de vigilancia intensiva en zonas de alto riesgo y el de vigilancia rutinaria y de servicio al ciudadano. Los coches destinados al primer servicio son ocupados por tres agentes y los destinados al segundo tipo de servicio, por dos agentes.

a) ¿Puede montarse un servicio de 30 coches de vigilancia intensiva y 30 coches de vigilancia normal?
b) Determinar el número máximo de coches patrulla que pueden ejercer vigilancia en la ciudad.

29º) La capacidad de producción de un taller de montaje es de 120 televisores por día y de 360 aparatos de radio, también por día. El control técnico revisa 200 aparatos de uno y otro tipo al día. Sabiendo que los televisores son cuatro veces más caros que los aparatos de radio, ¿cuál debe ser la producción de cada uno de los artículos para obtener la máxima ganancia?.

30º) Una empresa fabrica 2 tipos de aparatos A y B. Para el producto A se necesitan 2 operarios y 20 Kg de material y para el producto B se precisan 5 operarios y 8 Kg de material. La empresa gana 100 euros por cada aparato del tipo A y 75 euros por cada uno del tipo B. La empresa dispone de 60 operarios y 250 Kg de material. ¿Cuántos aparatos A y cuántos B se deben de fabricar para obtener el máximo beneficio?.

31º) Una empresa maderera compra en el lugar P 50.000 m^3 de madera y en el lugar G 40.000 m^3. Esta madera la guarda en tres almacenes: A con 20.000 m^3 de capacidad; B con 30.000 m^3 de capacidad y C con 40.000 m^3 de capacidad. Llevar 1 m^3 de madera desde los lugares de compra hasta cada uno de los almacenes, en euros, viene indicado en la siguiente tabla:

	Almacén A	Almacén B	Almacén C
Lugar P	6000	18000	10000
Lugar G	8000	12000	14000

¿A qué almacenes debe trasladar la madera comprada para que sean mínimos los gastos?

Resolución

$x \equiv Porcentaje\ de\ m^3\ de\ madera\ almacenados\ en\ A\ proceden\ de\ P: x \in [0,1]$

$y \equiv Porcentaje\ de\ m^3\ de\ madera\ almacenados\ en\ B\ proceden\ de\ P: y \in [0,1]$

La función objetivo la expresamos en millones de euros

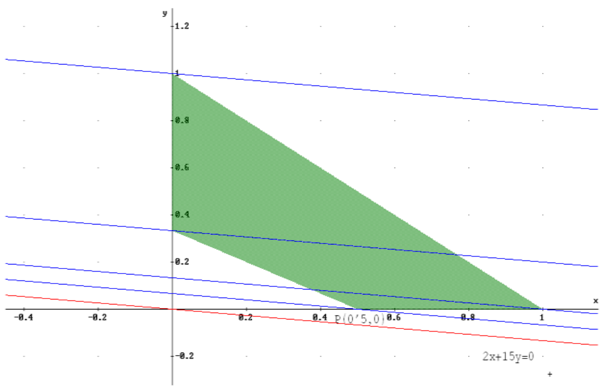
$$Función\ Objetivo:\ minimizar\ \ z = f(x,y) =$$
$$= 120x + 160(1-x) + 540y + 360(1-y) + 100(5-2x-3y) + 140(2x+3y-1)$$
$$= 40x + 300y + 880$$

Para minimizar la expresión $40x + 300y + 880$ basta minimizar la expresión $40x + 300y$, aún más, la expresión $2x + 15y$

Así, el planteamiento del problema queda:

$$Función\ Objetivo:\ minimizar\ \ g(x) = 2x + 15y$$

$$Restricciones: \begin{cases} x \geq 0\ ;\ \ x \leq 1 \\ y \geq 0\ ;\ \ y \leq 1 \\ \ \ x + y \leq 1 \\ 2x + 3y \leq 5 \\ 2x + 3y \geq 1 \end{cases}$$



donde las cinco primeras desigualdades corresponden a restricciones de porcentaje expresadas en tanto por uno y las dos últimas a restricciones de capacidad.
El conjunto de soluciones factibles (en verde) así como las rectas de nivel (en azul) paralelas a la dirección objetivo (en rojo) se muestran en la figura.
El mínimo se alcanza en el punto $P(0'5,0)$. Por tanto:

$x = 0{,}5 \implies$ El 50% de los 20.000 m^3 de madera que caben en A procederán de P, esto es 10.000 m^3; el resto, 10.000 m^3 procederán de G.

$y = 0 \implies$ Los 30.000 m^3 de madera almacenados en B procederán de G.

En consecuencia, los 40.000 m^3 de madera restante comprada en P se almacenarán en C. Vemos la distribución solución de mínimo coste en la tabla siguiente:

Solución	Almacén A	Almacén B	Almacén C
Lugar P	$10000\ m^3$	0	$40000\ m^3$
Lugar G	$10000\ m^3$	$30000\ m^3$	0

El coste que esta distribución supone, y que es mínimo, es de $f(0'5,0) = 900$ millones de euros.

32º) Se consideran la función $f(x,y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el conjunto de restricciones

$$x - 2y \leq 0 \ \ ; \ \ x + y \leq 6 \ \ ; \ \ x \geq 0 \ \ ; \ \ y \leq 3$$

a) Represéntese la región S.
b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.
Selectividad: Madrid Junio 2014 Opción A

33º) Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr de oro y 1,5 gr de plata, obteniendo un beneficio en la venta de cada una de 40 euros. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr de oro y 1 gr de plata y obtiene un beneficio en la venta de cada una de 50 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 gramos de cada uno de los metales. ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo?

Solución

300 de cada tipo

34º) Una empresa va a invertir en dos productos financieros A y B, para lo cual dispone de un total de 12 millones de euros, aunque no es necesario que invierta todo el dinero. Por razones legales debe invertir al menos 2 millones de euros en cada uno de los dos productos A y B y, además, tiene que invertir en A al menos el doble de lo que invierte en B.
El beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto A es de 0,2 euros y el beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto B es de 0,4 euros, mientras que por cada euro que no invierta en ninguno de los dos productos tendrá un beneficio de 0,3 euros. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la empresa en cada producto para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

Solución

4 millones en A y 2 millones en B.
Máximo beneficio: 3,4 millones de euros

35º) Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2€, mientras que producir un litro de la bebida B cuesta 0'5 €. Para realizar el lanzamiento comercial, se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se necesita producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo?. Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.
Selectividad: Modelo Madrid 2014-2015 Opción A

36º) Sea S la región del plano definida por el conjunto de restricciones siguiente:

$$2x - 4 \leq y \ \ ; \ \ y \leq x - 1 \ \ ; \ \ 2y \geq x \ ; \ \ x \geq 0 \ \ ; \ \ y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los vértices en los que se alcanzan dichos valores.
Selectividad: Madrid Septiembre 2014 Opción B