Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss

Soluciones

1 **Un alumno de 2.° de Bachillerato emplea tres euros en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar.**

Resolución

Llamamos:

x → precio de un lápiz

y → precio de un sacapuntas

z → precio de una goma

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0{,}05 \\ x + 0{,}05 = 2z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 0{,}05 \\ x = 2z - 0{,}05 \end{array}\right\}$$

Sustituimos la 3.ª ecuación en la 1.ª y en la 2.ª y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3(2z - 0{,}05) + y + 2z = 3 \\ 2(2z - 0{,}05) - y - z = 0{,}05 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 6z - 0{,}15 + y + 2z = 3 \\ 4z - 0{,}10 - y - z = 0{,}05 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 8z + y = 3{,}15 \\ 3z - y = 0{,}15 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones, $11z = 3{,}30 \to z = 0{,}30$

$3z - y = 0{,}15 \to y = 0{,}9 - 0{,}15 = 0{,}75 \to y = 0{,}75$

$x = 2z - 0{,}05 \to x = 2 \cdot 0{,}3 - 0{,}05 \to x = 0{,}55$

Un lápiz cuesta 0,55 €, un sacapuntas, 0,75 €, y una goma de borrar, 0,30 €.

2 **Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total; Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.**

Resolución

Llamamos:

x → número de hojas que reparte Julia

y → número de hojas que reparte Clara

z → número de hojas que reparte Miguel

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}2(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

Sustituimos la 2.ª ecuación en la 1.ª y obtenemos el siguiente sistema, que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}2(2x + y + 100) \\ x + y = 850 \end{array}\right\}$$

$x = 850 - y$

$y = 0{,}2(1\,700 - y + 100) \to y = 0{,}2(1\,800 - y) \to y = 300$

$x = 850 - y = 850 - 300 = 550 \to x = 550$

$z = x + 100 = 550 + 100 = 650 \to z = 650$

Julia reparte 550 hojas; Clara, 300, y Miguel, 650.

54523

3 **Se tienen 9,50 € en monedas de 5 céntimos, de 10 céntimos y de 50 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos excede en 9 unidades el número de monedas de 50 céntimos, y por cada 3 monedas de 10 céntimos se tienen 4 de 5 céntimos.**

¿Cuántas monedas se tienen de cada valor?

Resolución

Llamamos:

$x \rightarrow$ número de monedas de 5 céntimos

$y \rightarrow$ número de monedas de 10 céntimos

$z \rightarrow$ número de monedas de 50 céntimos

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 10y + 50z = 950 \\ y = z + 9 \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{4} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 10z = 190 \\ y - z = 9 \\ -3x + 4y = 0 \end{array}\right.$$

Resolvemos aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 10 & 30 & 570 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 10 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 57 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 48 \end{array}\right)$$

$4z = 48 \rightarrow z = 12$

$y - z = 9 \rightarrow y - 12 = 9 \rightarrow y = 21$

$x + 2y + 10z = 190 \rightarrow x + 42 + 120 = 190 \rightarrow x = 28$

Se tienen 28 monedas de 5 céntimos, 21 monedas de 10 céntimos y 12 monedas de 50 céntimos.

4 **El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe total de 3 000 euros (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3 260 euros.**

Halla el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6%, el 10% y el 14%, respectivamente.

Resolución

Llamamos:

$x \rightarrow$ valor de los refrescos

$y \rightarrow$ valor de la cerveza

$z \rightarrow$ valor del vino

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3\,000 \\ x = y + z \\ 1{,}06x + 1{,}1y + 1{,}14z = 3\,260 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3\,000 \\ x - y - z = 0 \\ 1{,}06x + 1{,}1y + 1{,}14z = 3\,260 \end{array}\right.$$

Resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1{,}06 & 1{,}1 & 1{,}14 & 3260 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-1{,}06\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & -2 & -2 & -3000 \\ 0 & 0{,}04 & 0{,}08 & 80 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):2\\25\cdot(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 1 & 1 & 1500 \\ 0 & 1 & 2 & 2000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 1 & 1 & 1500 \\ 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right)$$

$z = 500$ euros

$y + z = 1500 \;\rightarrow\; y = 1000$ euros

$x + y + z = 3000 \;\rightarrow\; x = 1500$ euros

Los refrescos cuestan 1 500 euros; la cerveza, 1 000 euros, y el vino, 500 euros.

5 **Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que:**

A) El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas.

B) El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más el 60% de las de terror representan la mitad del total de películas.

C) Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

Resolución

Llamamos:

$x \rightarrow$ n.º de películas infantiles; $y \rightarrow$ n.º de películas del oeste americano; $z \rightarrow$ n.º de películas de terror

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{60}{100}x + \dfrac{50}{100}y = \dfrac{30}{100}(x+y+z) \\[2ex] \dfrac{20}{100}x + \dfrac{60}{100}y + \dfrac{60}{100}z = \dfrac{1}{2}(x+y+z) \\[2ex] y = x + 100 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 5y = 3x + 3y + 3z \\ 2x + 6y + 6z = 5x + 5y + 5z \\ y = x + 100 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ y = x + 100 \end{array}\right.$$ Sustituimos la 3.ª ecuación en las dos primeras:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2(x+100) - 3z = 0 \\ -3z + x + 100 + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x - 3z = -200 \\ -2x + z = -100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x - 3z = -200 \\ -6x + 3z = -300 \end{array}\right\}$$

$-x = -500 \;\rightarrow\; x = 500$

$y = 600$

$-1000 + z = -100 \;\rightarrow\; z = 900$

Hay 500 películas infantiles, 600 del oeste americano y 900 de terror.

6 **La edad, en años, de Juan es el doble que la suma de las edades de sus dos hijos: Pedro y Luis. A su vez, Pedro es 3 años mayor que Luis. Si, dentro de 10 años, la edad del padre sobrepasa en 11 años a la suma de las edades de los hijos:**

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Determina la edad de cada uno de ellos.

Resolución

Llamamos:

$x \rightarrow$ edad de Juan; $y \rightarrow$ edad de Pedro; $z \rightarrow$ edad de Luis

a) Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2\,(y + z) \\ y = z + 3 \\ x + 10 = 11 + (y + 10) + (z + 10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2z \\ -3x + y + z = 0 \\ x - y - z = 21 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema. Sustituimos la 2.ª ecuación en la 1.ª y en la 3.ª:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2(z + 3) + 2z \\ x - (z + 3) - z &= 21 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 4z + 6 \\ x - 2z &= 24 \end{aligned}\right\}$$

$4z + 6 - 2z = 24 \rightarrow 2z = 18 \rightarrow z = 9$

$x = 4z + 6 \rightarrow x = 42$

$y = z + 3 \rightarrow y = 12$

Juan tiene 42 años; Pedro, 12 años, y Luis, 9 años.

7 **Tres hermanos tienen edades diferentes, pero saben que la suma de las edades de los tres hermanos es de 37 años, y la suma de la edad del mayor más el doble de la edad del mediano más el triple de la edad del pequeño es de 69 años.**

a) Expresa las edades de los tres hermanos en función de la edad de hermano menor.

b) ¿Es posible que el hermano pequeño tenga 5 años? ¿Y 12 años? Razona la respuesta.

c) Calcula la edad de los tres hermanos.

Resolución

a) Llamamos:

$x \rightarrow$ edad del mayor

$y \rightarrow$ edad del mediano

$z \rightarrow$ edad del pequeño

El enunciado del problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 37 \\ x + 2y + 3z &= 69 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 37 - z \\ x + 2y &= 69 - 3z \end{aligned}\right\}$$

aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 37 - z \\ 1 & 2 & 69 - 3z \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a) - (1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 37 - z \\ 0 & 1 & 32 - 2z \end{array}\right)$$

Por tanto:

$y = 32 - 2z$

$x + y = 37 - z \;\rightarrow\; x = 37 - z - 32 + 2z \;\rightarrow\; x = 5 + z$

b) • Si $z = 5 \;\rightarrow\; x = 10$ e $y = 22$

No es posible que el mediano tenga 22 años si el mayor tiene 10.

• Si $z = 12 \;\rightarrow\; x = 17$ e $y = 8$

No es posible que el mediano tenga 8 años si el menor tiene 12.

c) El sistema es *compatible indeterminado*. Para que se cumpla el enunciado debe ser:

$$5 + z > 32 - 2z > z \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 5 + z > 32 - 2z \;\rightarrow\; z > 9 \\ 32 - 2z > z \longrightarrow z < \dfrac{32}{3} \end{array}\right\} \; 9 < z < \frac{32}{2}$$

Como las soluciones deben ser números enteros, tiene que ser:

$z = 10 \;\rightarrow\; x = 15$ e $y = 12$

El mayor tiene 15 años, 12 el mediano y 10 el pequeño.