UNIDAD 1

SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 30

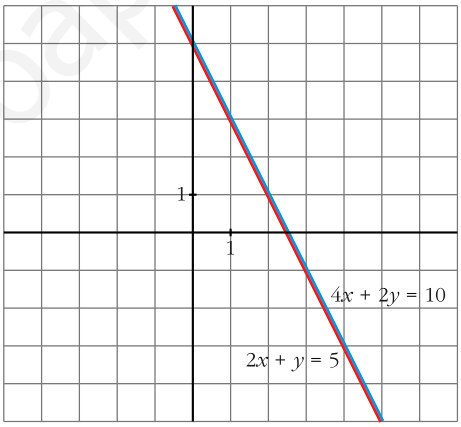
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

1. ¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos “datos distintos”? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

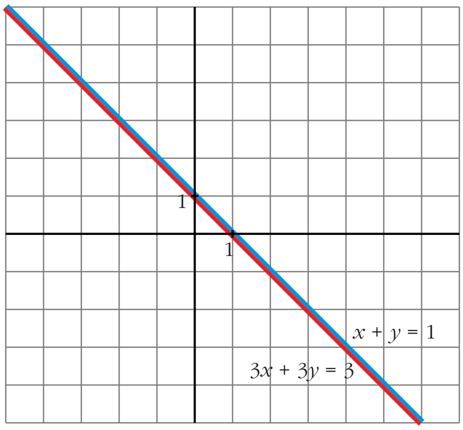
  Se trata de la misma recta.



- **Pon otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

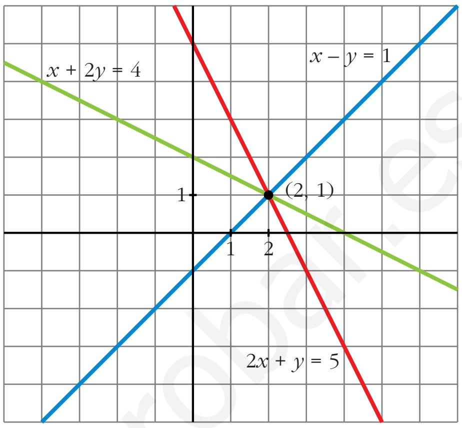
Gráficamente son la misma recta:



2. Observa las ecuaciones siguientes:

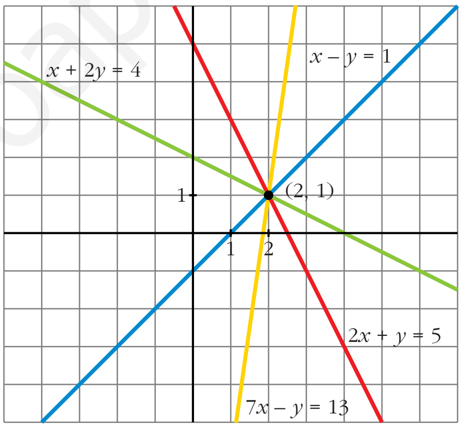
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Represéntalas y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2, y = 1$) y que la tercera recta también pasa por ese punto.**



- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras (por ejemplo: $2 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a$), represéntala y observa que también pasa por $x = 2, y = 1$.**

  $2 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \rightarrow 7x - y = 13$

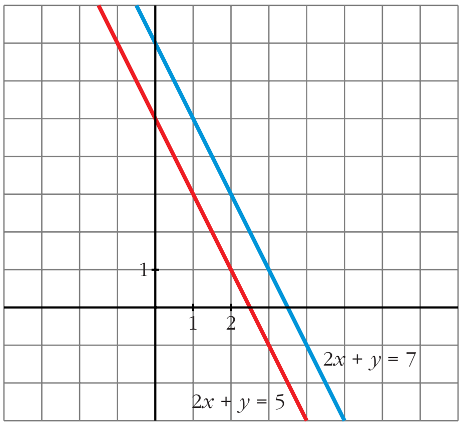


Página 31

3. Observa que *lo que dice la segunda ecuación es contradictorio con lo que dice la primera:*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

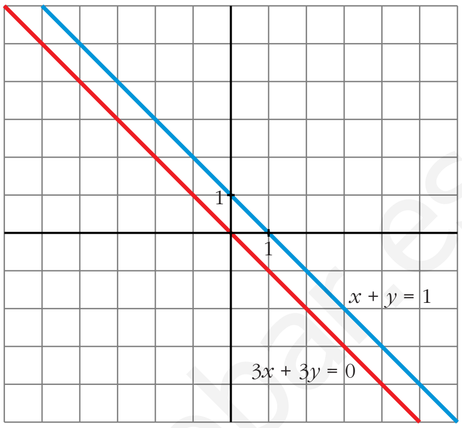
- **Represéntalas y observa que se trata de dos rectas paralelas, es decir, no tienen solución común, pues las rectas no se cortan en ningún punto.**



- **Modifica el término independiente de la segunda ecuación del sistema que inventaste en el ejercicio 1 y representa de nuevo las dos rectas.**

Observa que lo que dicen ambas ecuaciones es ahora contradictorio y que se representan mediante rectas paralelas.

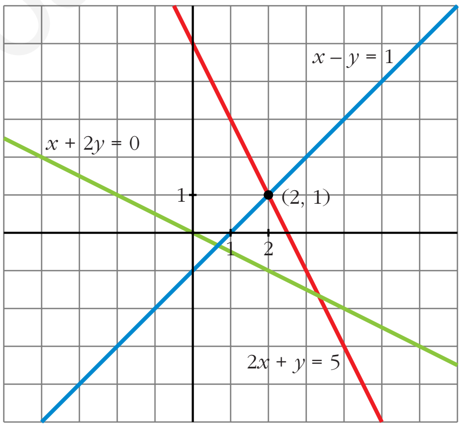
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Rectas paralelas:



4. Fíjate ahora en este sistema formado por tres ecuaciones:

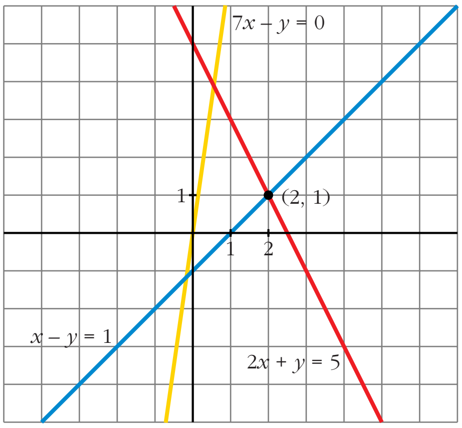
$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{2x + y} &= \mathbf{5} \\ \mathbf{x - y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right.$$

- **Representa las tres rectas y observa que la tercera no pasa por el punto en el que se cortan las otras dos.**



- **Modifica el término independiente de la recta que inventaste en el ejercicio 2. Observa que lo que dice después del cambio es contradictorio con las dos primeras ecuaciones y que, al representarla, no pasa por el punto de corte de ellas.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ 7x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$



Página 33

1. Sin resolverlos, ¿son equivalentes estos sistemas?

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{array}\right. \quad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} x+y-z=5 \\ x+y=7 \end{array}\right. \quad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y-z=\ \ 5 \\ x+\ \ y=\ \ 7 \\ 2x+2y-z=12 \end{array}\right. \quad \textbf{d)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y-z=11 \\ x+2y-z=\ \ 7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=\ \ 5 \\ 3x=12 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} z=2 \\ x+y=7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} z=2 \\ x+\ y=7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y-z=11 \\ y=-4 \end{array}\right.$$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 35

1. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} 2x+\ \ y=1 \\ 3x+2y=4 \\ \ \ x+\ \ y=3 \end{array}\right. \quad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+z=6 \\ \ \ y-z=1 \\ x+2y=7 \end{array}\right. \quad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right. \quad \textbf{d)}\left\{\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+\ \ y=1 \\ 3x+2y=4 \\ x+\ \ y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\ \ y=1-2x \\ \\ \rightarrow\ \ y=3-\ x \end{array}\Bigg\}\ \ 1-2x=3-x\ \ \rightarrow\ \ x=-2,\quad y=3-(-2)=5$

Veamos si cumple la 2ª ecuación: $3\cdot(-2)+2\cdot5=-6+10=4$

Solución: $x=-2$, $y=5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x+\ \ y+z=6 \\ \ \ y-z=1 \\ x+2y=7 \end{array}\right\}$ La 3ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{r} x+y=6-z \\ y=1+z \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=6-z-y=6-z-1-z=5-2z \\ y=1+z \end{array}$

Solución: $x=5-2\lambda$, $y=1+\lambda$, $z=\lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias.
El sistema es incompatible.
Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$$

Solución: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2. a) Resuelve el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right.$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + \ y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \ \to \ -1 = 3y \ \to \ y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) → Son dos rectas que se cortan en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) → La nueva recta también pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) → La nueva recta no pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 36

1. Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x \qquad\ \ = 7 \\ \ \ x - 2y = 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\ \ = 6 \\ \ \ x + y + 3z = 7 \\ 5x \qquad - \ \ z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad - 2t = 6 \\ \ \ x + y + 3z \qquad = 7 \\ 5x \qquad - \ \ z + \ \ t = 4 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad + 3z = 0 \\ \ \ x + 3y - \ \ z = 7 \\ 4x \qquad\qquad = 4 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x \qquad = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x - 5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\} \qquad \textit{Solución: } x = \dfrac{7}{3},\ y = \dfrac{-4}{3}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$$

Solución: $x = 3, \ y = -29, \ z = 11$

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$$

Soluciones: $x = 3 + \lambda, \ y = -29 - 19\lambda, \ z = 11 + 6\lambda, \ t = \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$$

Solución: $x = 1, \ y = \dfrac{16}{9}, \ z = \dfrac{-2}{3}$

2. **¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:**

a) $$\left\{\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2, \ y = 5, \ z = 1, \ t = 2$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = 5 - 3\lambda, \ z = 2\lambda$

c) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array}$$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - 2\lambda - \mu, \ t = \mu$

d) $$\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0,\ y = \dfrac{1}{2},\ z = 0$

Página 37

3. Transforma en escalonados y resuelve:

a) $$\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : (-2)}} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$$

(Podemos prescindir de la 3ª, pues es igual que la 2ª)

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$$

Soluciones: $x = 1,\ y = 5 - \lambda,\ z = \lambda$

4. Transforma en escalonado y resuelve:

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right\} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a}} \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}\\ \text{3ª} - 3\cdot\text{2ª}\\ \text{4ª} + 2\cdot\text{2ª}\end{array}} \left.\begin{array}{rl} x - y + 3z &= 0\\ y - 14z + 7w &= -32\\ 38z - 18w &= 114\\ -30z + 16w &= -90\end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}\\ \text{3ª} : 2\\ 15\cdot\text{3ª} + 19\cdot\text{4ª}\end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + 3z &= 0\\ y - 14z + 7w &= -32\\ 19z - 9w &= 57\\ 34w &= 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} w = 0\\ z = \dfrac{57 + 9w}{19} = 3\\ y = -32 + 14z - 7w = 10\\ x = y - 3z = 1\end{array}\Bigg\}$$

Solución: $x = 1, \; y = 10, \; z = 3, \; w = 0$

Página 40

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 2\\ 3x - 2y - z = 4\\ -2x + y + 2z = 2\end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1\\ -2x - 3y + z = 2\\ 5x - y + z = 5\end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{r} x - 2y = -3\\ -2x + 3y + z = 4\\ 2x + y - 5z = 4\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2\\ 3x - 2y - z = 4\\ -2x + y + 2z = 2\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 1 & 2 & 2\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª} - 3\cdot\text{1ª}\\ \text{3ª} + 2\cdot\text{1ª}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -5 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 4 & 6\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}\cdot(-1)\\ \text{3ª}\cdot 5 + \text{2ª}\cdot 3\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 24\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2\\ 5y + 4z = 2\\ 2z = 24\end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 3\\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2\\ x = 2 - y - z = 1\end{array}\Bigg\}$$

Solución: $x = 1, \; y = -2, \; z = 3$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1\\ -2x - 3y + z = 2\\ 5x - y + z = 5\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª} - 2\cdot\text{3ª}\\ \text{2ª} - \text{3ª}\\ \text{3ª}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9\\ -7 & -2 & 0 & -3\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3\\ -2x + 3y + z = 4\\ 2x + y - 5z = 4\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -5 & 4\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª} + 2\cdot\text{1ª}\\ \text{3ª} - 2\cdot\text{1ª}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -5 & 10\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}\\ \text{3ª} + 5\cdot\text{2ª}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x - 2y = -3\\ -y + z = -2\end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y\\ z = -2 + y\end{array}$$

Soluciones: $x = -3 + 2\lambda, \; y = \lambda, \; z = -2 + \lambda$

2. **Resuelve mediante el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5 - 3z}{2} = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3z}{2} \end{array}$

$x = 2 - 2z + \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{7z}{2}$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \quad y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \blacktriangleright$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 4^{a} \\ 4^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \blacktriangleright$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 4^{a} \\ 4^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2x - y \phantom{{}+z} + w &=& 9 \\ x - 2y + z \phantom{{}+w} &=& 11 \\ 4x \phantom{{}-2y+z+w} &=& -3 \\ x \phantom{{}-2y} - z \phantom{{}+w} &=& -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solución: $x = \dfrac{-3}{4},\ \ y = \dfrac{11}{4},\ \ z = \dfrac{69}{4},\ \ w = \dfrac{53}{4}$

Página 41

1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{rcl} 4x + 2y \phantom{{}-z} &=& k \\ x + y - z &=& 2 \\ kx + y + z &=& 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 2^{\underline{a}} \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 2 \\ 4x + 2y \phantom{{}-z} &=& 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} x - z &=& 2 - y \\ 4x &=& 3 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminado.*

Soluciones: $x = \dfrac{3}{4} - \lambda,\ \ y = 2\lambda,\ \ z = \dfrac{-5}{4} + \lambda$

- *Si* $k \neq 3$, es *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 2 \\ 4x + 2y \phantom{{}-z} &=& k \\ (k-3)x \phantom{{}+2y-z} &=& (3-k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{3-k}{k-3} = -1$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solución: $x = -1, \;\; y = 2 + \dfrac{k}{2}, \;\; z = -1 + \dfrac{k}{2}$

b) $$\left.\begin{array}{rl} 4x + 2y & = k \\ x + \;\; y - z & = 2 \\ kx + \;\; y + z & = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ El sistema es } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{rl} x + \;\; y - z & = 2 \\ 4x + 2y \quad\;\; & = k \\ (k-3)x \quad\quad\quad\;\; & = (2-k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solución: $x = \dfrac{2-k}{k-3}, \;\; y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}, \;\; z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{\begin{array}{rl} kx + y - z & = 8 \\ x + y + z & = 0 \\ 2x \quad\;\; + z & = k \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rl} x + \;\; y + \;\; z & = 1 \\ y + kz & = 1 \\ x + 2y \quad\quad & = k \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{rl} kx + y - z & = 8 \\ x + y + z & = 0 \\ 2x \quad\;\; + z & = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} - 2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix}1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -3$, es *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$$

Solución: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}$, $y = \dfrac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$, $z = \dfrac{k^2 - k - 16}{k+3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{matrix}1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix}1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$$

- *Si* $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -1$, es *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - \frac{2k - k^2}{1+k} = \frac{1 + k - 2k + k^2}{1+k} = \frac{1 - k + k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1 - k + k^2}{1 + k} - \frac{2 - k}{1 + k} = \frac{1 + k - 1 + k - k^2 - 2 + k}{1 + k} =$$

$$= \frac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$$

Solución: $x = \frac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$, $y = \frac{1 - k + k^2}{1 + k}$, $z = \frac{2 - k}{1 + k}$

Página 46

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos gráficamente:**

a) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x + y = 2} \\ \mathbf{x - y = 1} \\ \mathbf{5x - y = 4} \\ \mathbf{2x + 2y = 1} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{5x + y = 8} \end{array}\right.$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \\ 4^a - 2 \cdot 2^a \end{array}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

De la 2ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{5}$; de la 3ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{3}$. Luego, el sistema es *incompatible.*

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

2 **Comprueba que este sistema es incompatible y razona cuál es la posición relativa de las tres rectas que representa:**

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 3x - \ \ y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right.$$

Si dividimos la 3ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1ª y la 3ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2ª las corta.

3 **Resuelve e interpreta geométricamente el sistema:**

$$\left\{\begin{array}{r} -x + 2y = \ \ 0 \\ 2x + \ \ y = -1 \\ (3/2)x - 3y = \ \ 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ (2/3) \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right\}$$

Solución: $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x - \ \ y = \ \ 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} -y + \ z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + \ z = 3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + y - t \qquad = 2 \\ y \quad + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ \ y \qquad = 0 \\ 2y \qquad = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y = \ \ 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}\right\}$

Solución: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y+z=1\\ 9z=2\\ 3x-y+z=3 \end{array}\right\}\quad z=\dfrac{2}{9}\qquad y=z-1=\dfrac{-7}{9}\qquad x=\dfrac{3+y-z}{3}=\dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{-7}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y-t\quad=2\\ y\quad+z=4\\ y+t-z=1 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} z=\lambda\\ y=4-z\\ t=1-y+z=1-(4-z)+z=-3+2z\\ x=2-y+t=2-(4-z)-3+2z=-5+3z \end{array}$

Soluciones: $(-5+3\lambda,\ 4-\lambda,\ \lambda,\ -3+2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ 3x-y\quad=0\\ 2y\quad=1 \end{array}\right\}\quad y=\dfrac{1}{2}\qquad x=\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{6}\qquad z=-2x+3y=\dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{6}\right)$

5 S **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales:**

a) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2x+5y\quad=16}\\ \mathbf{x+3y-2z=-2}\\ \mathbf{x\quad+z=\ 4} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x+2y+\ z=1}\\ \mathbf{5x+3y+3z=3}\\ \mathbf{x+\ y+\ z=0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y\quad=16\\ x+3y-2z=-2\\ x\quad+z=\ 4 \end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c} 2&5&0&16\\ 1&3&-2&-2\\ 1&0&1&4 \end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}+2\cdot\text{3ª}\\ \text{3ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} 2&5&0&16\\ 3&3&0&6\\ 1&0&1&4 \end{array}\right)\to$

$\to\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}:3\\ \text{3ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} 2&5&0&16\\ 1&1&0&2\\ 1&0&1&4 \end{array}\right)\to\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}-5\cdot\text{2ª}\\ \text{2ª}\\ \text{3ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} -3&0&0&6\\ 1&1&0&2\\ 1&0&1&4 \end{array}\right)\to$

$\to\left.\begin{array}{r} -3x\quad=6\\ x+y\quad=2\\ x\quad+z=4 \end{array}\right\}\quad\begin{array}{l} x=-2\\ y=2-x=4\\ z=4-x=6 \end{array}$

Solución: $(-2,\ 4,\ 6)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+\ z=1\\ 5x+3y+3z=3\\ x+\ y+\ z=0 \end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c} 3&2&1&1\\ 5&3&3&3\\ 1&1&1&0 \end{array}\right)\to\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{3ª}\\ \text{2ª}\\ \text{1ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 5&3&3&3\\ 3&2&1&1 \end{array}\right)\to$

$\to\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}-5\cdot\text{1ª}\\ \text{3ª}-3\cdot\text{1ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&-2&-2&3\\ 0&-1&-2&1 \end{array}\right)\to\xrightarrow{\begin{array}{l}\text{1ª}\\ \text{2ª}\\ -2\cdot\text{3ª}+\text{2ª}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&-2&-2&3\\ 0&0&2&1 \end{array}\right)\to$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 0\\ -2y - 2z &= 3\\ 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad z = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \qquad x = -y - z = \frac{3}{2}$$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

6 **Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{aligned} 2x - y &= 7\\ 5x + 3y &= -17 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} -y + z &= 1\\ x - 2y - z &= 2\\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 7\\ 5x + 3y &= -17 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7\\ 5 & 3 & -17 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix}1^{\text{a}}\\ 2^{\text{a}} + 3 \cdot 1^{\text{a}}\end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7\\ 11 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y &= 7\\ 11x &= 4 \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{4}{11} \qquad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$$

Solución: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{aligned} -y + z &= 1\\ x - 2y - z &= 2\\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix}2^{\text{a}}\\ 1^{\text{a}}\\ 3^{\text{a}}\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix}1^{\text{a}}\\ 2^{\text{a}}\\ 3^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}}\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix}1^{\text{a}}\\ 2^{\text{a}}\\ 3^{\text{a}} + 5 \cdot 2^{\text{a}}\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y - z &= 2\\ -y + z &= 1\\ 9z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad z = \frac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \frac{2}{3}$$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

7 S **Resuelve:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 1\\ 3x + 2y + z &= 1\\ 5x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 3\\ 6x - 6y + 2z &= -16\\ x - y + 2z &= -6 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1\\ 3x + 2y + z &= 1\\ 5x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix}1^{\text{a}}\\ 2^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}}\\ 3^{\text{a}} - 5 \cdot 1^{\text{a}}\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2\cdot 2^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -y+4z=-2 \end{array}\right\}$$

$y = 4z + 2$
$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$
$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda,\ 2 + 4\lambda,\ \lambda)$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a}:2 \\ 1^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a}-3\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a}:(-5) \\ 3^{a}:7 \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-6 \\ z=-2 \\ y-z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solución: $(-1, 1, -2)$

8 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-2z=1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} -x+3y+6z=3 \\ 2/3x-2y-4z=2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-2z=1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2ª ecuación entre 2, obtenemos :

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradice la 1ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{r} -x+3y+6z=3 \\ (2/3x)-2y-4z=2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\dfrac{2}{3}$ la 1ª ecuación, obtenemos:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

9 S **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{array}\right.$

$$\textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{l} -x+2y-\ \ z=1 \\ 2x-4y+2z=3 \\ \ \ x+\ \ y+\ \ z=2 \end{array}\right. \qquad \textbf{d)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x-\ \ y\qquad =0 \\ 4x+\ \ y-z=0 \end{array}\right.$$

a)
$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=\ \ 9 \\ x-\ \ y-z=-10 \\ 2x-\ \ y+z=\ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ -2^{\text{a}}+1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}}-2\cdot 1^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}}+2\cdot 3^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+2y+\ \ z=9 \\ 3y+2z=19 \\ -7y\qquad=-7 \end{array}\right\}$$

$$y=1 \qquad z=\frac{19-3y}{2}=8 \qquad x=9-2y-z=-1$$

Solución: $(-1,\ 1,\ 8)$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x-\ \ y+z=-1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ -2^{\text{a}}+2\cdot 1^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+2y=3-z \\ 5y=7-z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\dfrac{7}{5}-\dfrac{z}{5} \\[2ex] x=3-z-2y=3-z-\dfrac{14}{5}+\dfrac{2z}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3z}{5} \end{array}$$

Si hacemos $z=5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5}-3\lambda,\ \dfrac{7}{5}-\lambda,\ 5\lambda\right)$

c)
$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-\ \ z=1 \\ 2x-4y+2z=3 \\ x+\ \ y+\ \ z=2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}}-2\cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}}+1^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}}+2\cdot 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La segunda ecuación es imposible: $0x+0y+0z=5$

El sistema es *incompatible*.

d)
$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 3x-\ \ y\qquad=0 \\ 4x+\ \ y-z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}}+1^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}}-2\cdot 2^{\text{a}} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 3x-\ \ y\qquad=0 \end{array}\right\}$$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 S **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$$

$$\text{c)}\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right. \qquad \text{d)}\left\{\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\left.\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \\ 4^{a} - 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 4^{a} \\ 4^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-3, 6, 7)$

$$\text{b)}\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -1 \\ z + t = 1 \\ -2t = 1 \end{array}\right\}$$

$$t = -\frac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$$

Solución: $\left(-1, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -2x \\ x = \lambda \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $(\lambda, -2\lambda, 0)$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = 1 - y - 1 + 2y = y \\ y = \lambda \end{array}$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 1 - 2\lambda)$

11 Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminado.*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to$ *Compatible determinado.*

PARA RESOLVER

12 S **Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y-3z=\ \ 1\\ x-4y-5z=\ \ 1\\ -2x+2y+4z=-2 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1\\ 1 & -4 & -5 & 1\\ -2 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}-1^{a}\\ 3^{a}:2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}:(-2)\\ 3^{a}+1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}+2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-3z=1\\ y+\ \ z=0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} x-2y=1+3z \ \rightarrow\ x=1+3z+2y=1+3z-2z=1+z\\ y=-z \end{array}$$

Solución: $(1+\lambda, -\lambda, \lambda)$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ x+2y-z=0\\ 4x+\ \ y-z=0 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}+1^{a}\\ 3^{a}+1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-2\cdot 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Lo resolvemos: $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ 3x-\ \ y\ \ \ \ \ \ =0 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=3x\\ z=-2x+3y=-2x+9x=7x\\ x=\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Página 47

13 S **Estudia y resuelve estos sistemas por el método de Gauss:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} -x+\ \ y+3z=-2\\ 4x+2y-\ \ z=\ \ 5\\ 2x+4y-7z=\ \ 1 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} y+\ \ z=-1\\ x-\ \ y\ \ \ \ \ \ \ =\ \ 1\\ x+2y+3z=-2 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{r} 5x+2y+3z=\ \ 4\\ 2x+2y+\ \ z=\ \ 3\\ x-2y+2z=-3 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{r} x-\ \ y+3z-14t=0\\ 2x-2y+3z+\ \ \ \ t=0\\ 3x-3y+5z+\ \ 6t=0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} -x+\ \ y+3z=-2\\ 4x+2y-\ \ z=\ \ 5\\ 2x+4y-7z=\ \ 1 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}+4\cdot 1^{a}\\ 3^{a}+2\cdot 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible determinado.}$$

Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r}-x + y + 3z = -2\\ 6y + 11z = -3\\ z = 0\end{array}\right\}\quad y = -\dfrac{1}{2}\qquad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r}y + z = -1\\ x - y = 1\\ x + 2y + 3z = -2\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}2^{a}\\ 1^{a}\\ 3^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -2\end{array}\right) \to$

$\to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a} - 1^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 3 & -3\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a} - 3 \cdot 2^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r}x - y = 1\\ y + z = -1\end{array}\right\}\begin{array}{l}x = 1 + y\\ z = -1 - y\\ y = \lambda\end{array}$

Soluciones: $(1 + \lambda,\ \lambda, -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r}5x + 2y + 3z = 4\\ 2x + 2y + z = 3\\ x - 2y + 2z = -3\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & -3\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}3^{a}\\ 2^{a}\\ 1^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 3 & 4\end{array}\right) \to$

$\to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a}\\ 3^{a} - 5 \cdot 1^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 6 & -3 & 9\\ 0 & 12 & -7 & 19\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a} : 3\\ 3^{a} - 2 \cdot 2^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r}x - 2y + 2z = -3\\ 2y - z = 3\\ -z = 1\end{array}\right\}\begin{array}{l}z = -1\\ y = 1\\ x = -3 + 2y - 2z = 1\end{array}$

Solución: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{array}{r}x - y + 3z - 14t = 0\\ 2x - 2y + 3z + t = 0\\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0\end{array}\right\}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 3 & -14 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a}\\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 3 & -14 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0\end{array}\right) \to$

$\to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ -4 \cdot 2^{a} + 3 \cdot 3^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 3 & -14 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0\end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

⑭ S **Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:**

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{r} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right. \qquad \text{b)} \left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{c)} \left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right. \qquad \text{d)} \left\{\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

$$\text{a)} \left.\begin{array}{r} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

$$\text{b)} \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 7 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 10$ → *Sistema compatible indeterminado*
- Si $a \neq 10$ → *Sistema compatible determinado*

$$\text{c)} \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Compatible determinado para todo m.

d) $$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+az=1\\ 5x+3y+3z=2\\ x+y-z=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&a&1\\5&3&3&2\\1&1&-1&1\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}3^a\\2^a\\1^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\5&3&3&2\\3&2&a&1\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a-5\cdot 1^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&8&-3\\0&-1&a+3&-2\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a\\-2\cdot 3^a+2^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&8&-3\\0&0&2-2a&1\end{array}\right)$$

$2-2a=0 \ \to\ a=1$

- Si $a=1$ → Sistema *incompatible*
- Si $a\neq 1$ → Sistema *compatible determinado*

15 **S** **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x-y=4}\\ \boldsymbol{-x+y/2=-2}\\ \boldsymbol{x+ky=2}\end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x+y-z=1}\\ \boldsymbol{x-2y+z=3}\\ \boldsymbol{5x-5y+2z=m}\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x-y=4\\ -x+y/2=-2\\ x+ky=2\end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&4\\-1&1/2&-2\\1&k&2\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2\cdot 2^a+1^a\\2\cdot 3^a-1^a\end{array}} \left(\begin{array}{cc|c}2&-1&4\\0&0&0\\0&2k+1&0\end{array}\right)$$

- Si $k=-\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$2x-y=4 \ \to\ \left\{\begin{array}{l} y=2x-4\\ x=\lambda\end{array}\right.$$

Soluciones: $(\lambda,\ 2\lambda-4)$

- Si $k\neq -\dfrac{1}{2}$ → Sistema *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-\quad y=4\\ (2k+1)y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0\\ x=2\end{array}$$

Solución: $(2, 0)$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=1\\ x-2y+z=3\\ 5x-5y+2z=m\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&-2&1&3\\5&-5&2&m\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}2^a\\1^a\\3^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\2&1&-1&1\\5&-5&2&m\end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 1^a\\3^a-5\cdot 1^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&5&-3&-5\\0&5&-3&m-15\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-2^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&5&-3&-5\\0&0&0&m-10\end{array}\right)$$

- Si $m=10$ → Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+\ \ z=\ \ 3 \\ 5y-3z=-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\dfrac{-5+3z}{5}=-1+\dfrac{3z}{5} \\[2ex] x=3+2y-z=3-2+\dfrac{6z}{5}-z=1+\dfrac{z}{5} \end{array}$$

Haciendo $z=5\lambda$.

Soluciones: $(1+\lambda,\ -1+3\lambda,\ 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \ \to$ *Incompatible*

16 S **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y-\ \ z=-1 \\ x+5y+3z=\ \ 3 \\ x+\ \ y+\ \ z=\ \ 1 \\ 3x+7y+5z=\ \ 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-\ \ z=-1 \\ x+5y+3z=\ \ 3 \\ x+\ \ y+\ \ z=\ \ 1 \\ 3x+7y+5z=\ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-3\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a:2 \\ 3^a+2^a \\ 4^a-2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1-2y \\ x=1-y-z=y \\ y=\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 1-2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

17 S **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x-\ \ y=1 \\ 4x+3y=m \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x-\ \ y-2z=2 \\ 2x+\ \ y+3z=1 \\ 3x\qquad +\ \ z=3 \\ x+2y+5z=m \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x-\ \ y=1 \\ 4x+3y=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a-4\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a:(-5) \\ 3^a-2^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad x = 3 - 2y = 1$$

Solución: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

b) $$\left.\begin{aligned} x - \;\; y - 2z &= 2 \\ 2x + \;\; y + 3z &= 1 \\ 3x \qquad + \;\; z &= 3 \\ x + 2y + 5z &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{aligned} x - \;\; y - 2z &= \;\; 2 \\ 3y + 7z &= -3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & y = \frac{-3 - 7z}{3} = -1 - \frac{7z}{3} \\ & x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \frac{7z}{3} + 2z = 1 - \frac{z}{3} \end{aligned}$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

18
S **Discute y resuelve en función del parámetro:**

a) $$\left\{\begin{aligned} -x + my + \;\; z &= \;\; 2 \\ 2x - \;\; y + 2z &= \;\; 0 \\ -x \qquad - 3z &= -2 \end{aligned}\right.$$

b) $$\left\{\begin{aligned} x + \;\; y + \;\; z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 5 \\ 2x + \;\; y + \;\; z &= 3 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} -x + my + \;\; z &= \;\; 2 \\ 2x - \;\; y + 2z &= \;\; 0 \\ -x \qquad - 3z &= -2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} -3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m = 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado*

$$\left.\begin{aligned} x \qquad + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 2 - 3z \\ y &= 4 - 4z \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{rrr} x & & +\,3z = 2 \\ & y & +\,4z = 4 \\ & (m-1)y & = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } (-1, 0, 1)$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ -2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

- Si $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + z = -3 \\ (a-2)z = 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solución: $\left(\dfrac{3a-6}{a-2}, \dfrac{4-3a}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

19 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right.$

a)
$$\left.\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \rightarrow \underset{\alpha \neq 0}{\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \cdot \alpha - 1^{a} \end{array}}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$ → Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y \phantom{{}-5z} = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 5 \cdot 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 0$ → Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $\alpha = 0$ → Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

20
S

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de *a* para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro *a* para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para *a* = 0.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2 + a) & 6 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \phantom{{}+3z} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \to \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

21 S **Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \phantom{{}+2y} - z = 1 \end{cases}$$

a) ¿Existe una solución en la que y sea igual a 0?

b) Resuelve el sistema.

c) Interprétalo geométricamente.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \qquad - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x \qquad - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

a) $y = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array}\right\}$

Solución: (3, 0, 2)

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Soluciones: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Son tres planos que se cortan en una recta.

22 S **En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44€ y, un tercer día, te piden 26 € por una horchata y cuatro batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?**

Llamamos x al precio de una copa de la casa, y al precio de una horchata, y z al precio de un batido. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 4z = 34 \\ 4x + 4y \qquad = 44 \\ y + 4z = 26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 4z = 34 \\ x + y \qquad = 11 \\ y + 4z = 26 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^{a} \\ 1^{a} - 2^{a} \\ 3^{a} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible*. Por tanto, alguno de los tres días han presentado una cuenta incorrecta.

23 S **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 € y el segundo de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r}A + \quad B + \quad C = 20\,000\\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = \quad 1\,050\\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = \quad 950\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}A + \ B + \ C = \quad 20\,000\\ 4A + 5B + 6C = 105\,000\\ 5A + 6B + 4C = \quad 95\,000\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\,000\\ 4 & 5 & 6 & 105\,000\\ 5 & 6 & 4 & 95\,000\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}1^a\\ 2^a - 4\cdot 1^a\\ 3^a - 5\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\,000\\ 0 & 1 & 2 & 25\,000\\ 0 & 1 & -1 & -5\,000\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ -3^a + 2^a\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\,000\\ 0 & 1 & 2 & 25\,000\\ 0 & 0 & 3 & 30\,000\end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r}A + B + \ C = 20\,000\\ B + 2C = 25\,000\\ 3C = 30\,000\end{array}\right\} \begin{array}{l}C = 10\,000\\ B = \quad 5\,000\\ A = \quad 5\,000\end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

Página 48

24 S **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.**

Llamamos x al nº de copias vendidas al precio original, 12 €; y al nº de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al nº de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l}x + y + z = 600\\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384\\ y + z = \dfrac{x}{2}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x + y + z = 600\\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384\\ x - 2y - 2z = 0\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 600\\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384\\ 1 & -2 & -2 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}1^a\\ -2^a + 12\cdot 1^a\\ -3^a + 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 600\\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816\\ 0 & 3 & 3 & 600\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a : 3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 600\\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816\\ 0 & 1 & 1 & 200\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}1^a\\ 3^a\\ 2^a - 3{,}6\cdot 3^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 600\\ 0 & 1 & 1 & 200\\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 600 \\ y + \quad z = 200 \\ 1{,}2z = \ \ 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \ \ 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

25 S **Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.**

Llamamos x al nº de billetes de 10 €; y al nº de billetes de 20 €; y z al nº de billetes de 50 €. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad y + \quad z = \quad 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2\,000 \\ x \qquad\qquad\quad = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x \qquad\quad\ \ = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x \qquad + \ \ z = \ \ 95 \\ \quad\ \ 4y + 5z = 200 \\ x \qquad\quad\ \ = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \ \rightarrow \ 4y + 475 - 15y = 200 \ \rightarrow \ 275 = 11\ y$

$y = 25 \ \rightarrow \ z = 20 \ \rightarrow \ x = 50$

Solución: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

26 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al nº de monedas que hay en la caja A, y al nº de monedas que hay en la caja B, y z al nº de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \ \ y + z = 36 \\ x - \ \ y - z = \ \ 2 \\ x - 2y \qquad = -3 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \ \rightarrow \ x = 19$

De la 3ª ecuación $\rightarrow \ y = \dfrac{x + 3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

27 **Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600 000 €. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?**

Llamamos x a lo que le costó el 1$^{\text{er}}$ objeto (en millones de euros), y a lo que le costó el 2º objeto y z a lo que le costó el 3$^{\text{er}}$ objeto. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 0{,}6 \\ 0{,}8x + 0{,}9y + 0{,}85z = 1{,}7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + \ y + \quad z = \ 2 \\ 2x + 5y + 2{,}5z = \ 6 \\ 8x + 9y + 8{,}5z = 17 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 8{,}5 & 17 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 8 \cdot 1^a \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \blacktriangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 2 \\ 2y \qquad = 1 \\ y + 0{,}5z = 1 \end{array}\right\}$$

$$y = 0{,}5 \qquad\qquad z = \frac{1 - y}{0{,}5} = 1 \qquad\qquad x = 2 - y - z = 0{,}5$$

Solución: El 1$^{\text{er}}$ objeto le costó 0,5 millones de euros (500 000 €), el 2º le costó 0,5 millones de euros (500 000 €) y el 3º le costó 1 millón de euros (1 000 000 €).

28 **Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?**

Llamamos x al nº de empleados que siguen el curso A; y al nº de empleados que siguen el curso B, y z al nº de empleados que siguen el curso C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad y + \quad z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27\,200 \\ 400x \qquad\qquad = 5 \cdot 160y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \ y + \ z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ 400x \qquad = 800y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \ y + \ z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x \qquad\quad = 2y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + \ z = 100 \\ 24y + 5z = 680 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) = 680 \end{array}$$

$$24y + 500 - 15y = 680 \ \to \ 9y = 180 \ \to \ y = 20 \ \to \ z = 40; \ x = 40$$

Solución: 40 empleados siguen el curso A, 20 empleados siguen el curso B y 40 siguen el curso C.

29 S **Antonio tiene un año más que Juan y Luis uno más que Ángel. Determine la edad de los cuatro sabiendo que la edad de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la edad de Antonio y que la edad de Ángel es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la edad de Juan.**

Llamamos x a la edad de Juan e y a la de Ángel. Así, la edad de cada uno es:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Antonio} & \to & x + 1 \\ \text{Juan} & \to & x \\ \text{Luis} & \to & y + 1 \\ \text{Ángel} & \to & y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} y + 1 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}\right)(x + 1) \\ y = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}\right)x \end{array}\right\} \begin{array}{r} y + 1 = \dfrac{10}{21}(x + 1) \\ y = \dfrac{9}{20}x \end{array}$$

$$\frac{9}{20}x + 1 = \frac{10}{21}x + \frac{10}{21} \;\to\; \frac{-11}{420}x = \frac{-11}{21} \;\to\; x = \frac{420}{21} = 20; \quad y = \frac{9}{20}x = 9$$

Así, la edad de cada uno será: Antonio: 21 años; Juan: 20 años; Luis: 10 años; Ángel: 9 años.

30 S **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1ª PARTIDA	2ª PARTIDA	3ª PARTIDA
1º QUE PIERDE	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2º QUE PIERDE	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3º QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ y - z = 9 \\ 2z = 24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 12 \\ y = 9 + z = 21 \\ x = 6 + y + z = 39 \end{array}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2º lugar tenía 21 € y el que perdió en 3^er^ lugar tenía 12 €.

31 S **Un joyero tiene tres clases de monedas *A*, *B* y *C*. Las monedas de tipo *A* tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo *B* tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo *C* tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?**

Llamamos x al nº de monedas que deben fundirse de tipo A, y a las de tipo B, y z a las de tipo C.

La información que tenemos acerca de la composición de las monedas es:

TIPO	ORO (g)	PLATA (g)	COBRE (g)
A	2	4	14
B	6	4	10
C	8	6	6

Por tanto: $\left.\begin{array}{r} 2x+\ \ 6y+8z=\ \ 44\\ 4x+\ \ 4y+6z=\ \ 44\\ 14x+10y+6z=112 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+3y+4z=22\\ 2x+2y+3z=22\\ 7x+5y+3z=56 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22\\ 2 & 2 & 3 & 22\\ 7 & 5 & 3 & 56 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a\\ 2^a-2\cdot 1^a\\ 3^a-7\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22\\ 0 & -4 & -5 & -22\\ 0 & -16 & -25 & -98 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a\\ 2^a\\ 3^a-4\cdot 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22\\ 0 & 4 & 5 & 22\\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+4z=\ \ 22\\ 4y+5z=\ \ 22\\ -5z=-10 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} z=2\\ y=\dfrac{22-5z}{4}=3\\ x=22-3y-4z=5 \end{array}$$

Solución: Debe fundir 5 monedas de tipo A, 3 de tipo B y 2 de tipo C.

32 S **Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?**

Llamamos x a la cantidad que solicitó la 1ª tienda, y a la que solicitó la 2ª tienda y z a la que solicitó la 3ª tienda. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=42\\ x=y+z\\ y=1{,}2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x+y+z=42\\ x-y-z=0\\ 6y=3{,}6x+2{,}4z \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x-y-z=0\\ x+y+z=42\\ 60y=36x+24z \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x-y-z=0\\ x+y+z=42\\ 5y=3x+2z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-\ \ y-\ \ z=\ \ 0\\ x+\ \ y+\ \ z=42\\ 3x-5y+2z=\ \ 0 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 42\\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a\\ 2^a-1^a\\ 3^a-3\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 42\\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a\\ 2^a:2\\ 3^a+2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 21\\ 0 & 0 & 7 & 42 \end{array}\right)\ \left.\begin{array}{r} x-y-\ \ z=\ \ 0\\ y+\ \ z=21\\ 7z=42 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} z=6\\ y=21-z=15\\ x=y+z=21 \end{array}$$

Solución: La 1ª tienda solicitó 21 electrodomésticos; la 2ª, 15; y la 3ª, 6.

33 S **Se mezclan 60 *l* de vino blanco con 20 *l* de vino tinto y se obtiene un vino de 10 grados (10% de alcohol). Si por el contrario se mezclan 20 *l* de blanco con 60 *l* de tinto, se obtiene un vino de 11 grados. ¿Qué graduación tendrá una mezcla de 40 *l* de vino blanco y 40 *l* de vino tinto?**

Llamamos x al porcentaje de alcohol en 1 litro de vino blanco, e y al porcentaje de alcohol en 1 litro de vino tinto. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{60x}{100}+\dfrac{20y}{100}=\dfrac{10\cdot 80}{100}\\[2ex] \dfrac{20x}{100}+\dfrac{60y}{100}=\dfrac{11\cdot 80}{100}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}3x+\ \ y=40\\ x+3y=44\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}y=40-3x\\ x+3(40-3x)=44\end{array}$$

$$x+120-9x=44 \quad\to\quad 76=8x \quad\to\quad x=9{,}5\%,\ \ y=11{,}5\%$$

Si mezclamos 40 *l* de vino blanco y 40 *l* de vino tinto, tendremos:

$0{,}095\cdot 40+0{,}115\cdot 40=8{,}4$ *l* de alcohol en los 80 *l* de mezcla.

$\dfrac{8{,}4}{80}\cdot 100=10{,}5\%$ de alcohol en los 80 *l* de mezcla.

Solución: La mezcla tendrá una graduación de 10,5 grados.

CUESTIONES TEÓRICAS

34 **Si tenemos un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?**

Sí. Por ejemplo:

$$\text{Incompatible}\ \left\{\begin{array}{r}x+2y=3\\ 2x+4y=6\\ x+2y=1\end{array}\right.\ \ \text{(las dos primeras)}$$

Compatible indeterminado (las dos primeras ecuaciones)

35 **Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.**

No. Si el sistema es incompatible, las dos ecuaciones iniciales son contradictorias. Añadiendo otra ecuación, no podemos cambiar este hecho; el sistema seguirá siendo incompatible.

36 **S** **Dadas las ecuaciones:** $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{3x-2y+z=\ \ 5}\\ \mathbf{2x-3y+z=-4}\end{array}\right.$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea incompatible, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x-2y+z)+b(2x-3y+z)=k$ con $k\neq 5a-4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a=1$, $b=0$, $k=1$, queda:

$3x-2y+z=1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería incompatible.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - 2y + z = & 5 \\ 2x - 3y + z = & -4 \\ y \quad = & 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 3x \quad + z = & 5 \\ 2x \quad + z = & -4 \\ y \quad = & 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} x = & 9 \\ y = & 0 \\ z = & -22 \end{array}\right\} \quad \text{Compatible determinado}$$

Página 49

37
S **Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x = & 2 \\ y = & 1 \\ z = & -1 \end{array}\right.$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1$^{\underline{er}}$ sistema lo son también del 2º, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1º es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2º es determinado (solo tiene una solución).

38
S **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad + 3z = 2 \\ 2x \quad + az = 3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad + 3z = 2 \\ 2x \quad + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 2 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es incompatible.

39
S **Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?**

No. Por ejemplo, los sistemas:

$$S: \left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array}\right. \qquad S': \left\{\begin{array}{l} 2x - \; y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right.$$

son equivalentes, con solución única $(2, 1)$, tienen iguales los términos independientes, pero no los coeficientes de las incógnitas.

PARA PROFUNDIZAR

40 **S** **En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en 3 estaciones de servicio (*A*, *B* y *C*). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en *A* ha sido de 1,2 €/litro y el precio en *B* de 1,18 €/litro, pero ha olvidado el precio en *C* (supongamos que son *m* €/litro con *m* desconocido). También recuerda que:**

- **La suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones *A* y *B* superó en 46,80 € al gasto en *C*.**
- **El número de litros consumidos en *B* fue el mismo que en *C*.**
- **El gasto en litros en *A* superó al de *B* en 12,60 €.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudia la compatibilidad del sistema en función de *m*. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en *C*?

a) Llamamos x al nº de litros repostados en A, y al nº de litros repostados en B y z al nº de litros repostados en C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rl} 1{,}2x + 1{,}18y &= mz + 46{,}8 \\ y &= z \\ 1{,}2x &= 1{,}18y + 12{,}6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} 1{,}2x + 1{,}18y - mz &= 46{,}8 \\ y - z &= 0 \\ 1{,}2x - 1{,}18y &= 12{,}6 \end{array}\right\}$$

b) $$\begin{array}{l} 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1{,}2 & 1{,}18 & -m & 46{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2{,}36 & -m & 34{,}2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - (2{,}36) \cdot 2^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}36 - m & 34{,}2 \end{array}\right)$$

- **Si $m \neq 2{,}36$** → el sistema es *compatible determinado*.
- **Si $m = 2{,}36$** → el sistema es *incompatible*.

Por tanto, es imposible que el precio en C fuera de 2,36 €/l.

41 **S** **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro *a* y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:**

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a-1\\2&1&a&a\\1&a&1&1\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}-2\cdot 1^{a}\\3^{a}-1^{a}\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a-1\\0&-1&a-2&-a+2\\0&a-1&0&2-a\end{array}\right)$$

- Si $a=1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right) \to$$ Sistema *incompatible*

- Si $a=2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}+3^{a}\\3^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right) \to$$

→ Sistema *compatible indeterminado*

Lo resolvemos en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1\\ y=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+z=1 \;\to\; x=1-z\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right\}$$

Soluciones: $(1-\lambda, 0, \lambda)$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$ → Sistema *compatible determinado*

b) $$\left.\begin{array}{l} ax+y-z=0\\ 2x+ay=2\\ -x+z=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}a&1&-1&0\\2&a&0&2\\-1&0&1&1\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}3^{a}\\2^{a}\\1^{a}\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\a&1&-1&0\end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}\\3^{a}+1^{a}\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\a-1&1&0&1\end{array}\right) \to \underset{a\neq 0}{\boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}\\-a\cdot 3^{a}+2^{a}\end{array}}} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\-a^2+a+2&0&0&2-a\end{array}\right)$$

$$-a^2+a+2=0 \;\to\; a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2} \begin{array}{l} a=-1\\ a=\;\;2\end{array}$$

- Si $a=-1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&-1&0&2\\0&0&0&3\end{array}\right) \to$$ Sistema *incompatible*

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} : 2 \\ 3^{\underline{a}} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{rcases} -x \phantom{{}+y} + z = 1 \\ x + y \phantom{{}+z} = 1 \end{rcases} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$$

Sistema *compatible indeterminado*

Soluciones: $(\lambda,\ 1 - \lambda,\ 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ → Sistema *compatible determinado*

42 **Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a. Interprétalo geométricamente:**

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{rcases} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{rcases} \begin{rcases} ax + \ \ y + z = \ \ 4 \\ x + \ \ y + z = -1 \\ x - ay + z = \ \ 1 \end{rcases} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a - 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a - 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ → Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

43 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y+z+t = 17} \\ \boldsymbol{x+y+z + w = 16} \\ \boldsymbol{x+y + t + w = 15} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 14} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = 14} \end{array}\right.$$

☛ ***Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.***

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t = 17 \\ x+y+z + w = 16 \\ x+y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien:

$x + y + z + t + w = 19$

Por tanto:

$$\begin{array}{lll} (x+y+z+t)+w = 17+w = 19 & \to & w = 2 \\ (x+y+z+w)+t = 16+t = 19 & \to & t = 3 \\ (x+y+t+w)+z = 15+z = 19 & \to & z = 4 \\ (x+z+t+w)+y = 14+y = 19 & \to & y = 5 \\ (y+z+t+w)+x = 14+x = 19 & \to & x = 5 \end{array}$$

44 **Nos dicen que x, y, z, t, w son números enteros y que k vale 36 ó 38. Decide razonadamente cuál de los dos es su valor y resuelve el sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y+z+t = 35} \\ \boldsymbol{x+y+z + w = 36} \\ \boldsymbol{x+y + t + w = 38} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 39} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = k} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t = 35 \\ x+y+z + w = 36 \\ x+y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 ó 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 &\to\ & w = 11\\
&(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 &\to\ & t = 10\\
&(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 &\to\ & z = 8\\
&(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 &\to\ & y = 7\\
&(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 &\to\ & x = 10
\end{aligned}$$

45 **Una cuadrilla de 5 obreros se compromete a podar los 222 árboles de una plantación. Trabajan de lunes a sábado. Cada día, cuatro de ellos podan y el quinto los atiende (repone herramientas, les da agua, recoge los troncos que caen...). Cada obrero poda el mismo número de árboles cada día, es decir, si Alberto poda 8 árboles un día, podará 8 árboles cada día que intervenga. Los resultados son:**

Lunes: 35 árboles podados.

Martes: 36 árboles podados.

Miércoles: 36 árboles podados.

Jueves: 38 árboles podados.

Viernes: 38 árboles podados.

Sábado: 39 árboles podados.

Calcula cuántos árboles diarios poda cada uno de los cinco obreros sabiendo que ninguno de ellos poda los seis días.

Llamamos:

w = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el lunes.

t = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el martes.

(Es otro el que descansa, pues la suma es diferente).

z = nº de árboles diarios que poda el que descansa el jueves.

(Es otro distinto, pues la suma es diferente).

y = nº de árboles diarios que poda el que descansa el sábado.

(Es otro, pues la suma es distinta a las anteriores).

$x =$ nº de árboles diarios que poda el obrero que falta.

(Descansará el miércoles o el viernes; coincidirá con t o con z).

Así, el nº de árboles que se podan cada día será:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t \qquad\quad = 35 \\ x + y + z + \qquad w = 36 \\ x + y \qquad + t + w = 38 \\ x \qquad + z + t + w = 39 \\ \quad y + z + t + w = k \\ k \text{ puede ser } 36 \text{ ó } 38 \end{array}\right\} \quad x,\ y,\ z,\ t,\ w \text{ son enteros}$$

Se trata de resolver este sistema.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $k = 36$; y que:

$$x = 10,\ \ y = 7,\ \ z = 8,\ \ t = 10,\ \ w = 11$$

Por tanto, el que poda 11 árboles descansa el lunes, uno de los que podan 10 árboles descansa el martes, el que poda 8 árboles descansa el jueves y el viernes, el que poda 7 árboles descansa el sábado y el otro que poda 10 árboles, descansa el miércoles.

UNIDAD 2 MATRICES

Página 50

1. ***A tres amigos, M, N, P, se les pide que contesten a lo siguiente:***

"¿Crees que alguno de vosotros aprobará la selectividad? Di quiénes".

Estas son las respuestas:

— M opina que él mismo, M, y P.

— N opina que solo M.

— P opina que solo él mismo, P.

$$\begin{array}{c} \\ M \\ N \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Reflexiona sobre la relación que hay entre las respuestas y la caja numérica formada por *ceros* y *unos* que hay debajo de ellas.**

  1 significa sí y 0 significa no. La 1ª fila indica que M piensa que aprobarán él mismo y P. La 2ª fila indica que N opina que sólo aprobará M. La 3ª fila indica que P piensa que sólo aprobará él mismo.

- **La caja numérica que aparece a continuación es la síntesis de las respuestas que han dado los siete alumnos (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G*) de un grupo de teatro a esta pregunta:**

  "¿Quién o quiénes de vosotros creéis que sería capaz de diseñar, organizar y dirigir un viaje de estudios de una semana?"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A la vista de las respuestas, di:

a) ¿Quién de ellos te parece un tanto iluso?

b) Dos de ellos parece que están algo aislados del resto del grupo. ¿Quiénes son?

c) Si tuvieras que designar a uno de ellos para que se hiciera cargo de la organización del viaje, ¿a quién elegirías?

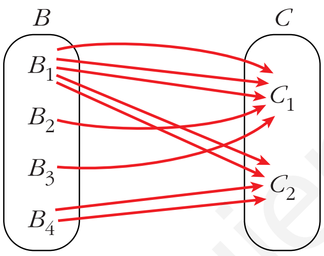
a) *D*, pues piensa que hay tres personas capaces de organizarlo, y, además, es el único que opina que *B* está capacitado.

b) *F* y *G*. *F* opina que solo es capaz *G*; y *G* opina que solo es capaz *F*.

c) *E* es el más seleccionado: hay 4 que lo eligen.

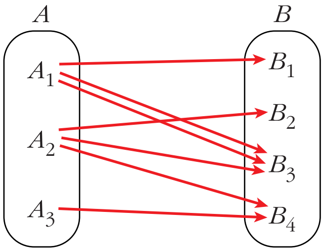
Página 51

2. ■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

■ **Una persona quiere salir el lunes de *A*, pasar la noche en *B* y llegar el martes a *C*.**



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1.

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 53

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = (5 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1)$$

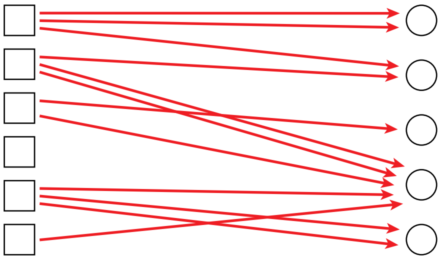
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 54

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 57

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz $A(3 \times 3)$, la deje igual.

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 58

1. Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 anteriores, referentes al producto de números por matrices, tomando: $a = 3$, $b = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&2)\ 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}\\ &\quad 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$9A = 3A + 6A$

$$\left.\begin{aligned}&3)\ 3(A+B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}\\ &\quad 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$3(A + B) = 3A + 3B$

$$4)\ 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Página 59

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}\\ &A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$\left.\begin{aligned}&(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}\\ &B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Página 61

1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

$$\text{a) }\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} - \text{2ª} \\ \text{1ª}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{ La inversa es } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) }\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} - 3 \cdot \text{1ª}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} + \text{2ª} \\ \text{2ª}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} : (-2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \text{ La inversa es } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) }\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} + 2 \cdot \text{1ª}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \text{ No tiene inversa}$$

2. **Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$$\text{a) }\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} - 4 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} - 7 \cdot \text{1ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª} - 2 \cdot \text{2ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \text{ No tiene inversa}$$

$$\text{b) }\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª} - \text{1ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} - 3 \cdot \text{3ª} \\ \text{2ª} - 2 \cdot \text{3ª} \\ \text{3ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} - 2 \cdot \text{2ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{La inversa es } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) }\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{3ª} : 2 \\ \text{2ª} \\ \text{1ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} - \text{1ª} \\ \text{3ª} - \text{1ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} \\ 2 \cdot \text{3ª} - \text{2ª}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{\text{1ª} \\ \text{2ª} \cdot 5 - \text{3ª} \\ \text{3ª} : 5}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 10 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{matrix}1^{\underline{a}}\\2^{\underline{a}}:10\\3^{\underline{a}}\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1/2\\0&1&0&-1/5&3/5&-1/5\\0&0&1&2/5&-1/5&-1/10\end{array}\right) \to \text{La inversa es} \begin{pmatrix}0&0&1/2\\-1/5&3/5&-1/5\\2/5&-1/5&-1/10\end{pmatrix}$$

Página 63

3. Calcula x, y, z, t para que se cumpla: $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\0&2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-z&2y-t\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}2x-z=5\\2y-t=1\\z=0\\t=2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\\z=0\\t=2\end{array}\right\}$$

Solución: $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2&3/2\\0&2\end{pmatrix}$

4. Para las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&5\\4&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&0\\1&1\end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$

b) $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$

c) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) } A\cdot(B+C)=A\cdot\begin{pmatrix}3&5\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\41&10\end{pmatrix}\\ \quad A\cdot B+A\cdot C=\begin{pmatrix}-1&5\\26&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\15&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\41&10\end{pmatrix}\end{array}\right\}A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{b) } (A+B)\cdot C=\begin{pmatrix}0&5\\6&6\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}5&5\\30&6\end{pmatrix}\\ \quad A\cdot C+B\cdot C=\begin{pmatrix}4&0\\15&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&5\\15&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\30&6\end{pmatrix}\end{array}\right\}(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{c) } A\cdot(B\cdot C)=A\cdot\begin{pmatrix}1&5\\15&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\107&3\end{pmatrix}\\ \quad (A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}-1&5\\26&3\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}1&5\\107&3\end{pmatrix}\end{array}\right\}A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

5. **Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.**

Encuentra X que cumpla: $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

6. **Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2 × 2 que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. **Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex] X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex] -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

8. **Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & x+y\\ z & z+t\end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ z & t\end{pmatrix}\end{array}\right\}\text{ han de ser iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x+z\\ x+y=y+t\\ z=z\\ z+t=t\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=t\\ \\ z=0\end{array}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

9. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}-4&7\\3&0\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix}2&7\\9&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7&3\\9&6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9&10\\18&6\end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix}5&-5\\-3&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10&-15\\6&9\end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix}2&7\\9&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23&12\\9&-9\end{pmatrix}$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ comprueba que $(A - I)^2 = 0$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

11. Halla la inversa de las matrices:

a) $\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}3&-2\\-8&5\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}7x+3z & 7y+3t\\ 2x+z & 2y+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 7x+3z=1\\ 2x+\ \ z=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\ \ 1\\ z=-2\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y+3t=0\\ 2y+\ \ t=1\end{array}\right\} \begin{array}{l} y=-3\\ t=\ \ 7\end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3x-2z & 3y-2t\\ -8x+5z & -8y+5t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r}3x-2z=1\\ -8x+5z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=-5\\ z=-8\end{array} \qquad \left.\begin{array}{r}3y-2t=0\\ -8y+5t=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=-2\\ t=-3\end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix}-5 & -2\\ -8 & -3\end{pmatrix}$.

Página 66

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5}\\ \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{-8}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a+1^a\\ 3^a-2\cdot 1^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & -6 & 2\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a-2\cdot 2^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & -20 & 0\end{pmatrix}$$

$ran\ (A)=3$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 10 & -8\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a-2\cdot 1^a\\ 3^a-1^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 7 & -7\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a+2^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$ran\ (B)=2$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a+1^a\\ 3^a-2\cdot 1^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 5 & 5\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a-5\cdot 2^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$ran\ (C)=2$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a+1^a\\ 4^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1\\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ -2\cdot 3^a+2^a\\ 4^a-4\cdot 2^a\end{array}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4\end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4^a+3^a\end{array}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$ran\ (D)=3$

Página 67

1. Expresa en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + z = 10} \\ \mathbf{2x + 3y = 17} \\ \mathbf{3x + 4y + z = 32} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - y = 7} \\ \mathbf{x - 2y = 11} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - 2y - 3z - 2t = -19} \\ \mathbf{y + 2z + t = 12} \\ \mathbf{2y + 3z + t = 16} \\ \mathbf{3x - 2y + t = 5} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}}_{C}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_{C}$$

2. Comprueba que las inversas de las matrices asociadas a los sistemas del ejercicio anterior son las que damos a continuación:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{3/2} & \mathbf{2} & \mathbf{-3/2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1/2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3/2} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2/3} & \mathbf{-1/3} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{-2/3} \end{pmatrix}$ **c)** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-6} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-12} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Resuelve con ellas, matricialmente, los sistemas del ejercicio 1.

a) Comprobamos que es la inversa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, \ y = 5, \ z = 9$

b) Comprobamos que es la inversa:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1$, $y = -5$

c) Comprobamos que es la inversa:

$$C \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = C^{-1} \cdot D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 0$, $y = -1$, $z = 5$, $t = 3$

Página 72

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

$(7 \;\; 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \;\; 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \;\; 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \;\; 3) - (2 \;\; 3) = (0 \;\; 0)$

4 **Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2em] A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\[2em] 3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\[1.5em] B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

La matriz unidad, I.

10 Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = 2 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1}, comprueba que:

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

12 **Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} : 2 \\ 3^{a} : 3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

13 **Di cuál es el rango de las matrices A y B:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ran $(A) = 3$ (ya está en forma escalonada)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow ran\ (B) = 2$$

14 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to ran\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to ran\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

15 Halla las matrices X e Y que verifican el sistema

$$\mathbf{2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16
S

Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17 **Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.**

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2m^2 - 5m + 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

18 **Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4};\ y = \frac{-7}{4}$

Página 73

PARA RESOLVER

19 **Dada la matriz** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}}$**, calcula** $\boldsymbol{A^2, A^3, \ldots, A^{128}}$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I;\quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

20 **Comprueba que** $\boldsymbol{A^2 = 2A - I}$**, siendo:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$ **e** $\boldsymbol{I}$ **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular $\boldsymbol{A^4}$**.**

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\[2ex] 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

21 **Determina** $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{b}$ **de forma que la matriz**

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}}$ **verifique** $\boldsymbol{A^2 = A}$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \to \quad \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} 4-a = 2 & \to \quad a = 2 \\ -2-b = -1 & \to \quad b = -1 \\ 2a+ab = a & \to \quad 4-2 = 2 \\ -a+b^2 = b & \to \quad -2+1 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

22 **S** **Calcula A^n y B^n siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

23 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **prueba que** A^3 **es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ **es la matriz inversa de** $I - A$**.**

☛ ***Multiplica*** $I + A + A^2$ ***por*** $I - A$***.***

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

25 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **comprueba que** $(A + I)^2 = \mathbf{0}$ **y expresa** A^2 **como combinación lineal de** A **e** I**.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A + I)^2 = \mathbf{0} \;\; \to \;\; (A + I)\,(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \;\; \to$

$\to \;\; A^2 = -2A - I$

26 **a) Comprueba que la inversa de** A **es** A^{-1}**:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X **que verifica** $XA = B$**, siendo** A **la matriz anterior y** $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$**.**

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \quad -2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

27 S **Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:**

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 2 la 2ª ecuación y sumando, obtenemos:

$$7A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos B de la 2ª ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

㉘ **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow$ *ran* $(M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; 1 + 2k = 0 \;\text{ si }\; k = -\frac{1}{2}$$

- Si $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 3^{a} : 4 \\ 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2 \rightarrow ran\ (P) = 1$
- Si $k \neq -2 \rightarrow ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} + 2 \cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 2^{a} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 2 \rightarrow ran\ (Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \rightarrow ran\ (Q) = 3$

29 **Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\ (A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

30
S **Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.**

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

31 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = 0$.**

$$A + mA + nI = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{lll} 2 + 2m + n = 0 & \to & n = 0 \\ 1 + m = 0 & \to & m = -1 \\ 2 + 2m = 0 & \to & m = -1 \\ 3 + 3m + n = 0 & \to & n = 0 \end{array} \right.$$

Solución: $m = -1$; $n = 0$

32 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3 - k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3 - k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3 - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ 2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ 2 - 2k & 2 - 2k & k^2 - 6k + 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad k = 1$$

33 S **Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.**

$$\text{Cada mes:} \quad \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Cada año:} \quad 12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$$

Página 74

34 **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$a)\ \begin{array}{ccc} & P & G \\ L3 & 4 & 3 \\ L4 & 5 & 4 \\ L5 & 6 & 5 \end{array}\ ;\quad \begin{array}{ccc} & C & B \\ P & 2 & 4 \\ G & 4 & 6 \end{array}$$

$$b)\ \begin{array}{ccc} & P & G \\ L3 & 4 & 3 \\ L4 & 5 & 4 \\ L5 & 6 & 5 \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} & C & B \\ P & 2 & 4 \\ G & 4 & 6 \end{array} = \begin{array}{ccc} & C & B \\ L3 & 20 & 34 \\ L4 & 26 & 44 \\ L5 & 32 & 54 \end{array}$$

35 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ \mathbf{M_1} & \mathbf{300} & \mathbf{200} \\ \mathbf{M_2} & \mathbf{400} & \mathbf{250} \\ \mathbf{M_3} & \mathbf{250} & \mathbf{180} \\ \mathbf{M_4} & \mathbf{500} & \mathbf{300} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{ccccc} & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ D & 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ B & 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} & T & O \\ M_1 & 300 & 200 \\ M_2 & 400 & 250 \\ M_3 & 250 & 180 \\ M_4 & 500 & 300 \end{array} = \begin{array}{ccc} & T & O \\ D & 96 & 60{,}9 \\ B & 1\,354 & 869{,}1 \end{array} \approx \begin{array}{ccc} & T & O \\ D & 96 & 61 \\ B & 1\,354 & 869 \end{array}$$

36 **Escribe en forma matricial y resuelve, si es posible, utilizando la matriz inversa:**

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x + \ \ y = 7 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} x \quad\ + z = \ \ 510 \\ \quad y \qquad = -234 \\ \quad y + z = \ \ 257 \end{array} \right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y=1\\ x+\ \ y=7\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos la inversa de A:

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\xrightarrow{\substack{1^a\\2^a-1^a}}\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&3&-1&1\end{pmatrix}\to\xrightarrow{\substack{1^a\cdot 3+2^a\cdot 2\\2^a}}\begin{pmatrix}3&0&1&2\\0&3&-1&1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\xrightarrow{\substack{1^a:3\\2^a:3}}\begin{pmatrix}1&0&1/3&2/3\\0&1&-1/3&1/3\end{pmatrix}\to A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&2/3\\-1/3&1/3\end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1/3&2/3\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\ \to\ \textit{Solución: }\ x=5,\ \ y=2$$

b) $$\left.\begin{array}{rl} x\quad\ +z= & 510\\ y\qquad= & -234\\ y+z= & 254\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}510\\-234\\254\end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\xrightarrow{\substack{1^a\\2^a\\3^a-2^a}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\xrightarrow{\substack{1^a-3^a\\2^a\\3^a}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\to A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}510\\-234\\254\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-234\\488\end{pmatrix}$$

Solución: $x=22,\ \ y=-234,\ \ z=488$

37 **Escribe en la forma habitual los sistemas:**

a) $\begin{pmatrix}3&-2\\1&5\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1&5&-3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=2\\ x+5y=0\\ 7y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x+5y-3z=1\\ 2x+\ y+5z=-1\end{array}\right\}$

38 **S** **Dada** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula, si es posible:**

a) Una matriz X **tal que** $XA = (1 \quad 0 \quad -1)$**.**

b) Una matriz Y **tal que** $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} - 2 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} + 6 \cdot \text{1ª} \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ 5 \cdot \text{2ª} + 2 \cdot \text{3ª} \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} \text{1ª} + 2 \cdot \text{3ª} \\ \text{2ª} - 5 \cdot \text{3ª} \\ \text{3ª} \cdot (-1) \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} : (-2) \\ \text{3ª} \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} \text{1ª} - \text{2ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª} \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right). \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1} = (1 \quad 3 \quad 1)$

b) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

39 **S** **Calcula los valores de** x **para que la matriz** $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ **verifique la ecuación** $A^2 - 6A + 9I = 0$**.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to x^2 - 6x + 9 = 0 \to (x - 3)^2 = 0 \to x = 3$$

40 **S** **Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.**

Calculamos la inversa de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \end{array}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2A + AX + B = 0 \quad \to \quad AX = -B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

41 **S** **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} -2 - 2x - y = 0 & \to & y = -2 - 2x = -8 \\ 9 - 3x \qquad\;\; = 0 & \to & x = 3 \\ -6 + 2x \qquad = 0 & \to & x = 3 \\ -5 - \;\; x - y = 0 & \to & y = -5 - x = -8 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 3, \ y = -8$

42 **S** **Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de A^5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \cdot 2 - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \cdot 2 - 1^{\text{a}} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} : 2 \\ 3^{\text{a}} : 2 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to (A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 20, \quad y = -5, \quad z = -9$

43
S

Sean las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$

a) Sabiendo que $\boldsymbol{A \cdot B + C = 3D}$, **plantea un sistema de ecuaciones para determinar** $\boldsymbol{x, y, z}$.

b) Encuentra, si es posible, una solución.

$$\text{a) } A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y + 2z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

$$3D = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \text{ En forma matricial: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

b) Intentamos resolver el sistema en forma matricial. Para ello, calculamos la inversa de M:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + (3/2) \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz M no tiene inversa.

Como $ran\ (M) = 2$ y se nos anula la segunda ecuación, tomamos las otras dos para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} (1^a + 2^a) \quad \to \quad \begin{array}{l} 2y = 4 \quad \to \quad y = 2 \\ x = 3 - y - z = 1 - z \end{array}$$

Solución: $(1 - \lambda, 2, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

44 **Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b - a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2a & 2 + 2b - 2a \\ 0 & 1 + 2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

45 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \; a = b = c$$

46 **Dada la matriz:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$ **prueba que se verifica** $\boldsymbol{A^3 + I = 0}$ **y utiliza esta igualdad para obtener** $\boldsymbol{A^{10}}$**.**

☛ ***Haz*** $\boldsymbol{A^{10} = (A^3)^3 \cdot A}$ ***y ten en cuenta que*** $\boldsymbol{A^3 = -I}$***.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\rightarrow\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Página 75

47 **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula $\boldsymbol{x}$ **e** $\boldsymbol{y}$ **para que esta matriz** $\boldsymbol{A}$ **sea ortogonal:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

☛ ***Haz*** $\boldsymbol{A \cdot A^t = I}$***.***

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25}+x^2=1 \\ \dfrac{3}{5}y-\dfrac{3}{5}x=0 \\ y^2+\dfrac{9}{25}=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2=\dfrac{16}{25} \\ y=x \\ y^2=\dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{4}{5} \\ y=x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{4}{5};\ y_1=\frac{4}{5}$ $\qquad x_2=-\frac{4}{5};\ y_2=-\frac{4}{5}$

48 **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{22} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

49 **Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.**

$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB=BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

50 **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1 × 2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

51 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

Página 75

52 **Sean $A = (a_{ij})_{m,\,n}$, $B = (b_{ij})_{n,\,p}$, $C = (c_{ij})_{q,\,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?**

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q$; $p = r$

53 **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango dos.

b) No. Podría ser dos o uno. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la primera fila y la tercera columna,

queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ($A$ tenía rango 3).

54 **¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4?**

Razona la respuesta.

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&-2\\2&7&-3&0\end{pmatrix} \to \begin{matrix}1^a\\2^a\\3^a-2\cdot 1^a\end{matrix} \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&-2\\0&3&-3&-6\end{pmatrix} \to \begin{matrix}1^a\\2^a\\3^a-3\cdot 2^a\end{matrix} \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

55 **¿Qué condición debe cumplir una matriz A de dimensión 3×3 para que se verifique que $A + A^t = 2A$?**

$$A + A^t = 2A \;\to\; A^t = 2A - A = A \;\to\; A = A^t$$

Luego, la condición es que la matriz coincida con su traspuesta. Es decir, A debe ser de la forma:

$$A = \begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$$

56 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix}-3&-2\\4&3\end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \;\to\; A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\to\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \;\to\; BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}-3&-2\\4&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3a-2c&-3b-2d\\4a+3c&4b+3d\end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3&-2\\4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3a+4b&-2a+3b\\-3c+4d&-2c+3d\end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix}-6a+4b-2c&-2a-2d\\4a+4d&4b-2c+6d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}-6a+4b-2c = 0\\-2a - 2d = 0\\4a + 4d = 0\\4b-2c+6d = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}3a-2b+c = 0\\\left.\begin{array}{l}a + d = 0\\a + d = 0\end{array}\right\} d = -a\\2b-c+3d = 0 \;\to\; 3a-2b+c = 0 \;\to\\\qquad\qquad\qquad\to\; c = -3a+2b\end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

57 **Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = 0$ (0 es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.**

Supongamos que se verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, pero que A sí tiene inversa, que existe A^{-1}.

Multiplicando la igualdad $A^2 = \mathbf{0}$ por $(A^{-1})^2$, quedaría:

$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \;\rightarrow\; I = \mathbf{0}$; lo cual es absurdo.

Por tanto, deducimos que no existe A^{-1}.

PARA PROFUNDIZAR

58 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

b) Debe existir A^{-1}.

59 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a + 2 \\ a - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 1$, $ran\ (M) = 2$
- Si $a = -2$, $\text{ran (M)} = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $\text{ran (M)} = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 0$, $ran\ (A) = 2$
- *Si* $a \neq 0$, $ran\ (A) = 3$

60 **Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.**

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

UNIDAD 3

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 76

Determinantes de orden 2

- **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 29 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solución: $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{aligned} 5x - 3y &= 8 \\ -10x + 6y &= -16 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$. *Solución:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{aligned} 4x + y &= 17 \\ 5x + 2y &= 19 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{aligned} 9x - 6y &= 7 \\ -6x + 4y &= 11 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$. *Incompatible*

e) $\left.\begin{aligned} 18x + 24y &= 6 \\ 15x + 20y &= 5 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solución: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{aligned} 3x + 11y &= 128 \\ 8x - 7y &= 46 \end{aligned}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$. *Solución:* $x = \frac{1402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

Página 77

Resolución de sistemas 2 × 2 mediante determinantes

- **Resuelve, aplicando $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ e $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = -19 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$

Comprueba, en cada caso, la solución que obtengas.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$

Por tanto: $x = \dfrac{156}{26} = 6; \quad y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$

Por tanto: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5; \quad y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320;$

Por tanto: $x = \dfrac{192}{64} = 3; \quad y = \dfrac{-320}{64} = -5$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = -19 \\ 6x + 4y = 2 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 24; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} -19 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -72;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 120;$

Por tanto: $x = \dfrac{-72}{24} = -3; \quad y = \dfrac{120}{24} = 5$

Página 79

1. Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

a) $3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 17$

b) 0, porque la segunda fila es proporcional a la primera.

c) 0, porque la segunda fila solo tiene ceros.

d) $7 \cdot (-2) = -14$

2. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$

a) $a \cdot d - b \cdot c$

b) $a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2(b - a)$

c) 0, porque la segunda fila solo tiene ceros.

d) $a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c = 0$, o también obsérvese que la segunda fila es proporcional a la primera.

Página 80

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2. Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 82

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª (3ª = (–2) · 1ª) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras (3ª = 1ª + 10 · 2ª) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos (1ª = 10 · 2ª + 3ª) (propiedad 9).

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Página 83

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 84

1. Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

También podríamos haber observado que la 4ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

Página 85

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4ª fila es la suma de la 2ª y la 3ª. Por tanto, $ran\ (A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $ran\ (C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, segunda y cuarta fila son linealmente independientes.

La tercera fila es la suma de las dos primeras. Luego, $ran\ (D) = 3$.

Página 87

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

$|A'| = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2$

El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$

El sistema es *incompatible*.

2. Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x+\phantom{3y-{}}z=2 \\ 2y-z=0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x+\phantom{3y-{}}z=2 \\ 2y-z=5 \end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{r} x+\ \ y+2z\phantom{{}+4t}=\ \ 7 \\ 3x-\ \ y+\phantom{2z+{}}4t=\ \ 1 \\ x-3y-4z+4t=-13 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x+\phantom{3y-{}}z=2 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\} \quad A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\2&0&1&2\\0&2&-1&0\end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&0\end{vmatrix}=-6\neq 0 \ \text{ y } \ |A|=0 \ \rightarrow \ ran\,(A)=2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}=0 \ \ \text{(pues la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \ \rightarrow ran\,(A')=2=ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

OBSERVACIÓN: Como la 4ª columna de A' y la 1ª son iguales, necesariamente $ran\,(A')=ran\,(A)$; es decir, el sistema es compatible.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x+\phantom{3y-{}}z=2 \\ 2y-z=5 \end{array}\right\} \quad A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&1\\0&2&-1\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\2&0&1&2\\0&2&-1&5\end{pmatrix}$$

Sabemos que $ran\,(A)=2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&0&2\\0&2&5\end{vmatrix}=-30\neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A')=3\neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+2z\phantom{{}+4t}=\ \ 7 \\ 3x-\ \ y+\phantom{2z+{}}4t=\ \ 1 \\ x-3y-4z+4t=-13 \end{array}\right\} \quad A=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\3&-1&0&4\\1&-3&-4&4\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1&1&2&0&7\\3&-1&0&4&1\\1&-3&-4&4&-13\end{pmatrix}$$

Sabemos que $ran\,(A)=2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix}1&1&7\\3&-1&1\\1&-3&-13\end{vmatrix}=0 \ \rightarrow \ ran\,(A')=2=ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

Página 88

1. Resuelve mediante la regla de Cramer:

a) $$\left\{\begin{array}{l} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

2. Resuelve aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left\{\begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{l} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, *ran* $(A) < 3$.

Como hay menores de orden 2 distintos de cero, *ran* $(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad ran\,(A') = 3$$

Por tanto, este sistema es *incompatible*.

Página 89

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \mathbf{x - \ \ y + 3z = 1} \\ \mathbf{3x - \ \ y + 2z = 3} \\ \mathbf{\ \ \ \ -2y + 7z = 0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x - \ \ y + 3z = 1} \\ \mathbf{3x - \ \ y + 2z = 3} \\ \mathbf{\ \ \ \ -2y + 7z = 10} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ \ y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \text{ y } \ |A| = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \ \rightarrow \ ran\,(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} x - y = 1 - 3z & \rightarrow \ x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z & \rightarrow \ y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solución: $x = 1 + \lambda, \ \ y = 7\lambda, \ \ z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 3z = 1 \\ 3x - \ \ y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabemos, por el apartado a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

4. Resuelve estos sistemas:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{rl} x + y &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 4 \\ 5x - y + z &= 6 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{rl} 3x + 4y &= 4 \\ 2x + 6y &= 23 \\ -2x + 3y &= 1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rl} x + y &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 4 \\ 5x - y + z &= 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

b) $$\left.\begin{array}{rl} 3x + 4y &= 4 \\ 2x + 6y &= 23 \\ -2x + 3y &= 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 90

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{rl} 3x - 5y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{rl} x + 11y - 4z &= 0 \\ -2x + 4y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 2x - 16y + 5z &= 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rl} 3x - 5y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Por tanto, *ran* $(A) = 3 =$ *nº incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \to ran\,(A) = 3 = n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

2. Resuelve estos sistemas:

a) $$\left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran\,(A) = 2$

Podemos suprimir la 3ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -2z \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } x = -\lambda, \ y = -2\lambda, \ z = \lambda$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z \qquad = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \to ran\,(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad = 2t \\ x - y + z = t \end{array}\right\} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solución: $x = \lambda, \ y = -\lambda, \ z = 0, \ t = 2\lambda$

Página 92

1. Discute y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{array}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} \;\; \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -3/4$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} \;\; \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ k \\ kx - \ \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$ $\underbrace{\qquad}_{A}$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $k = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = ran\ (A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \ \text{Sumando: } 3x = 15 \ \rightarrow \ x = 5; \ \ y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5$, $y = -3$

- **Si $k = 5/3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = ran\ (A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \ \text{Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \ \rightarrow \ x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{2}$, $y = \dfrac{-23}{6}$

- **Si $k \neq 2$ y $k \neq 5/3$** $\rightarrow$ $ran\ (A') = 3 \neq ran\ (A)$, el sistema es *incompatible.*

2. Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + \quad\quad y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- **Si $a = 0$,** queda:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \; y = \lambda$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \; y = 0$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$** → $ran(A) = 2$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \; y = 0$

Página 93

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = -3 \neq 0 \;\to\; \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -1 \neq 0 \;\to\; \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = 3 \neq 0 \;\to\; \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \to \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 100

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$ **b)** $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

a) Propiedad 8: si a una columna de una matriz se le suma la otra columna multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

b) Propiedad 5: si multiplicamos cada elemento de una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Propiedad 3: si permutamos las dos columnas, el determinante cambia de signo.

d) Propiedad 7: si una fila es suma de dos, el determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes.

2 **Si** $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$**, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes?**

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

a) –5, porque el determinante coincide con el de su matriz traspuesta.

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(2) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(2) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 7 \\ \cdots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \;\rightarrow\; x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

5 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

6 **¿Qué valor de *a* anula estos determinantes?**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$$= (a-1)(3+a) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -3 \end{array} \right.$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \;\rightarrow\; a^2 = 3 \left\langle \begin{array}{l} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{array} \right.$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$$

7 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{10} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

8 **Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \rightarrow$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \rightarrow$ existe C^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(C) \longrightarrow (Adj\,(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \rightarrow$ existe D^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(D) \longrightarrow (Adj\,(D))^t \longrightarrow \frac{1}{|D|}(Adj\,(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

9 S **Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenemos:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1}:

$$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$|A| = 1 \neq 0 \;\to\;$ existe A^{-1}

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $B \cdot A^{-1}$:

$$(1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6 \quad -7)$$

La solución es: $X = (6 \quad -7)$

10 **Estudia el rango de las siguientes matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El rango es 3 ya que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$

b) 4ª fila = 2ª fila – 1ª fila

3ª fila = 1ª fila + 2ª fila

Por tanto: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\to\;$ El rango es 2

11 **Resuelve aplicando la regla de Cramer:**

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \; y = -5, \; z = 7$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right) \rightarrow |A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \; y = 2, \; z = -2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto: $x = \dfrac{-1}{3}, \; y = \dfrac{2}{3}, \; z = \dfrac{-1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right.\right)$. Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \;\; \textit{Soluciones:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

Página 101

12 **S** **Estudia la compatibilidad de estos sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y = 6} \\ \boldsymbol{4x + y = -1} \\ \boldsymbol{5x + 2y = -5} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y - z = -2} \\ \boldsymbol{2x - y - 3z = -3} \\ \boldsymbol{x - 2y - 2z = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} 6 \\ -1 \\ -5 \end{array}\right.\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 2$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \;\; \to \;\; x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\Bigg\} \; \textit{Solución:} \; (1, -5)$$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}}_{A} \left|\; \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 0 \end{array}\right.\right)$.

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\; \to \;\; ran\ (A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\; \to \;\; ran\ (A') = 2 \neq ran\ (A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

13
S **Calcula la inversa de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

PARA RESOLVER

14 **Prueba, sin desarrollar, que estos determinantes son cero:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

☛ ***a) Hay dos líneas proporcionales. b) Suma la 3ª fila a la 2ª.***

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es –5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \ \text{(pues tiene dos filas iguales).}$$

15 **Prueba que el determinante a) es múltiplo de 3 y el b) múltiplo de 5:**

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

☛ ***a) Suma la 1ª y 2ª columnas a la 3ª.***

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \;\rightarrow\; \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \;\rightarrow\; \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

16 **¿Para qué valores de *a* se anula este determinante?**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \;\rightarrow\; a = 2$$

17 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$$

- **Si $a = 2$** → Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** → $|A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = \ \ 1 \end{cases}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 3$

18 **Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran\ (A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $$\left.\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: $ran\ (A) = 3 =$ *nº incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

19 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{aligned} x + y + z - t &= 0\\ 2x + y - z + 2t &= 0\\ 3x + 2y + t &= 0 \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} x + y &= 0\\ x + z &= 0\\ x + t &= 0\\ y + z + t &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z - t &= 0\\ 2x + y - z + 2t &= 0\\ 3x + 2y + t &= 0 \end{aligned}\right\}$

Observamos que la 3ª ecuación es la suma de las dos primeras, por lo tanto la eliminamos. El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - t &= 0\\ 2x + y - z + 2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Pasamos al segundo miembro dos de las incógnitas para resolverlo por Cramer, teniendo que ser el determinante de la matriz de los coeficientes que quedan en el primer miembro no nulo:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -z + t\\ 2x + y &= z - 2t \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z + t & 1\\ z - 2t & 1 \end{vmatrix} = -2z + 3t; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -z + t\\ 1 & z - 2t \end{vmatrix} = 3z - 4t$$

Solución: $x = 2\lambda - 3\mu, \ \ y = -3\lambda + 4\mu, \ \ z = \lambda, \ \ t = \mu$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0\\ x + z &= 0\\ x + t &= 0\\ y + z + t &= 0 \end{aligned}\right\}$

Se trata de un sistema homogéneo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 4 = n^{\underline{o}} \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial, $x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ t = 0$.

20 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 5\\ x + 2y &= 1\\ ax + y &= 3 \end{aligned}\right.$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5\\ x + 2y &= 1\\ ax + y &= 3 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\ (A) = ran\ (A')$ → Sistema *compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\ (A) \neq ran\ (A')$ → Sistema *incompatible.*

21 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\left\{\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + 3y - z &= -1 \\ x - y - z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to A \cdot X = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \to X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (A) \longrightarrow (Adj\ (A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = -2$, $y = -4$

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= -1 \\ x - y - z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \to A \cdot X = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \to$$

$$\to X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = -20 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (A) \longrightarrow (Adj\ (A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{2}{5}, \ y = 0, \ z = \frac{7}{5}$

22 Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x - y - 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{3x \quad\quad + z = 3} \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x + \ y + \ z = \ 2} \\ \boldsymbol{x - 2y - 7z = \ 0} \\ \boldsymbol{\quad\ y + \ z = -1} \\ \boldsymbol{2x + 3y \quad\quad = \ 0} \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\quad + z = 3 \end{array} \right\} \ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$, $\underbrace{\quad\quad}_{A}$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.* Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\quad + z = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad\ = 3 - z \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3 - z}{3} = 1 - \frac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \frac{7z}{3} \end{array} \right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda, \ y = -1 - 7\lambda, \ z = 3\lambda$

b) $\left. \begin{array}{l} x + \ y + \ z = \ 2 \\ x - 2y - 7z = \ 0 \\ \quad\ y + \ z = -1 \\ 2x + 3y \quad\quad = \ 0 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$, $\underbrace{\quad\quad}_{A}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3, \; y = -2, \; z = 1$

23 **S** **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$, donde $\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A}$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}$$

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado*.

b) $$\left.\begin{array}{rl} x + y + z &= m-1 \\ 2x + y + mz &= m \\ x + my + z &= 1\end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&m-1\\2&1&m&m\\1&m&1&1\end{array}\right), \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&m\\1&m&1\end{pmatrix}}_{A}$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \left\langle \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

- **Si $\boldsymbol{m = 1}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right) \Big] \text{ Contradictorias } \;\rightarrow\; \text{El sistema es } \textit{incompatible.}$$

- **Si $\boldsymbol{m = 2}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{array}\right). \text{ Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales.}$$

Como $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* (A') = *ran* $(A) = 2 <$ *nº incógnitas*

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $\boldsymbol{m \neq 1}$ y $\boldsymbol{m \neq 2}$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado*.

c) $$\left.\begin{array}{rl} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + my + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 2\end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\1&m&1&0\\2&3&4&2\end{array}\right), \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&m&1\\2&3&4\end{pmatrix}}_{A}$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; m = 1$$

- **Si $\boldsymbol{m = 1}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\1&1&1&0\\2&3&4&2\end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} = -1 \text{ y } \begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&3&2\end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

entonces: *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. Sistema *incompatible*.

- **Si $\boldsymbol{m \neq 1}$**, queda: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \to \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$$

- **Si $m = 3$**, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- **Si $m = 1$**, queda:

  $$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right).$$ La 1ª y la 3ª fila son iguales.

  Además $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2 < *nº incógnitas.*

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado.*

24
S **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro *a*:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (*A*) = *ran* (*A'*).

$$|A| = -5a - 25 = 0 \quad \to \quad a = -5$$

- **Si $a = -5$** → Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = 2

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -5$** → Solo tiene la solución trivial (0, 0, 0).

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (A) = *ran* (A').

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** → Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = 2

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 3. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

Página 102

25 S **a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA.**

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rango} = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rango} = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la tercera ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = -z \\ 2x + y = -z \end{array}\right\} \rightarrow x = z,\; y = -3z$$

La solución es: $x = \lambda,\; y = -3\lambda,\; z = \lambda$

c) Como el rango = 2 = *nº de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \; y = 0$

26 **S** **Dadas** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**:**

a) Halla A^{-1} **y** B^{-1}**.**

b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$**.**

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$**.**

a) $|A| = 2 \neq 0 \;\to\;$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\quad\quad} Adj\,(A) \xrightarrow{\quad\quad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\quad\quad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \;\to\;$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\quad\quad} Adj\,(B) \xrightarrow{\quad\quad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\quad\quad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $|A \cdot B| = 4 \neq 0 \;\to\;$ Existe $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\quad\quad} Adj\,(AB) \xrightarrow{\quad\quad} (Adj\,(AB))^t \xrightarrow{\quad\quad} \frac{1}{|AB|}(Adj\,(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

27 S **Dada** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, determina la matriz** B **que verifica** $B - I = A^t A^{-1}$**.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|B| = A^t \cdot A^{-1} + I$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28 S **Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso** $a = 4$**:**

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix}$$

$|A| = a(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, \; a = 1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $ran\,(A) = 3 = ran\,(A')$.

  El sistema es *compatible determinado*. Son solución:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

  La solución es: $x = \dfrac{a^2 - a - 1}{a - 1}$, $y = \dfrac{-1}{a - 1}$, $z = \dfrac{1}{a - 1}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2 \\[2mm] A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 2 \end{array}\right\}$$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\}$$

  Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = \lambda$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2 \\[2mm] A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 3 \end{array}\right\}$$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 4$, se trata de un sistema *compatible determinado*, resuelto en el primer caso, con solución:

$$x \frac{11}{3}, \quad y = \frac{-1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}$$

29 S **Sea** $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para que los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} Adj\,(A) \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

30 S **Dadas las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

$AB + CX = D \rightarrow CX = D - AB \rightarrow X = C^{-1} \cdot (D - AB)$

- Calculamos C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \rightarrow$ existe C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} Adj\,(C) \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} (Adj\,(C))^t \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31 **S** **Halla X tal que $3AX = B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3AX = B \;\rightarrow\; X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

32 **S** **Resuelve la ecuación $A\,X\,B = C$ siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$AXB = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \;\rightarrow\;$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33 **S** **Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $A\,X\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

☛ ***Multiplica dos veces por A^{-1}, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

34 **S** **Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:**

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación *no* tiene solución.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

35 **Resuelve la ecuación:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

☛ ***Como*** $\boldsymbol{AX + B = C \to X = A^{-1}(C - B)}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$ Calculamos A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \;\to\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \;\to\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

36 **Resuelve la ecuación:**

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$X \cdot A - B = C \;\rightarrow\; X \cdot A = C + B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = (C+B) \cdot A^{-1} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = (C+B) \cdot A^{-1}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

37 **¿Existe algún valor de a para el cual este sistema tenga infinitas soluciones?**

$$\left\{\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= -4 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= -4 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \;\rightarrow\; a = -3$$

- **Si $a = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

ran $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = -3$** $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado.*

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

Página 103

38 **Prueba, sin desarrollar el determinante, que:**

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

☛ ***Resta la primera fila a la segunda y a la tercera.***

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

39 **Calcula:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pues es el determinante de una matriz diagonal y los elementos de la diagonal son 1.

40 **Obtén en función de a, b, c el valor de:** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

☛ ***Resta la tercera columna a las dos primeras.***

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^{\underline{a}}-3^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-3^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix} = abc$$

41 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = \mathbf{5}$**, calcula:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a}+\mathbf{7} & \boldsymbol{b}+\mathbf{7} & \boldsymbol{c}+\mathbf{7} \\ \boldsymbol{x}/\mathbf{2} & \boldsymbol{y}/\mathbf{2} & \boldsymbol{z}/\mathbf{2} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

42 **Calcula los valores de** $\boldsymbol{a}$ **para los cuales el rango de** $\boldsymbol{A}$ **es menor que 3:**

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ **¿Puede ser** ***ran*** **(*A*) = 1 para algún valor de** $\boldsymbol{a}$**?**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

El rango de A es menor que 3 si $|A| = 0$.

$|A| = -(a-1)(a-3)$

$|A| = 0$ si $a = 1$ o $a = 3$

Por tanto: si $a = 1$ o $a = 3$ → $ran\,(A) < 3$

- El $ran\ (A)$ no puede ser 1, porque si nos fijamos en el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -a \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$ independientemente del valor de a.

CUESTIONES TEÓRICAS

43 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?**

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial (0, 0, 0).

44 **En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0.**

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $ran\ (A) = ran\ (A') < n^{\underline{o}}\ incógnitas$.

b) No, pues al ser $ran\ (A) < n^{\underline{o}}\ incógnitas$, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2º miembro las incógnitas que sea necesario.

45 **¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?**

La condición necesaria y suficiente para que una matriz, A, cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

46 **Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?**

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \to \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

47 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1.**

¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

48 **¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?**

$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

PARA PROFUNDIZAR

49 **a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?**

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right.$$

b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = -2 \\ y + z = 2 \end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$, $\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow\ \mathit{ran}\ (A) = 3 = n^{\underline{o}}\ \mathit{incógnitas}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \xrightarrow[\begin{subarray}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{subarray}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$\rightarrow\ a = 14$

Por tanto, $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a = 14} \ \rightarrow\ \mathit{ran}\ (A) = \mathit{ran}\ (A') = 3 \ \rightarrow\ \textit{Compatible determinado} \\ \bullet\ \textbf{Si } \boldsymbol{a \neq 14} \ \rightarrow\ \mathit{ran}\ (A) = 3 \neq \mathit{ran}\ (A') = 4 \ \rightarrow\ \textit{Incompatible} \end{array}\right.$

b) *No*, por lo que hemos visto en el apartado anterior.

50 **Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3&x&x&x\\x&3&x&x\\x&x&3&x\\x&x&x&3\end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix}3+3x&x&x&x\\3+3x&3&x&x\\3+3x&x&3&x\\3+3x&x&x&3\end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x)\begin{vmatrix}1&x&x&x\\1&3&x&x\\1&x&3&x\\1&x&x&3\end{vmatrix} = \begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}-1^{a}\\3^{a}-1^{a}\\4^{a}-1^{a}\end{array}$$

$$(3+3x)\begin{vmatrix}1&x&x&x\\0&3-x&0&0\\0&0&3-x&0\\0&0&0&3-x\end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x)\begin{vmatrix}3-x&0&0\\0&3-x&0\\0&0&3-x\end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)\,(3-x)^3 = 3(1+x)\,(x-3)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(3 + 3x)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

51 **Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros que contienen:**

a) $\left\{\begin{array}{l}x-3y+z=a\\x\qquad\ \ -z=b\\x\qquad\ \ +z=c\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l}x-\ y+\ \ z=2\\2x+3y-2z=-8\\4x+\ y+az=b\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l}x-3y+z=a\\x\qquad\ \ -z=b\\x\qquad\ \ +z=c\end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-3&1\\1&0&-1\\1&0&1\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}\right)$

$|A| = 6 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* → El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

a) $\left.\begin{array}{l}x-\ y+\ \ z=\ \ 2\\2x+3y-2z=-8\\4x+\ y+az=b\end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&1\\2&3&-2\\4&1&a\end{matrix}}&\begin{matrix}2\\-8\\b\end{matrix}\end{array}\right)\quad |A| = 5a = 0 \ \to\ a = 0$

- **Si** $\boldsymbol{a = 0}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&1\\2&3&-2\\4&1&0\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}2\\-8\\b\end{matrix}\end{array}\right);\ \begin{vmatrix}1&-1\\2&3\end{vmatrix} = 5 \neq 0;\ \begin{vmatrix}1&-1&2\\2&3&-8\\4&1&b\end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \ \to\ b = -4$$

- **Si** $\boldsymbol{a = 0}$ **y** $\boldsymbol{b = -4}$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a = 0}$ **y** $\boldsymbol{b \neq -4}$ → *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq 0}$ → *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

UNIDAD 4

PROGRAMACIÓN LINEAL

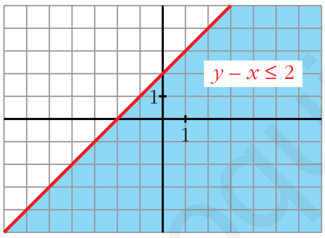
Página 104

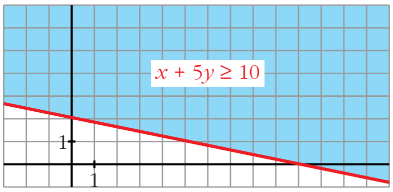
Problema 1

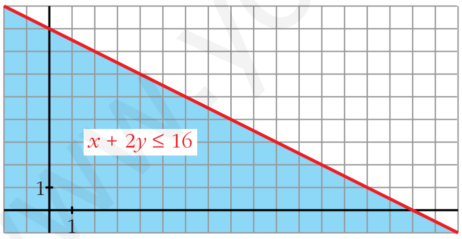
- **Para representar $y - x \leq 2$, representa la recta $y - x = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.**

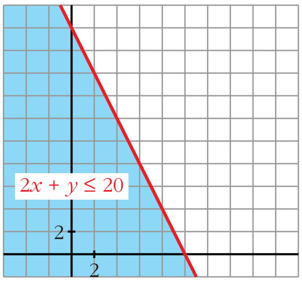
  Análogamente, representa:

  $x + 5y \geq 10$ $\quad$ $x + 2y \leq 16$ $\quad$ $2x + y \leq 20$









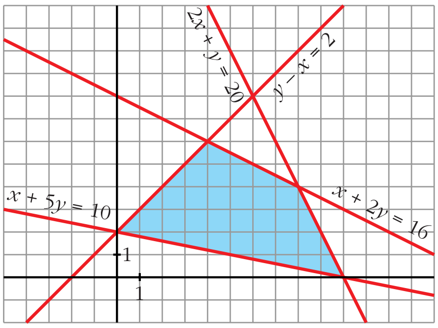
Página 105

Problema 2

- **Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:**

  $y - x \leq 2$; $x + 5y \geq 10$;

  $x + 2y \leq 16$; $2x + y \leq 20$



Problema 3

- ***Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. Dispone de 500 € y en su furgoneta caben 700 kg.***

  En el mercado hay naranjas de tipo A a 0,5 € y de tipo B a 0,8 €. Él las podrá vender a 0,58 € las de tipo A y a 0,9 € las de tipo B, y se cuestiona cuántos kilogramos de cada tipo debería comprar para conseguir que los beneficios sean lo más altos posible.

  a) Si se gasta todo el dinero en naranjas de tipo B, ¿cuántos kilos le caben aún en su furgoneta?

  b) Si llena la furgoneta con naranjas de tipo A, ¿cuánto dinero le sobra? ¿Cuál será el beneficio?

  c) ¿Cuál será el beneficio si compra 400 kg de naranjas de tipo A y 300 kg de tipo B?

a) 500 : 0,8 = 625 kg de naranjas de tipo *B* puede comprar.

700 – 625 = 75 kg le caben aún en su furgoneta.

b) 700 · 0,5 = 350 € se gasta.

500 – 350 = 150 € le sobran.

Beneficio = 700 · (0,58 – 0,5) = 56 €

c) 400 · (0,58 – 0,5) + 300(0,9 – 0,8) = 62 € de beneficio.

Página 118

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Minimiza la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las siguientes restricciones:

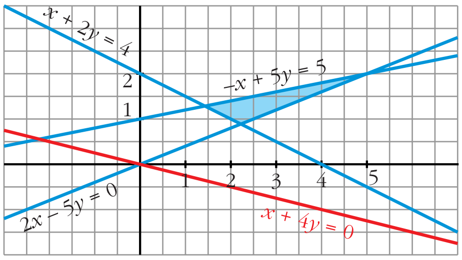
$$\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 & \to \quad x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \\ -x + 5y = 5 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 8y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $2x + 8y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 4y = 0$



- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{9} \\ y = \dfrac{8}{9} \end{array}\right\} \quad \text{Punto } \left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

- El mínimo vale $f\left(\dfrac{20}{9}, \dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{104}{9}$.

2 **Maximiza y minimiza la función $p = x + 2y - 3$ con las siguientes restricciones:**

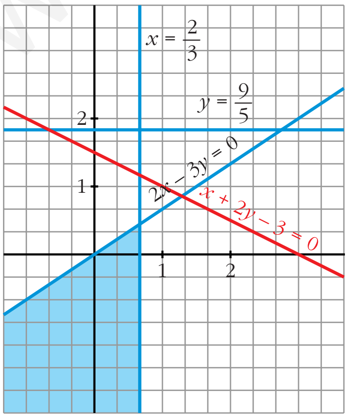
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 5y \leq 9 \\ 3x \leq 2 \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5y = 9 \\ 3x = 2 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $p = x + 2y - 3$, dibujando la recta $x + 2y - 3 = 0$:



La restricción $5y \leq 9$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

- El **máximo** se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{9} \end{array}\right\} \quad \text{Punto } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

El máximo es $p\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9} - 3 = \dfrac{-13}{9}$

- No hay **mínimo**.

3 **Maximiza la función $z = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:**

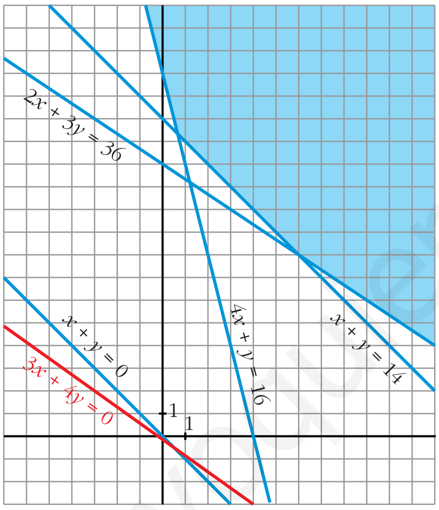
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 32 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 36 & \\ 2x + 2y = 28 & \rightarrow \quad x + y = 14 \\ 8x + 2y = 32 & \rightarrow \quad 4x + y = 16 \\ \;\; x + \;\; y = 0 & \end{cases}$$

y obtenemos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 3x + 4y$, dibujando la recta $3x + 4y = 0$:



La restricción $x + y \geq 0$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

- No hay máximo. La función $3x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

4 **En la región determinada por $3x + y \geq 5$, $x - y \leq 0$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en que la función $f(x, y) = 2x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?**

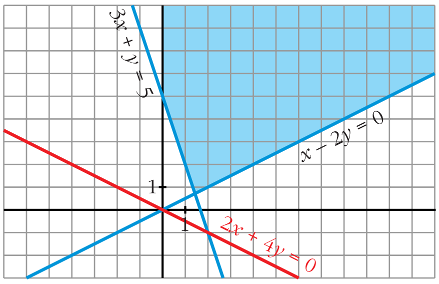
- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + \;\; y = 5 \\ \;\; x - 2y = 0 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 4y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas:

$$2x + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0$$



- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas.

$$\left.\begin{aligned} 3x + \ \ y &= 5 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{10}{7} \\ y &= \frac{5}{7} \end{aligned}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

- No hay máximo. La función $2x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

⑤ **Calcula los puntos del recinto** $\left\{\begin{aligned} &\mathbf{2x + y \geq 20} \\ &\mathbf{2x - y \leq 20} \\ &\mathbf{0 \leq y \leq 20} \end{aligned}\right.$ **que hacen mínima o máxima la función** $\boldsymbol{z = 2x + y}$**. ¿Cuántas soluciones hay?**

- Representamos las rectas $\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 20 \\ 2x - y &= 20 \\ y &= 20 \\ y &= \ \ 0 \end{aligned}\right.$

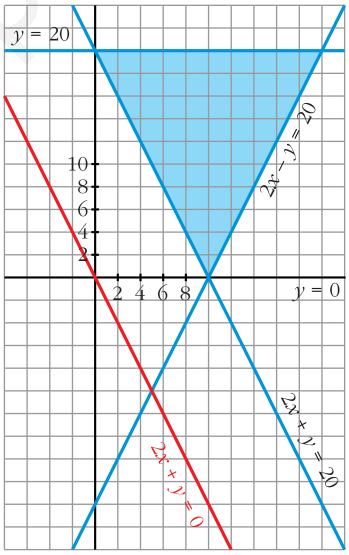
  y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + y$, dibujando la recta $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto:

- Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $y = 20 - 2x$ con $0 \leq x \leq 10$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \text{ Punto } (20, 20)$$



⑥ **¿Es posible maximizar y minimizar la función** $\boldsymbol{z = x + y + 1}$ **sujeta a estas restricciones?**

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{3x + 4y - 13 \geq 0} \\ &\mathbf{2x - 3y - 3 \leq 0} \\ &\mathbf{5x - y - 27 \leq 0} \end{aligned}\right.$$

- Representamos las rectas: $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 13 &= 0 \\ 2x - 3y - \ \ 3 &= 0 \\ 5x - \ \ y - 27 &= 0 \end{aligned}\right.$

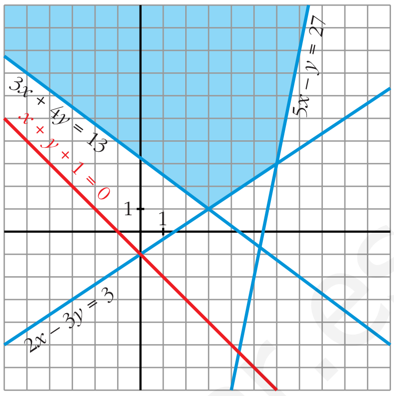
  y obtenemos el recinto que cumple las restricciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas

$$z = x + y + 1,$$

dibujando la recta $x + y + 1 = 0$.

- No existe máximo ni mínimo.



7 **Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 26$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S.**

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 18 \\ 2x + 3y = 26 \\ \ \ x + \ \ y = 16 \end{cases}$$

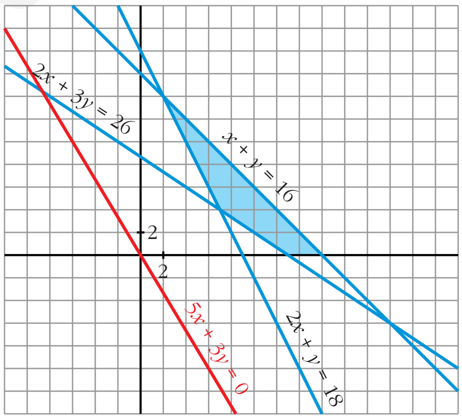
y obtenemos el triángulo T, y la región S.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y$, dibujando la recta:

$$5x + 3y = 0$$

- El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X; es decir, en el punto (16, 0).

- El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$



8 **Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:**

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

a) **Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.**

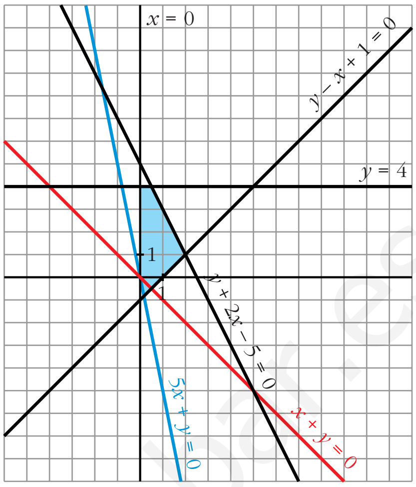
b) **Sobre el mismo recinto, haz máxima y mínima la función $G(x, y) = 5x + y$.**

- Representamos las rectas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right.$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = x + y$, dibujando la recta $x + y = 0$.
- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + y$, dibujando la recta $5x + y = 0$.



a) • $F(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 4 \end{array} \Bigg\} \text{ Punto } \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

- $F(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto de corte con el eje Y de la recta $y - x + 1 = 0$, es decir, en el punto $(0, -1)$.

b) • $G(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \text{ Punto } (2, 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 5 \cdot 2 + 1 = 11$

- $G(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto $(0, -1)$.

El mínimo vale $G(0, -1) = -1$.

9 S **Considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 8)$ y $(10, 3)$. Determina razonadamente:**

a) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

a) $f(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, 0) = 9 \\ f(2, 8) = 9 \\ f(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices $(0, 0)$ y $(2, 8)$.

b) $f(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,\ 0) = 12 \\ f(2,\ 8) = 28 \\ f(10,\ 3) = 55 \end{array}\right\} \quad \text{La función alcanza el máximo en el punto } (10,\ 3).$$

PARA RESOLVER

10 **Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa *A* le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa *B*, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo *A*, en la que le caben 120, y otra para los de tipo *B*, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo.**

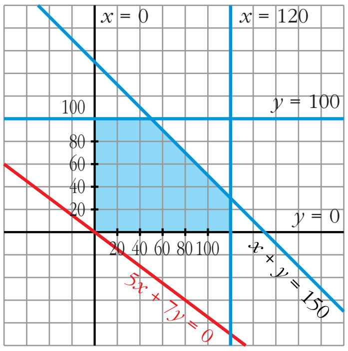
¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

- Llamamos x al nº de impresos de tipo *A* e y al nº de impresos de tipo *B*.

- Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 100 \\ x + y \le 150 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0{,}05x + 0{,}07y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.



- Representamos el recinto de restricciones y la recta $0{,}05x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 5x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}05x + 0{,}07y$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 100 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 100 \end{array}$$

Por tanto, habrá de repartir 50 impresos de tipo *A* y 100 de tipo *B*. El beneficio será de:

$$f(50,\ 100) = 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}07 \cdot 100 = 9{,}5 \text{ €}$$

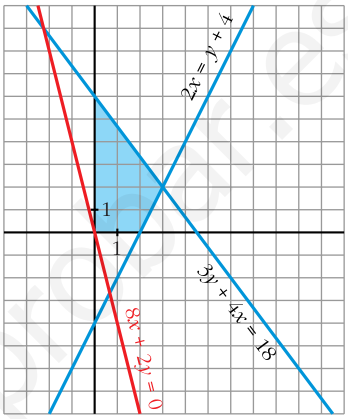
⑪ **Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además, el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades.**

Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 € y cada unidad de vinagre 2 €.

- Llamamos x a las unidades de vino e y a las de vinagre. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \\ 3y + 4x \leq 18 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 2y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.



- Representamos el recinto de restricciones y la recta $8x + 2y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 2y$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x = y + 4 \\ 3y + 4x = 18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, hay que producir 3 unidades de vino y 2 de vinagre.

Página 119

12 **Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 € y a no fumadores al precio de 60 €.**

Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg.

Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de plazas para fumadores e y al nº de plazas para no fumadores.

- Las restricciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3\,000 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y \leq 300 \end{array}\right.$$

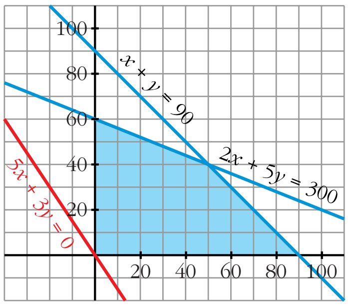
- Tenemos que maximizar la función:

  $f(x, y) = 100x + 60y$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $100x + 60y = 0 \rightarrow 5x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 100x + 60y$:

- El máximo se alcanza en el punto $(90, 0)$.

Por tanto, deben ofrecer 90 plazas para fumadores y ninguna para no fumadores, para obtener el máximo beneficio.



⑬ **Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal.**

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B.

¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

- Llamamos x al dinero invertido en acciones de tipo A (en decenas de miles de euros) e y al dinero invertido en acciones de tipo B (en decenas de miles de euros).

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 0 \le x \le 6 \\ y \ge 2 \\ x \ge y \end{cases}$$

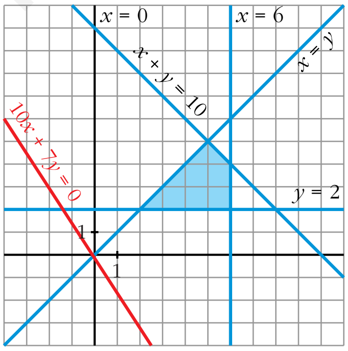
- La función que nos da el beneficio anual es: $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \;\rightarrow\; 10x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}1x + 0{,}07y$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 4 \end{array}$$

Por tanto, debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.



14 **Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg.**

Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €.

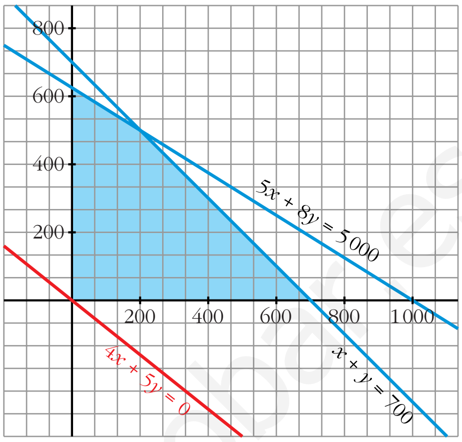
¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

- Llamamos x a los kg de naranjas del tipo A e y a los kg de naranjas del tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0;\ y \ge 0 \\ x + y \le 700 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \le 500 \quad \rightarrow \quad 5x + 8y \le 5\,000 \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0{,}08 + 0{,}1y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.



- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}08x + 0{,}1y = 0 \rightarrow$ $\rightarrow 8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}08x + 0{,}1y$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 700 \\ 5x + 8y = 5\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 500 \end{array}$$

Por tanto, deberá comprar 200 kg de naranjas del tipo *A* y 500 kg del tipo *B*.

15 **Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana.**

Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas.

Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

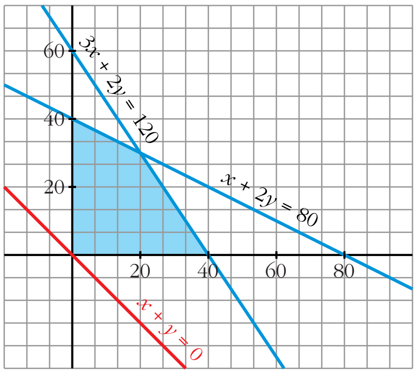
- Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumamos en una tabla la información:

	Nº	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	x	$3x$
VESTIDO	y	$2y$	$2y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$

- Las restricciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{array}\right.$$

- Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $f(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.



- Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = k(x + y)$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 30 \end{array}$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

16 **Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta:**

"Pague a solo 2,5 € el litro de aceite C y a 1,25 € el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D."

Disponemos de un máximo de 31,25 €.

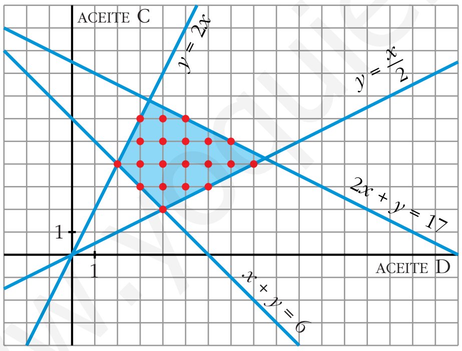
a) Representa gráficamente los modos existentes de acogernos a la oferta.

b) Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?

- Llamamos x al nº de litros de aceite D, e y al nº de litros de aceite C.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ \ y \geq 0 \\ x + y \geq 6 \\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ 2{,}5y + 1{,}25x \leq 21{,}25 \ \ \rightarrow \ \ 2y + x \leq 17 \\ x,\ y \ \text{enteros} \end{cases}$$

a) Representamos gráficamente el recinto:



Hay 20 puntos en el recinto (20 modos de acogernos a la oferta).

b) La mínima cantidad de D son 2 litros y la máxima de C son 8 litros.

17 **Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.**

Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0,3 € y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:

	A	B	C	D
P	**1**	**1**	**20**	**2**
Q	**1**	**3**	**7,5**	**0**

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

- Llamamos x al pienso de tipo P (en kg) e y al de tipo Q (en kg). Las restricciones son las siguientes:

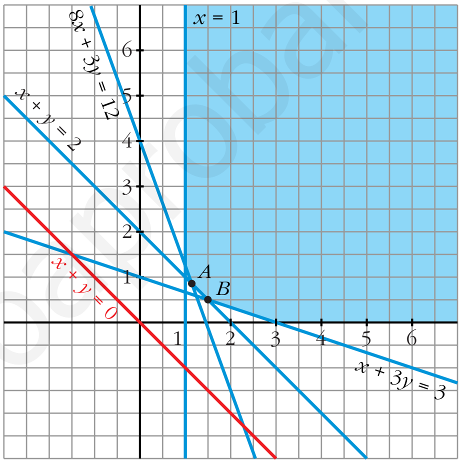
$$\begin{cases} x+y\geq 2\\ x+3y\geq 3\\ 20x+7,5y\geq 30 \quad\rightarrow\quad 8x+3y\geq 12\\ 2x\geq 2 \quad\rightarrow\quad x\geq 1\\ y\geq 0\end{cases}$$

- La función que nos da el gasto es: $f(x, y) = 0,3x + 0,3y = 0,3(x + y)$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta

$$0,3(x, y) = 0 \quad\rightarrow\quad x + y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0,3(x + y)$.



- Como la recta $x + y = 0$ es paralela a $x + y = 2$, el mínimo se alcanza en cualquier punto de la recta $x + y = 2$ comprendido entre A y B. Hallamos las coordenadas de A y de B:

A: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2\\ 8x+3y=12\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{6}{5}\\[2mm] y=\dfrac{4}{5}\end{array}\right\}\quad A\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

B: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2\\ x+3y=3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

18 **Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.**

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 €, y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

- Llamamos x al nº de tartas de tipo T_1 e y al nº de tartas de tipo T_2.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

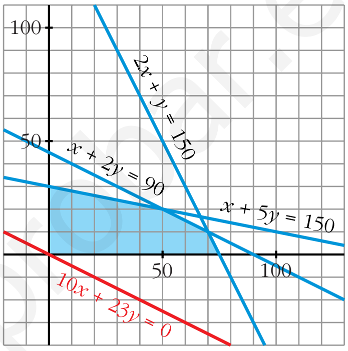
a) • La función que nos da los ingresos es $f(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 23y$:

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 20 \end{array}$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2.



b) • Si llamamos k al precio de la tarta de tipo T_2, los ingresos vendrían dados por la función $g(x, y) = 15x + ky$.

- Si la función $g(x, y)$ alcanza el máximo en el punto (60, 15), que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + ky = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + ky = 0 \quad \rightarrow \quad \text{pendiente} = -\dfrac{15}{k} \\ x + 2y = 90 \quad \rightarrow \quad \text{pendiente} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{-15}{k} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k = 30$$

Por tanto, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

Página 120

⑲ Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas —de cortar, coser y teñir— se emplean en la producción.

Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, una hora y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, doce y la de cortar, siete.

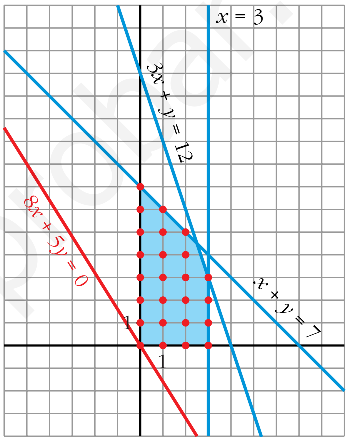
Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón.

¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

- Llamamos x al nº de chaquetas e y al nº de pantalones.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases} \qquad x, \ y \ \text{enteros}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 5y$. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 5y$:
- El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.



20 **S** **Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kg son los que aparecen en la tabla:**

	A	**B**
P_1	**2**	**6**
P_2	**4**	**3**

Si el kilogramo de pienso P_1 vale 0,4 € y el del P_2 0,6 €, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

- Llamamos x a los kg de pienso P_1 e y a los kg de pienso P_2.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \quad \rightarrow \quad x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \quad \rightarrow \quad 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

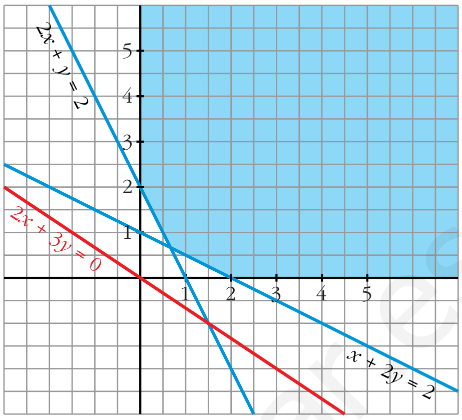
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$0{,}4x + 0{,}6y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}4x + 0{,}6y$.

- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \;\; y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2.

21 S **Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos.**

Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.

El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico.

¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de electricistas e y al de mecánicos.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x \leq 30; \quad y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, \; y \;\; \text{enteros} \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es:

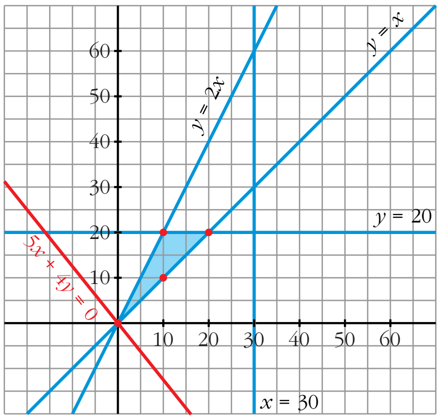
$$f(x, y) = 150x + 120y$$

Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$150x + 120y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 4y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 150x + 120y$.



- Solo hay 4 puntos en el conjunto de restricciones: (0, 0), (10, 10), (10, 20) y (20, 20). El máximo se alcanza en el punto (20, 20). Por tanto, deben elegirse 20 electricistas y 20 mecánicos.

22 S **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.**

La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8 €.

La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €.

En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?

Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

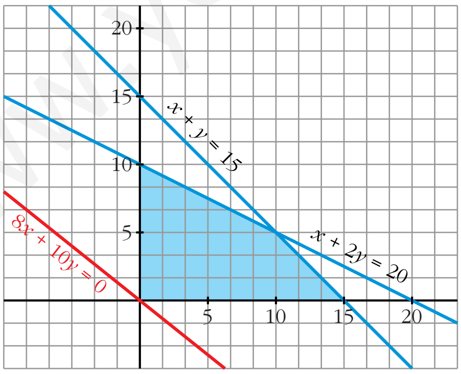
a) • Llamamos x al nº de tartas de tipo Imperial e y al nº de tartas de Lima.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x, \quad y \quad \text{enteros} \\ 0{,}5x + y \leq 10 \quad \rightarrow \quad x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 15 \end{cases}$$

- La función que nos da los ingresos por ventas es $f(x, y) = 8x + 10y$. Tendremos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 10y$:



(Puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto)

b) El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x + 2y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas Imperiales y 5 de Lima.

23
S

Un orfebre fabrica dos tipos de joyas.

La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €.

La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de unidades de tipo A e y al nº de unidades de tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

- La función que tenemos que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es: $f(x, y) = 25x + 30y$

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

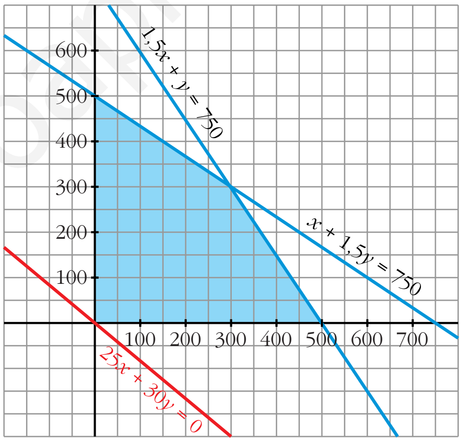
$$25x + 30y = 0 \ \rightarrow \ 5x + 6y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 25x + 30y$.

- El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5x + \quad y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 300 \\ y = 300 \end{array}$$

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.



24
S

Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas.

Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes.

El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A.

El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y de B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B.

El primer proveedor vende cada lote a 10 € y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.

¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?

- Llamamos x a los lotes del primer proveedor e y a los lotes del segundo proveedor.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 10x + 20y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

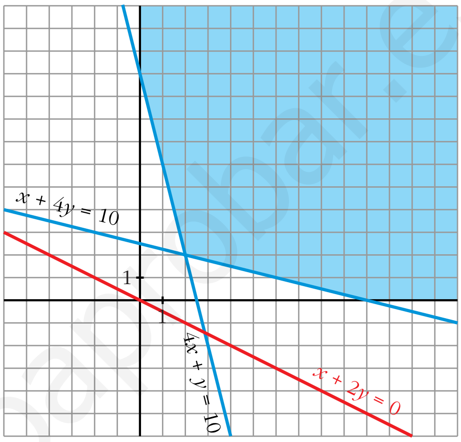
$$10x + 20y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 20y$:

- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 10 \\ 4x + y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

Por tanto, hemos de comprar 2 lotes de cada uno de los dos tipos.



Página 121

25 **S** **Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,3 € y el de pienso compuesto 0,52 €, se pide:**

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero? Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

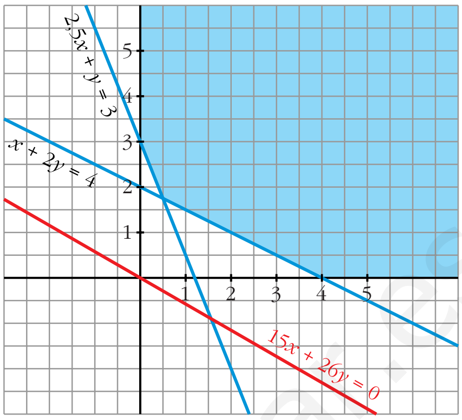
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto? Razona la respuesta.

a) • Llamamos x al nº de kg de maíz e y al nº de kg de pienso.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}52y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.



- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

  $0{,}3x + 0{,}52y = 0 \quad \to \quad 15x + 26y = 0,$

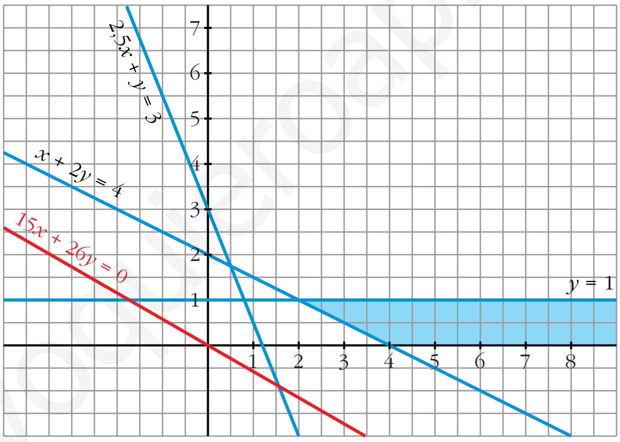
  que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}3x + 0{,}52y$.

- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2{,}5x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, debe utilizar $\frac{1}{2}$ kg de maíz y $\frac{7}{4}$ kg de pienso compuesto.

b) • Si añadimos la restricción $y \le 1$ a las anteriores, el recinto sería:



- El mínimo en este caso se alcanzaría en el punto de corte de:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

En este caso, debería utilizar 2 kg de maíz y 1 kg de pienso compuesto.

CUESTIONES TEÓRICAS

26 **¿Puede una función objetivo alcanzar su valor óptimo en un punto interior de la región factible? (Es decir, no situado en el borde).**

¿Puede ocurrir si se admiten valores decimales en x e y?

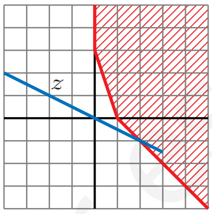
Sí puede alcanzar su valor óptimo en el interior cuando tratamos con valores enteros.

No puede ocurrir si los valores son decimales.

27 **¿Puede una función objetivo representarse por una recta horizontal? ¿Y por una vertical?**

Sí se puede representar por una recta horizontal, y también por una vertical.

28 **¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?**



No tiene máximo ni mínimo.

29 **Al representar las distintas restricciones de un problema, comprobamos que no hay ningún punto que cumpla todas a la vez (la región de validez es vacía). ¿Qué podemos afirmar sobre la solución del problema?**

La solución no existe, ya que no hay ningún punto que cumpla las restricciones.

PARA PROFUNDIZAR

30 **Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):**

	A	**B**	**C**
N	**6**	**15**	**3**
S	**4**	**20**	**5**

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

- Hacemos una tabla:

	A	B	C	
N	x	y	$11 - x - y$	11
S	$9 - x$	$10 - y$	$x + y - 4$	15
	9	10	7	26

- Las restricciones del problema son:

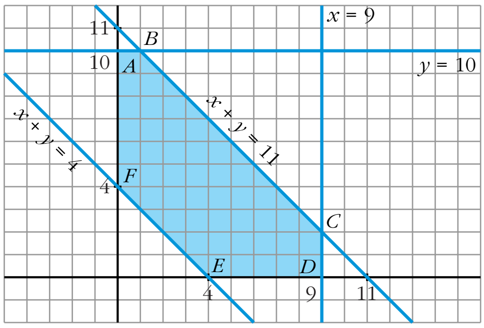
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 11 \\ x \leq 9 \\ y \leq 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(para que todos los datos de la tabla sean positivos o cero)} \\ (x, \ y \ \text{ enteros}) \end{array}$$

- La función que nos da el coste (en miles de euros) es:

$$f(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) =$$
$$= 4x - 3y + 249$$

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones:



(x, y enteros)

Los vértices del recinto son:

A (0, 10) *B* (1, 10)

C (9, 2) *D* (9, 0)

E (4, 0) *F* (0, 4)

- Hallamos $f(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$f(0, 10) = 219$ $f(1, 10) = 223$

$f(9, 2) = 279$ $f(9, 0) = 285$

$f(4, 0) = 265$ $f(0, 4) = 237$

- El mínimo se alcanza en el punto *A* (0, 10).

Por tanto, el reparto debe efectuarse así:

	A	B	C	
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
	9	10	7	26

31 **Un productor tabaquero posee 85 hectáreas de terreno para plantar dos variedades de tabacos VIRGINIA y PROCESADO. La variedad VIRGINIA tiene un rendimiento de 9 600 €/ha, pero necesita 3 h/ha de uso de maquinaria y 80 h/ha de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 30 ha por plantación.**

La variedad PROCESADO produce un rendimiento de 7 500 €/ha y utiliza 2 h/ha de uso de maquinaria y 60 h/ha de mano de obra.

La cooperativa local le ha asignado 190 h de uso de maquinaria, pero solo se dispone de 5 420 horas de mano de obra a 12 €/h. ¿Cuántas hectáreas debe dedicar a cada variedad de tabaco?

- Llamamos x a las hectáreas dedicadas a VIRGINIA e y a las dedicadas a PROCESADO.
- Las restricciones del problema son:

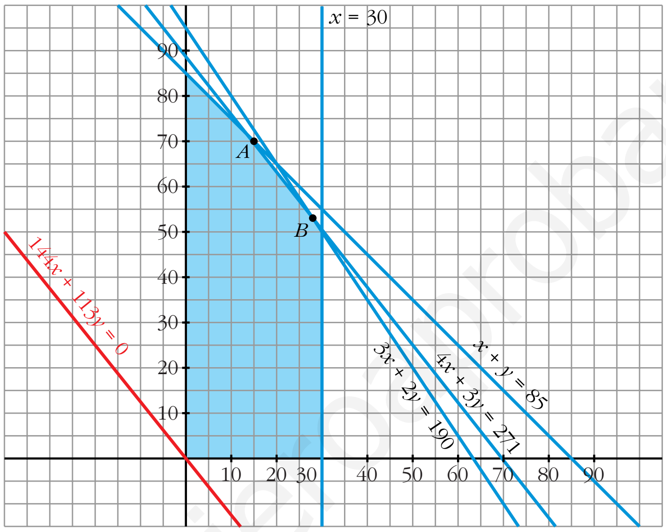
$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x \leq 30 \\ x + y \leq 85 \\ 3x + 2y \leq 190 \\ 80x + 60y \leq 5\,420 \quad \rightarrow \quad 4x + 3y \leq 271 \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio será igual al rendimiento menos el coste de la mano de obra:

  $$f(x, y) = (9\,600x - 960x) + (7\,500y - 720y) = 8\,640x + 6\,780y$$

  Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $8\,640x + 6\,780y = 0 \rightarrow$ $\rightarrow 144x + 113y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8\,640x + 6\,780y$:



- Hallamos los puntos A y B, y obtenemos el valor de $f(x, y)$ en cada uno de los dos:

  $$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ 85 \\ 4x + 3y = 271 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 16 \\ y = 69 \end{array}\right\} A(16, 69) \ \rightarrow \ f(16, 69) = 606\,060$$

  $$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 271 \\ 3x + 2y = 190 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 28 \\ y = 53 \end{array}\right\} B(28, 53) \ \rightarrow \ f(28, 53) = 601\,260$$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto A; es decir, debe dedicar 16 ha a VIRGINIA y 69 ha a PROCESADO.

32 **Don Elpidio decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA.**

El precio de cada acción es de 10 € cada una, y en ambos casos.

BLL dedica el 35% de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y el 20% al industrial.

ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25% al inmobiliario y el 45% al industrial.

D. Elpidio no quiere invertir más del 40% de su capital en el sector industrial ni más del 35% en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,2 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

- Llamamos x al nº de acciones que adquiere de BLL e y al nº de acciones que adquiere de ISSA.
- Hagamos una tabla que resuma la información que nos dan:

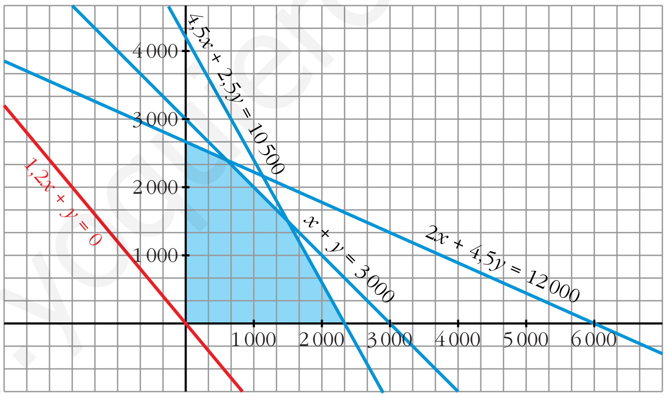
	Nº	PRECIO	SEGUROS	INMOBILIARIA	INDUSTRIAL
ACCIONES BBL	x	$10x$	$3{,}5x$	$4{,}5x$	$2x$
ACCIONES ISSA	y	$10y$	$3y$	$2{,}5y$	$4{,}5y$
TOTAL		$10x + 10y$	$3{,}5x + 3y$	$4{,}5x + 2{,}5y$	$2x + 4{,}5y$

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 3\,000 \\ 2x + 4{,}5y \leq 12\,000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

- La función que nos da los beneficios es $f(x, y) = 1{,}2x + y$. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $1{,}2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 1{,}2x + y$:

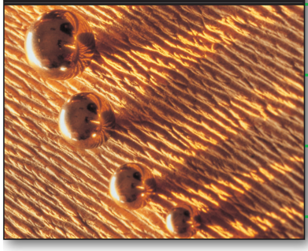


- El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = \quad 3\,000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y = 10\,500 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1\,500 \\ y = 1\,500 \end{array}$$

Por tanto, debe adquirir 1 500 acciones de cada una de las dos sociedades.

UNIDAD 5

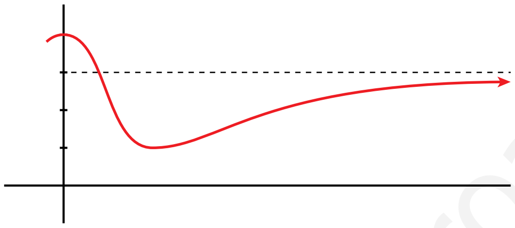


LÍMITES Y CONTINUIDAD

Páginas 130 y 131

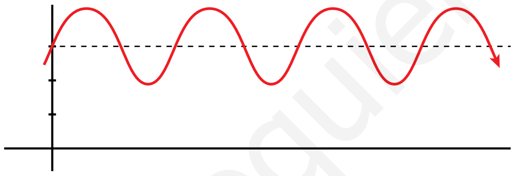
Describe las siguientes ramas:

a)



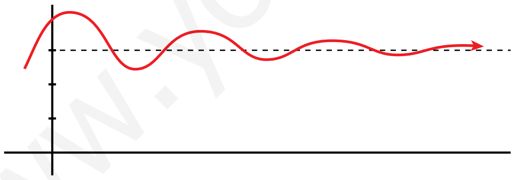
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

b)



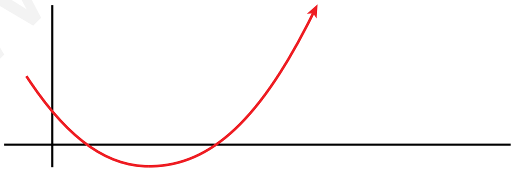
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ no existe}$$

c)



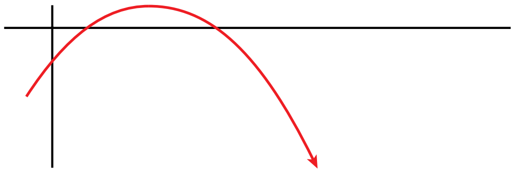
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

d)



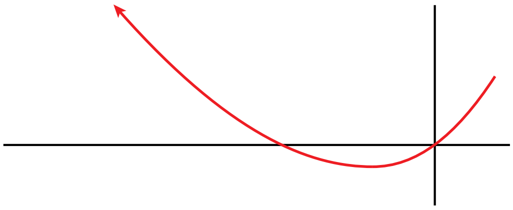
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e)



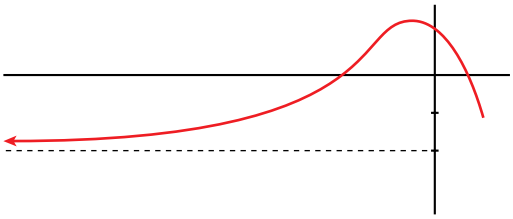
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

f)



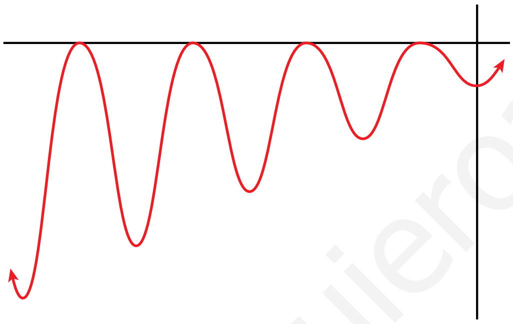
$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \; f(x) = +\infty$

g)



$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \; f(x) = -2$

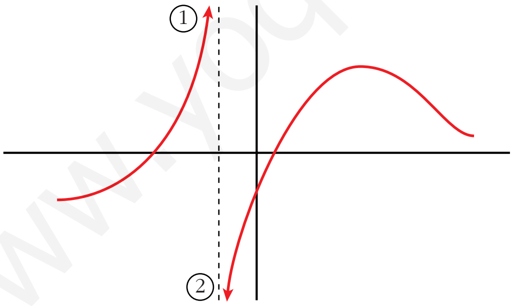
h)



$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \; f(x)$ no existe;

$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \; f(x) = 0$

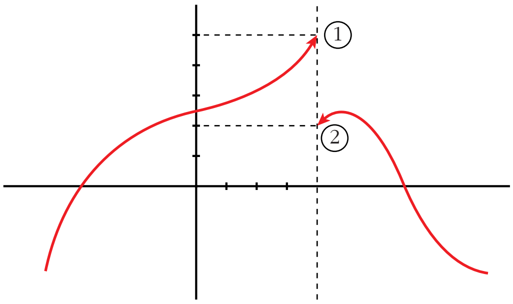
i)



① $\underset{x \to -1^-}{\text{lím}} \; f(x) = +\infty$

② $\underset{x \to -1^+}{\text{lím}} \; f(x) = -\infty$

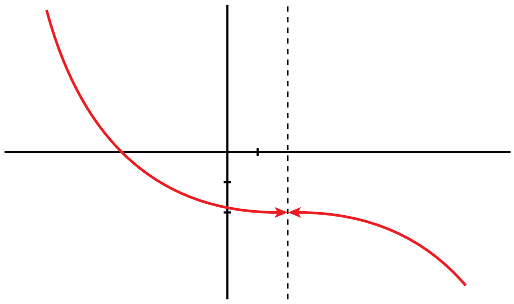
j)



① $\underset{x \to 4^-}{\text{lím}} \; f(x) = 5$

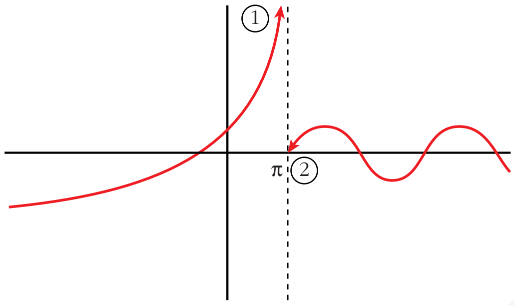
② $\underset{x \to 4^+}{\text{lím}} \; f(x) = 2$

k)



$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

l)



① $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$

② $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 0$

Página 133

1. **Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$ **c)** $5^{u(x)}$

d) $\sqrt{v(x)}$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{-3}{2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. **Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$ **c)** $v(x)/u(x)$

d) $\log_2 v(x)$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 134

3. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos (±∞) cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$	**b)** $0{,}5^x$	**c)** $-1{,}5^x$
d) $\log_2 x$	**e)** $1/(x^3 + 1)$	**f)** $\sqrt{x}$
g) 4^x	**h)** 4^{-x}	**i)** -4^x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \to$ Sí

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \to$ No

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \to$ Sí

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \to$ Sí

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \to$ No

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \to$ Sí

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \to$ Sí

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \to$ No

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \to$ Sí

4. a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $4^x \quad 1{,}5^x \quad 3x^5 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad \log_2 x$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

Página 135

5. Sabiendo que, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$	**f)** $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	**k)** $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$ → Indeterminado

d) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0$ → Indeterminado

g) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{+\infty}{-\infty}$ → Indeterminado

h) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{h(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

k) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{u(x)} = \frac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$ → Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty}$ → No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 136

6. **Las funciones *f*, *g*, *h* y *u* son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:**

a) $f(x) + h(x)$	**b)** $f(x)/h(x)$	**c)** $f(x)^{-h(x)}$	**d)** $f(x)^{h(x)}$
e) $f(x) \cdot u(x)$	**f)** $u(x)^{h(x)}$	**g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$	**h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot u(x) = (+\infty) \cdot (0)$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 137

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \dfrac{5}{3}$

2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2(x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2x}{x^3 - 10x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2(x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{x^3 - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{-9x^2 - 27x - 27} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2x}{x^3 - 10x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^3 + 6x^2 + x}{x^3 - 10x} = 9$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

Página 138

3. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1})$ **b)** $(x^2 - 2^x)$ **c)** $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$ **e)** $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - log_5\, x^4\right) = +\infty$

4. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}$

d) $(x + 5)^{x^2 - 5x + 1}$ **e)** $\left(\dfrac{3x + 5}{2x + 1}\right)^x$ **f)** $\left(\dfrac{x - 2}{2x - 3}\right)^{x^2 + x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3 + 5)(x - 2) - (4x^3 - x)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 5)^{x^2 - 5x + 1} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 5}{2x + 1}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x - 2}{2x - 3}\right)^{x^2 + x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

Página 139

1. Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 6x + 2}{3x^4 - x - 1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3 + 5x + 3}}{x^2 + 2x}$

No existe, pues el radicando toma valores negativos cuando $x \to -\infty$.

2. **Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$ **b)** $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **c)** 3^x

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}{-3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-3x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-3x} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2} \right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

Página 141

1. **Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:**

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) + g(x)\big) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \big(4f(x) - 5g(x)\big) = 12 - 10 = 2$

2. **Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0$ → $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

3. **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:**

(Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones).

a) $2p(x) + q(x)$

b) $p(x) - 3q(x)$

c) $\dfrac{r(x)}{p(x)}$

d) $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$

f) $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

g) $s(x) \cdot p(x)$

h) $s(x)^{r(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$

j) $r(x)^{s(x)}$

k) $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$

l) $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$

n) $r(x)^{-q(x)}$

ñ) $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$

o) $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{p(x)}{p(x)} = \lim_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{s(x)}{q(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminado.

g) $\lim_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $S(x)^{r(x)} = 0^3 = 0$

i) $\lim_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim_{x \to 2} \frac{3 - r(x)}{s(x)} = \frac{3 - 3}{(0)} = \frac{0}{0}$. Indeterminado.

l) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

o) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminado.

Página 142

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - 3x + 5)}{(x + 1)(x - 7)} =$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \frac{9}{-8} = \frac{-9}{8}$$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

5. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\frac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)=\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2-5x+2}{x\,(x+2)}-\frac{x^3+2x+1}{x(x^2+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{(x^2+1)(x^2-5x+2)-(x+2)(x^3+2x+1)}{x\,(x+2)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{x^4-5x^3+2x^2+x^2-5x+2-x^4-2x^2-x-2x^3-4x-2}{x\,(x+2)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{-7x^3+x^2-10x}{x\,(x+2)(x^2+1)}=\lim_{x \to 0}\frac{x\,(-7x^2+x-10)}{x\,(x+2)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{-10}{2\cdot 1}=-5$$

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabemos que** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$.

¿En cuáles de los siguientes casos hay indeterminación para $x \to +\infty$**?**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $f(x)+g(x)$ **b)** $g(x)+h(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **e)** $[h(x)]^{g(x)}$ **f)** $[3-h(x)]\cdot f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x \to +\infty}\big(f(x)\big)+\lim\limits_{x \to +\infty}\big(g(x)\big)=+\infty+(-\infty)=$

$=+\infty-(+\infty)$ → Indeterminación.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}\big(g(x)+h(x)\big)=\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)+\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)=-\infty+3=-\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{+\infty}{3}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{+\infty}{-\infty}$ → Indeterminación.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty}[h(x)]^{g(x)}=3^{-\infty}=\dfrac{1}{3^{+\infty}}=0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty}[3-h(x)]\cdot f(x)=0\cdot(+\infty)$ → Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2-x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x-5}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2-4}{2x+3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+5}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+5}{2+x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x-5}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-10x-5}{x^2+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-4}{2x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-4}{-2x+3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3-2x}{7-5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Calcula los siguientes límites comparando los exponentes del numerador y denominador:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}} = 0$

4 **Calcula estos límites observando cuál es el infinito de orden superior:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7})$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

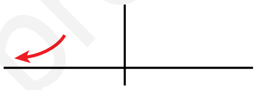
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(x^2 + 1)}{x} = 0$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$



6 **Si** $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty)$ → Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

7 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x\,(x-1)}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

8 Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + 1}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\log x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{2^x + 1} = +\infty$

9 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2} \right)$ **b)** $g(x) = \left(\dfrac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)^{1-x} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

Página 150

10 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x-5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x-5} = \dfrac{0}{-4} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-6)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x-6) = -5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{2x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(x-3)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-3)}{x-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$

11 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

12 **Estudia la continuidad de las dos funciones siguientes:**

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Si $x \neq 2 \Rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2^x = 4 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 4 = 4 \\ &f(2) = 4 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow$ La función es continua.
- En $x = 0$: Es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hay una asíntota vertical en $x = 0$.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ &f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x = 1, \text{ pues } \lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

PARA RESOLVER

13 **a) Calcula el límite de la función $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x \to 0}$, $\boldsymbol{x \to 2}$, $\boldsymbol{x \to 3}$, $\boldsymbol{x \to +\infty}$, $\boldsymbol{x \to -\infty}$:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

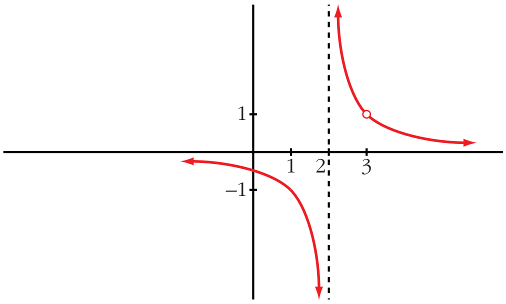
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{(0)}.$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



14 **a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en los puntos en los que no está definida.**

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

c) Representa la función con la información que obtengas.

d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \to \quad x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

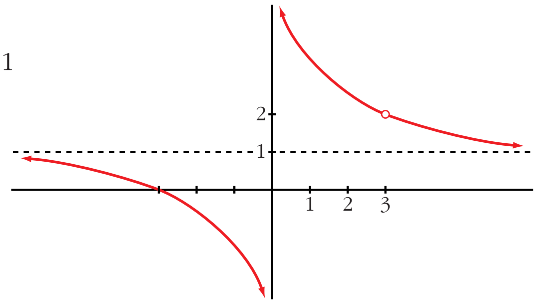
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}.$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$

c)



d) La función es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical) y en $x = 3$ (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

15 **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$**.**

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) ¿Cuál es la función que coincide con $f(x)$ **excepto en** $x = 0$ **y en** $x = 1$**?**

c) ¿En qué puntos no es continua $f(x)$**?**

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ y en $x = 1$. La función no está definida en estos valores (hay discontinuidades evitables).

16 **Calcula el límite de la función** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$ **cuando** $x \to 0$, $x \to 2$ **y** $x \to -2$**.**

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{-8} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{6}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

17 **Calcula el límite de la función $f(x) = 2 + \dfrac{x}{x+1}$ cuando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to -1$.**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2 + \dfrac{-1}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

18 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ k-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k-x) = k-2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k - 2 = 3 \;\to\; k = 5\end{array}$$

b) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2-1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

19 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Para $x \neq 1$, $f(x)$ es continua (pues está formada por funciones continuas).

Hallamos k para que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} k = k \\ f(1) = k \end{array}\right\}$$

Ha de ser $k = 2$.

20 S **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\rightarrow\; a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\rightarrow\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

Página 151

21 Se considera la función $f(x)$ definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se desea saber si es continua en todos los puntos o deja de serlo en alguno.

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ → la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1$ → No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

22 Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 0$ →

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$$

No existe $f(0)$.

Hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

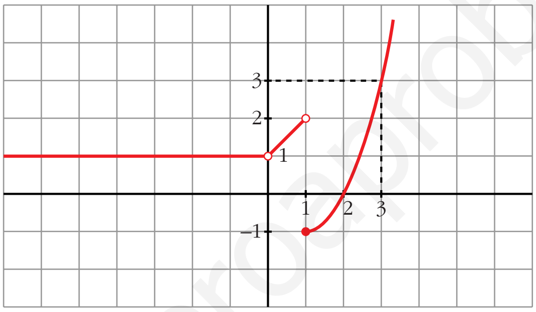
— En $x = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \underset{x \to 1^-}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 1^-}{\text{lím}}\ (x + 1) = 2 \\ \underset{x \to 1^+}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 1^+}{\text{lím}}\ (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- $\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ (x^2 - 2x) = +\infty$

  $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{lím}}\ 1 = 1$

- **Gráfica:**



b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \neq 3$ y $x \neq 6$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 3$ $\rightarrow$ $\left.\begin{cases} \underset{x \to 3^-}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 3^-}{\text{lím}}\ (3x - x^2) = 0 \\ \underset{x \to 3^+}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 3^+}{\text{lím}}\ (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}\right\}$ $\underset{x \to 3}{\text{lím}}\ f(x) = f(3)$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

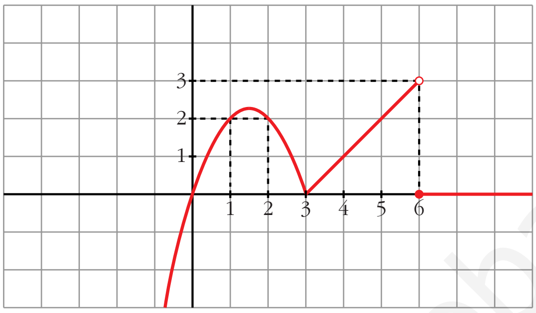
— En $x = 6$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \underset{x \to 6^-}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 6^-}{\text{lím}}\ (x - 3) = 3 \\ \underset{x \to 6^+}{\text{lím}}\ f(x) = \underset{x \to 6^+}{\text{lím}}\ 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

- **Gráfica:**



23 **S** **Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia su continuidad:**

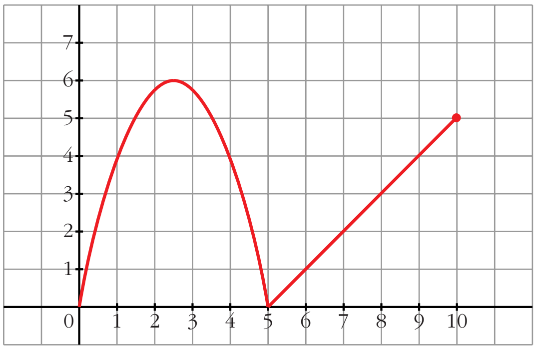
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{array} \right\} \quad \text{Dominio} = [0, 10]$$

- **Continuidad:** Si $x \in [0, 5) \cup (5, 10]$, es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{En } x = 5 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0 \\ f(5) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5). \\ \text{Es continua} \end{array}$$

- **Gráfica:**



24 S **Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$

calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de tenerse que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = 1 + b \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \\ f(-1) = 1 + b \end{array}\right\} \text{ Ha de ser } 1 + b = 7; \text{ es decir, } b = 6.$$

- Veamos que la función también es continua en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^3 + 8) = 7 \\ f(1) = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 1 \end{array}$$

25 S **Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

— Si $x \ne 1$ y $x \ne 2$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{— En } x = 1 \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \\[2ex] f(1) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \\[2ex] f(x) \text{ es continua en } x = 1. \end{array}$$

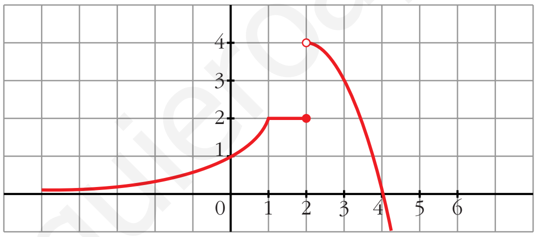
$$\text{— En } x = 2 \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \\[2ex] f(2) = 2 \end{array} \right.$$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$

- **Gráfica:**



26
S

Sea $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{x^2 + 2x + 1} & \textbf{si } \boldsymbol{x < -1} \\ \boldsymbol{2x + 2} & \textbf{si } \boldsymbol{-1 \le x \le 2} \\ \boldsymbol{-x^2 + 8x} & \textbf{si } \boldsymbol{x > 2} \end{array} \right.$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{array} \right.$$

- **Continuidad:**

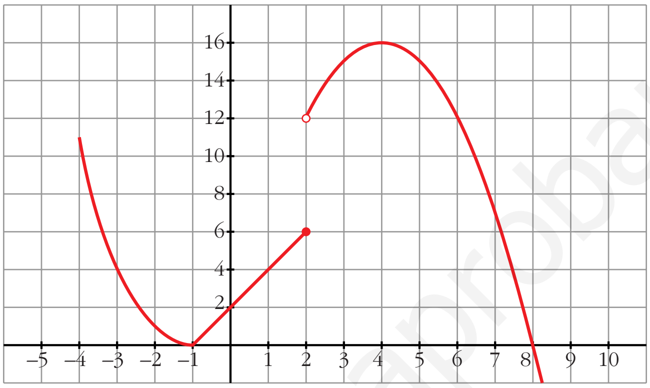
— Si $x \ne -1$ y $x \ne 2$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{— En } x = -1 \;\rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x + 2) = 0 \\[2ex] f(-1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \\[2ex] f(x) \text{ es continua} \\ \text{en } x = -1. \end{array}$$

$$\text{— En } x = 2 \;\rightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 6 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

- **Gráfica:**



27 **S** **Dada** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

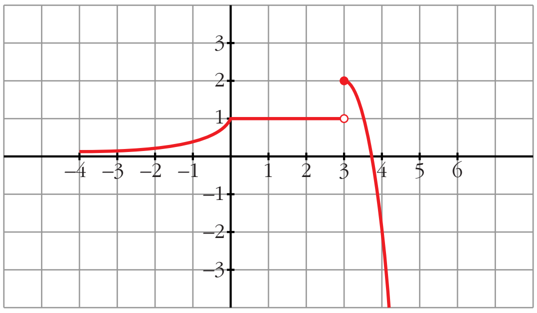
— Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$ → Es continua (está formada por funciones continuas).

$$\text{— En } x = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}\right\} \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 0. \end{array}$$

$$\text{— En } x = 3 \;\rightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

- **Gráfica:**



28 **S** **El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:**

$P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.

b) El tamaño de la población a largo plazo.

a) $P(0) = 15$ millones de individuos.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1$ millón de individuos.

29 **S** **Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01\,x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2\,300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

a) Dominio = $[0, +\infty)$

— Si $x \neq 100$ → La función es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos definidos.

— En $x = 100$ →
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 100^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} 0{,}01x = 1 \quad (100\ €) \\ \lim\limits_{x \to 100^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^+} \dfrac{30x}{2x + 2\,300} = 1{,}2 \quad (120\ €) \\ f(100) = 1 \quad (100\ €) \end{cases}$$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x = 100$.

Como $\lim_{x \to 100^-} f(x) \neq \lim_{x \to 100^+} f(x)$, el incentivo recibido por un empleado sí es sensiblemente distinto si el valor de sus ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 € ($x = 100$).

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{2x + 2\,300} = 15 \rightarrow 1\,500$ €

30 **S** **Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función**

$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$, **siendo t el número de años transcurridos. Se pide:**

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

a) $f(0) = 5\,000$ individuos.

b) T.V.M. $[4, 9] = \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{7\,250 - 7\,000}{5} = \frac{250}{5} = 50$

Aumenta en 250 individuos, lo que supone un aumento medio de 50 por año.

c) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2} = 7\,500$

Se estabilizaría en 7 500 individuos.

Página 152

31 **S** **Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:**

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x + 30}, & 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1\,125}{(x - 5)(x - 15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30}, & 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) • La función $y = \dfrac{300}{x+30}$ es continua, salvo en $x = -30$; pero, como solo la consideramos en $0 \le x \le 30$, será continua en el intervalo $(0, 30)$.

- La función $y = \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2$ es continua, salvo en $x = 5$ y en $x = 15$; pero como la estamos considerando para $x > 30$, es continua en el intervalo $(30, +\infty)$.
- Por tanto, si $x \ne 30$ $\big(x \in [0, 30) \cup (30, +\infty)\big)$, la función $T(x)$ es continua.
- Si $x = 30$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 30^-} T(x) = \lim_{x \to 30^-} \frac{300}{x+30} = 5 \\ \displaystyle\lim_{x \to 30^+} T(x) = \lim_{x \to 30^+} \left(\frac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 5 \\ T(30) = 5 \end{array}\right\} \; T(x) \text{ es continua en } x = 30.$$

- Por tanto, $T(x)$ es continua en su dominio.

b) $T(0) = 10$ minutos; y, a mayor tiempo de entrenamiento, menos tardan en realizar la prueba. Además:

$$\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 2$$

Por tanto, ningún deportista sería capaz de realizar la prueba en menos de 1 minuto ni en menos de 2 minutos.

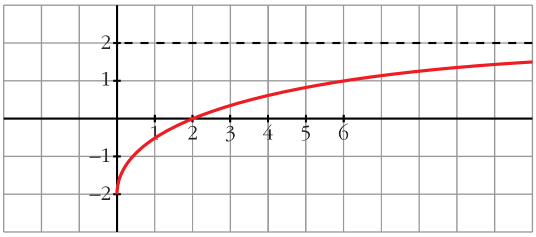
32 Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa $(x \ge 0)$ e y en cientos de miles de €.

a) Representa la función.

b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?

a)



b) $\dfrac{2x-4}{x+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ (y la función es creciente).

Deja de tener pérdidas en el 2º año ($x = 2$).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2 \quad \to \quad 200\,000$ €

El beneficio está limitado a 200 000 €.

33 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \quad \to \quad 100a + 500 = 2\,500 \quad \to \quad 100a = 2\,000 \quad \to \quad a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47$ €

CUESTIONES TEÓRICAS

34 **Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.**

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

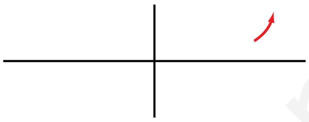
35 **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

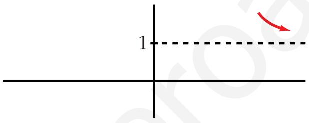
b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

c) Podemos conseguir que $h(x)$ sea mayor que un número K, por grande que sea, dando a x valores suficientemente próximos a 2.

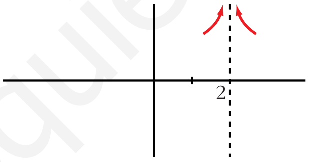
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$



c) $\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty$



36 **De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1.$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

37 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

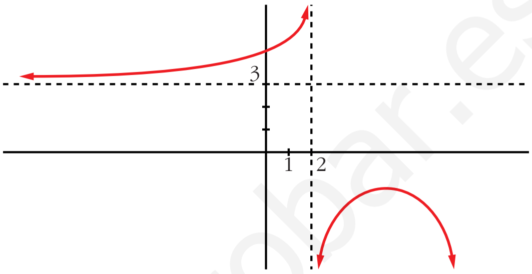
d) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Podemos conseguir que $f(x)$ esté tan próximo a 3 como queramos sin más que darle a x valores suficientemente "grandes y negativos".

b) Podemos conseguir que $f(x)$ sea "tan negativo" como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

c) Podemos conseguir que $f(x)$ tome valores tan grandes como queramos sin más que darle a x valores tan próximos a 2 (pero menores que 2) como sea necesario.

d) Podemos conseguir que $f(x)$ tome valores tan "grandes y negativos" como queramos sin más que darle a x valores tan próximos a 2 (pero mayores que 2) como sea necesario.



38 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$? ¿Puede ser continua la función en $x = 3$?**

Sí, puede ser que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

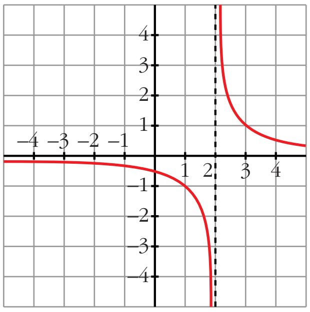
39 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$?**

$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

Página 153

40 **Dibuja la gráfica de una función que sea negativa si $x < 2$, positiva si $x > 2$ y que no tenga límite cuando x tiende a 2.**

Por ejemplo $y = \dfrac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



41 **Sea P un polinomio: $P(x) = ax^2 + bx + c$**

Prueba que $\dfrac{P(x) - P(0)}{x}$ tiene límite en 0 y calcula su valor.

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x) - P(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + c - c}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(ax + b)}{x} = \lim_{x \to 0} (ax + b) = b$$

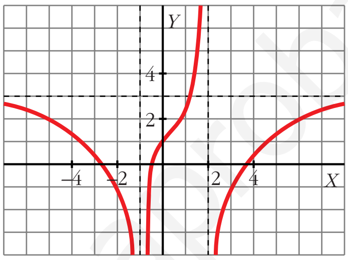
42 **Calcula sobre la gráfica de esta función:**

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

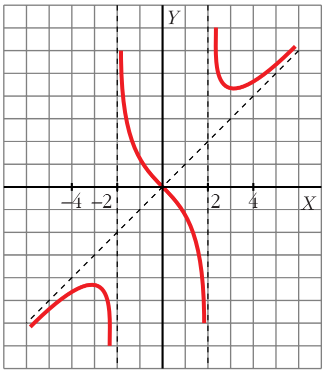
c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

43 **Halla, observando la gráfica de esta función, los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

PARA PROFUNDIZAR

44 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones, definiéndolas previamente en intervalos, y represéntalas:**

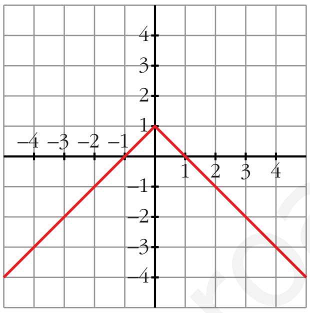
a) $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x - 3| - x$ **c)** $y = \dfrac{1}{|x-1|}$

d) $y = x|x|$ **e)** $y = |x^2 - 1|$ **f)** $y = |x - 2| + |x|$

a) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

$$\bullet\ y = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

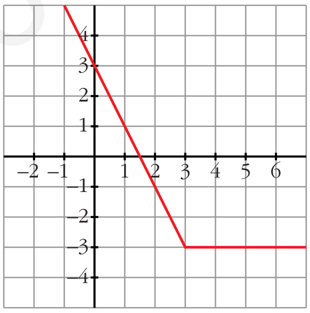
• **Gráfica:**



b) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

$$\bullet\ y = |x - 3| - x = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ -3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

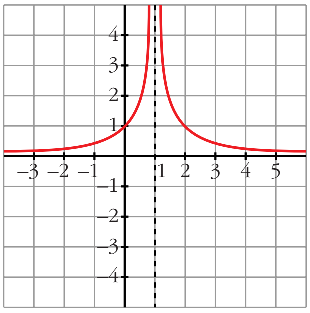
• **Gráfica:**



c) • Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\bullet\ y = \frac{1}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

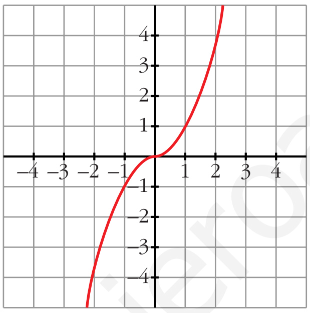
- **Gráfica:**



d) - Es continua en $\mathbb{R}$, pues es el producto de dos funciones continuas.

- $y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

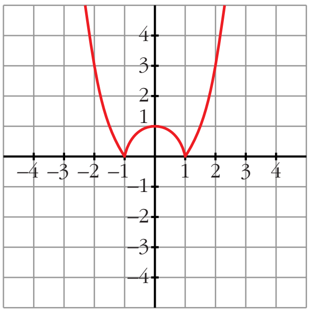
- **Gráfica:**



e) - Es continua en $\mathbb{R}$.

- $y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

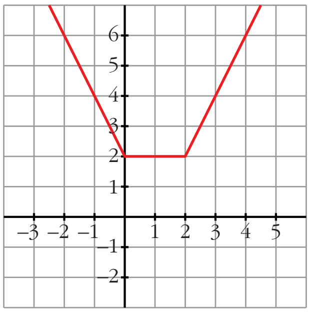
- **Gráfica:**



f) - Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la suma de dos funciones continuas.

- $y = |x - 2| + |x| = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- **Gráfica:**



45 **Representa y estudia la continuidad de la función siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le -1 \\ |x^2 - x - 2| & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

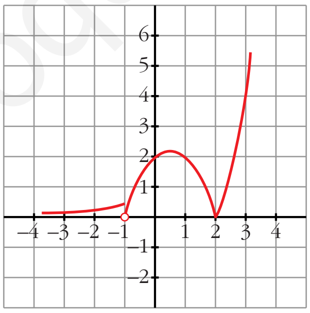
- **Continuidad:**

— Si $x \neq -1$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = -1$ → $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} e^x = e^{-1} = 1/e \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} |x^2 - x - 2| = 0 \\ f(-1) = 1/e \end{cases}$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x = -1$.

- **Gráfica:**



46 **Estudia la continuidad de la función $y = 2x + \frac{|x|}{x}$ en $x = 0$. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?**

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, entonces: $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

47 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x \le 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \frac{-x}{x+1} = -1$$

48 **Calcula $\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.**

☛ ***Multiplica y divide por $\sqrt{x^2+3x} + x$***

$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x} =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{3x}{\sqrt{x^2}+x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{3x}{x+x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

49 **Calcula:**

a) $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}$ **b)** $\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x} - x}$

a) $$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x^2+2-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x^2+2-x^2+4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-4}} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{6}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-4}} = 0$$

b) $$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)} =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{x^2+4x-x^2} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{4x} =$$

$$= \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{\sqrt{x^2}+x}{4x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{x+x}{4x} = \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

50 **Calcula:** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

51 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2}$

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(1 - \sqrt{3-x}\right)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1-(3-x)}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{1-3+x}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+9} - 3\right)\left(\sqrt{x+9} + 3\right)}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} =$$

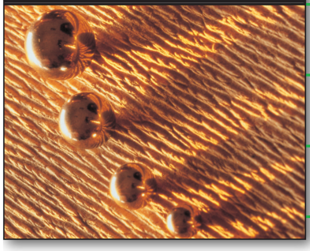
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+9-9}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = +\infty$$

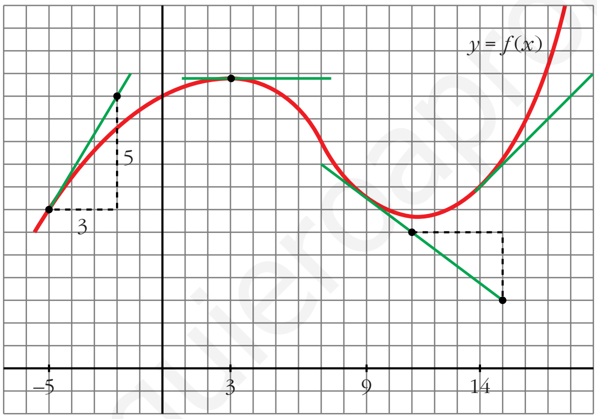
UNIDAD 6



DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN. APLICACIONES

Página 154

Problema 1



- **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

  $f'(3) = 0;\ f'(9) = \frac{-3}{4};\ f'(14) = 1$

- **Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.**

  La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

- **Di otro punto en el que la derivada sea cero.**

  La derivada también es cero en $x = 11$.

- **Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.**

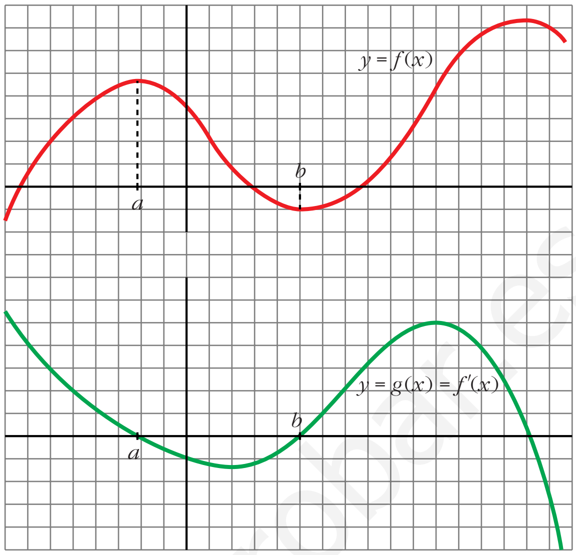
  La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

- **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

  Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Problema 2

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



- En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

  $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

Página 155

Problema 3

- **¿Cuál es la derivada de cada cual?**

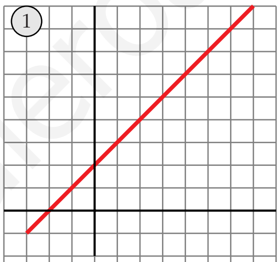
  Justifica tus respuestas con argumentos análogos a los que utilizaste en el problema anterior.

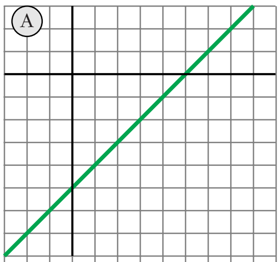
1) B

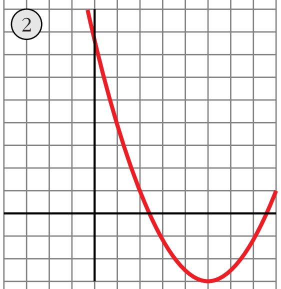
2) A

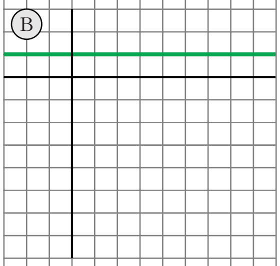
3) C

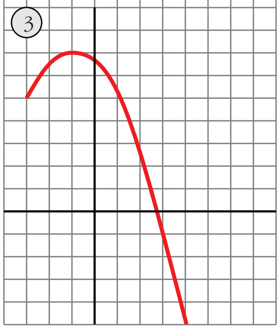
La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

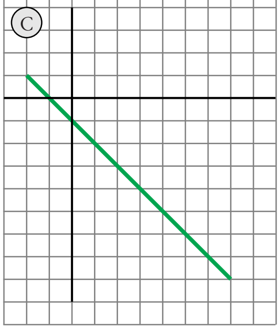






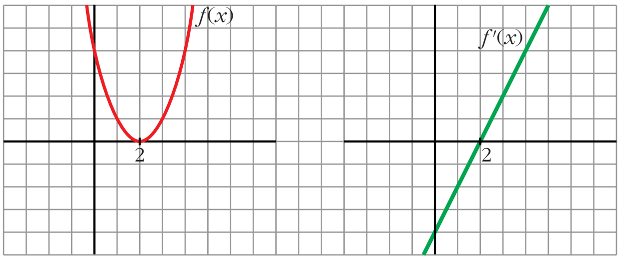






- **Invéntate una gráfica sencilla y trata de esbozar la gráfica de su función derivada.**

Por ejemplo:



Página 157

1. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en** $x_0 = 2$**?**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1$$

La función no es continua en $x = 2$, pues $\lim_{x \to 2^-} f(x) \ne \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Por tanto, tampoco es derivable en $x = 2$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \le 2 \\ x^2 - 8, & x > 2 \end{cases}$ **¿Es derivable en** $x_0 = 2$**?**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - 3x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 8) = -4$$

La función es continua, pues: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -4$

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = -3 \ne f'(2^+) = 4$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Página 161

1. **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}$ **f)** $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\, x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$ **h)** $f(x) = \log(sen\, x \cdot cos\, x)^2$

i) $f(x) = sen^2\, x + cos^2\, x + x$ **j)** $f(x) = sen \sqrt{x + 1} \cdot cos \sqrt{x - 1}$

k) $f(x) = 7^{sen\,(x^2 + 1)}$ **l)** $f(x) = sen(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\, x + x^2 + 1}$ **n)** $f(x) = cos^2 \sqrt[3]{x + (3 - x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1 + x) - (1 - x) \cdot 1}{(1 + x)^2} = \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} = \dfrac{-2}{(1 + x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2} = \frac{-2(1 + x)}{(1 - x)(1 + x)^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = \ln\,(1 - x) - \ln\,(1 + x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{-1 - x - 1 + x}{1 - x^2} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1 + tg^2\, x)(1 + tg\, x) - (1 - tg\, x) \cdot (1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2} =$

$$= \frac{(1 + tg^2\, x)[-1 - tg\, x - 1 + tg\, x]}{(1 + tg\, x)^2} = \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1 + tg\, x)^2} \cdot D[tg\, x] = \frac{-2}{(1 + tg\, x)^2} \cdot (1 + tg^2\, x) = \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\, x)}{\sqrt{(1 - tg\, x)(1 + tg\, x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\, x}} = \ln e^{(tg\, x)/2} = \frac{tg\, x}{2}$

$f'(x) = \frac{1 + tg^2\, x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 3 = \frac{\ln 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = \log\, (sen\, x \cdot \cos x)^2 = 2\left[\log\, (sen\, x + \log\, (\cos x)\right]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{\cos x}{sen\, x} \cdot \frac{1}{\ln 10} + \frac{-sen\, x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\ln 10}\right] = \frac{2}{\ln 10} \cdot \frac{\cos^2 x - sen^2\, x}{sen\, x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{4}{\ln 10} \cdot \frac{\cos^2 x - sen^2\, x}{2 sen\, x \cdot \cos x} = \frac{4}{\ln 10} \cdot \frac{\cos 2x}{sen\, 2x} = \frac{4}{\ln 10 \cdot tg\, 2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = \log\, (sen\, x \cdot \cos x)^2 = 2 \log \left(\frac{sen\, 2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{\cos 2x}{\frac{sen\, 2x}{2}} = \frac{4}{\ln 10 \cdot tg\, 2x}$$

i) $f(x) = sen^2\, x + \cos^2 x + x = 1 + x \qquad f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\, \sqrt{x+1} \cdot \left(-sen\, \sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{\cos \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\, \sqrt{x+1} \cdot sen\, \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = 7^{sen\,(x^2+1)} \cdot \ln 7 \cdot D\big(sen\, (x^2+1)\big) = 7^{sen\,(x^2+1)} \cdot \ln 7 \cdot 2x \cdot \cos\, (x^2+1)$

l) $f'(x) = \cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{sen\, x + x^2 + 1}} \cdot (\cos x + 2x) = \frac{\cos x + 2x}{2\sqrt{sen\, x + x^2 + 1}}$

n) $$f'(x) = 2\cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\, \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \frac{1 + 2(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{-2 \cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\; sen\, \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5 - 2x) \cdot sen\, \left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$$

2. Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x \cos x$ **c)** $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\quad y'' = 20x^3;\quad y''' = 60x^2$

b) $y = x \cos x$

$y' = \cos x - x \operatorname{sen} x$

$y'' = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x \cos x = -2\operatorname{sen} x - x \cos x$

$y''' = -2\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x = -3\cos x + x \operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x = 1 + x$

$y' = 1;\quad y'' = 0;\quad y''' = 0$

3. Calcula $f'(1)$ siendo: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60\, \sqrt[30]{x^{17}}}$$

Por tantos: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. Calcula $f'(\pi/6)$ siendo: $f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x) \cdot \operatorname{sen} 6x$

$$f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x) \cdot \operatorname{sen} 6x = \cos 6x \cdot \operatorname{sen} 6x = \frac{\operatorname{sen} 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\cos 12x}{2} = 6\cos 12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \cos \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot \cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. Calcula $f'(0)$ siendo: $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{8x + 4}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - (16x^3 + 24x^2 + 24x + 8)}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)} =$$

$$= \frac{-16x^3 - 24x^2 + \left(2\sqrt{3} - 24\right)x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3} \cdot (2x^2 + 2x + 2)}$$

Por tanto: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Página 162

1. Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \qquad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (3x - 9) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-)$$

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \ne 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x^2 + n) = n$$

$$f(0) = 5$$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 163

1. **Halla las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$ en los puntos de abscisas 0, 1, 3.**

   Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

   Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

$$y = 8x$$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

$$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

$$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$$

2. **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 4x + 3$ que sean paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.**

$$y = x^3 - 4x + 3$$

   Calculamos la derivada:

$$y' = 3x^2 - 4$$

   Si son paralelas a la bisectriz del 2º y 4º cuadrante, la pendiente es -1. Por tanto:

$$3x^2 - 4 = -1 \quad \to \quad 3x^2 = 3 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x = \pm 1$$

$$y(-1) = 6 \quad y(1) = 0$$

   Recta tangente en (–1, 6):

$$y = 6 - (x + 1) = -x + 5$$

   Recta tangente en (1, 0):

$$y = 0 - (x - 1) = -x + 1$$

Página 164

1. **Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:**

   a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

a) $x < -1 \quad \to \quad y' > 0 \quad \to \quad f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \quad \to \quad y' > 0 \quad \to \quad f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \quad \to \quad y' < 0 \quad \to \quad f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 166

2. **Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de ellos estudiando el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \quad \to \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo}$$

3. **a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

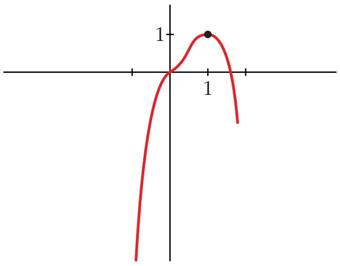
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 1 \quad \to \quad \text{Punto } (1,\ 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1;\ 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hay un *punto de inflexión*.
- En $(1, 1)$ hay un *máximo relativo*.



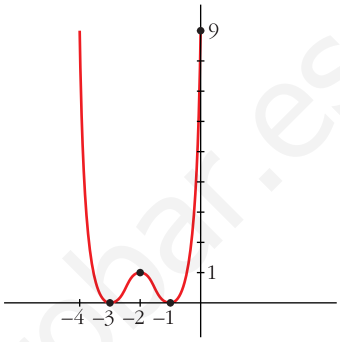
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un *mínimo relativo* en $(-3, 0)$, un *máximo relativo* en $(-2, 1)$ y un *mínimo relativo* en $(-1, 0)$.



Página 168

1. Estudia la curvatura de la función: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} & \rightarrow \quad \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48; \ f'''(0) \neq 0; \ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (2, 2)$$

$$\left(f'''(x) = 6; \ f'''(2) \neq 0\right)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 170

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

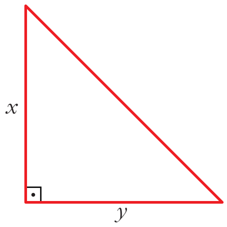
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \quad \to \quad f(5) = 10 \\ x = -5 \quad \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.



$$x + y = 10 \quad \to \quad y = 10 - x$$

$$\text{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

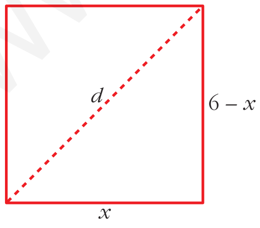
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \to \quad x = 5 \quad \to \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego, en } x = 5 \text{ está el máximo}\right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

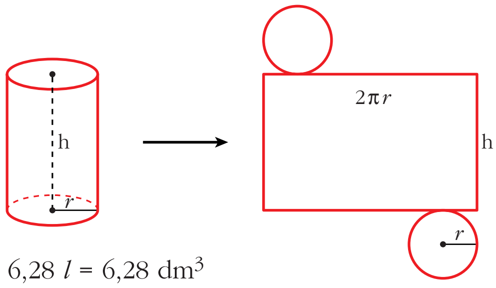
$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6 + 2x = 0 \quad \to \quad x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego, en $x = 3$ hay un mínimo). El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$\text{Área total} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 2\pi r(\text{h} + r)$$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \rightarrow \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = \text{h}$

Así: $\text{Áreal total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right),\quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \rightarrow -2 + 2r^3 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$r = 1 \rightarrow \text{h} = \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{2}{1} = 2$. El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 178

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Definición de derivada

1 Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de las siguientes funciones en los intervalos: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$

c) $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la T.V.M.? ¿Qué tipo de funciones son?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + \text{h}]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \dfrac{\text{h}^2 + 2\text{h}}{\text{h}} = \text{h} + 2$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + \text{h}]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \dfrac{7\text{h}}{\text{h}} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + \text{h}]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En $[1, 1 + \text{h}]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \dfrac{2 \cdot (2^{\text{h}} - 1)}{\text{h}}$

La función b) $f(x) = 7x - 5$ es una función afín y la T.V.M. es constante.

La función c) $f(x) = 3$ es una función constante y la T.V.M. es 0 (constante).

2 **Halla la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[2, 2 + h]$ y, con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.**

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3 \text{ en } [2, 2 + h]$$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-h + 1) = 1$$

3 **Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{7}$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 5)^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{2 + x}{x}$

$$\text{a) } f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3h/7)}{h} = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = 6$$

$$\text{c) } f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$\text{d) } f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{9h + 3h^2} = \frac{-2}{9}$$

4 **Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x$

$$\text{a) } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5h}{2}}{h} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6xh}{h} = 6x$$

$$\text{c) } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x - 2) \cdot (x + h - 2) \cdot h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x - 2) \cdot (x + h - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2}$$

d) $f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{lím}} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{lím}} \dfrac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

Reglas de derivación

5 **Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x + 1}{(2 - x)^2}$

c) $y = \dfrac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$ **d)** $y = \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$

a) $y' = \dfrac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2 - x)^2 + (x + 1) \cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \dfrac{x + 4}{(2 - x)^3}$

c) $y' = \dfrac{6x \cdot (x + \sqrt{x}) - 3x^2 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \dfrac{9x^2 + 6x^2 \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x})^2}$

d) $y' = \dfrac{-4}{10} \cdot \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{-2}{5} \cdot \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3$

6 **Halla la derivada de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$ **b)** $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$ **c)** $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$ **d)** $y = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

a) $y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x + 1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \dfrac{x^2 \cdot (x + 3)}{(x + 1)^3}$

b) $y' = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

c) $y' = \dfrac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}$

d) $y' = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = e^{4x}(x - 1)$ **b)** $y = \dfrac{(1 - x)^2}{e^x}$ **c)** $y = \sqrt{2^x}$ **d)** $y = \ln(2x - 1)$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x - 1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x - 3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1 - x) \cdot e^x - (1 - x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1 - x) - (1 - x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot ln\ 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot ln\ 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

8 **Deriva estas funciones:**

a) $y = ln\,(x^2 - 1)$ **b)** $y = ln\,\sqrt{1 - x}$ **c)** $y = \dfrac{ln\ x}{e^x}$ **d)** $y = sen^2\ x^2$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1 - x}}}{\sqrt{1 - x}} = \dfrac{-1}{2(1 - x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - ln\ x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - ln\ x}{e^x} = \dfrac{1 - x \cdot ln\ x}{x \cdot e^x}$

d) $y' = 2x \cdot 2 \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 = 4x \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2$

9 **Calcula la derivada de estas funciones:**

a) $y = sen\ x\ cos^2\ x$ **b)** $y = \dfrac{sen^2\ x}{1 + cos^2\ x}$

c) $y = e^{x^2 + 1}$ **d)** $y = cos^3\,(2x + 1)$

a) $y' = cos^3\ x - 2 \cdot sen^2\ x \cdot cos\ x$

b) $y' = \dfrac{2sen\ x \cdot cos\ x \cdot (1 + cos^2\ x) + sen^2\ x \cdot 2cos\ x \cdot sen\ x}{(1 + cos^2\ x)^2} = \dfrac{4sen\ x \cdot cos\ x}{(1 + cos^2\ x)^2}$

c) $y' = 2x \cdot e^{x^2 + 1}$

d) $y' = -2 \cdot 3 \cdot cos^2(2x + 1) \cdot sen(2x + 1) = -6 \cdot cos^2(2x + 1)sen(2x + 1)$

10 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = log_2 \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{sen\, x^2}$ **c)** $y = \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ **d)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y = log_2 1 - log_2 x$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\, 2}$$

b) $y' = \dfrac{2x \cdot cos\, x^2}{3\sqrt[3]{sen^2\, x^2}}$

c) $$y' = \frac{\dfrac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\dfrac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$$

d) $$y' = \frac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

⑪ **Halla la derivada de:**

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = ln\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

c) $y = ln\,(sen\sqrt{e^x}\,)$ **d)** $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

a) $y = \sqrt[4]{x^3} \;\to\; y' = \dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \big(ln\, x - ln\,(x+1)\big)$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c) $y' = \dfrac{e^{x/2} \cdot cos\sqrt{e^x}}{2 \cdot sen\sqrt{e^x}}$

d) $$y' = \frac{\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$$

Recta tangente

12 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:**

a) $y = \frac{1 - 3x^2}{2}$ **en** $x = 1$ **b)** $y = 0{,}3x - 0{,}01x^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x + 12}$ **en** $x = -3$ **d)** $y = \frac{1}{x}$ **en** $x = 2$

e) $y = \frac{x + 5}{x - 5}$ **en** $x = 3$ **f)** $y = sen^2\, x$ **en** $x = \frac{\pi}{2}$

g) $y = e^{-x}$ **en** $x = 0$ **h)** $y = sen\, x\, cos\, x$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

i) $y = ln\,(x + 1)$ **en** $x = 0$ **j)** $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

a) • Ordenada en el punto: $x = 1 \rightarrow y = -1$

• Pendiente de la recta: $y' = -3x \rightarrow y'(1) = -3$

Recta tangente: $y = -1 - 3 \cdot (x - 1) = -3x + 2$

b) • Ordenada en el punto: $x = 10 \rightarrow y = 2$

• Pendiente de la recta: $y' = 0{,}3 - 0{,}02x \rightarrow y'(10) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

Recta tangente: $y = 2 + 0{,}1 \cdot (x - 10) = 0{,}1x + 1$

c) • Ordenada en el punto: $x = -3 \rightarrow y = 3$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 12}} \rightarrow y'(-3) = \frac{1}{6}$

Recta tangente: $y = 3 + \frac{1}{6}(x + 3) = \frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$

d) • Ordenada en el punto: $x = 2 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{-1}{x^2} \rightarrow y'(2) = \frac{-1}{4}$

Recta tangente: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x - 2) = \frac{-1}{4}x + 1$

e) • Ordenada en el punto: $x = 3 \rightarrow y = -4$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{-10}{(x - 5)^2} \rightarrow y'(3) = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$

Recta tangente: $y = -4 - \frac{5}{2} \cdot (x - 3) = \frac{-5}{2}x + \frac{7}{2}$

f) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = 2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Recta tangente: $y = 1$

g) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = -e^{-x} \rightarrow y'(0) = -1$

Recta tangente: $y = 1 - 1 \cdot x = -x + 1$

h) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = cos^2\ x - sen^2\ x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Recta tangente: $y = \frac{1}{2}$

i) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{1}{x+1} \rightarrow y'(0) = 1$

Recta tangente: $y = x$

j) • Ordenada en el punto: $x = e \rightarrow y = e$

• Pendiente de la recta: $y' = ln\ x + 1 \rightarrow y'(e) = 2$

Recta tangente: $y = e + 2 \cdot (x - e) = 2x - e$

Página 179

⑬ S **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculamos la pendiente de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$$4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow \text{Pendiente } 2.$$

$$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$$

La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, -2)$:

$$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \rightarrow y = 2x$$

14 S **Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2,\ 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

15 S **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte son (0, 0) y (4, 0).

$$y' = 4 - 2x \begin{cases} y'(0) = 4 \;\; \text{pendiente en } (0,\ 0) \\ y'(4) = -4 \;\; \text{pendiente en } (4,\ 0) \end{cases}$$

Rectas tangentes:

En (0, 0) → $y = 4x$

En (4, 0) → $y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

16 **Halla los puntos de tangente horizontal en las siguientes funciones y escribe la ecuación de la tangente en esos puntos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$　　**b)** $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$　　**d)** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1/3 \;\rightarrow\; y = 4/27 \end{cases}$

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = +\sqrt{2}/2 \;\rightarrow\; y = 1/4 \\ x = -\sqrt{2}/2 \;\rightarrow\; y = 1/4 \end{cases}$

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \;\rightarrow\; -6x^2 + 6 = 0 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 \\ x = -1 \;\rightarrow\; y = -3 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; y = -1 \\ x = -2 \;\rightarrow\; y = -9 \end{cases}$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

17 **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **f)** $y = e^x\,(x - 1)$

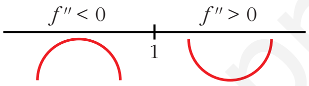
a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \to \quad$ No tiene solución.

No tiene ni máximos ni mínimos.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

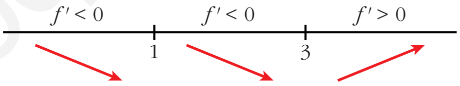


Hay un punto de inflexión en $(1, 29)$.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

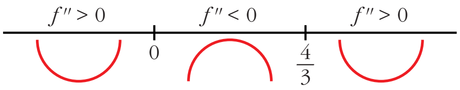
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad y = 0 \\ x = 2 \quad \to \quad y = -(4/3) \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

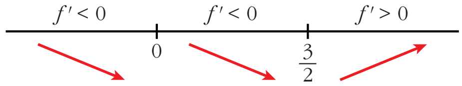
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \quad \to \quad x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad y = 0 \\ x = 4/3 \quad \to \quad y = -(64/81) \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

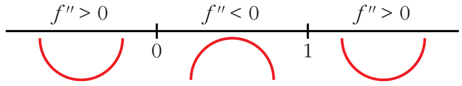
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad y = 0 \\ x = 3/2 \quad \to \quad y = -(27/16) \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

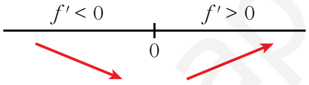
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



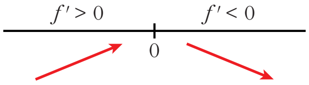
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

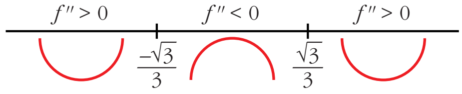
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$

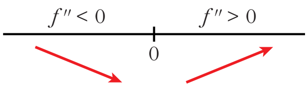


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

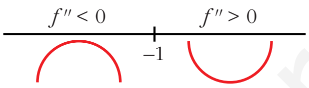
$y = -1$



Hay un mínimo en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

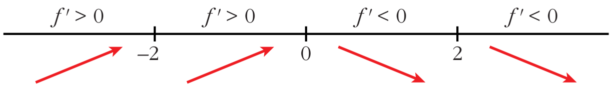
18 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimos:**

a) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

b) $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

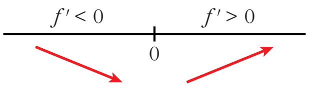
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

19 Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

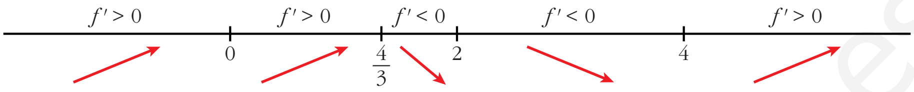
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$

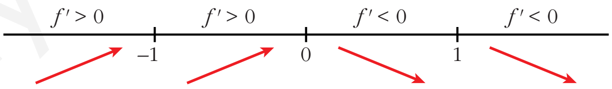
tiene un mínimo en $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

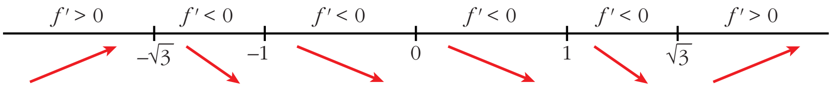
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

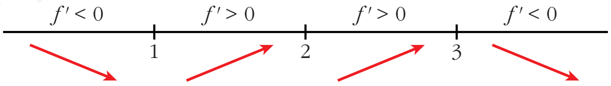
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

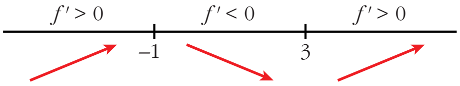
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

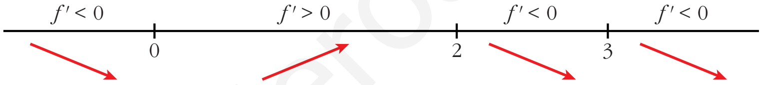
tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

20 **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

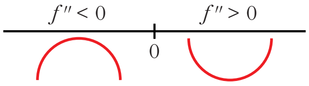
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = \ln(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3;\; f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

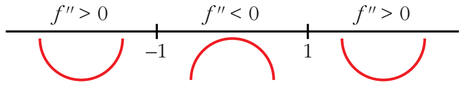
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

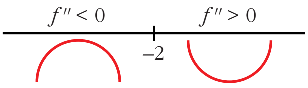
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad (e^x \neq 0$ para todo $x)$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

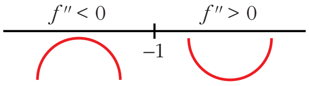
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x + 1)$. *Dominio* $= (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

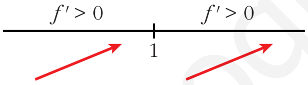
$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

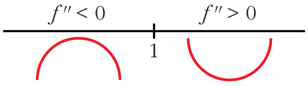
Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

21 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$

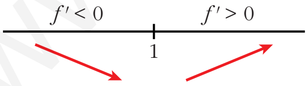
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$

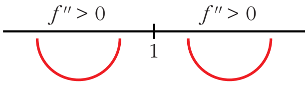




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

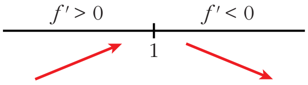
b) $f'(x) = 4(x - 1)^3$; $f''(x) = 12(x - 1)^2$

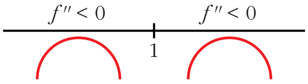




Hay un mínimo en $x = 1$.

c) $f'(x) = -6(x - 1)^5$; $f''(x) = -30(x - 1)^4$





Hay un máximo en $x = 1$.

PARA RESOLVER

22 **Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.**

$$y' = 3x^2 - 12x + 8$$

Veamos para qué valor de x tiene pendiente -1:

$$3x^2 - 12x + 8 = -1$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = -3 \\ x = 1 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

El punto $(3, -3)$ verifica la ecuación.

Veamos los puntos de corte:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3 \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

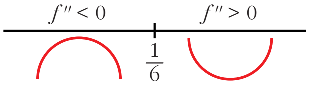
El otro punto de corte es $(0, 0)$.

23 S **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Página 180

24 S **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{lll} y' = 2ax + b & \to \; y'(2) = 2 & \to \; 4a + b = 2 \\ \text{Pasa por } A(2,\,1) & \to \; y(2) = 4a + 2b + c = 1 & \\ \text{Pasa por } B(5,\,-2) & \to \; y(5) = 25a + 5b + c = -2 & \end{array}\right\}$$

Solución del sistema: $a = -1, \;\; b = 6, \;\; c = -7 \;\; \Rightarrow \;\; y = -x^2 + 6x - 7$

25 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en (2, 1). Calcula a, b y c.**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lr} f(-1) = 0 \;\; \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \;\; \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \;\; \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

26 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

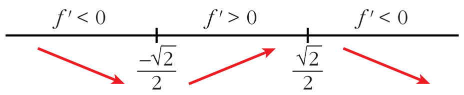
a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{ll} f(1) = 1 \;\; \to & a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \;\; \to & 3a + b = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\left.\right\} \; f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; -3(2x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

27 **S** **Considera la siguiente función:** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

a) Continuidad:

- **Si** $x \neq 0$ **y** $x \neq 1$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En** $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En** $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad:

- **Si** $x \neq 0$ **y** $x \neq 1$ → La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En** $x = 0$:

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En** $x = 1$:

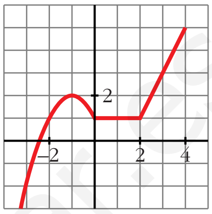
$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola: $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$**

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

29 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \rightarrow y'(-4^-) = -2 \ne y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \rightarrow y'(-2^-) = -2 \ne y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

30 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

S

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \ne 2$** → La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ &f(2) = 4a + 6 \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$; o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 2$** → la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

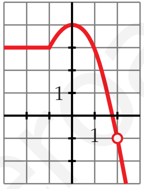
$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

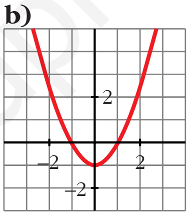
31 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?

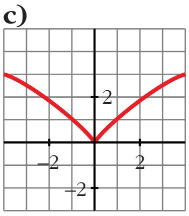
a)



b)



c)



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

32 **S** **La función $f(x)$ está definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** → La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to 0}{\text{lím}} (x^3 - x) = 0 \\[2ex] \underset{x \to 0^+}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to 0}{\text{lím}} (ax + b) = b \\[2ex] f(0) = 0 \end{array}\right\}$$ Para que sea continua ha de ser $b = 0$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** → La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= a \end{aligned}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

33 **S** **Considera esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

c) ¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

d) Represéntala gráficamente.

a) Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ &f(1) = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Puntos en los que $f'(x) = 0$:

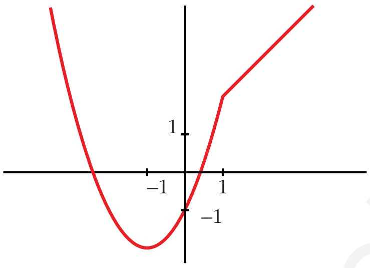
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

d) Gráfica de $f(x)$:



34 **S** **De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que:**

— Tiene un mínimo en $x = 2$.

— Su gráfica pasa por el punto (2, 2).

Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(2) = 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$

$f(2) = 4 - 8 + b = 2 \rightarrow b = 6$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6$

$f(1) = 3$

35 **S** **Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto (–2, 1) y presente un mínimo en $x = -3$.**

$y = x^2 + px + q$

$y' = 2x + p \rightarrow y'(-3) = -6 + p = 0 \rightarrow p = 6$

$f(-2) = -8 + q = 1 \rightarrow q = 9$

$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 9$

36 **S** **La función $f(x)$ está definida de la siguiente manera:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0$$

En $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \\ \text{No es continua en } x = 3 \end{array}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 0 & 0 < x < 3 \\ -2x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 0$

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0$ → No es derivable en $x = 0$.

En $x = 3$ → No es derivable pues no es continua.

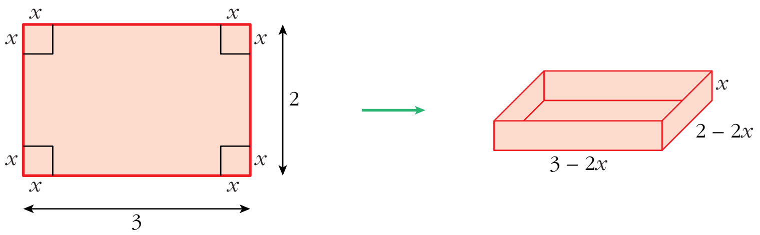
La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.

Página 181

Problemas de optimización

37 S **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0,\ 1)$$

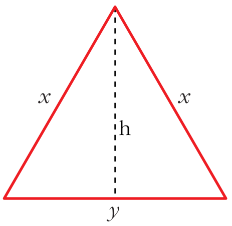
$$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6 - 20x + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \text{ (no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$$

$$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0{,}39) < 0 \;\Rightarrow\; x = 0{,}39 \text{ es máximo.}$$

38 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**



$$\textit{Perímetro} = 2x + y = 30 \;\rightarrow\; y = 30 - 2x$$

$$\textit{Altura} = \text{h} = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\textit{Área} = \frac{y \cdot \text{h}}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225}}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

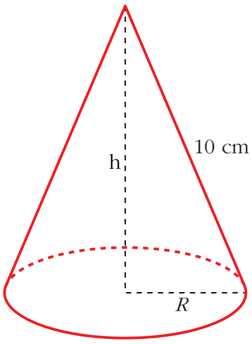
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($x = 15$ no vale, pues quedaría $y = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

39 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$$h^2 + R^2 = 100 \;\rightarrow\; R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

$\Bigg($$f'(h) > 0$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

Luego, en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo$\Bigg)$.

Por tanto, el radio de la base será: $R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \;\rightarrow\; R = \sqrt{\frac{200}{3}}$

40 **Se sabe que el rendimiento, r en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1 - t)$ siendo $0 \leq t \leq 1$, t en horas.**

a) Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento.

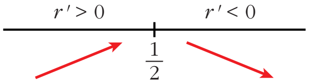
b) ¿Cuándo se anula?

c) ¿Cuándo es máximo?

$r(t) = 300t(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, t en horas.

a) $r'(t) = 300 - 600t$

$r'(t) = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{2}$



$r(t)$ aumenta entre 0 y $\frac{1}{2}$, pues r es creciente.

$r(t)$ disminuye entre $\frac{1}{2}$ y 1, pues r es decreciente.

b) $r(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 300t \cdot (1 - t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ y $t = 1$

c) $r'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$. (Es máximo pues $r' > 0$ a su izquierda y $r' < 0$ a su derecha).

41 **S** **Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad y sabe que si el precio de venta es 750 €, vende 30 unidades al mes y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas de cada mes en 3 unidades. Determina el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante.**

Llamamos: x = nº de veces que se descuentan 20 €.

Así, el precio por unidad será de: $750 - 20x$, y por tanto se venderán $30 + 3x$ unidades al mes; luego el dinero obtenido por las ventas vendrá dado por la función:

$$f(x) = (750 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 1\,650x + 22\,500$$

Maximizar los beneficios es equivalente a maximizar esta función:

$$f'(x) = -120x + 1\,650$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\,650}{120} = 13{,}75$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

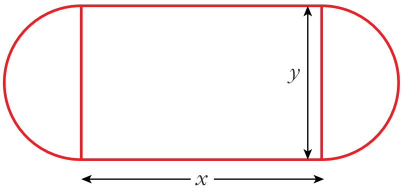
$$f''(x) = -120$$

$$f''(13{,}75) = -120 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 13{,}75 \text{ es máximo}$$

Por tanto, el precio de venta que hace máximos los beneficios es:

$$750 - 20 \cdot x = 750 - 20 \cdot 13{,}75 = 750 - 275 = 475 \text{ €/unidad}$$

42 **S** **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \quad \to \quad x = 50 \text{ m} \quad \to \quad y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50 \text{ es máximo}\right)$$

43
S

El saldo, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}}$$

Deduce razonadamente el valor de t en el que el capital fue máximo.

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

En el primer intervalo se trata de una función afín decreciente que alcanza el máximo valor en 0, $f(0) = 4$.

En el segundo intervalo tenemos otra función afín creciente, por lo que alcanza su máximo valor en 8^-, $f(8^-) = 3{,}36$.

En el tercer intervalo, derivamos:

$$f'(t) = 0{,}2 \cdot (t - 8)$$

Tiene un mínimo en $t = 8$, por lo que alcanza el máximo en el otro extremo del intrvalo: $f(12) = 4{,}96$.

Por tanto, el capital fue máximo en $t = 12$.

44
S

Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. (Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora). La función que expresa dicho rendimiento es: $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$ siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.

a) Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo se produce el mínimo rendimiento.

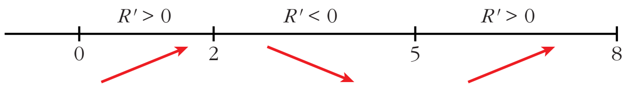
b) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

Vamos a suponer una jornada laboral de 8 horas; es decir:

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3; \quad t \in [0, 8]$$

a) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2$

$$R'(t) = 0 \quad \to \quad 30 - 21t + 3t^2 = 0 \left\langle \begin{matrix} t = 5 \\ t = 2 \end{matrix} \right.$$



$R(0) = 0 \quad R(2) = 26$

$R(5) = 12{,}5 \quad R(8) = 80$

Hay un mínimo relativo en $t = 5$ y un máximo relativo en $t = 2$, pero el mínimo absoluto corresponde a $t = 0$ y el máximo absoluto a $t = 8$ horas.

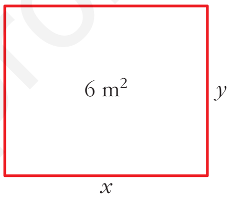
b) $\text{T.V.M.}[2,\ 4] = \dfrac{R(4) - R(12)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

45 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?

a) Área $= x \cdot y = 6 \quad \to \quad y = \dfrac{6}{x}$



Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$C = 5x + \frac{36}{x}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \quad \to \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \quad \to \quad y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\ C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right)$$

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

46 **Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:**

$$\boldsymbol{R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5}$$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$$

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}4$

$R'(x) = 0 \quad \to \quad x = 200$ miles de €.

$(R''(x) = -0{,}002,\ \ R''(200) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 200$ es máximo)

Invirtiendo 200 000 € se obtiene la máxima rentabilidad.

b) $R(200) = 43{,}5$ miles de € = 43 500 €.

47 **Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que este llevaba en el mercado por la función:**

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos 6 años?

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) $P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ -5/2 & 2 < t < 8 \end{cases}$ (No existe $P'(2)$, pues $P'(2^-) \ne P'(2^+)$).

$P(t)$ es creciente en $0 < t < 2$ pues $P'(t) > 0$.

$P(t)$ es decreciente en $2 < t < 8$ pues $P'(t) < 0$.

b) El máximo se alcanza en $t = 2$, $P(2) = 20$.

c) $\text{T.V.M.}[2, 8] = \dfrac{P(8) - P(2)}{8 - 2} = \dfrac{5 - 20}{6} = \dfrac{-15}{6} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$

Página 182

48 **Una empresa de mensajería ofrece estas tarifas:**

— Si la carga es menor de 2 kg, costará 8 € por kilo.

— A partir de 2 kg, el precio por kilo se obtiene restando de 8 el número de kilos que exceden de 2.

La carga máxima que puede llevar un mensajero es 6 kg. Sea x el peso de la carga, $P(x)$ la función que nos da el precio por kilo de carga e $I(x)$ la función que nos da los ingresos de la empresa.

a) Halla las expresiones algebraicas de $P(x)$ e $I(x)$ y represéntalas.

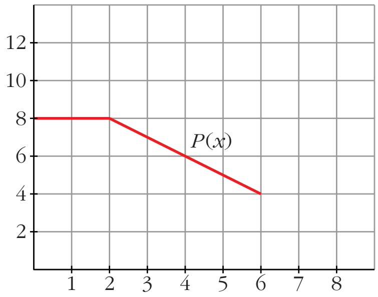
b) ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo ingreso?

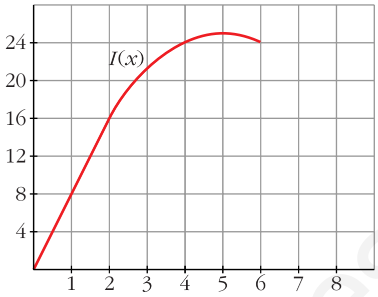
a) Precio por kilogramo de carga:

$$P(x) = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 8 - (x - 2), & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 10 - x, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

Ingresos en función de los kilos de carga:

$$I(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ (10 - x)x, & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ 10x - x^2, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$





b) Se obtiene el máximo ingreso para $x = 5$.

CUESTIONES TEÓRICAS

49 S **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener? ¿Puede tener uno o ninguno?**

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

Por ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{ Dos puntos}$$

$$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Un punto}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0 \text{ para todo } x \;\rightarrow\; \text{Ninguno}$$

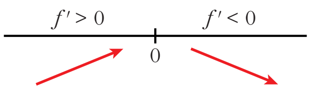
50 S **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

51 S **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$.**
¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a?
En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\qquad$ $f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

52 **S** **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

¿Puede ser $f'(a) > 0$?

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$?

Razona tus respuestas.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\to\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\to$$

$$\to \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\to\; \begin{cases} f'(0) = 0 \;\; (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 \;\; \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

53 **Considera la función $|x|$ (valor absoluto de x):**

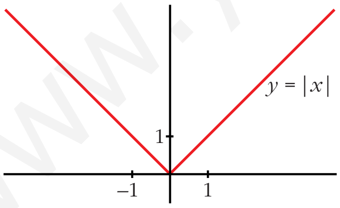
a) ¿Presenta un mínimo relativo en algún punto?

b) ¿En qué puntos es derivable?

Razona tus respuestas.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

54 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable.**

¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$?

Razona tu respuesta.

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \Rightarrow f(x)$ es creciente; es decir, si $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$, y si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Por tanto, no puede ser $f(a) = f(b)$. (En este caso, tendría que existir un punto c entre a y b, en el que $f'(c) = 0$).

55 **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

Justifica tu respuesta.

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \;\rightarrow\; f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

56 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?**

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

57 **S** **De una función $f(x)$ se sabe que:**

$$f(1) = f(3) = 0;\; f'(2) = 0;\; f''(2) > 0$$

¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de esta función?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = f(3) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) > 0 \end{array}\right\}\; f \text{ tiene un mínimo en } x = 2.$$

58 **S** **La representación gráfica de la función derivada de una función f, es una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2).**

Utilizando la gráfica de la derivada:

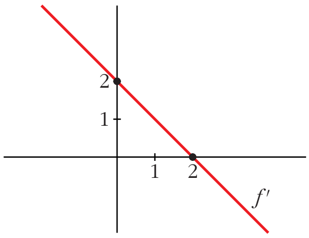
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Estudia si la función f tiene máximo o mínimo.

a) $x < 2 \;\rightarrow\; f' > 0 \;\rightarrow\; f$ creciente

$x > 2 \;\rightarrow\; f' < 0 \;\rightarrow\; f$ decreciente

b) $x = 2 \;\rightarrow\; f' = 0$ y tiene un máximo



59
S **Si la gráfica de la derivada de g es una parábola que corta al eje OX en (0, 0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1), ¿qué puedes decir del crecimiento y decrecimiento de g?**

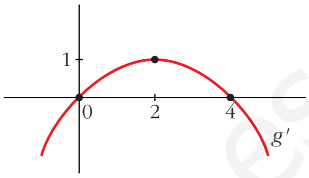
Determina si la función g presenta máximos o mínimos.

Si $x < 0 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

Si $0 < x < 4 \rightarrow g' > 0 \rightarrow g$ creciente

Si $x > 4 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

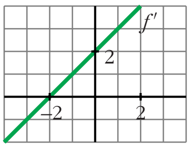
En $x = 0$ tiene un mínimo y en $x = 4$ un máximo.

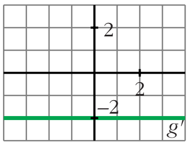


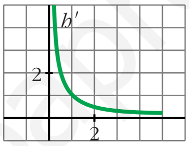
Página 183

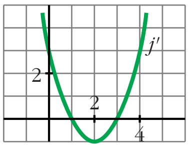
PARA PROFUNDIZAR

⑥⓪ **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones *f*, *g*, *h* y *j*:**









a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

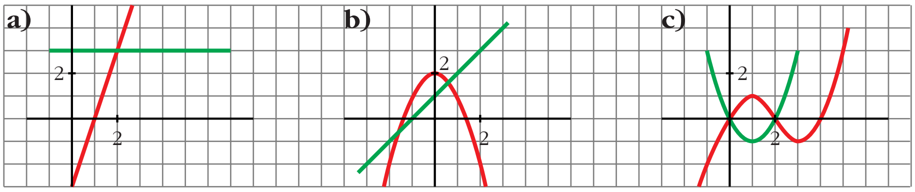
j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

61 **¿Cuál de estas gráficas representa la función f y cuál su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera es válida.

62 Estudia la derivabilidad de estas funciones:

a) $y = \sqrt[3]{x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = ln\,(x^2 - 4)$

a) $y = \sqrt[3]{x}$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

c) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

d) $y = ln(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x < -2$ ó $x > 2$

$f(x)$ es continua si $x < -2$ ó $x > 2$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$f(x)$ es derivable si $x < -2$ ó $x > 2$ (pues para ser derivable ha de ser continua).

63 **Sea la función:** $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

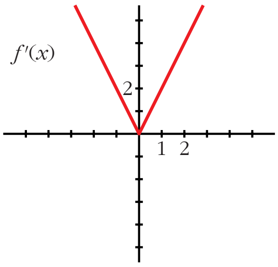
Halla $f'(x)$**,** $f''(x)$ **y represéntalas.**

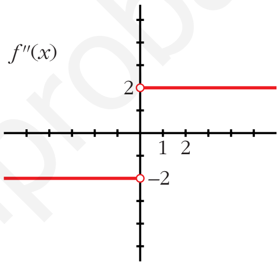
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, pues $f''(0^-) \ne f''(0^+)$.





64 **Prueba que la función** $f(x) = x + |x - 3|$ **no es derivable en** $x = 3$**.**

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \ne f'(3^+) = 2$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

65 **Calcula la derivada de orden** n **de la función** $f(x) = e^{2x}$**.**

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x}$$

$$\dots$$

$$f^n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$$

66 **Dada la función** $f(x) = e^x + ln(1 - x)$**, comprueba que** $f'(0) = 0$ **y** $f''(0) = 0$**.** **¿Será también** $f'''(0) = 0$**?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \quad \to \quad f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1-x)^2} \quad \to \quad f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1-x)^3} \quad \to \quad f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

67 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

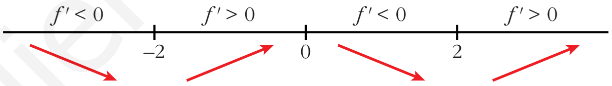
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en (0, 4).

  No tiene máximo absoluto ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$).

- Tiene un mínimo relativo en (–2, 0) y otro en (2, 0). En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

68 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

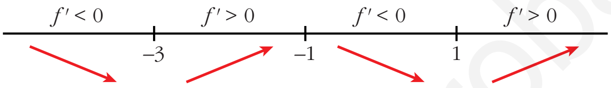
$$2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$$

Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

$$-2x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -1 \quad \text{y} \quad f'(x) = -2x - 2 \quad \text{para} \quad -3 < x < 1$$

Por tanto $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, -4)$

tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

69 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \quad \to \quad 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \quad \to \quad 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \quad \to \quad 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

70 **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.

- **En $x = –1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } -2 + a = -a + b, \text{ es decir: } b = 2a - 2.$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0; \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases} \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \ne f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

71 **¿Existe algún punto en el que $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ no sea derivable?**

Justifica tu respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$** → Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

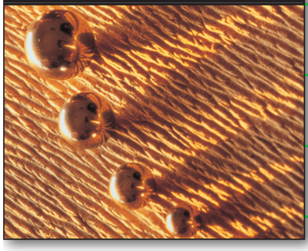
- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

  No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

UNIDAD 7 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES



Página 184

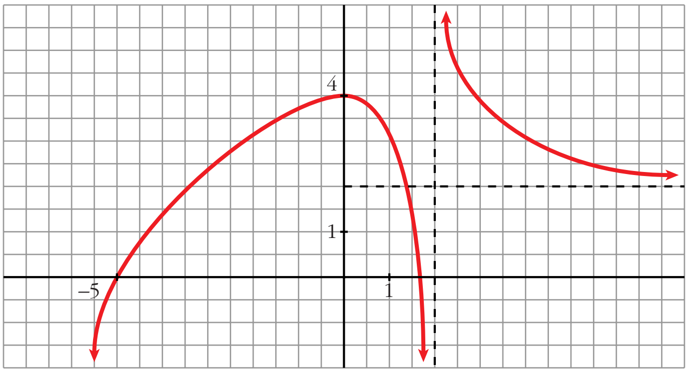
Descripción de una gráfica

1. ■ Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.

(La solución está en el propio ejercicio).

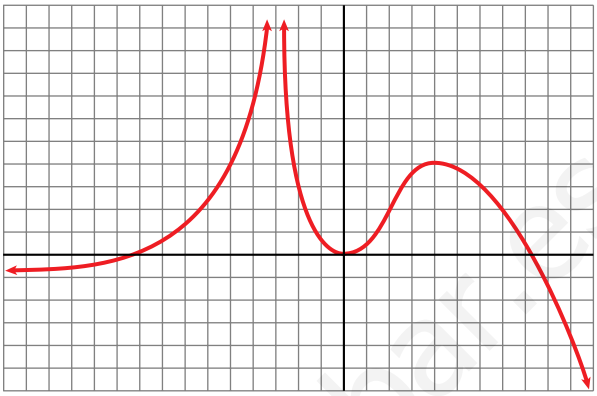
2. Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4;\ f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0;\ f(1{,}75) = 0$
- f es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = 2$.



Página 185

3. Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

4. Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.

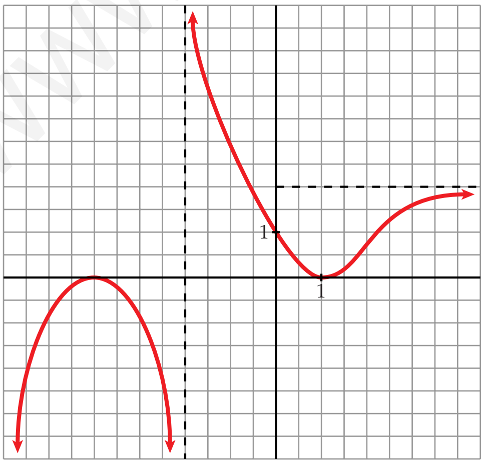
Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación?

¿Hay, acaso, error en la descripción?

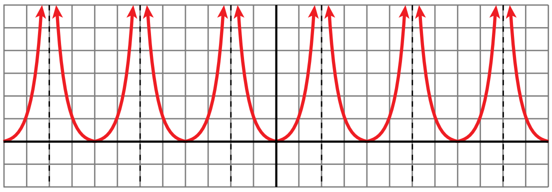
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa esta gráfica:



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

$$x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ x = -7,\ \ x = 12,$$
$$x = -400,\ \ x = 13,\ \ x = -199$$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(3) = 1;\ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ f(-400) = 0;\ f(13) = 1;\ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de periodo 4.

- Simetría → Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

  Periodicidad → Es periódica de periodo 4.

Página 186

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

2. Halla el dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = \ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 187

3. Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = sen\ x + 1/2\ (cos\ x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* $= \mathbb{R}$

$$f(-x) = sen(-x) + \frac{1}{2}cos(-x) = -sen\ x + \frac{1}{2}cos\ x$$

No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Página 188

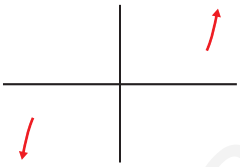
4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **e)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

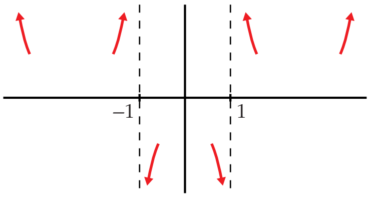
b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Ramas parabólicas

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



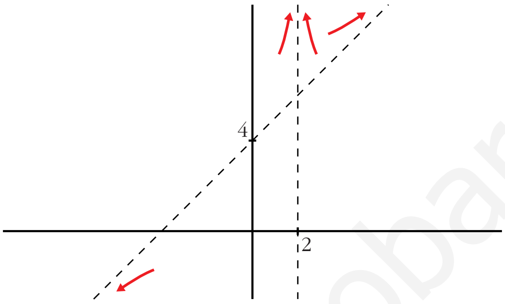
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

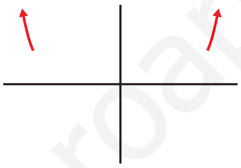
$$f(x) - (x+4) = \frac{12x-16}{x^2-4x+4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) - (x+4) > 0 & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ f(x) - (x+4) < 0 & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$



d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

e) $y = ln(x^2+1)$

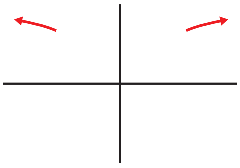
- *Dominio* = ℝ
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.

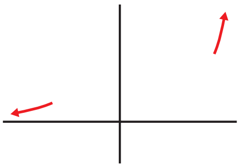


f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x.

- *Dominio* = ℝ
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- No hay asíntotas verticales.



Página 189

5. **Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:**

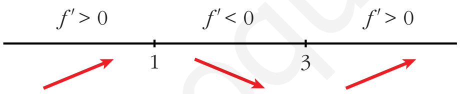
a) $\boldsymbol{y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x^2 + 1)}$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \;\; \to \;\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

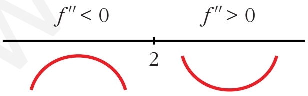


Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\; \to \;\; 6x - 12 = 0 \;\; \to \;\; x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

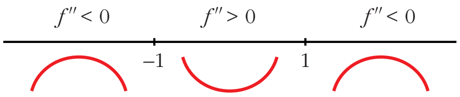
$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; 2x = 0 \;\; \to \;\; x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \;\; \text{para} \;\; x < 0 \\ f''(x) > 0 \;\; \text{para} \;\; x > 0 \end{array}\right\}$$ Hay un mínimo en (0, 0).

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2+2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

6. Halla los puntos singulares de:

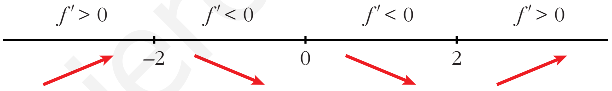
a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2-2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



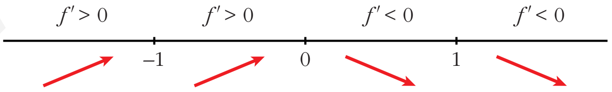
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

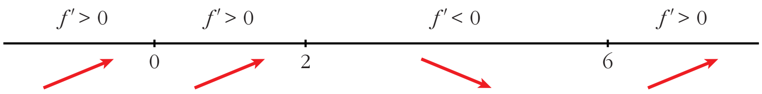
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \frac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin$ *Dominio*.

No hay puntos singulares.

Página 191

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **b)** $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ **c)** $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 7$ → Punto $(0, 7)$

— Con el eje X → $y = 0$ → $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

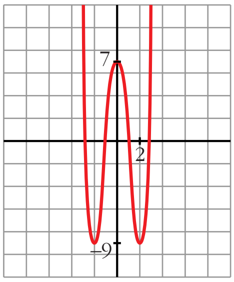
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x^2 - 16 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

  Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 0$ → Punto (0, 0)

  — Con el eje X → $y = 0$ → $x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

  $\begin{cases} x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Puntos de inflexión:**

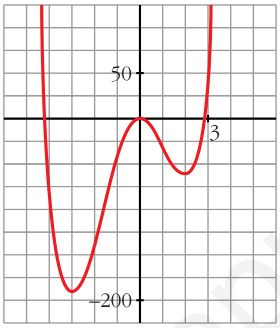
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

- **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad 4(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Bigg\} \text{ Puntos } (1,\ 7);\ (-1,\ -9);\ (3,\ -9)$$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (–1,65; 0)

- **Puntos de inflexión:**

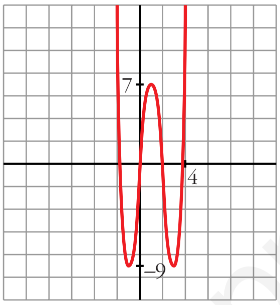
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{cases}$$

Puntos: (2,15; –1,83) y (–0,15; –1,74)

- **Gráfica:**



2. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **b)** $y = x^3 - 3x$ **c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 12x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (0, –16); (1, –17)

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y → $x = 0$ → $y = -16$ → Punto (0, –16)

— Con el eje X → $y = 0$ → $3x^4 - 4x^3 - 16 = 0$ →

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$$

$3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ → tiene una sola raíz, que está entre –2 y –1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

Puntos (2, 0) y (k, 0), con k entre –2 y –1.

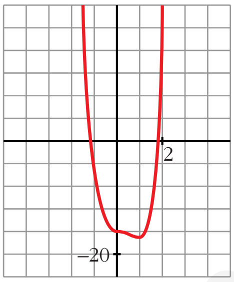
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \quad \to \quad 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

  Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

  Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

  — Con el eje $X \to y = 0 \to x^3 - 3x = 0 \to x(x^2 - 3) = 0$

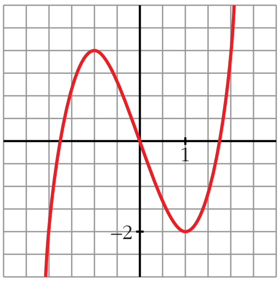
  $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}\Bigg\}$ Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$; $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to$ Punto $(0, 0)$

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = x^3 - 4x$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos: $(0, 0)$; $(-2, -4)$; $(2, -4)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 0$ → Punto $(0, 0)$

  — Con el eje X → $y = 0$ → $x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

  $$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: $(0, 0)$; $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$; $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

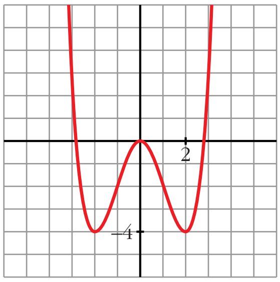
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 3x^2 - 4$

  $$f''(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

  Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



Página 193

1. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

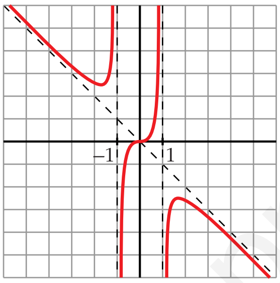
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Puntos: $(0,\ 0);\ \left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(\sqrt{3},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

  Corta a los ejes en (0, 0).

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

  $$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \quad \rightarrow \quad y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

  Posición de la curva respecto a la asíntota:

  $f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por encima)

  $f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

  La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

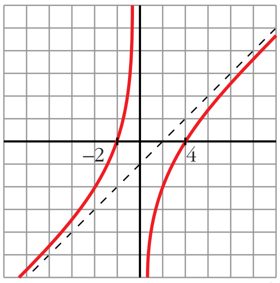
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje X → $y = 0$ → $x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4}$ → $y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-9)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2+9)}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 10x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; \text{Punto } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

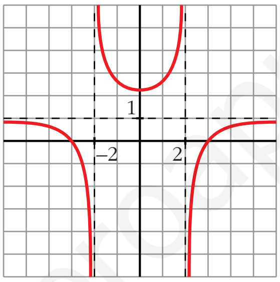
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = \frac{9}{4} \;\to\;$ Punto $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \;\to\; y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \to +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)(x^2+1) - (x^3+2x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^4 + x^2 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^3 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2+2) = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

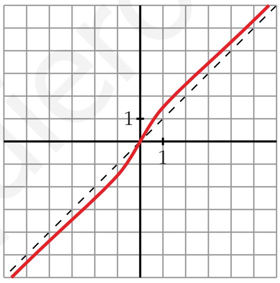
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3+2x)(x^2+1)^2 - (x^4+x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3+2x)(x^2+1) - 4x(x^4+x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{Puntos: } (0, 0);\ \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right);\ \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Página 195

1. Representa:

a) $y = e^{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **c)** $y = ln(x^2+4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.

- **Simetría:**

$f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. Es una función par: es simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal. Además, como $e^{1-x^2} > 0$ para todo x, la curva se sitúa por encima de la asíntota.

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\;$ Punto $(0, e)$

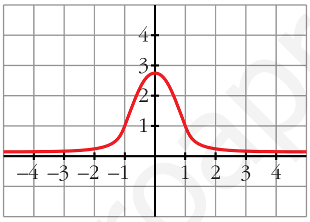
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = -2e^{1-x^2} + (-2x)\cdot(-2x)e^{1-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1-x^2}$

  $f''(x) = 0 \;\to\; 4x^2 = 2 \;\to\; x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \approx 0{,}7 \;\to\; f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \approx 1{,}65$

  Puntos de inflexión: (–0,7; 1,65), (0,7; 1,65)

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

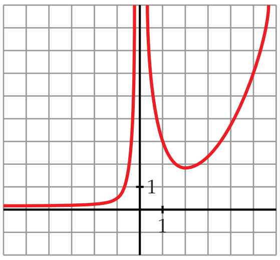
  $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

  $f'(x) = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\;$ Punto $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = ln\ (x^2 + 4)$

- **Dominio:**

  Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, $D = \mathbb{R}$.

- **Simetrías:**

  $f(-x) = ln\ (x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\ (x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

  Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

  Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

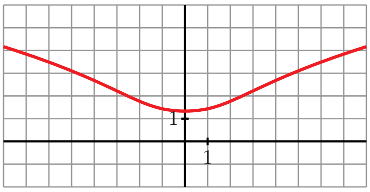
$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ \text{Punto } (0,\ ln\ 4)$$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \text{Puntos: } (-2,\ ln\ 8) \text{ y } (2,\ ln\ 8)$$

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = \sqrt{3}\ \operatorname{sen} x + \cos x$

a) $y = \ln (x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \ \rightarrow \ D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \ln (x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$. No tiene puntos singulares, pues la función no está definda en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

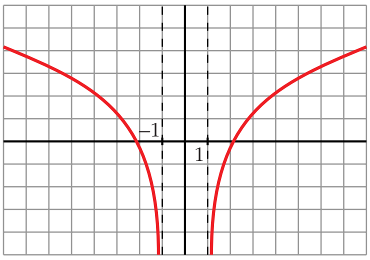
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \ln (x^2 - 1) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Puntos: } \left(-\sqrt{2}, 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{2}, 0\right)$$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{3}\ sen\ x + cos\ x$

- Está definida, y es *continua* y *derivable* en todo $\mathbb{R}$.
- Es *periódica* de periodo $2\pi \ \rightarrow$ solo la estudiamos en $[0, 2\pi]$.
- No existe $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \ \rightarrow$ no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ f(0) = 1 \ \rightarrow$ Punto (0, 1)

— Con el eje $X \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ \sqrt{3}\ sen\ x + cos\ x = 0$

$$\sqrt{3}\ tg\ x + 1 = 0 \ \rightarrow \ tg\ x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ x = \frac{5\pi}{6} \ \text{ o } \ x = \frac{11\pi}{6}$$

Puntos $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right); \ \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \sqrt{3}\ cos\ x - sen\ x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \sqrt{3}\ cos\ x - sen\ x = 0 \ \rightarrow \ \sqrt{3} - tg\ x = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ tg\ x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \ \rightarrow \ \text{Punto } \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \ \rightarrow \ \text{Punto } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

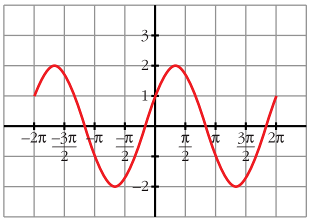
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -\sqrt{3}\ sen\ x - cos\ x = -f(x)$

$f''(x) = 0 \ \leftrightarrow \ f(x) = 0$

Los puntos de inflexión son los de corte con el eje X.

- **Gráfica:**



Página 202

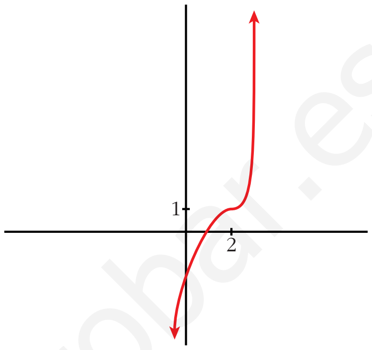
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \; f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x.$$

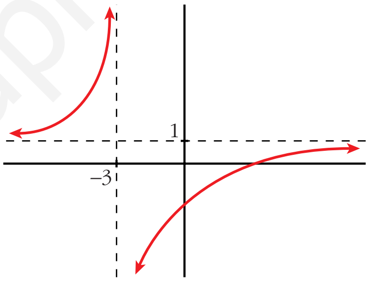


2 **Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:**

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \; f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, \; f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



3 **De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:**

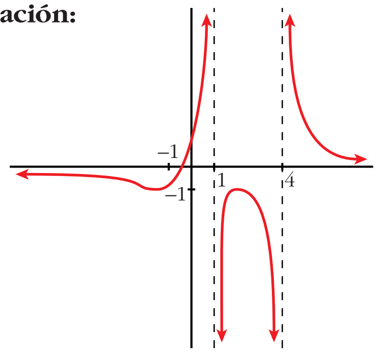
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \; \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \; \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \; \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty; \; \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

$$(\text{si } x \to +\infty, \; f(x) > 0; \; \text{ si } x \to -\infty, \; f(x) < 0)$$

$$f'(2) = 0, \; f(2) = -1; \; f'(-1) = 0, \; f(-1) = -1$$

Represéntala.

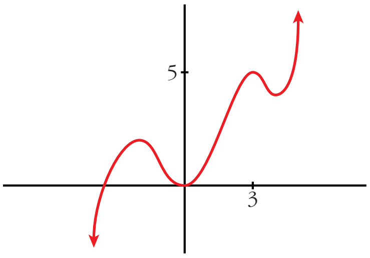


4 **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, \; x = 0, \; x = 3, \; x = 4$$

$$f(-2) = 2; \; f(0) = 0; \; f(3) = 5; \; f(4) = 4$$



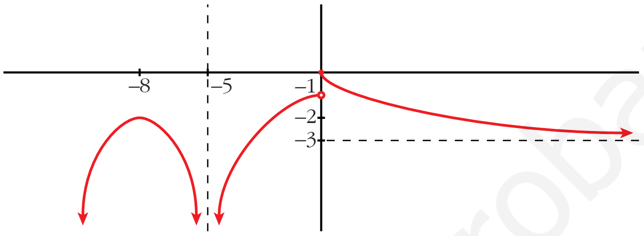
5 **S** **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

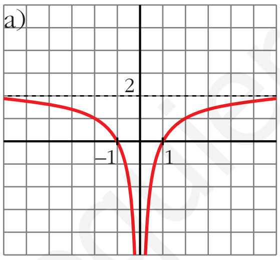
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ es el único punto donde $f(x)$ se anula.

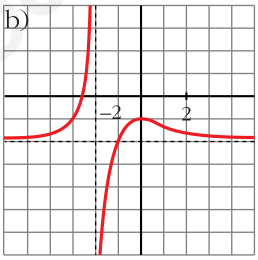
$f'(-8) = 0$ y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

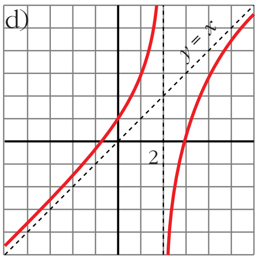
La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.



6 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**







a) • Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntotal horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota vertical: $x = -2$. Asíntotal horizontal: $y = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$
- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares: no tiene.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7
S **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 = -2 \to$ no tiene solución.

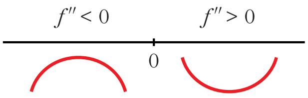
$f'(x) > 0$ para todo $x \to f(x)$ es creciente.

No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 0$

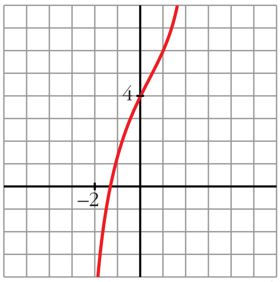
Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Gráfica:**



8 **S** **Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:**

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.

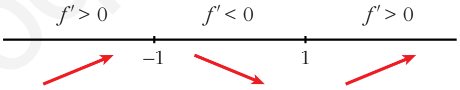
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

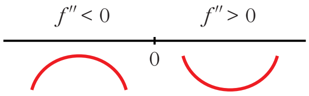
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:

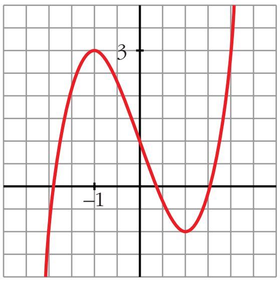


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



9 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

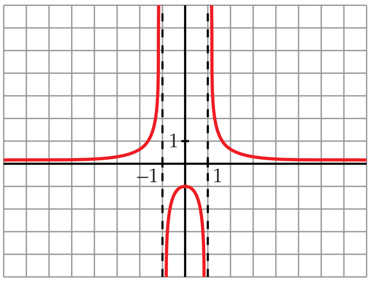
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

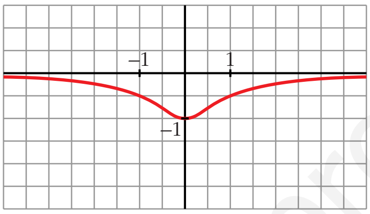
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = 0$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

  $\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = 0$

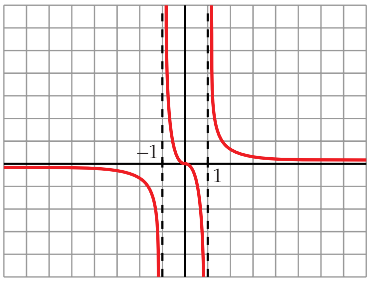
  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

  $y = 0$ es asíntota horizontal.

  $$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to -1^-}{\text{lím}} f(x) = -\infty \\ \underset{x \to -1^+}{\text{lím}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 1^-}{\text{lím}} f(x) = -\infty \\ \underset{x \to 1^+}{\text{lím}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

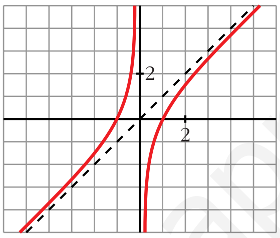
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

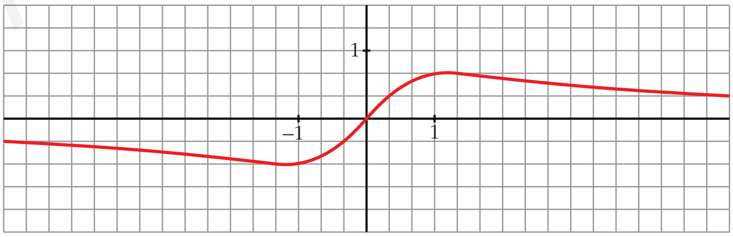
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

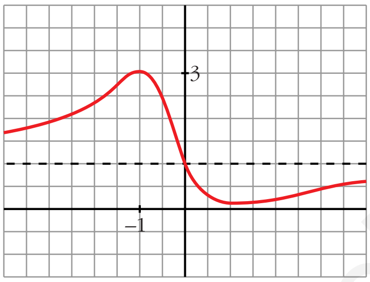
- **Asíntotas:**

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

  $y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**



Página 203

10 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones estudiando ramas infinitas, máximos y mínimos y puntos de inflexión:**

a) $y = x^3 - 3x + 1$

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

c) $y = x^3 - x^2$

d) $y = x^3 - 3x$

a) $y = x^3 - 3x + 1$

- **Ramas infinitas:**

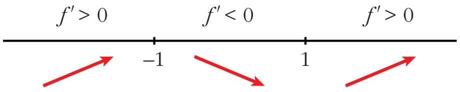
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Máximos y mínimos:**

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $$f'(x) = 0 \to 3(x^2 - 1) = 0 \to x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:



Máximo en (–1, 3).

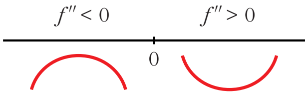
Mínimo en (1, –1).

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 6x$

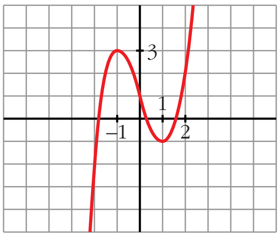
  $f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 0$

  Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en (0, 1).

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Ramas infinitas:**

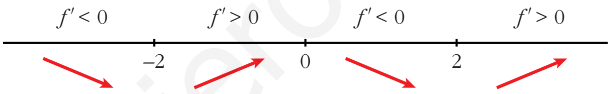
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x^2 - 4) = 0$ < $x = 0$; $x^2 - 4 = 0$ < $x = -2$; $x = 2$

Signo de $f'(x)$:



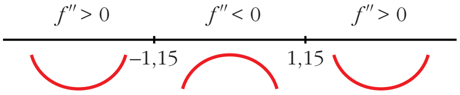
Máximo en (0, 0). Mínimos en (–2, –4) y en (2, –4).

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

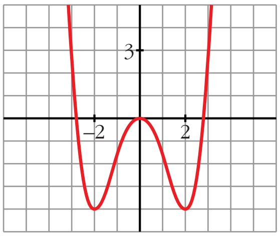
$f''(x) = 0 \quad \to \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \to \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1{,}15$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $\left(-1{,}15; -\frac{20}{9}\right)$; $\left(1{,}15; -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = x^3 - x^2$

- **Ramas infinitas:**

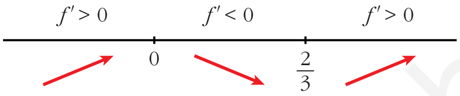
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



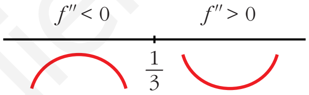
Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{27}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x - 2$

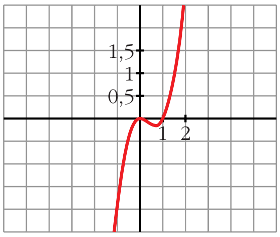
$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x - 2 = 0 \quad \to \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$

- **Gráfica:**



d) $y = x^3 - 3x$

- **Ramas infinitas:**

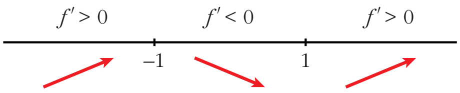
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



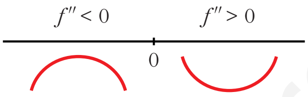
Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

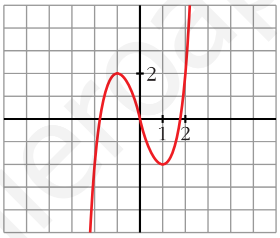
$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



11 S **Representa las siguientes funciones determinando previamente sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus máximos y mínimos:**

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

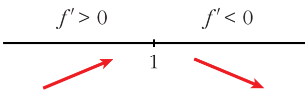
c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = -6x + 6$

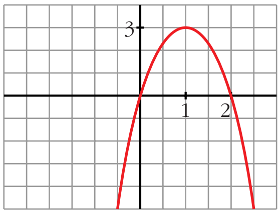
$f'(x) = 0 \rightarrow -6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$; es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 3)$.

Gráfica:

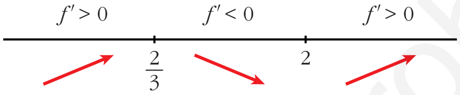


b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \left\langle \begin{array}{l} x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

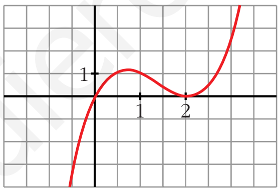
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Gráfica:

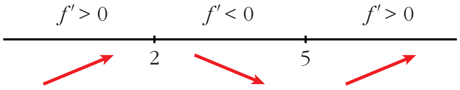


c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$

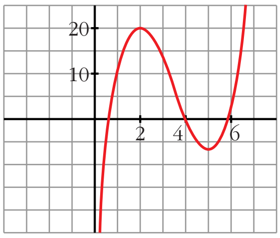
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6(x^2 - 7x + 10) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$; es decreciente en $(2, 5)$. Tiene un máximo en $(2, 20)$ y un mínimo en $(5, -7)$.

Gráfica:



12 **Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de las siguientes funciones. Con la información obtenida, represéntalas:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{4-x^2}$

d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Ramas infinitas:**

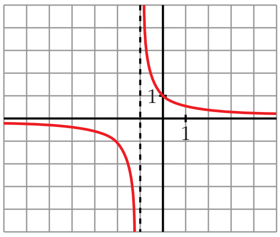
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty,\ f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad \to$ $f(x)$ es decreciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \ \to \text{ la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

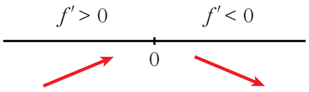
No tiene asíntotas verticales.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{(4 + x^2)^2}$$

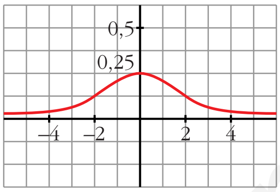
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to +\infty \text{ y si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

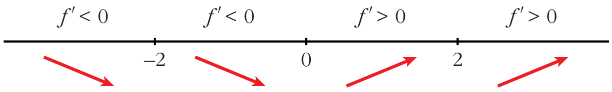
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$$

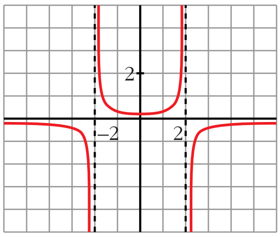
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Ramas infinitas:**

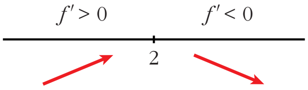
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \quad \to \quad \text{la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

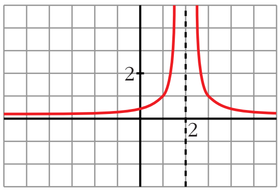
$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

$f'(x) \neq 0$. Signo de $f'(x)$:



No tiene puntos singulares.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblícua.

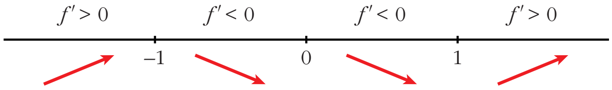
$(f(x) < x \;\text{ si }\; x \to -\infty;\;\; f(x) > x \;\text{ si }\; x \to +\infty)$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; x^2 - 1 = 0 \;\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

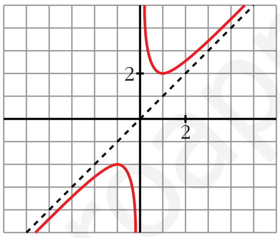
Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, -2)$

y mínimo en $(1, 2)$.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ &(f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\; f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{aligned}$$

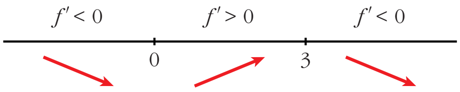
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3-x)}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

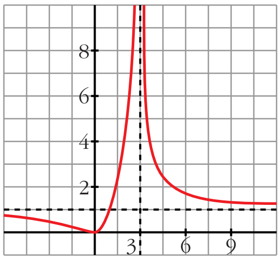
$$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; -6x = 0 \;\;\to\;\; x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



13 **S** **En las siguientes funciones se pide: dominio de definición, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los posibles máximos o mínimos.**

Con la información obtenida, represéntalas:

a) $y = \dfrac{2x + 2}{3x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x - 4}$ **c)** $y = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ **e)** $y = \dfrac{(x + 2)^2}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x}$

a) $y = \dfrac{2x + 2}{3x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-2}{3} \rightarrow$ Punto $\left(0, \dfrac{-2}{3}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto $(-1, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(3x - 3) - (2x + 2) \cdot 3}{(3x - 3)^2} = \frac{6x - 6 - 6x - 6}{(3x - 3)^2} = \frac{-12}{(3x - 3)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

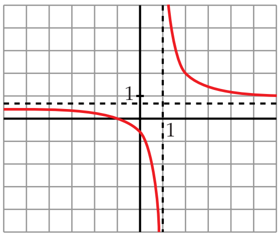
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2}{3} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{2}{3} \text{ es asíntota horizontal.} \\ \left(f(x) < \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to +\infty\right) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x}{x-4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{4\}$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 0$ → Punto $(0, 0)$

  — Con el eje X → $y = 0$ → $x = 0$ → Punto $(0, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

  $$f'(x) = \frac{x-4-x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

  $f'(x) \neq 0$ para todo x.

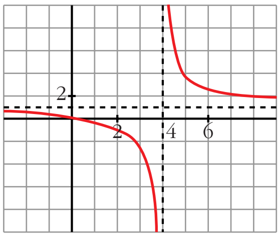
  $f'(x) < 0$ → $f(x)$ es decreciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- **Ramas infinitas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 4 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

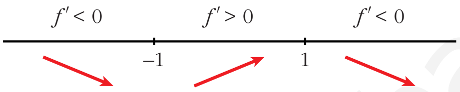
— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x - 1 - 2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crece en $(-1, 1)$.

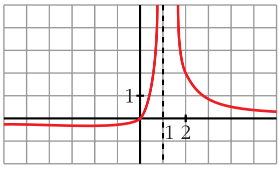
Tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{4}\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

- **Dominio:**

$x^2 - 2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$. No tiene solución. Por tanto:

Dominio: $\mathbb{R}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$ Punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

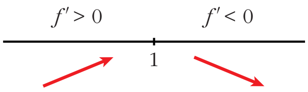
— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow$ Como $y \neq 0$, no corta al eje X.

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 2x - 2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 1$$

Signo de $f'(x)$:



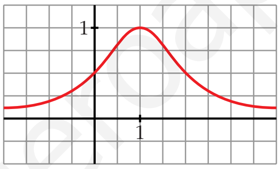
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 1)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 4$ → Punto $(0, 4)$

— Con el eje X → $y = 0$ → $x = -2$ → Punto $(-2, 0)$

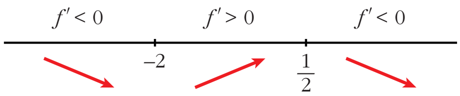
- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+1) - (x+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)[2x^2+2-2x(x+2)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)(2x^2+2-2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)(2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; (x+2)(2-4x) = 0 \;\; \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; es creciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

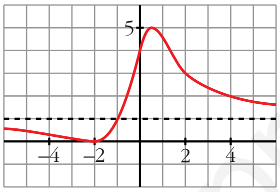
Tiene un mínimo en $(-2, 0)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Cortes con los ejes:**

— No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

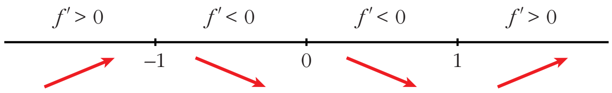
— No corta al eje X, pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x.

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 1) \cdot 3}{9x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{3x^2} = \frac{x^2 - 1}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 1 = 0 \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

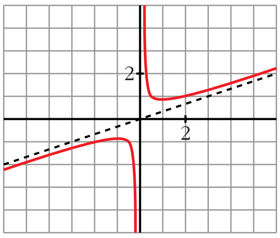
Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ y tiene un mínimo en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 0 \text{ es asíntota vertical. } y = \frac{x}{3} \text{ es asíntota oblícua.}$$

$$\left(f(x) < \frac{x}{3} \;\text{ si }\; x \to -\infty; \;\; f(x) > \frac{x}{3} \;\text{ si }\; x \to +\infty \right)$$

- **Gráfica:**



PARA RESOLVER

14 **S** **Representa las siguientes funciones estudiando previamente:**

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$ **b)** $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ **c)** $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

d) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ **e)** $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ **f)** $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$ **h)** $y = \frac{x^2}{9-x^2}$ **i)** $y = \frac{x^2+4}{x}$

j) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$ **k)** $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$ **l)** $y = \frac{x^4}{x^2-4}$

m) $y = \frac{x^3}{x+2}$ **n)** $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \;\text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

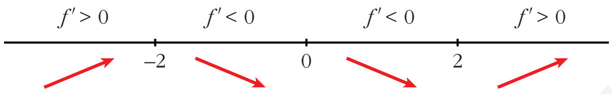
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de la derivada:



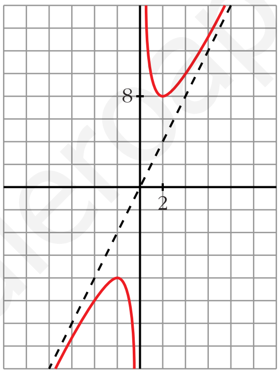
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x + 1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

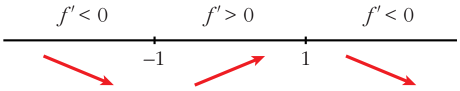
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = \dfrac{2(x + 1)^2 - 2x \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \dfrac{(x + 1)(2x + 2 - 4x)}{(x + 1)^4} = \dfrac{-2x + 2}{(x + 1)^3}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

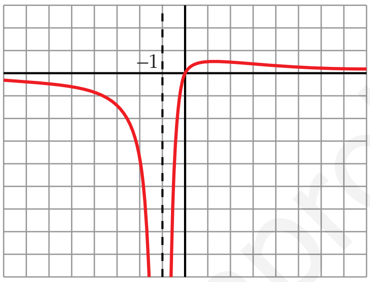


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

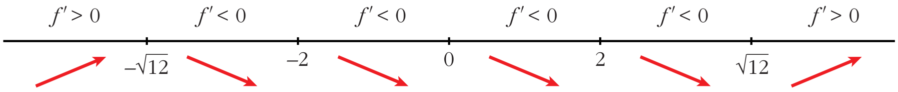
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 12) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



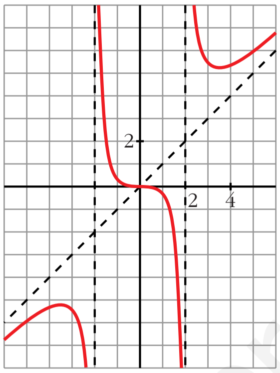
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

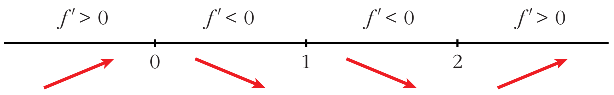
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

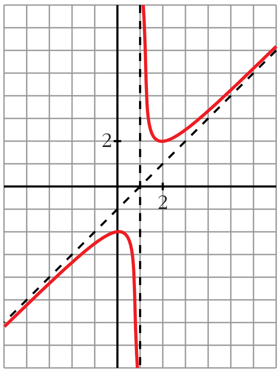
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$ y tiene un mínimo en $(2, 2)$

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asíntotas:**

$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} \ f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \ f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 2^-}{\text{lím}} \ f(x) = -\infty \\ \underset{x \to 2^+}{\text{lím}} \ f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = 2 \ \text{ es asíntota vertical}$$

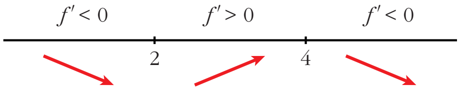
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ -4x + 16 = 0 \ \rightarrow \ x = 4$

Signo de $f'(x)$:

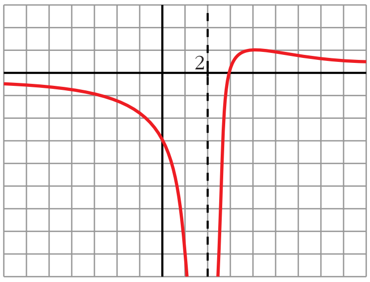


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

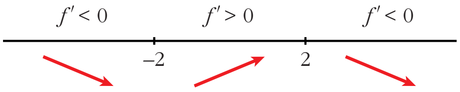
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -x-2 = 0 \quad \to \quad x = -2$$

Signo de $f'(x)$:

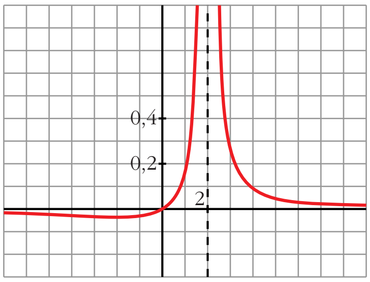


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2-4x+3}{x-2} = x-2-\frac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

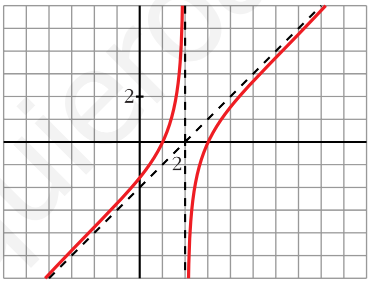
$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



h) $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

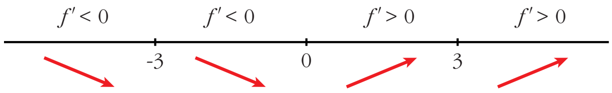
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 18x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

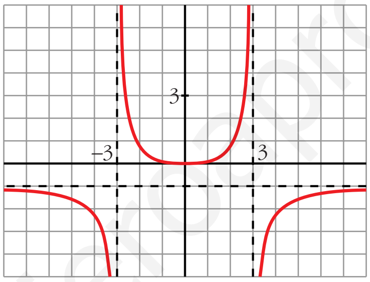


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

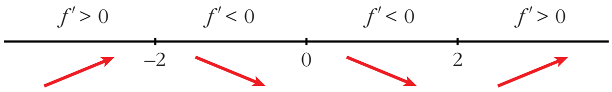
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



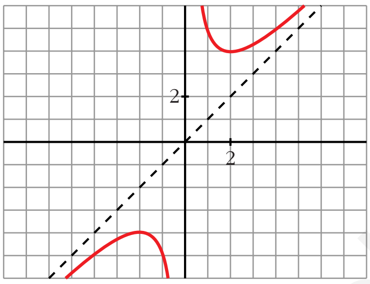
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

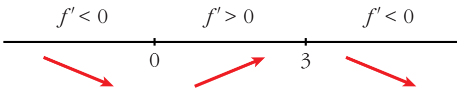
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

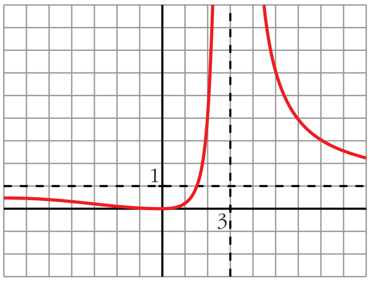


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $y = 2x$ es asíntota oblicua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

  $$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

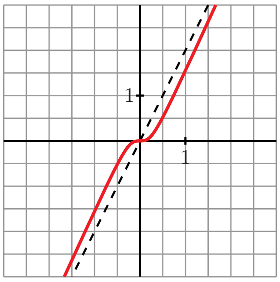
  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x^2+3) = 0 \quad \to \quad x = 0$

  Signo de $f'(x)$:

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

  $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

- **Gráfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

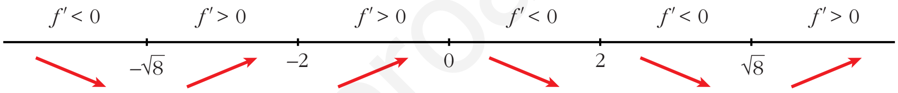
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



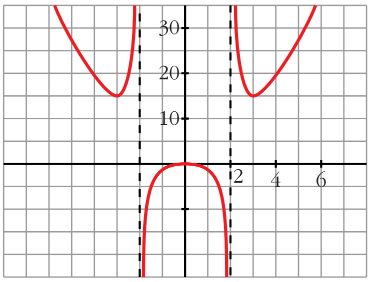
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

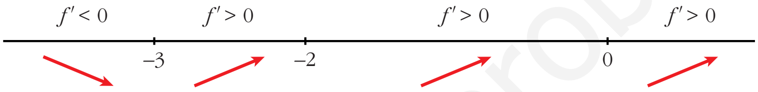
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x+3) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = -3 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



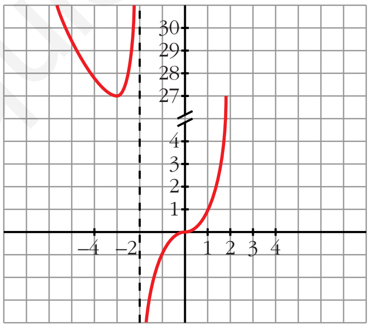
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

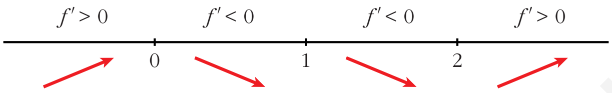
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



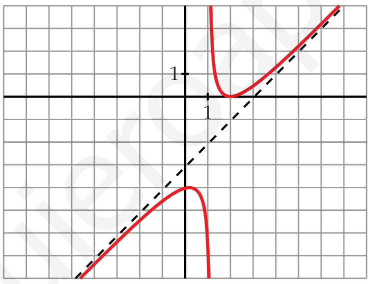
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

- **Gráfica:**



15 **S** **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$.**

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ es asíntota oblicua.

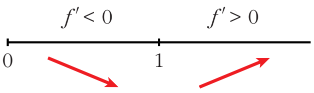
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$)

Signo de $f'(x)$:



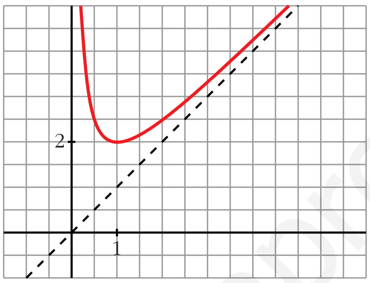
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

es creciente en $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



16 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de *f*.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

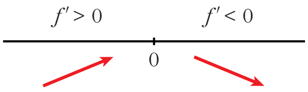
No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \ \rightarrow \ \text{la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

b) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

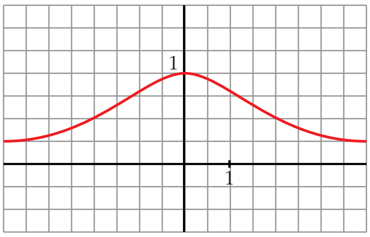
$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

c)



Página 204

17 **S** **Representa gráficamente la función: $p(x) = x^4 + 4/3\,x^3 + 2x^2 - 2$**

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

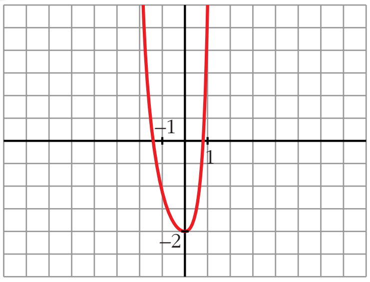
$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$
- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

  $p'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.
- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \;\rightarrow$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.
- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

18 **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 + 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to$ Rama parabólica

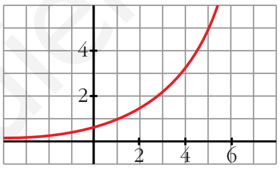
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

  $$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 3) - e^x 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$. No tiene solución.

  $f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje Y en $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

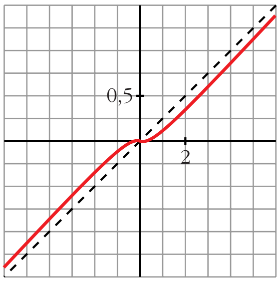
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

  $$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(4x^2 + 3) = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad (0, 0)$

  $f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \quad \to \quad f(x)$ es creciente $\big($tiene un punto de inflexión en $(0, 0)\big)$

- **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{aligned}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

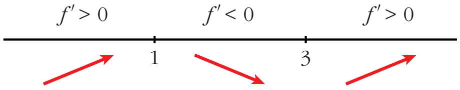
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-1)^3 = 8 \quad \to \quad x - 1 = 2 \quad \to \quad x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

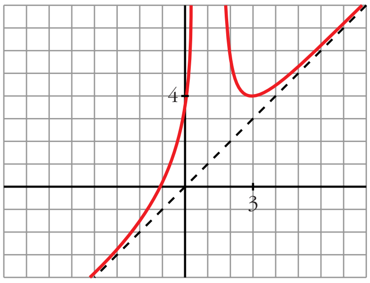


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 - 1) - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{3x^2(x^3 - 1 - x^3 - 8)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-27x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

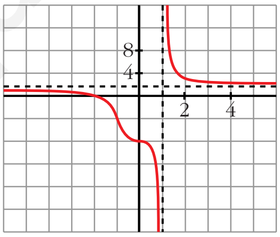
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -27x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) < 0 \;\rightarrow\; f(x)$ es decreciente en su dominio.

(Tiene un punto de inflexión en $(0, -8)$).

- **Gráfica:**



19 **Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = \text{sen}\, x + \cos x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh}\, x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x + e^{-x} = 0 \;\rightarrow\;$ no tiene solución $\rightarrow$

$\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

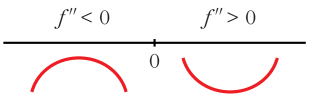
$f'(x) > 0$ para todo $x \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0$$

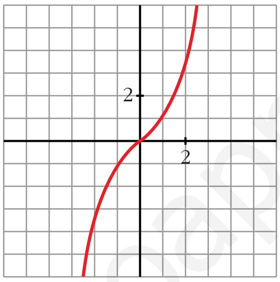
$$e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (0, 0).

- **Gráfica:**

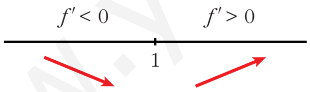


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \textit{cosh}\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$$

Signo de $f'(x)$:

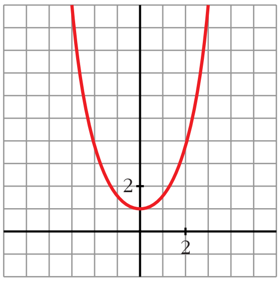


Hay un mínimo en (0, 1).

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0$ → no tiene solución → no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**

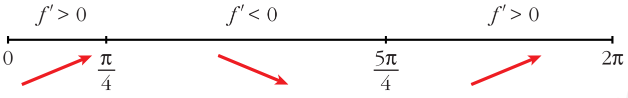


c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ x = sen\ x \ \rightarrow \ tg\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

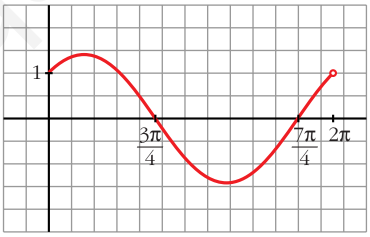
- $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ sen\ x = -cos\ x \ \rightarrow \ tg\ x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:

Hay un punto de inflexión en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



20 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\ x}{x}$ **c)** $y = x\ ln\ x$

d) $y = (x - 1)e^x$ **e)** $y = xe^{x+1}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^2}{ln\ x}$ **h)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

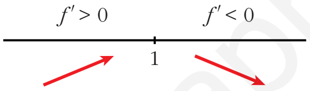
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$$

  Signo de $f'(x)$



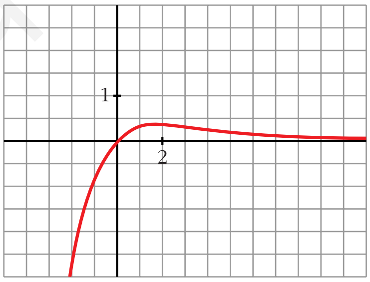
  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

  es decreciente en $(1, +\infty)$

  tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{ln\,x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

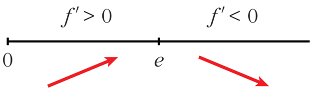
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \rightarrow \quad x = e$$

Signo de $f'(x)$:



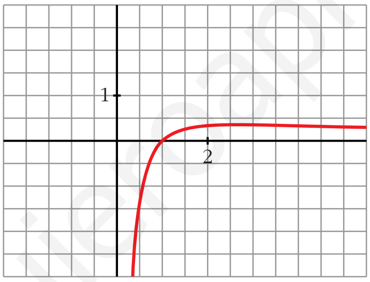
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

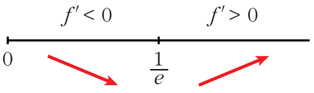
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



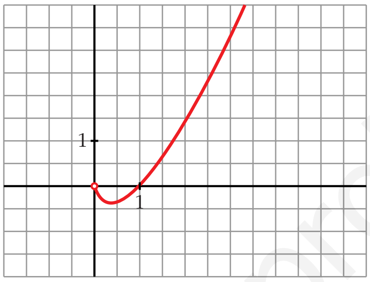
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

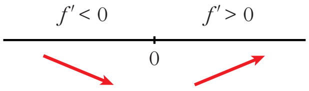
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**

e) $y = xe^{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty)$

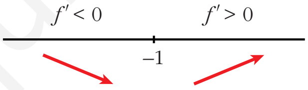
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1 + x)e^{x+1}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signo de $f'(x)$:

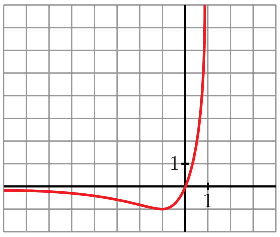


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.
- **Gráfica:**



f) $y = x^2e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

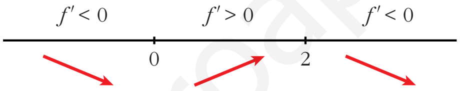
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

  $$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:



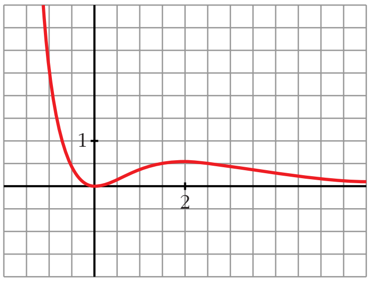
  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

  es creciente en $(0, 2)$

  tiene un mínimo en $(0, 0)$

  tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^2}{ln\ x}$

- **Dominio:**

  $ln\ x = 0 \quad \to \quad x = 1.$ Además, ha de ser $x > 0$.

  Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

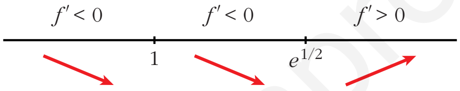
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\, ln\, x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(ln\, x)^2} = \frac{2x\, ln\, x - x}{(ln\, x)^2} = \frac{x(2ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(2ln\, x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ ln\, x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = e^{1/2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

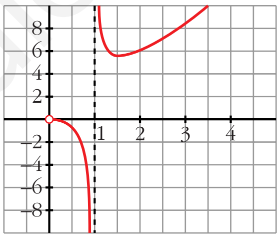


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/2})$

es creciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/2}, 2e)$.

- **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; 2x = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 0$

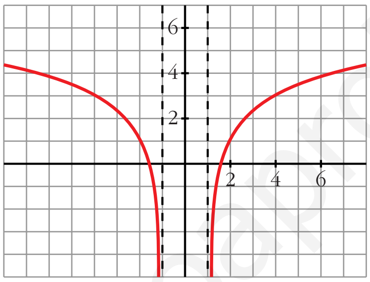
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje** ***X*****:**

$$ln(x^2 - 1) = 0 \;\; \rightarrow \;\; x^2 - 1 = 1 \;\; \rightarrow \;\; x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

- **Gráfica:**



21 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **c)** $y = \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

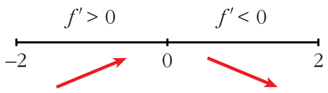
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Dominio:** $[-2, 2]$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

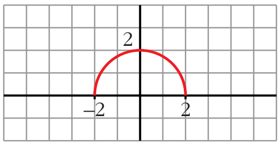
$f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Simetría:**

  $f(-x) = f(x) \;\rightarrow\;$ Es par $\;\rightarrow\;$ Simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

  $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x] =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

  $y = x$ es asíntota oblícua cuando $x \to +\infty$. $(f(x) < x)$

  Por simetría (pues $f(x)$ es par), deducimos que:

  $y = -x$ es asíntota oblícua cuando $x \to -\infty$.

  $(f(x) < -x)$

- **Puntos singulares:**

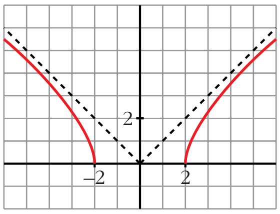
  $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (que no está en el dominio)

  No tiene puntos singulares.

  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

- Pasa por $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.
- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Simetría:**

  $f(-x) = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- No tiene asíntotas.
- **Ramas infinitas:**

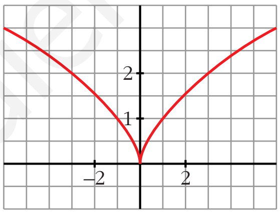
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

  No existe $f'(0) \to f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.
- Pasa por $(0, 0)$.
- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

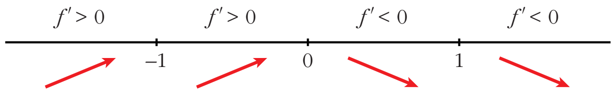
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}} \to f(x) \text{ no es derivable en } x = -1 \text{ ni en } x = 1.$$

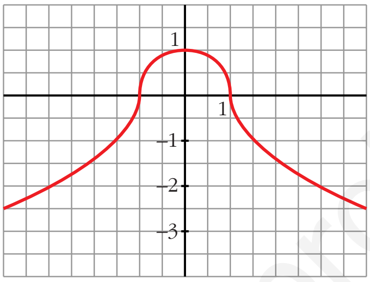
$$f'(x) = 0 \to -2x = 0 \to x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

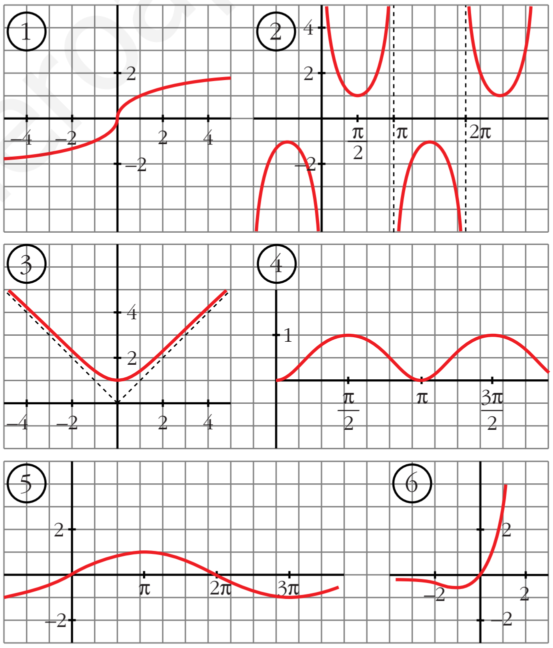


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Corta al eje X en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**



22 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las que están representadas a continuación:**



a) $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{sen\ x}}$

b) $\boldsymbol{y = x\,e^x}$

c) $\boldsymbol{y = sen\ \dfrac{x}{2}}$

d) $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$

e) $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 1}}$

f) $\boldsymbol{y = sen^2\ x}$

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- **Dominio:**

$sen\ x = 0 \quad \to \quad x = 0 + \pi k;\quad k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} - \{\pi k\},\quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

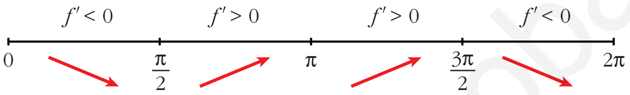
  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $$f'(x) = \frac{-\cos x}{sen^2 x}$$

  $$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

  Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



  $f(x)$ es periódica de periodo 2π.

  $f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

  es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

  tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

  tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gráfica** → ②

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

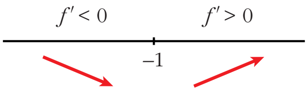
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\rightarrow\; \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$

- **Gráfica** → ⑥

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

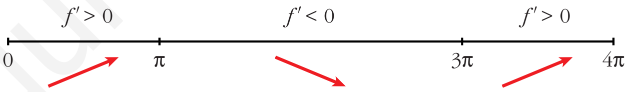
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ cos\ \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ cos\ \frac{x}{2} = 0 \ \rightarrow \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \ \rightarrow \ x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de periodo 4π.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$

tiene un máximo en $(\pi, 1)$

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$

- **Gráfica** → ⑤

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \to \quad f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** → ①

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \quad \to \quad f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

Por simetría:

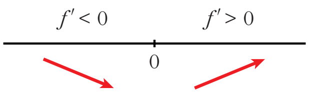
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

- **Gráfica** → ③

f) $y = sen^2\, x$

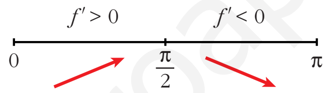
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = 2sen\, x\, cos\, x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\, 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{2}k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de periodo π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$

- **Gráfica** → ④

23
S **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k y representa la función.**

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \;\; \to \;\; k = 3$$

Luego: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \;\; x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

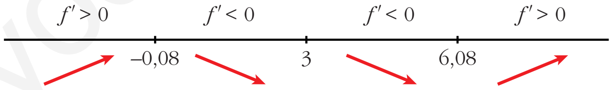
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; 2x^2 - 12x - 1 = 0 \;\; \to \;\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



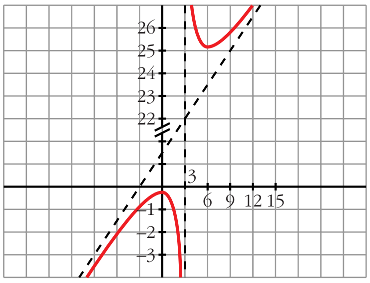
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$

- **Gráfica:**



24 **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x - 2) \;\rightarrow\; y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{El punto es } \left(1, \frac{-22}{9}\right)$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{El punto es } \left(\frac{16}{5}, 0\right)$$

Página 205

25 **Dada la función $f(x) = x^2\,|x - 3|$ halla:**

S

a) Los puntos en los que f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right.$

– **Si $x \pm 3$, tenemos que:** $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{array}\right.$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \ (\text{Punto } (3, 0)). \end{array}$$

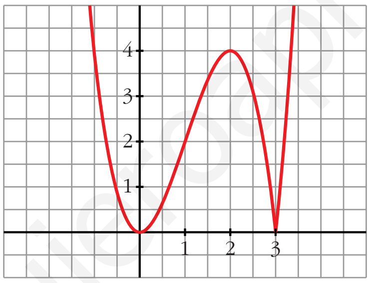
b) $f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 \text{ si } x < 3 \\ 3x(-x + 2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ \searrow x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{array} \\ 3x^2 - 6x = 0 \text{ si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



26 **Halla los puntos de corte, los máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los puntos de inflexión de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Utilizando la información obtenida, represéntalas gráficamente:

a) $y = 1 - 2 \cos x$ **b)** $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ **d)** $y = (\operatorname{sen} x)^2$

a) $y = 1 - 2\cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

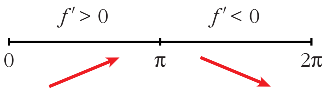
$$\left.\begin{array}{l} \nearrow x = \dfrac{\pi}{3} \\ \searrow x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2\text{sen } x$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen } x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

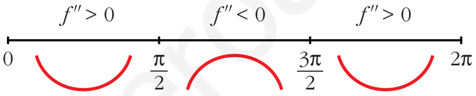
Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 2\cos x$

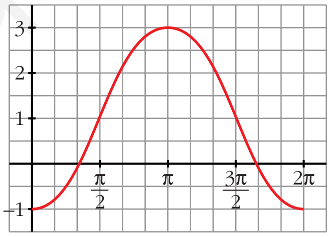
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ y $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 1 + 2\text{sen } x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y → $x = 0$ → $y = 1$ → Punto $(0, 1)$

— Con el eje X → $y = 0$ → $1 + 2\text{sen } x = 0$ → $\text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$ →

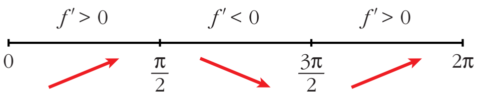
$$\left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array} \right\} \quad \text{Puntos } \left(\dfrac{7\pi}{6}, 0\right) \text{ y } \left(\dfrac{11\pi}{6}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2\cos x$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

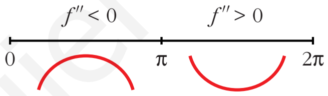
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2\,sen\,x$

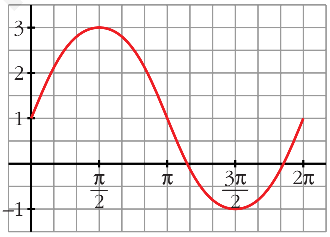
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad sen\,x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ y en $(2\pi, 1)$.

- **Gráfica:**



c) $y = sen\,x - \cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y → $x = 0$ → $y = -1$ → Punto $(0, -1)$

— Con el eje X → $y = 0$ → $sen\,x - \cos x = 0$

$$tg\,x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right\rbrace \quad \text{Puntos } \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \text{ y } \left(\dfrac{5\pi}{4}, 0\right)$$

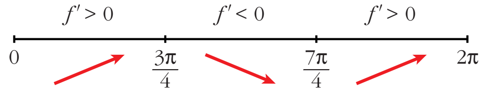
- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

  $f'(x) = cos\ x + sen\ x$

  $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\ x + sen\ x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + tg\ x = 0 \quad \rightarrow$

  $$\rightarrow \quad tg\ x = -1 \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

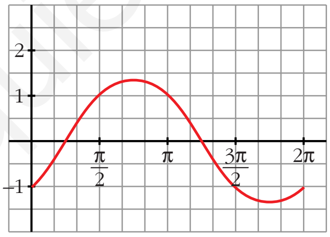
  Tiene un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = -sen\ x + cos\ x = -(sen\ x - cos\ x) = -f(x)$

  Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje X.

- **Gráfica:**



d) $y = (sen\ x)^2$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  — Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

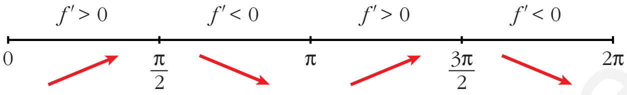
  Puntos $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

  $f'(x) = 2sen\ x\ cos\ x$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ x\ cos\ x = 0 \begin{cases} sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \\ cos\ x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, otro en $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, y tiene un mínimo en $(0, 0)$,

otro en $(\pi, 0)$ y otro en $(2\pi, 0)$.

- **Puntos de inflexión:**

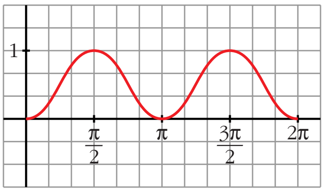
$f''(x) = 2[cos^2\ x - sen^2\ x]$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos^2\ x - sen^2\ x = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - tg^2\ x = 0 \quad \rightarrow$

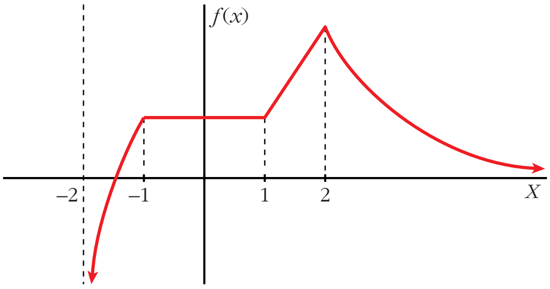
$$\rightarrow \quad tg^2\ x = 1 \begin{cases} tg\ x = -1 \begin{cases} x = 3\pi/4 \\ x = 7\pi/4 \end{cases} \\ tg\ x = 1 \begin{cases} x = \pi/4 \\ x = 5\pi/4 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**



27 **S** **Dada la gráfica de la función $f(x)$, determina:**



a) Dominio de la función.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Intervalos donde la derivada es positiva.

d) Puntos donde no es derivable.

e) Ecuaciones de las asíntotas.

a) $(-2, +\infty)$

b) Es creciente en $(-2, -1) \cup (1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

d) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

28
S

Dada la función $f(x) = \dfrac{bx}{x^2 + 1}$ con $b \neq 0$, se pide:

a) Determina las asíntotas de la función para cualquier valor del parámetro *b*.

b) Determina el valor del parámetro *b* para que la función tenga un máximo en el punto (1, 3).

a) • Dominio: $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

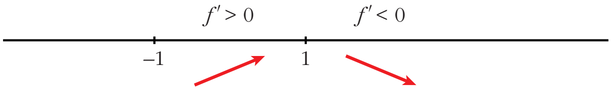
b) $f(1) = 3 \rightarrow \dfrac{b}{2} = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

Comprobemos que, en efecto, hay un máximo para $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Como $f' > 0$ a la izquierda de $x = 1$, y $f' < 0$ a su derecha, en $x = 1$ hay un máximo.

29 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \to \quad y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \to \quad y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to +\infty$$

30 **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (–2, –6) y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para ese valor de a y b, representa la función.**

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; \; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \to -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \to f'(-2) = 0 \to a - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} a = 2; \; b = 2$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \quad \to \quad y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua}$$

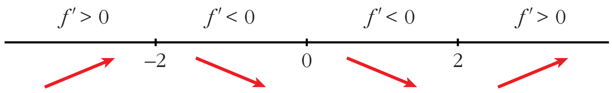
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



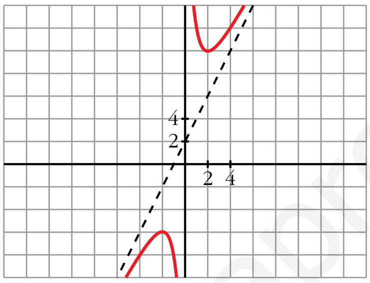
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -6)$

tiene un mínimo en $(2, 10)$

- **Gráfica:**



31 **Estudia y representa $y = 1 - tg\ x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = 1 - tg\ x$

- Como es una función periódica de periodo π, basta con estudiarla en el intervalo $[0, \pi]$.

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

- **Asíntotas:**

En el intervalo $[0, \pi]$ tiene una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x) = +\infty$$

(De la misma forma, hay asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

- **Intervalos de crecimiento y extremos:**

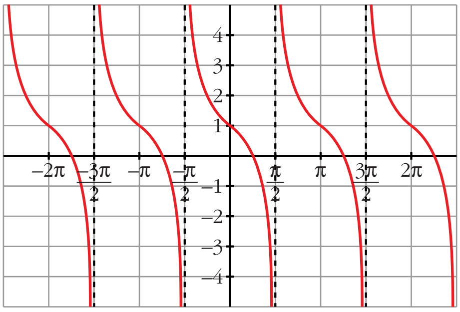
$f'(x) = -(1 + tg^2\ x) < 0 \ \rightarrow\ f(x)$ es decreciente.

No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje X, en el intervalo $[0, \pi]$, en los puntos:

$$1 - tg\ x = 0 \ \rightarrow\ tg\ x = 1 \ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{4}$$

- **Gráfica:**



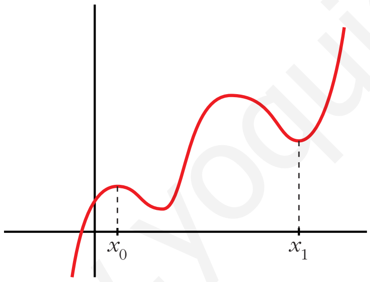
CUESTIONES TEÓRICAS

32 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.

33 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f'(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

34 **La función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \frac{1}{sen\, x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio **22**, es la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

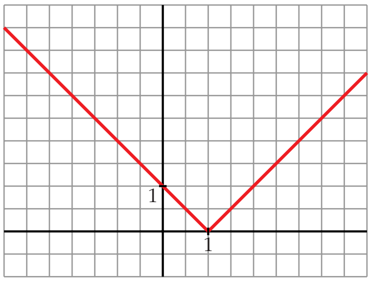
36 **S** **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \ne 1 \end{array}\right\} \to \text{Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \ne f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



37 **S** **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

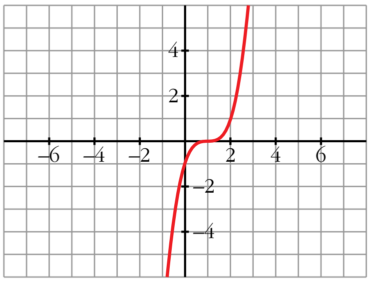
Por ejemplo, $y = (x-1)^3$.

$f'(x) = 3(x-1)^2 \;\to\; f'(1) = 0$

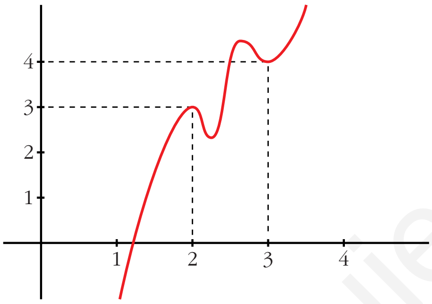
$f'(x) > 0$ para $x \ne 1 \;\to\; f(x)$ es creciente

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



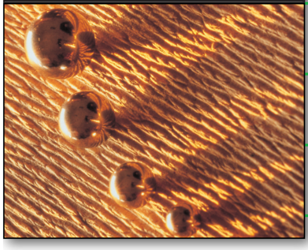
38 **S** **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4). Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?**



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

UNIDAD 8



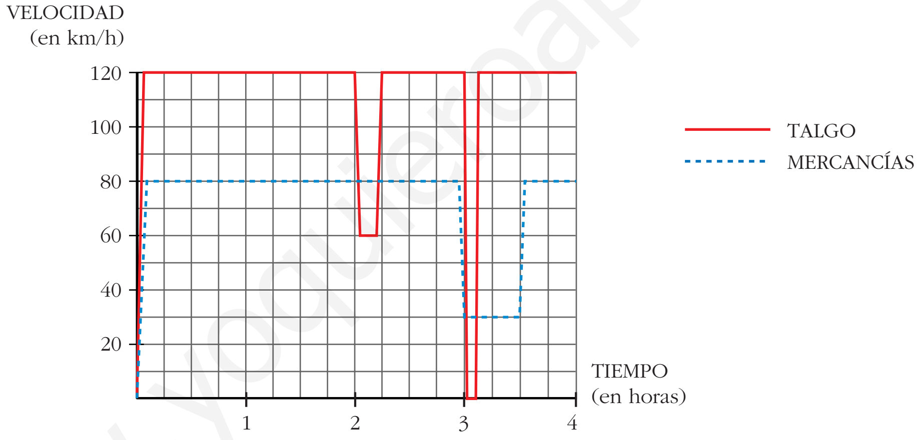
INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

Página 206

1. Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Éstas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o negra. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

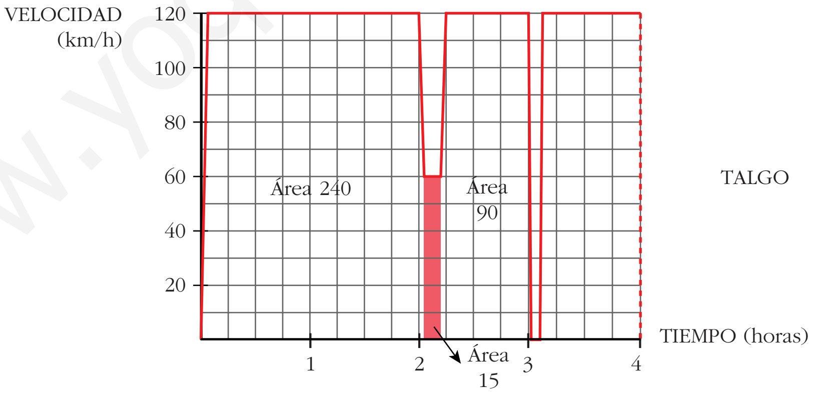
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

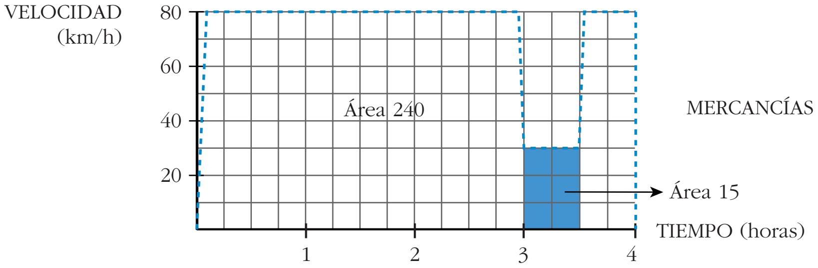
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f)

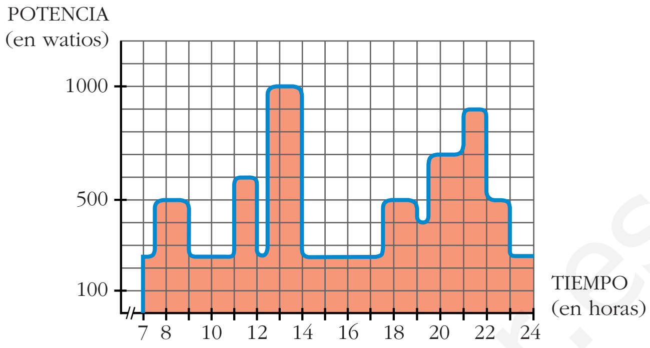




Página 207

2. **Consumo de energía eléctrica**

La gráfica nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida: potencia × tiempo = energía.

Un cuadrito equivale a 0,1 kW · h

- **¿Cuántos kW · h se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?**

Hay 81,25 cuadritos, luego se han consumido: 0,1 · 81,25 = 8,125 kW · h

3. **¿Cuál es la función cuya derivada es…?**

La función cuya derivada es $2x$ es … x^2

La función cuya derivada es *cos x* es … *sen x*

La función cuya derivada es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es … $\sqrt{x}$

Di cuál es la función cuya derivada es:

a) $3x^2$ **b)** x^2 **c)** $5x^2$ **d)** $4x^3$ **e)** x^3

f) $7x^3$ **g)** $3x^2 + 4x^3$ **h)** $5x^2 + 7x^3$ **i)** $-sen\ x$ **j)** $sen\ x$

k) $5\ sen\ x$ **l)** $2^x \cdot ln\ 2$ **m)** 2^x **n)** $5 \cdot 2^x$

a) x^3 b) $\frac{x^3}{3}$ c) $\frac{5x^3}{3}$ d) x^4 e) $\frac{x^4}{4}$

f) $\frac{7x^4}{4}$ g) $x^3 + x^4$ h) $\frac{5x^3}{3} + \frac{7x^4}{4}$ i) $cos\ x$ j) $-cos\ x$

k) $-5\ cos\ x$ l) 2^x m) $\frac{2^x}{ln\ 2}$ n) $\frac{5 \cdot 2^x}{ln\ 2}$

Página 208

1. **Halla una primitiva de:** **a)** x^4 **b)** $\sqrt[3]{x}$ **c)** $\frac{1}{x^4}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

a) $\int x^4 = \frac{x^5}{5}$

b) $\int \sqrt[3]{x} = \int x^{1/3} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

c) $\int \frac{1}{x^4} = \int x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3}$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$

2. Busca una primitiva de:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}}$ **c)** $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3}$

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \int x^{1/3\,-\,1/2} = \int x^{-1/6} = \frac{x^{5/6}}{5/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}} = \int x^{1/6} = \frac{x^{7/6}}{7/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}$

c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3} = \int x^{1/3} \cdot x^{3/2} = \int x^{11/6} = \frac{x^{17/6}}{17/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^{17}}}{17}$

Página 209

3. Halla una primitiva de:

a) $f(x) = 11x^5$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{5x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2}$

a) $\displaystyle\int 11x^5 = \frac{11x^6}{6} + k$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} \cdot x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2} = \int x^2 - 3x + 7 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} =$

$\displaystyle= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - 2\,ln\,|x| - \frac{3}{x} + k$

4. Busca una primitiva de:

a) $f(x) = 4\,sen\,x - 5\cos x$ **b)** $f(x) = 3\,e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{\sqrt{5x}}$

a) $\displaystyle\int (4\,sen\,x - 5\cos x) = -4\cos x - 5\,sen\,x + k$

b) $\displaystyle\int (3e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}) = 3e^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^{2x+2}}{ln\,2} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{\sqrt{5x}} = \int \left(\frac{5x}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) = \int \left(\sqrt{5x} - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) = \frac{2\sqrt{5x^3}}{3} - \frac{2\sqrt{5x}}{5} + k$

Página 211

5. Halla las primitivas de estas funciones:

a) $f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2\,(3x^2 - 5)$ **b)** $f(x) = (5x + 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$

e) $f(x) = \cos x\ \ \text{sen}^3\, x$

a) $\displaystyle\int (x^3 - 5x + 3)^2\,(3x^2 - 5) = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$

b) $\displaystyle\int (5x + 1)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 1)^4}{4} + k = \frac{(5x + 1)^4}{20} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} = \ln\,|x^3 - 3x| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} = \frac{1}{3}\ln\,|x^3 - 3x| + k$

e) $\displaystyle\int \cos x\ \text{sen}^3\, x = \frac{\text{sen}^4\, x}{4} + k$

6. Busca las primitivas de:

a) $f(x) = x\,2^{x^2}\ln 2$ **b)** $f(x) = x\,2^{x^2}$

c) $f(x) = 2^{3x - 5}$ **d)** $f(x) = \text{sen}\ 3x$

e) $f(x) = \text{sen}\,(x^3 - 4x^2)\,(3x^2 - 8x)$ **f)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x}$

a) $\displaystyle\int x\,2^{x^2}\ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2} + k$

b) $\displaystyle\int x\,2^{x^2} = \frac{1}{2\ln 2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2\ln 2} + k$

c) $\displaystyle\int 2^{3x - 5} = \frac{1}{3\ln 2} \cdot 2^{3x - 5} + k = \frac{2^{3x - 5}}{3\ln 2} + k$

d) $\displaystyle\int \text{sen}\ 3x = -\frac{1}{3}\cos 3x + k$

e) $\displaystyle\int \text{sen}\,(x^3 - 4x^2)\,(3x^2 - 8x) = -\cos\,(x^3 - 4x^2) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} = \ln\,|\text{sen}\ x| + k$

Página 215

1. Halla e interpreta estas integrales:

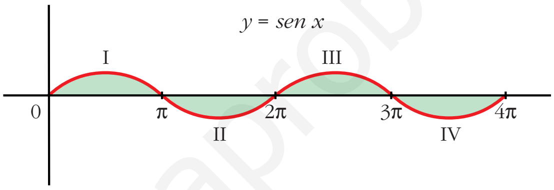
a) $\int_0^{4\pi} \text{sen } x$ **b)** $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)$

a) $G(x) = \int \text{sen } x = -\cos x$

$G(4\pi) = -1; \quad G(0) = -1$

$\int_0^{4\pi} \text{sen } x = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da de resultado 0:

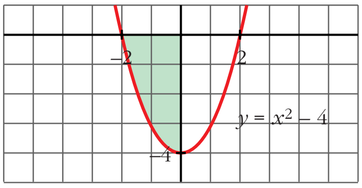
Área de I – Área de II + Área de III – Área de IV = 0

b) $G(x) = \int (x^2 - 4) = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

$G(2) = -\dfrac{16}{3}; \quad G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4) = -\dfrac{16}{3} - \dfrac{16}{3} = -\dfrac{32}{3}$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje X, la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$-\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

2. Halla la siguiente integral e interprétala geométricamente: $\int_0^2 e^x$

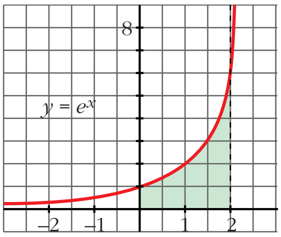
$G(x) = \int e^x = e^x$

$G(2) = e^2$; $G(0) = 1$

$$\int_0^2 e^x = e^2 - 1 \approx 6{,}39$$

Interpretación geométrica:

Área del recinto $= e^2 - 1 \approx 6{,}39$



Página 217

1. Halla el área comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

- Puntos de corte con el eje X:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = -1,\; x_3 = 1,\; x_4 = 2$$

Solo nos sirven $x = 1$, $x = 2$ (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]
- $G(x) = \int (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \int (x^4 - 5x^2 + 4) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$
- $G(0) = 0$; $G(1) = \frac{38}{15}$; $G(2) = \frac{16}{15}$; $G(5) = \frac{1\,310}{3}$
- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \frac{38}{15}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \left|-\frac{22}{15}\right| = \frac{22}{15}$

Área del recinto III $= |G(5) - G(2)| = \frac{2\,178}{5}$

Área total $= \frac{38}{15} + \frac{22}{15} + \frac{2\,178}{5} = \frac{2\,198}{5} = 439{,}6 \text{ u}^2$

2. Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X.

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 0,\; x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 2]
- $G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$

- $G(-1) = -\frac{5}{12}$; $G(0) = 0$; $G(2) = -\frac{8}{3}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{5}{12}$

  Área del recinto II $= |G(2) - G(0)| = \frac{8}{3}$

  Área total $= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \approx 3{,}08$ u^2

Página 218

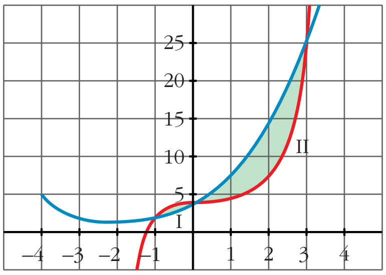
1. **Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:**

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

- $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$
- $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 3$
- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 3]
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = -\frac{7}{12}$; $G(0) = 0$; $G(3) = -\frac{45}{4}$
- Recinto I: Área $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \frac{7}{12}$

  Recinto II: Área $[0, 3] = |G(3) - G(0)| = \frac{45}{4}$

  Área total: $\frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \approx 11{,}83$ u^2



Página 225

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Halla una primitiva de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

d) $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int (2x - \sqrt{3}\,) = x^2 - \sqrt{3}\, x$

c) $\int \left(\frac{x}{2} + x^2\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}$

d) $\int (-8x^3 + 3x^2) = -2x^4 + x^3$

e) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \int (x^{-2} + x^{-3}) = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

f) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}\right) = \int \left(x^{1/2} + \frac{3}{5}x^{-4}\right) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{5x^3}$

g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}\right) = \int \left(x^{-1/2} + \frac{1}{3}x\right) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6}$

h) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \int x^2 \cdot x^{-1/3} = \int x^{5/3} = \frac{x^{8/3}}{8/3} = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$

2 **Calcula:**

a) $\int \sqrt{3x}$ **b)** $\int \sqrt[3]{5x^2}$ **c)** $\int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}}$ **d)** $\int \frac{x^3 - 2}{x^2}$

e) $\int \frac{3}{x}$ **f)** $\int \frac{2}{x + 1}$ **g)** $\int \frac{x - 2}{x^2}$ **h)** $\int \frac{3 - 2x}{x}$

a) $\int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3}\, x^{1/2} = \sqrt{3}\, \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3}\,\sqrt{x^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

b) $\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3} = \sqrt[3]{5}\, \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c) $\int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}} = \int (x^{1/2} + x^{3/2}) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

d) $\int \frac{x^3 - 2}{x^2} = \int (x - 2x^{-2}) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + k = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + k$

e) $\int \frac{2}{x} = 2\, ln\, |x| + k$

f) $\int \frac{2}{x+1} = 2\ ln\ |x+1| + k$

g) $\int \frac{x-2}{x^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = ln\ |x| + \frac{2}{x} + k$

h) $\int \frac{3-2x}{x} = \int \left(\frac{3}{x} - 2\right) = 3\ ln\ |x| - 2x + k$

3 **Resuelve:**

a) $\int \textbf{sen}\ 3x$ **b)** $\int \textbf{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $\int \frac{1}{\textbf{cos}^2\ 5x}$

d) $\int (1 + \textbf{tg}^2\ 3x)$ **e)** $\int \frac{\textbf{cos}\ x}{\textbf{sen}\ x}$ **f)** $\int \left(1 - \textbf{sen}\ \frac{x}{2}\right)$

g) $\int \textbf{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **h)** $\int \textbf{cos}\ \frac{\pi}{2}\ x$

a) $\int sen\ 3x = -\frac{1}{3}\int -3\ sen\ 3x = -\frac{1}{3}\ cos\ 3x + k$

b) $\int cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{1}{cos^2\ 5x} = \frac{1}{5}\int 5 \cdot \frac{1}{cos^2\ 5x} = \frac{1}{5}\ tg\ 5x + k$

d) $\int (1 + tg^2\ 3x) = \frac{1}{3}\int 3(1 + tg^2\ 3x) = \frac{1}{3}\ tg\ 3x + k$

e) $\int \frac{cos\ x}{sen\ x} = ln\ |sen\ x| + k$

f) $\int \left(1 - sen\ \frac{x}{2}\right) = x + 2\ cos\ \frac{x}{2} + k$

g) $\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k$

h) $\int cos\ \frac{\pi}{2}\ x = \frac{2}{\pi}\int \frac{\pi}{2}\ cos\ \frac{\pi}{2}\ x = \frac{2}{\pi}\ sen\ \frac{\pi}{2}\ x + k$

4 **Calcula:**

a) $\int e^{x+3}$ **b)** $\int e^{2x-1}$ **c)** $\int 2^{x-7}$ **d)** $\int 3^{x/2}$

a) $\int e^{x+3} = e^{x+3} + k$

b) $\int e^{2x-1} = \frac{1}{2}\int 2\, e^{2x-1} = \frac{1}{2}\, e^{2x-1} + k$

c) $\int 2^{x-7} = \frac{1}{ln\ 2}\int ln\ 2 \cdot 2^{x-7} = \frac{1}{ln\ 2} \cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{ln\ 2} + k$

d) $\int 3^{x/2} = 2\int \frac{1}{2}\, 3^{x/2} = \frac{2 \cdot 3^{x/2}}{ln\ 3} + k$

5 **Calcula:**

a) $\int (x-3)^3$ **b)** $\int (2x+1)^5$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

d) $\int \sqrt{3x-5}$ **e)** $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}$ **f)** $\int \frac{3}{2x-1}$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2}$ **h)** $\int \frac{x}{3x^2-4}$

a) $\int (x-3)^3 = \frac{(x-3)^4}{4} + k$

b) $\int (2x+1)^5 = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} + k$

d) $\int \sqrt{3x-5} = \frac{1}{3}\int 3(3x-5)^{1/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} = 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} = 2 \cdot \frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2}\ \left(\frac{x+3}{2}\right)^4 + k$

f) $\int \frac{3}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot 3\int \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2}\ ln\ |2x-1| + k$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2} = ln\ |x^2+2| + k$

h) $\int \frac{x}{3x^2-4} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2-4} = \frac{1}{6}\ ln\ |3x^2-4| + k$

6 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int x\sqrt{5x^2+1}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}$

d) $\displaystyle\int x\, e^{x^2}$ **e)** $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+2}$ **f)** $\displaystyle\int sen^2\, x\ \cos x$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-4}$ **h)** $\displaystyle\int x\ sen\ x^2$

a) $\displaystyle\int x\sqrt{5x^2+1} = \frac{1}{10}\int 10x(5x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{(5x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(5x^2+1)^3}}{15} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} = ln\ |x^2+x-3| + k$

d) $\displaystyle\int x\, e^{x^2} = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+2} = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2} = \frac{5}{6}\ ln\ |3x^2+2| + k$

f) $\displaystyle\int sen^2\, x\ \cos x = \frac{sen^3\, x}{3} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4}\ ln\ |x^4-4| + k$

h) $\displaystyle\int x\ sen\ x^2 = -\frac{1}{2}\int -2x\ sen\ x^2 = -\frac{1}{2}\ \cos x^2 + k$

7 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int 3e^{5x}$ **b)** $\displaystyle\int x^2\cdot 2^{-x^3+5}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}$ **e)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}$ **f)** $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}$

a) $\displaystyle\int 3\, e^{5x} = \frac{3}{5}\int 5\, e^{5x} = \frac{3}{5}\, e^{5x} + k$

b) $\displaystyle\int x^2\cdot 2^{-x^3+5} = -\frac{1}{3}\int -3x^2\cdot 2^{-x^3+5} = \frac{-2^{-x^3+5}}{3\ ln\ 2} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} = 2\, e^{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \sqrt{x^2-6x+2} + k$

e) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5} = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + k$

f) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}} = \int \sqrt{3x-2} = \frac{1}{3} \int 3\,(3x-2)^{1/2} = \frac{1}{3}\, \frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$

8 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}$ **b)** $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ **d)** $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

☛ ***Divide y transforma la fracción así:*** $\frac{\textit{Dividendo}}{\textit{divisor}} = \textit{cociente} + \frac{\textit{resto}}{\textit{divisor}}$

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1} = \int \left(x-2+\frac{2}{x-1}\right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\, ln\, |x-1| + k$

b) $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3} = \int \left(x+2-\frac{13}{x+3}\right) = \frac{x^2}{2} + 2x - 13\, ln\, |x+3| + k$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1} = \int (x-1) = \frac{x^2}{2} - x + k$

d) $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = \int \left(1+\frac{3x}{x^2-1}\right) = x + \frac{3}{2}\, ln\, |x^2-1| + x$

9 Calcula:

a) $\int \frac{1}{x^2}\, sen\, \frac{1}{x}$ **b)** $\int sen\, x\, \cos x$ **c)** $\int \sqrt{x\sqrt{x}}$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+1}$ **e)** $\int (2x^2+1)^2$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}$

g) $\int \frac{3x^2+2x-1}{x-2}$ **h)** $\int \frac{e^x}{1+e^x}$ **i)** $\int \frac{2}{x}\, ln\, x$

j) $\int \frac{1}{e^x}\, \cos e^{-x}$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\ sen\ \frac{1}{x} = cos\ \frac{1}{x} + k$

b) $\displaystyle\int sen\ x\ cos\ x = \frac{sen^2\ x}{2} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}} = \int x^{3/4} = \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \int \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} + k$

e) $\displaystyle\int (2x^2 + 1)^2 = \int (4x^4 + 4x^2 + 1) = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{1}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{3} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} = \int \left(3x + 8 + \frac{15}{x - 2}\right) = \frac{3x^2}{2} + 8x + 15\ ln\ |x - 2| + k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x} = ln\ |1 + e^x| + k$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\ ln\ x = ln^2\ x + k$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\ cos\ e^{-x} = -sen\ e^{-x} + k$

Página 226

10 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)$ **b)** $\displaystyle\int_4^6 (2x - 1)$ **c)** $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3 + x)$

d) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}$ **e)** $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}$ **f)** $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{x-2}$

g) $\displaystyle\int_0^\pi (sen\ x - cos\ x)$ **h)** $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi sen\ 2x$

a) $\displaystyle G(x) = \int (-3x^2) = -x^3$

$G(5) = -125;\quad G(2) = -8$

$$\int_2^5 (-3x^2) = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$$

b) $G(x) = \int (2x - 1) = x^2 - x$

$G(6) = 30; \quad G(4) = 12$

$$\int_4^6 (2x - 1) = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$$

c) $G(x) = \int (x^3 + x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}$

$G(2) = G(-2) = 6$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x) = G(2) - G(-2) = 0$$

d) $G(x) = \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3}\, x^{1/2} = \dfrac{\sqrt{3}\, x^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

$G(4) = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}; \quad G(1) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\int_1^4 \sqrt{3x} = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

e) $G(x) = \int \dfrac{1}{x} = ln\ |x|$

$G(e) = 1; \quad G(1) = 0$

$$\int_1^e \frac{1}{x} = G(e) - G(1) = 1$$

f) $G(x) = \int e^{x-2} = e^{x-2}$

$G(3) = e; \quad G(-1) = e^{-3}$

$$\int_{-1}^3 e^{x-2} = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$$

g) $G(x) = \int (sen\ x - cos\ x) = -cos\ x - sen\ x$

$G(\pi) = 1; \quad G(0) = -1$

$$\int_0^\pi (sen\ x - cos\ x) = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$$

h) $G(x) = \int sen\ 2x = -\dfrac{1}{2}\ cos\ 2x$

$G(\pi) = -\frac{1}{2}$; $G(-\pi) = -\frac{1}{2}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\ 2x = G(\pi) - G(-\pi) = 0$$

11 **S** **Halla, en cada caso, el área limitada por:**

a) $f(x) = x^2 - 4$, **el eje** X **y las rectas** $x = 0$ **y** $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **y el eje** X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -2$ **y** $x = 2$.

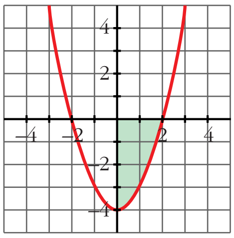
e) $f(x) = e^x$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

a) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

Solo nos sirve $x_2 = 2$.

- Hay un recinto: [0, 2]
- $G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$
- $G(2) = -\frac{16}{3}$; $G(0) = 0$
- Área $= |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3}$ u^2

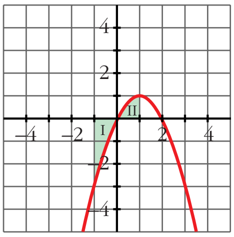


b) • Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 1]
- $G(x) = \int (2x - x^2) = x^2 - \frac{x^3}{3}$
- $G(-1) = \frac{4}{3}$; $G(0) = 0$; $G(1) = \frac{2}{3}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{4}{3}$

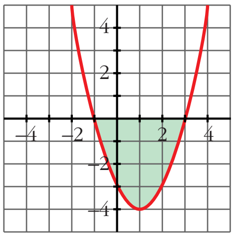
Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \frac{2}{3}$

Área total $= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ u^2



c) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

- Hay un recinto: $[-1, 3]$
- $G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$
- $G(-1) = \frac{5}{3};\ G(3) = -9$
- Área $= |G(3) - G(-1)| = \left|-9 - \frac{5}{3}\right| = \frac{32}{3}$ u^2



d) • Puntos de corte con el eje X:

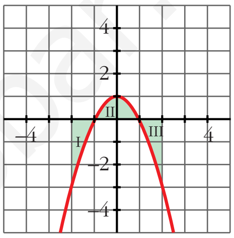
$1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

- Hay tres recintos: I $[-2, -1]$; II $[-1, 1]$; III $[1, 2]$
- $G(x) = \int (1 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$
- $G(-2) = \frac{2}{3};\ G(-1) = -\frac{2}{3};\ G(1) = \frac{2}{3};\ G(2) = -\frac{2}{3}$
- Área del recinto I $= |G(-1) - G(-2)| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$

  Área del recinto II $= |G(1) - G(-1)| = \left|\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$

  Área del recinto III $= |G(2) - G(1)| = \frac{4}{3}$

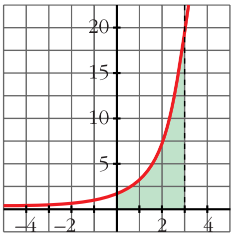
  Área total $= 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ u^2



e) • No corta al eje X.

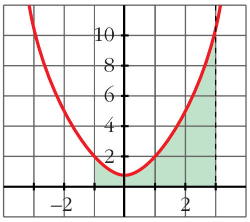
- $G(x) = \int e^x = e^x$
- $G(-1) = e^{-1};\ G(3) = e^3$
- Área $= |G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} =$

  $= e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e} \approx 19{,}7$ u^2



f) • No corta al eje X.

- $G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$
- $G(-1) = -\frac{4}{3};\ G(3) = 12$
- Área $= |G(3) - G(-1)| = \frac{40}{3}$ u^2



12 **Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:**

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ **en** $[0, 2]$

b) $f(x) = 2 \cos x$ **en** $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ **en** $[-1, 2]$

d) $f(x) = sen \frac{x}{4}$ **en** $[0, \pi]$

a) • $G(x) = \int (3x^2 - 6x) = x^3 - 3x^2$

• $G(0) = 0; \quad G(2) = -4$

• $\int_0^2 (3x^2 - 6x) = G(2) - G(0) = -4$

b) • $G(x) = \int 2 \cos x = 2\ sen\ x$

• $G(0) = 0; \quad G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

• $\int_0^{\pi/2} 2 \cos x = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) • $G(x) = \int (x + 1)(x^2 - 2) = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

• $G(-1) = \frac{11}{12}; \quad G(2) = -\frac{4}{3}$

• $\int_{-1}^2 (x + 1)(x^2 - 2) = G(2) - G(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}$

d) • $G(x) = \int sen \frac{x}{4} = -4 \cos \frac{x}{4}$

• $G(0) = -4; \quad G(\pi) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

• $\int_0^{\pi} sen \frac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$

PARA RESOLVER

13 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2; \ y = x$

b) $y = x^2; \ y = 1$

c) $y = x^2; \ y = x^3$

d) $y = x^2; \ y = -x^2 + 2x$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3; \ y = 3x + 1$

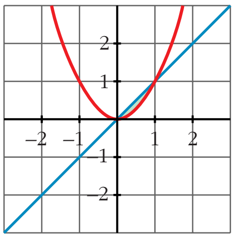
f) $y = 4 - x^2; \ y = 8 - 2x^2; \ x = -2; \ x = 2$

a) • $x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

• $G(0) = 0; \ G(1) = -\frac{1}{6}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{6}$ u^2

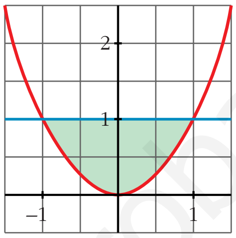


b) • $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$

• $G(-1) = \frac{2}{3}; \ G(1) = -\frac{2}{3}$

• Área $= |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3}$ u^2

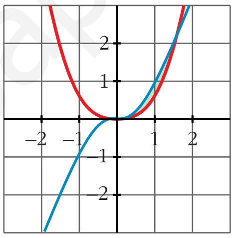


c) • $x^2 - x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x^3) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0; \ G(1) = \frac{1}{12}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{12}$ u^2

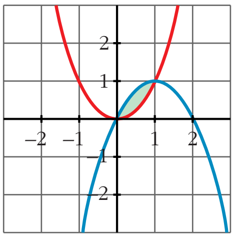


d) • $x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 - 2x) = \frac{2x^3}{3} - x^2$

• $G(0) = 0; \ G(1) = -\frac{1}{3}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{3}$ u^2

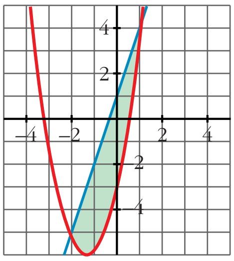


e) • $2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \ x_2 = 1$

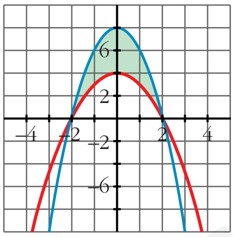
• $G(x) = \int (2x^2 + 2x - 4) = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

• $G(-2) = \frac{20}{3}; \ G(1) = -\frac{7}{3}$

• Área $= |G(1) - G(2)| = \left| -\frac{7}{3} - \frac{20}{3} \right| = \frac{27}{3} = 9$ u^2



f) • $4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$



- $G(x) = \int (x^2 - 4) = \dfrac{x^3}{3} - 4x$
- $G(-2) = \dfrac{16}{3};\ \ G(2) = -\dfrac{16}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{32}{3}$ u^2

14
S

Calcula el área de los recintos limitados por:

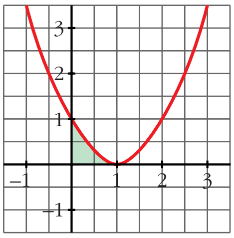
a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = sen\ x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

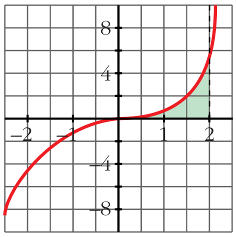
d) La función $y = cos\ x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

a) • $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$



- $G(x) = \int (x - 1)^2 = \dfrac{(x - 1)^3}{3}$
- $G(0) = -\dfrac{1}{3};\ \ G(1) = 0$
- Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3}$ u^2

b) • $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$



- $G(x) = \int x^3 = \dfrac{x^4}{4}$
- $G(0) = 0;\ \ G(2) = 4$
- Área $= |G(2) - G(0)| = 4$ u^2

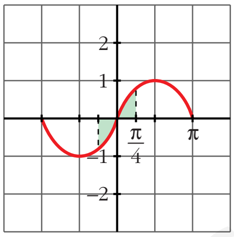
c) • $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0 \left(\text{entre } -\dfrac{\pi}{4} \text{ y } \dfrac{\pi}{4}\right)$

- Hay dos recintos: I $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$; II $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
- $G(x) = \int sen\ x = -cos\ x$
- $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \ G(0) = -1$

- Área recinto I = $\left|G(0) - G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = 0{,}29$

  Área recinto II = $\left|G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - G(0)\right| = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$

  Área total = $2 \cdot 0{,}29 \approx 0{,}58$ u^2



d) • $\cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{entre } 0 \text{ y } \pi\right)$

- Hay dos recintos: I $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; II $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

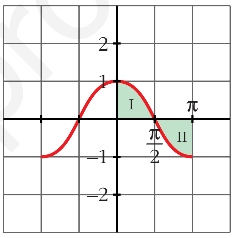
- $G(x) = \displaystyle\int \cos x = \operatorname{sen} x$

- $G(0) = 0$; $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; $G(\pi) = 0$

- Área recinto I = $\left|G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - G(0)\right| = 1$

  Área recinto II = $|G(\pi) - G(0)| = 1$

  Área total = 1 + 1 = 2 u^2



15 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2$ **e** $y = 3 - 2x$ **b)** $y = 4 - x^2$ **e** $y = 3x^2$

c) $y = x$ **e** $y = x^2 - 2$ **d)** $y = 4 - x^2$ **e** $y = x^2 - 4$

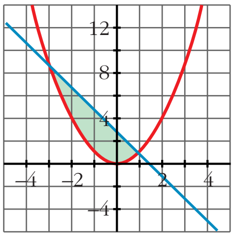
e) $y = (x + 2)^2 (x - 3)$ **y el eje de abscisas.**

a) $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$

- $G(x) = \displaystyle\int (x^2 + 2x - 3) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$

- $G(-3) = 9$; $G(1) = -\dfrac{5}{3}$

- Área = $|G(1) - G(-3)| = \dfrac{32}{3}$ u^2

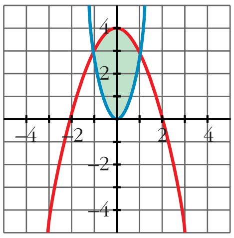


b) $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

- $G(x) = \displaystyle\int (4 - 4x^2) = 4x - \dfrac{4x^3}{3}$

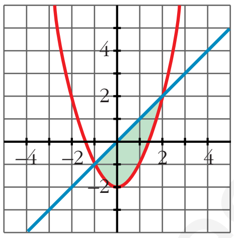
- $G(-1) = -\dfrac{8}{3}$; $G(1) = \dfrac{8}{3}$

- Área = $|G(1) - G(-1)| = \dfrac{16}{3}$ u^2



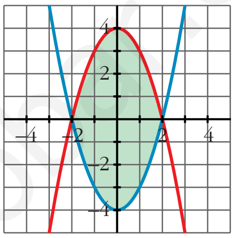
c) $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \ \to\ x_1 = -1,\ \ x_2 = 2$

- $G(x) = \displaystyle\int (-x^2 + x + 2) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{6};\ \ G(2) = \dfrac{10}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-1)| = \dfrac{9}{2}\ \text{u}^2$



d) $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \ \to\ x_1 = -2,\ \ x_2 = 2$

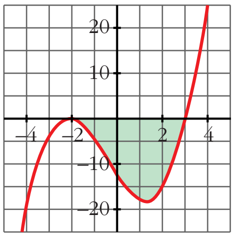
- $G(x) = \displaystyle\int (-2x^2 + 8) = -\frac{2x^3}{3} + 8x$
- $G(-2) = -\dfrac{32}{3};\ \ G(2) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{64}{3}\ \text{u}^2$



e) $(x + 2)^2\,(x - 3) = 0 \ \to\ x_1 = -2,\ \ x_2 = 3$

- $G(x) = \displaystyle\int (x + 2)^2\,(x - 3) = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12) =$

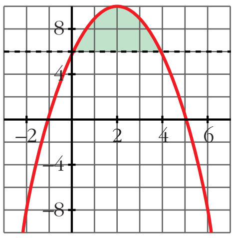
  $= \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$
- $G(-2) = \dfrac{28}{3};\ \ G(3) = -\dfrac{171}{4}$
- Área $= |G(3) - G(-2)| = \dfrac{625}{12} \approx 52{,}1\ \text{u}^2$



16 **S** **Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.**

$-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \ \to\ x_1 = 0,\ \ x_2 = 4$

- $G(x) = \displaystyle\int (-x^2 + 4x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$
- $G(0) = 0;\ \ G(4) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(4) - G(0)| = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$



17 **S** **Calcula el área limitada por las siguientes curvas:**

a) $y = x^3 + x^2;\ \ y = x^3 + 1;\ \ x = -1;\ \ x = 1$

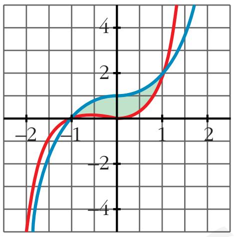
b) $y = x^2;\ \ y = 1 - x^2;\ \ y = 2$

c) $y = x(x - 1)\,(x - 2);\ \ y = 0$

d) $y = x^2 - 2x;\ \ y = x$

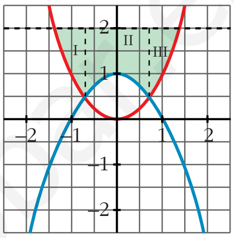
e) $y = x^3 - 2x;\ \ y = -x^2$

f) $y = 2x - x^3;\ \ y = x^2$



a) $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ \ x_2 = 1$

- $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$
- $G(-1) = \dfrac{2}{3};\ \ G(1) = -\dfrac{2}{3}$
- Área = $|G(1) - G(-1)| = \dfrac{4}{3}$ u^2



b) $x^2 = 1 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 2 \rightarrow x_3 = -\sqrt{2},\ \ x_4 = \sqrt{2}$

- Tenemos tres recintos:

  $\text{I}\left[-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right];\ \ \text{II}\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right];\ \ \text{III}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

- Para el I y el III hay que considerar:

  $G_1(x) = \displaystyle\int (2 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$

  $G_1\left(-\sqrt{2}\right) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\ \ G_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{11\sqrt{2}}{12};\ \ G_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{11\sqrt{2}}{12};\ \ G_1\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

  Área del recinto I = $\left|G_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1\left(-\sqrt{2}\right)\right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

  Área del recinto III = $\left|G_1\left(\sqrt{2}\right) - G_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

- Para el II hay que considerar:

  $G_2(x) = \displaystyle\int (2 - 1 + x^2) = \int (1 + x^2) = x + \frac{x^3}{3}$

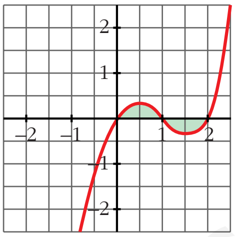
  $G_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{12};\ \ G_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$

  Área del recinto II = $\left|G_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \dfrac{7\sqrt{2}}{6}$

- Área total = $\dfrac{5\sqrt{2}}{12} + \dfrac{7\sqrt{2}}{6} + \dfrac{5\sqrt{2}}{12} = \dfrac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$ u^2

c) $x(x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2$

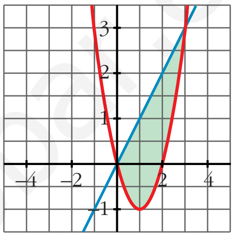
- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]
- $G(x) = \displaystyle\int x(x-1)(x-2) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$



- $G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{1}{4};\ \ G(2) = 0$
- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{4}$

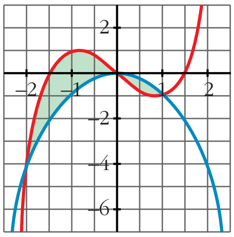
  Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \frac{1}{4}$

  Área total $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \text{u}^2$



d) $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0,\ \ x_2 = 3$

- $G(x) = \int (x^2 - 3x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(0) = 0;\ \ G(3) = -\frac{9}{2}$
- Área $= |G(3) - G(0)| = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$



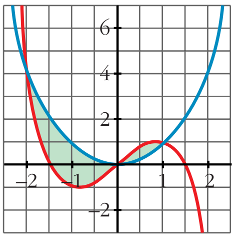
e) $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ x_1 = -2,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1$

- Hay dos recintos: I $[-2, 0]$; II $[0, 1]$
- $G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$
- $G(-2) = -\frac{8}{3};\ \ G(0) = 0;\ \ G(1) = -\frac{5}{12}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$

  Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$

  Área total $= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}\ \text{u}^2$



f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:

Área total $= \frac{37}{12}\ \text{u}^2$

18 **Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (t en min, v en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.**

$$G(t) = \int (5 - 0{,}1t) = 5t - \frac{0{,}1t^2}{2} = 5t - 0{,}05t^2$$

$G(200) = -1\,000$; $G(100) = 0$

Área $= |G(200) - G(100)| = 1\,000$

Se han vaciado 1 000 litros entre los minutos 100 y 200.

19 **S** **Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?**

Consideramos t entre 0 y 24 horas:

$$\int_0^{24} (0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1) = \left[\frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^{24} =$$

$$= 219{,}84 - 0 = 219{,}84 \text{ kg}$$

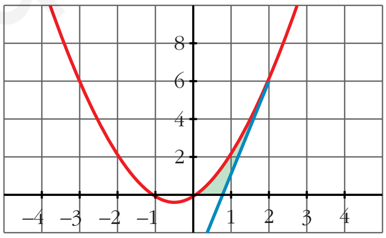
20 **S** **Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.**

- Recta tangente en $x = 2$:

$$y' = 1 + 2x \rightarrow m = y'(2) = 5; \; y(2) = 6$$

Recta $\rightarrow y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$

- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de $y = x + x^2$ con el eje X:

$$x + x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0$$

- Punto de corte de $y = 5x - 4$ con el eje X:

$$5x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

- Área bajo $y = x + x^2$ entre 0 y 2:

$$G_1(x) = \int (x + x^2) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$G_1(2) = \frac{14}{3}; \quad G_1(0) = 0$

$\text{Área} = |G_1(2) - G_1(0)| = \frac{14}{3} \text{ u}^2$

- Área bajo $y = 5x - 4$ entre $\frac{4}{5}$ y 2:

$G_2(x) = \int (5x - 4) = \frac{5x^2}{2} - 4x$

$G_2\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}; \quad G_2(2) = 2$

$\text{Área} = \left|G_2(2) - G_2\left(\frac{4}{5}\right)\right| = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5} \text{ u}^2$

- El área buscada es: $\frac{14}{3} - \frac{18}{5} = \frac{16}{15} \text{ u}^2$

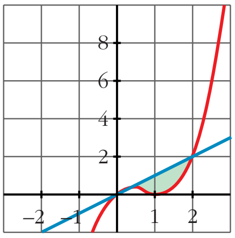
Página 227

21 **Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y la tangente.**

- Tangente en el origen:

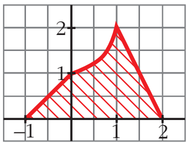
$$y' = 3x^2 - 4x + 1; \quad m = y'(0) = 1; \quad y(0) = 0$$

Recta $\rightarrow y = x$



- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 2$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$
- $G(0) = 0; \quad G(2) = -\frac{4}{3}$
- $\text{Área} = |G(2) - G(0)| = \frac{4}{3} \text{ u}^2$

22 **Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.**



- Entre –1 y 0 tenemos un triángulo de base 1 y altura 1:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

- Entre 1 y 2 tenemos un triángulo de base 1 y altura 2:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \text{ u}^2$$

- Entre 0 y 1:

$$G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{4}{3}\text{ u}^2$$

- El área total será: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}\text{ u}^2$

23 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.**

- Puntos de corte con el eje X:

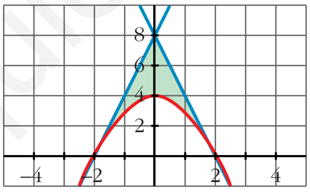
$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 2 \rightarrow \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

- $f'(x) = -2x; \; f'(-2) = 4; \; f'(2) = -4$

- Recta tangente en $x = -2 \rightarrow y = 4(x + 2) = 4x + 8$

  Recta tangente en $x = 2 \rightarrow y = -4(x - 2) = -4x + 8$

- Hacemos una gráfica para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices (–2, 0), (0, 8) y (2, 0):

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16\text{ u}^2$$

- Área entre $y = 4 - x^2$ y el eje X:

$$G(x) = \int (4 - x^2) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -\frac{16}{3}; \quad G(2) = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3}\text{ u}^2$$

- El área total será la diferencia: $16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}\text{ u}^2$

24 **Dada $f(x) = x + 1$, halla:**

a) $\int_0^x f$ **b)** $\int_1^x f$ **c)** $\int_{-1}^x f$ **d)** $\int_1^3 f$

$$G(x) = \int (x+1) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{3}{2};\ \ G(-1) = -\frac{1}{2};\ \ G(3) = \frac{15}{2}$$

a) $\int_0^x f = G(x) - G(0) = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int_1^x f = G(x) - G(1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

c) $\int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

d) $\int_1^3 f = G(3) - G(1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$

25 **a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

b) Calcula $\int_{-2}^3 |2x - 4|$.

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\int_0^5 y = \int_0^2 -2x + 4 + \int_2^5 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^5 =$$

$$= (4 - 0) + (5 + 4) = 4 + 9 = 13 \text{ u}^2$$

b) $\int_{-2}^3 |2x - 4| = \int_{-2}^2 -2x + 4 + \int_2^3 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_{-2}^2 + [x^2 - 4x]_2^3 =$

$$= (4 + 12) + (-3 + 4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2$$

26 **Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ y b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

a) $\int_0^2 f(x) = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 (2-x)$

$G_1(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3} \rightarrow G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$G_2(x) = \int (2-x) = 2x - \frac{x^2}{2} \rightarrow G_2(2) - G_2(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Así: $\int_0^2 f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

b) $\int_{-1}^3 g(x) = \int_{-1}^1 2x + \int_1^3 (x^2+1)$

$G_1(x) = \int 2x = x^2 \rightarrow G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$

$G_2(x) = \int (x^2+1) = \frac{x^3}{3} + x \rightarrow G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

Así: $\int_{-1}^3 g(x) = \frac{32}{3}$

27 **S** **Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < \frac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \frac{-1}{2} \le x \le 3 \\ |x+3| & x > 3 \end{cases}$$

Para x comprendida entre 0 y 3, tenemos que:

$f(x) = -x^2 + 3x$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2 + 3x) = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ u}^2$$

28 **Halla una función f de la cual sabemos que:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad \text{y que} \quad f(1) = 0$$

$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5) = x^3 - x^2 + 5x + k$ son las primitivas de la función dada.

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que $G(1) = 0$, es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

Así: $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

29 **Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pase por el punto (2, 4).**

$G(x) = \int (3x^2 - x^3) = x^3 - \frac{x^4}{4} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que pase por (2, 4):

$$G(2) = 4 + k = 4 \Rightarrow k = 0$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

30 **Halla la función que tome el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es:**

$$f'(x) = 3x^2 + 6$$

$G(x) = \int (3x^2 + 6) = x^3 + 6x + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(1) = 2$:

$$G(1) = 7 + k = 2 \Rightarrow k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + 6x - 5$

31 **Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.**

$G(x) = \int (1 - x - x^2) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(3) = 0$:

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \Rightarrow k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

32 **Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f, ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.**

Sí. Justificación:

$$\int f = F(x) + c_1 \qquad \int f = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \Rightarrow F(x) = k + G(x)$$

33 **Siendo $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, halla la función f. Calcula $F(0)$ y $F(2)$.**

$f(x) = F'(x) = 6x - 5$

$F(0) = 0; \quad F(2) = 2$

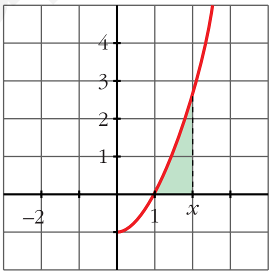
34 **Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo variable $[1, x]$. Halla el área para $x = 4$.**

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$

$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)$

$G(t) = \int (t^2 - 1) = \frac{t^3}{3} - t$

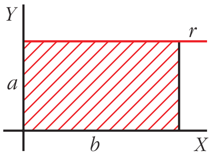
$G(1) = -\frac{2}{3}$



$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

Cuando $x = 4$, queda: Área $[1, 4] = 18 \text{ u}^2$

35 **Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es $A = b \cdot a$.**



☛ ***Halla la ecuación de la recta r y calcula el área limitada por r y el eje OX entre $x = 0$ y $x = b$.***

La ecuación de r es $y = a$. El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a$$

$G(x) = \int a = a\,x$

$G(b) = a\,b; \quad G(0) = 0$

$\text{Área} = G(b) - G(0) = a\,b$

PARA PROFUNDIZAR

36 S **Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$:**

a) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)$ en función de a.

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

a) $$\int_1^2 f(x) = \int_1^2 \left(a\,e^{x/3} + \frac{1}{x^2}\right) = \left[3a\,e^{x/3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3a\,e^{2/3} - \frac{1}{2}\right) - (3a\,e^{1/3} - 1) =$$

$$= 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$$

b) Si F es una primitiva de f, tenemos que:

$$F(x) = 3a\,e^{x/3} - \frac{1}{x} + k$$

Tenemos que hallar k y a para que:

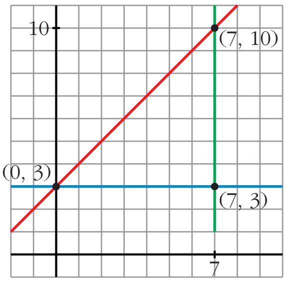
$$\left.\begin{array}{lll} F(1) = 0 & \to & 3a\,e^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \dfrac{1}{2} & \to & 3a\,e^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3a\,e^{1/3} + k = 1 \\ 3a\,e^{2/3} + k = 1 \end{array}\right\}$$

Restando la 2ª ecuación menos la 1ª:

$$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \quad \to \quad a = 0 \quad \to \quad k = 1$$

Por tanto: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$

37 S **Expresa por una integral el área del triángulo de vértices (0, 3), (7, 3) y (7, 10). Explica el significado de la integral escrita.**



- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 10) es:

$$\text{Pendiente} = \frac{10 - 3}{7 - 0} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = x + 3$$

- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 3) es: $y = 3$.

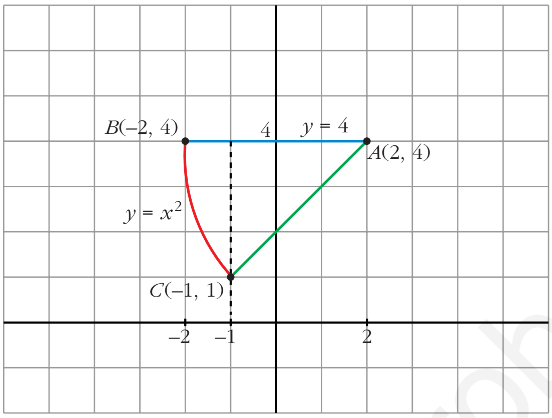
El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y $x = 7$. Así, tenemos que:

$$\text{Área} = \int_0^7 [(x + 3) - 3] = \int_0^7 x = \text{Área}$$

- Calculamos su valor:

$$\int_0^7 x = \frac{49}{2}\ \text{u}^2$$

38 **S** **Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.**



- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y C:

$$\text{Pendiente} = \frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + (x-2) = x + 2$$

- Calculamos el área pedida:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1}(4-x^2) + \int_{-1}^{2}[4-(x+2)] = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{2}(2-x) =$$

$$= \left(-4+\frac{1}{3}\right) - \left(-8+\frac{8}{3}\right) + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6}\ \text{u}^2$$

39 **S** **La curva $y = a[1-(x-2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.**

- Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

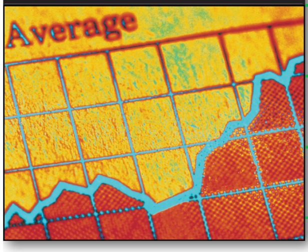
$$a[1-(x-2)^2] = 0 \;\rightarrow\; (x-2)^2 = 1 \begin{cases} x-2 = 1 \;\rightarrow\; x = 3 \\ x-2 = -1 \;\rightarrow\; x = 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\text{Área} = \int_{1}^{3} a[1-(x-2)^2] = a\left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_{1}^{3} = a\left[3 - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= a\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4a}{3} = 12 \;\rightarrow\; a = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \;\rightarrow\; a = 9$$

UNIDAD 9

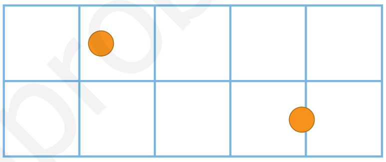


CÁLCULO DE PROBABILIDADES

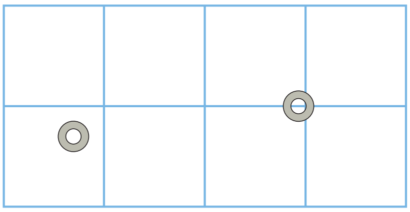
Página 237

Cálculo de probabilidades

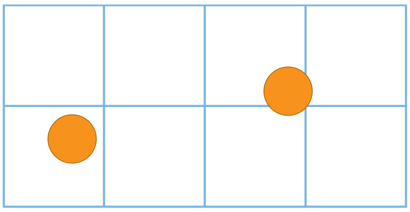
- **Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que “no toque raya” en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm una moneda de 1 cm de diámetro.**



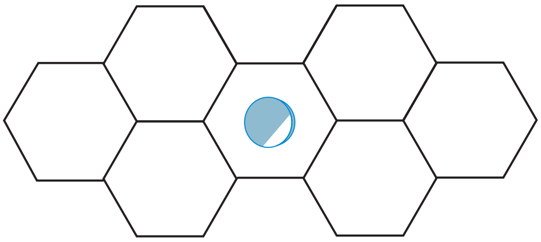
- **¿De qué tamaño debe ser un disco para que la probabilidad de que “no toque raya” en una cuadrícula de 4 cm × 4 cm sea de 0,2?**



- **En una cuadrícula de 4 cm × 4 cm dejamos caer 5 000 veces una moneda y contabilizamos que “no toca raya” en 1 341. Estima cuál es el diámetro de la moneda.**



- **Sobre un suelo de losetas hexagonales de 12 cm de lado se deja caer un disco de 10 cm de diámetro. ¿Cuál es la probabilidad de que “no toque raya”?**



- Área del cuadrado grande = $3^2 = 9$ cm^2

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4$ cm^2

  $$P = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

- Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2

  Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

  $$P = \frac{(4-d)^2}{16} = 0{,}2 \;\Rightarrow\; (4-d)^2 = 3{,}2 \;\Rightarrow\; 4 - d = \pm 1{,}8$$

  $4 - d = 1{,}8 \;\rightarrow\; d = 2{,}2$ cm

  $4 - d = -1{,}8 \;\rightarrow\; d = 5{,}8$ cm $\rightarrow$ No vale

  Ha de tener un diámetro de 2,2 cm.

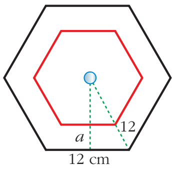
- Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2

  Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

  $$P = \frac{1\,341}{5\,000} = 0{,}2682 = \frac{(4-d)^2}{16}$$

  $(4 - d)^2 = 4{,}2912 \;\rightarrow\; d = 1{,}93$ cm

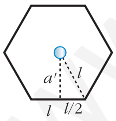
- Área del hexágono grande = $\dfrac{72 \cdot 10{,}4}{2} = 374{,}4$ cm^2



  Perímetro = 72 cm

  $a = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}4$ cm

  Área del hexágono pequeño = $\dfrac{37{,}44 \cdot 5{,}4}{2} = 101{,}088$ cm^2



  $a' = a - r = 10{,}4 - 5 = 5{,}4$ cm

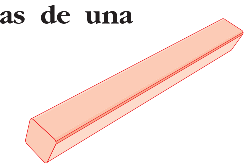
  $l^2 - \dfrac{l^2}{4} = (a')^2;\; \dfrac{3l^2}{4} = 29{,}16 \;\rightarrow\; l = 6{,}24$ cm $\rightarrow$ Perímetro = 37,44 cm

  $$P = \frac{101{,}088}{374{,}4} = 0{,}27$$

Página 238

1. Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta.

Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

b) Elementales → $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

No elementales → $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\},$
$\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{\emptyset\}$

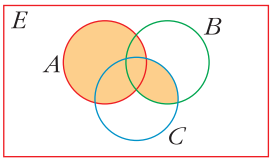
c) $2^4 = 16$ sucesos

Página 239

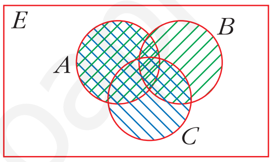
1. Justifica gráficamente las siguientes igualdades:

a) $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ **b)** $\boldsymbol{(A \cup B)' = A' \cap B'}$

a)

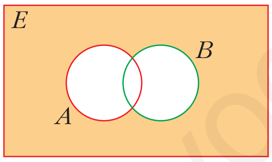


$A \cup (B \cap C)$

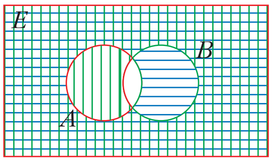


▨ $A \cup B$ } ▩ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
▨ $A \cup C$ }

b)



$(A \cup B)'$



▥ B' } ▦ $A' \cap B'$
▤ C' }

Página 243

1. Lanzamos un dado “chapucero” 1 000 veces. Obtenemos $f(1) = 117$, $f(2) = 302$, $f(3) = 38$, $f(4) = 234$, $f(5) = 196$, $f(6) = 113$. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos PAR, MENOR QUE 6, $\{1, 2\}$?

$P[1] = \dfrac{117}{1\,000} = 0{,}117$ $P[2] = 0{,}302$ $P[3] = 0{,}038$

$P[4] = 0{,}234$ $P[5] = 0{,}196$ $P[6] = 0{,}113$

$P[\text{PAR}] = 0{,}302 + 0{,}234 + 0{,}113 = 0{,}649$

$P[\text{MENOR QUE } 6] = 1 - P[6] = 1 - 0{,}113 = 0{,}887$

$P[\{1, 2\}] = 0{,}117 + 0{,}302 = 0{,}419$

2. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?**

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

3. **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus resultados sea 3?**

Hacemos una tabla para la diferencia de resultados:

1er DADO

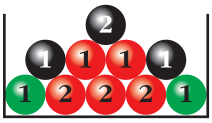
2º DADO

–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	③	4	5
2	1	0	1	2	③	4
3	2	1	0	1	2	③
4	③	2	1	0	1	2
5	4	③	2	1	0	1
6	5	4	③	2	1	0

$$P[\text{DIFERENCIA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Página 245

1. **Observa las bolas que hay en la urna.**



a) Forma un cuadro de doble entrada en el que se repartan las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las probabilidades condicionadas: P[1/ROJO], P[1/VERDE], P[1/NEGRO], P[2/ROJO], P[2/VERDE], P[2/NEGRO].

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

a)

	V	R	N	
1	2	2	2	6
2	0	3	1	4
	2	5	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\qquad$ $P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P[\text{N}] = \frac{3}{10} = 0{,}3$ $\qquad$ $P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$P[\text{V}] = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

d) $P[1/\text{R}] = \frac{2}{5}$; $P[1/\text{V}] = 1$; $P[1/\text{N}] = \frac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \frac{3}{5}$; $P[2/\text{V}] = 0$; $P[2/\text{N}] = \frac{1}{3}$

e) No son independientes.

Página 246

1. Calcula la probabilidad de obtener tres CUATROS al lanzar tres dados.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$$

2. Calcula la probabilidad de no obtener NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (¿Cuál es la probabilidad de NO SEIS? Repite cuatro veces).

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48$$

3. Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS.)

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$

4. Vas a lanzar 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) Obtener 5 cruces.

b) Obtener alguna cara.

a) $P[5 \text{ CRUCES}] = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \approx 0{,}031$

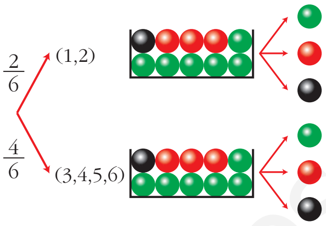
b) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA}] = 1 - P[5 \text{ CRUCES}] = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875 \approx 0{,}969$

Página 247

5. Tenemos un dado y las dos urnas descritas arriba. Lanzamos el dado. Si sale 1 ó 2, acudimos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 ó 6, acudimos a la urna II.

Extraemos una bola de la urna correspondiente.

a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.



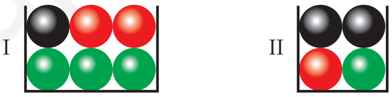
b) Halla: *P*[{3, 4, 5, 6} y 🔴], *P*[🟢/1], *P*[🔴/5] y *P*[2 y 🟢].

a) Ver el ejemplo en la propia página 247.

b) $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{60}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

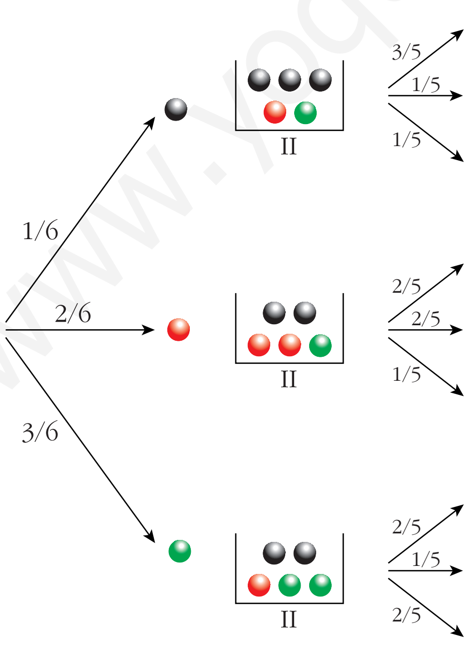
Página 249

1. Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.



Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) Roja. **b) Verde.** **c) Negra.**



⚫ ⟶ *P*[⚫ y ⚫] = $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{30}$

🔴 ⟶ *P*[⚫ y 🔴] = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$

🟢 ⟶ *P*[⚫ y 🟢] = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$

⚫ ⟶ *P*[🔴 y ⚫] = $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{30}$

🔴 ⟶ *P*[🔴 y 🔴] = $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{30}$

🟢 ⟶ *P*[🔴 y 🟢] = $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

⚫ ⟶ *P*[🟢 y ⚫] = $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$

🔴 ⟶ *P*[🟢 y 🔴] = $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

🟢 ⟶ *P*[🟢 y 🟢] = $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$

a) $P[2^{a}$ 🔴$] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2^{a}$ 🟢$] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2^{a}$ ⚫$] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

Página 251

1. En el ejercicio propuesto del apartado anterior, calcular:

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? *P*[1ª ⚫/2ª ⚫]

b) *P*[1ª ⚫/2ª 🔴]

c) *P*[1ª 🟢/2ª 🟢]

a) $P[1^{a}$ ⚫$/2^{a}$ ⚫$] = \dfrac{P[\text{⚫ y ⚫}]}{P[2^{a}\text{ ⚫}]} = \dfrac{3/30}{13/30} = \dfrac{3}{13}$

b) $P[1^{a}$ ⚫$/2^{a}$ 🔴$] = \dfrac{P[\text{⚫ y 🔴}]}{P[2^{a}\text{ 🔴}]} = \dfrac{1/30}{8/30} = \dfrac{1}{8}$

c) $P[1^{a}$ 🟢$/2^{a}$ 🟢$] = \dfrac{P[\text{🟢 y 🟢}]}{P[2^{a}\text{ 🟢}]} = \dfrac{6/30}{9/30} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Página 255

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Lanzamos un dado y una moneda. Los posibles resultados son (1, C), (1, +), (2, C)…

a) Describe el espacio muestral con los doce elementos de los que consta.

Sean los sucesos:

***A* = “Sacar uno o dos en el dado”**

***B* = “sacar + en la moneda”**

***D* = {(1, C), (2, +), (3, C), (3, +), (6, +)}**

b) Describe los sucesos *A* y *B* mediante todos los elementos.

c) Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup D'$

a) E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}

b) $A = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +)\}$

$B = \{(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

c) $A \cup B = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

$A \cap B = \{(1, +), (2, +)\}$

$D' = \{(1, +), (2, C), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

$A \cup D' = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

2 **Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.**

a) $P[a_1] = 1/2$ $P[a_2] = 1/3$ $P[a_3] = 1/6$	**b)** $P[a_1] = 3/4$ $P[a_2] = 1/4$ $P[a_3] = 1/4$
c) $P[a_1] = 1/2$ $P[a_2] = 0$ $P[a_3] = 1/2$	**d)** $P[a_1] = 2/3$ $P[a_2] = 1/3$ $P[a_3] = 1/3$

a) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

b) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

c) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

d) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

③ **Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B:**

$$P[A] = 1/4, \quad P[B] = 1/2, \quad P[A \cup B] = 2/3$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

los sucesos A y B son incompatibles.

4 S **Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.**

a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra “s” para las respuestas afirmativas y la “n” para las negativas.

b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso “al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto”?

c) Describe el suceso contrario de “más de una persona es partidaria de consumir el producto”.

a) E = {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}

b) {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)}

c) El suceso contrario es “una persona, o ninguna, son partidarias de consumir el producto”. Por tanto, estaría formado por:

{(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}.

Es el suceso contrario al del apartado b).

5 **En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral E?**

Describe los siguientes sucesos: A = “La menor es mujer”, B = “El mayor es varón”. ¿En qué consiste $A \cup B$?

E tiene $2^3 = 8$ elementos.

A = {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M)}

B = {(V, V, V), (V, V, M), (V, M, V), (V, M, M)}

$A \cup B$ = “O bien la menor es mujer, o bien el mayor es varón” =

= {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M), (V, V, V), (V, M, V)}

⑥ **Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.**

☛ ***Completa esta tabla y razona sobre ella.***

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	**4**	5	6
2	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3	3	3	3	**4**	5	6
4	4	4	4	**4**	5	6
5	5	5	5	**5**	5	6
6	6	6	6	**6**	6	6

En la tabla vamos anotando la mayor puntuación obtenida. Así:

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 1}] = \frac{1}{36}$$

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 2}] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 3}] = \frac{5}{36}$$

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 4}] = \frac{7}{36}$$

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 5}] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{La mayor de las puntuaciones sea un 6}] = \frac{11}{36}$$

⑦ **Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:**

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.

b) Alumno que suspenda las matemáticas.

c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

☛ ***Haz una tabla de contingencia.***

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) $P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] -$

$$- P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$P[\text{alumno}] = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$P[\text{aprueba mat.}] = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Por tanto, sí son independientes.

8 **Di cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finito y tiene pocos elementos, dilos todos, y si tiene muchos, descríbelo y di el número total.**

a) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el número.

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

c) Extraemos dos cartas de una baraja española y anotamos el palo de cada una.

d) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el resultado.

e) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el número de caras.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

b) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

c) Llamamos: O = OROS; C = COPAS; E = ESPADAS; B = BASTOS.

Entonces:

$E = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, B), (C, O), (C, C), (C, E), (C, B), (E, O), (E, C), (E, E), (E, B), (B, O), (B, C), (B, E), (B, B)\}$

d) E tiene $2^6 = 64$ sucesos elementales. Cada suceso elemental está compuesto por seis resultados que pueden ser cara o cruz:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_i puede ser cara o cruz. Por ejemplo:

(C, +, C, C, +, C) es uno de los 64 elementos de E.

e) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Página 256

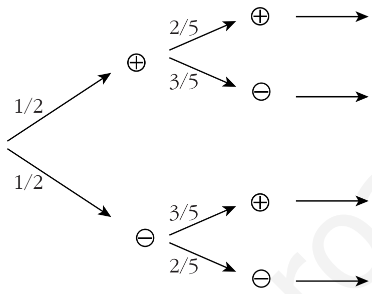
PARA RESOLVER

9 **En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.**

a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[\oplus\oplus] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$P[\oplus\ominus] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P[\ominus\oplus] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P[\ominus\ominus] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

a) $P[\oplus\,\oplus] + P[-\,-] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

b) $P[\oplus\,-] + P[-\,\oplus] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

10 **S** **En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños.**

Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

☛ ***Usa una tabla como la siguiente:***

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15		40
CAB. NO CAST.			
	25		100

Hacemos la tabla:

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15	25	40
CAB. NO CAST.	10	50	60
	25	75	100

a) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

11 **Dos personas juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados A y B. El dado A tiene cuatro caras con la puntuación 6 y las otras dos caras con la punatuación 10. El dado B tiene una cara con la punuación 3, cuatro caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 12. ¿Qué jugador tiene más probabilidad de ganar?**

☛ ***Haz una tabla en la que aparezcan las 6 posibilidades del dado A y las del dado B. En cada una de las 36 casillas anota quién gana en cada caso.***

Formamos una tabla en la que aparezcan todas las posibilidades (las 6 del dado A y las 6 del B). En cada casilla ponemos quién gana en cada caso:

A B	6	6	6	6	10	10
3	A	A	A	A	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
12	B	B	B	B	B	B

A gana en 14 casos.

B gana en 6 casos.

En 16 casos hay empate.

En una tirada, la probabilidad de que gane A es:

$$P[\text{A}] = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

La probabilidad de que gane B es:

$$P[\text{B}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, A tiene mayor probabilidad de ganar.

12 **S** **De los sucesos A y B se sabe que:**

$$P[A] = \frac{2}{5},\quad P[B] = \frac{1}{3} \text{ y } P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

13 **S** **Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:**

$$P[A] = 0{,}4,\quad P[B] = 0{,}3 \;\text{ y }\; P[A \cap B] = 0{,}1$$

Calcula razonadamente:

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A' \cup B']$**

c) $P[A/B]$ **d) $P[A' \cap B']$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

d) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

14 **A, B y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:**

a) Se realiza alguno de los tres.

b) No se realiza ninguno de los tres.

c) Se realizan los tres.

d) Se realizan dos de los tres.

e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A' \cap B' \cap C'$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

15 **S** **Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.**

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

a) P[APROBAR] = P[SABE 1º Y 2º] + P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15} \approx 0{,}87$$

b) P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$$

16 **Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un valor mayor que en la primera.**

En total hay 36 posibles resultados. De estos, en 6 casos los dos números son iguales; y, en los otros 30, bien el primero es mayor que el segundo, o bien el segundo es mayor que el primero (con la misma probabilidad).

Luego, hay 15 casos en los que el resultado de la segunda tirada es mayor que el de la primera.

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(NOTA: también se puede resolver el problema haciendo una tabla como la del ejercicio número 6 y contar los casos).

17 **S** **Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:**

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Tenemos que:

$$P[\text{pase } 1^{\text{a}}] = 0{,}6; \quad P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}8; \quad P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}5$$

a) $P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cup \text{pase } 2^{\text{a}}] = P[\text{pase } 1^{\text{a}}] + P[\text{pase } 2^{\text{a}}] - P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] =$

$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$$

b) $1 - P[\text{pase al menos una}] = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P[\text{pase } 1^{\text{a}}] \cdot P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

$P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0{,}5 \neq 0{,}48$

No son independientes.

d) $P[\text{pase } 2^{\underline{a}}/\text{no pase } 1^{\underline{a}}] = \dfrac{P[\text{pase } 2^{\underline{a}} \cap \text{no pase } 1^{\underline{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\underline{a}}]} =$

$$= \frac{P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] - P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\underline{a}}]} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

18 **En una comarca hay dos periódicos: *El Progresista* y *El Liberal.* Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee *El Progresista* (*P*), el 40% lee *El Liberal* (*L*) y el 25% no lee ninguno de ellos.**

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer solo *El Liberal.*

c) Leer solo *El Progresista.*

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

f) Leer solo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee *El Progresista.* ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea *El Liberal*? ¿Y de que no lo lea?

Tenemos que:

$$P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P' \cap L'] = 0{,}25$$

a) $P[P' \cap L'] = P[(P \cup L)'] = 1 - P[P \cup L]$

$0{,}25 = 1 - P[P \cup L] \;\Rightarrow\; P[P \cup L] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P[P \cup L] = P[P] + P[L] - P[P \cap L]$

$0{,}75 = 0{,}55 + 0{,}4 - P[P \cap L] \;\Rightarrow\; P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[\text{leer los dos}] = P[P \cap L] = 0{,}2$

b) $P[L] - P[P \cap L] = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

c) $P[P] - P[P \cap L] = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$

d) $P[P \cup L] = 0{,}75$

e) $P[P' \cap L'] = 0{,}25$

f) $P[P \cap L'] + P[P' \cap L] = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$

g) $P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P \cap L] = 0{,}2; \quad P[P \cup L] = 0{,}75$

$P[P - L] = P[P] - P[P \cap L] = 0{,}35$

$P[L - P] = P[L] - P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[(L \cup P)'] = P[L' \cap P'] = 0{,}25$

$P[(L \cap P)'] = 1 - P[L \cap P] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

h) $P[L/P] = \dfrac{P[L \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55} = \dfrac{20}{55} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}36$

$P[L'/P] = \dfrac{P[L' \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}35}{0{,}55} = \dfrac{35}{55} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$

$\left(\text{o bien: } P[L'/P] = 1 - P[L/P] = 1 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{7}{11}\right)$

Página 257

⑲ **Una urna *A* tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Otra urna *B* tiene 9 bolas blancas y 1 negra. Escogemos una de las urnas al azar y de ella extraemos una bola.**

Calcula:

a) *P*[BLANCA/*A*]

b) *P*[BLANCA/*B*]

c) *P*[*A* y BLANCA]

d) *P*[*B* y BLANCA]

e) *P*[BLANCA]

f) Sabiendo que la bola obtenida ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido la urna *B*?

a) $P[\text{BLANCA}/A] = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

b) $P[\text{BLANCA}/B] = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

c) $P[A \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$

d) $P[B \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{10} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$

e) $P[\text{BLANCA}] = P[A \text{ y Blanca}] + P[B \text{ y Blanca}] = \dfrac{3}{20} + \dfrac{9}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

f) $P[B/\text{BLANCA}] = \dfrac{P[B \text{ y Blanca}]}{P[\text{Blanca}]} = \dfrac{9/20}{12/20} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

20 **Tenemos las mismas urnas del ejercicio anterior. Sacamos una bola de *A* y la echamos en *B* y, a continuación, sacamos una bola de *B*.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que también la primera fuese negra?

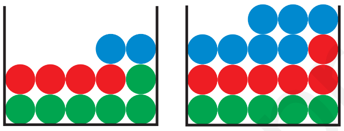
a) $P[2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}] = P[1^{\text{a}}\ \text{BLANCA y } 2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}] + P[1^{\text{a}}\ \text{NEGRA y } 2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}] =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{110} + \frac{14}{110} = \frac{17}{110}$$

b) $P[1^{\text{a}}\ \text{NEGRA}/2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}] = \dfrac{P[1^{\text{a}}\ \text{NEGRA y } 2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}]}{P[2^{\text{a}}\ \text{NEGRA}]} = \dfrac{7/10 \cdot 2/11}{17/110} =$

$$= \frac{14/110}{17/110} = \frac{14}{17}$$

21 **Tenemos dos urnas con estas composiciones:**



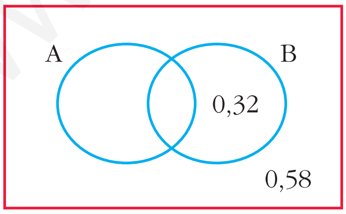
Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y la probabilidad de que sean de distinto color?

$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} = \frac{30}{216} + \frac{24}{216} + \frac{14}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$$

22 S **Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.**

Llamamos A = "falla A"; B = "falla B".



Tenemos que:

$P[A' \cap B'] = 0{,}58$; $P[B \cap A'] = 0{,}32$

Así:

$P[A'] = P[A' \cap B'] + P[B \cap A'] = 0{,}58 + 0{,}32 = 0{,}90$

$(A' \cap B') \cup (B \cap A') = A'$

La probabilidad de que no falle A es de 0,90.

23 **Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras (cero, una o dos)? Razónalo.**

Para cada jugador tenemos que:

$$P[0] = P[0 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P[1] = P[1 \text{ CARA}] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P[2] = P[2 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Los resultados de los dos jugadores son sucesos independientes. La probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras es:

$$(P[0])^2 + (P[1])^2 + (P[2])^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

24 **Se lanza un dado repetidas veces y estamos interesados en el número de tiradas precisas para obtener un 6 por primera vez.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 se obtenga en la séptima tirada?

a) $E = \{1, 2, 3, \ldots\}$

b) $P[7^{\underline{a}} \text{ TIRADA}] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{15\,625}{279\,936} \approx 0{,}558$

25 **Un producto está formado de dos partes: *A* y *B*. El proceso de fabricación es tal, que la probabilidad de un defecto en *A* es 0,06 y la probabilidad de un defecto en *B* es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?**

$$P[\text{ningún defecto}] = P[\text{no defecto en } A] \cdot P[\text{no defecto en } B] =$$

$$= (1 - 0{,}06) \cdot (1 - 0{,}07) = 0{,}94 \cdot 0{,}93 = 0{,}8742$$

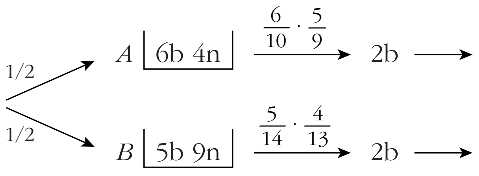
26 S **Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?**

$$P[BBR] + P[BRB] + P[RBB] = 3 \cdot P[BBR] = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

27 S **Una urna** ***A*** **contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna** ***B*** **tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas.**

Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la ***A*****.**

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[A \text{ y } 2\text{b}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{6}$$

$$P[B \text{ y } 2\text{b}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{5}{91}$$

$$P[2\text{b}] = \frac{1}{6} + \frac{5}{91} = \frac{121}{546}$$

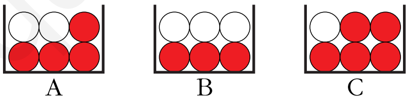
La probabilidad pedida será:

$$P[A/2\text{b}] = \frac{P[A \text{ y } 2\text{b}]}{P[2\text{b}]} = \frac{1/6}{121/546} = \frac{91}{121} = 0{,}752$$

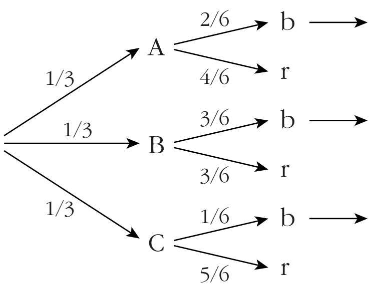
28 S **Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas.**

a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

b) Si la bola extraida resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



a) Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[\text{A y b}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{18}$$

$$P[\text{B y b}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{18}$$

$$P[\text{C y b}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P[\text{b}] = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

b) $P[\text{B/b}] = \dfrac{P[\text{B y b}]}{P[\text{b}]} = \dfrac{3/18}{6/18} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

Página 258

29 **S** **Sean A y B dos sucesos tales que: $P[A \cup B] = \frac{3}{4}$; $P[B'] = \frac{2}{3}$; $P[A \cap B] = \frac{1}{4}$. Halla $P[B]$, $P[A]$, $P[A' \cap B]$.**

$$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$$

$$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

30 **S** **En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas.**

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

$$\xrightarrow{0,12} \text{ENFERMO} \xrightarrow{0,9} \text{POSITIVO} \longrightarrow P[\text{ENF. y POSITIVO}] = 0,12 \cdot 0,9 = 0,108$$

$$\xrightarrow{0,88} \text{NO ENFERMO} \xrightarrow{0,05} \text{POSITIVO} \longrightarrow P[\text{NO ENF. y POSITIVO}] = 0,88 \cdot 0,05 = 0,044$$

$$P[\text{POSITIVO}] = 0,108 + 0,044 = 0,152$$

La probabilidad pedida será:

$$P[\text{NO ENF./POSITIVO}] = \frac{P[\text{NO ENF. Y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0,044}{0,152} = 0,289$$

31 **S** **En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%.**

Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

$$\xrightarrow{1/3} A \xrightarrow{1/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[A \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\xrightarrow{1/3} B \xrightarrow{2/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[B \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} = \frac{2}{300}$$

$$\xrightarrow{1/3} C \xrightarrow{3/100} \text{DEFECTUOSA} \longrightarrow P[C \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{300}$$

$$P[\text{DEF.}] = \frac{1}{300} + \frac{2}{300} + \frac{3}{300} = \frac{6}{300}$$

La probabilidad pedida será:

$$P[A/\text{DEF.}] = \frac{P[A \text{ y DEF.}]}{P[\text{DEF.}]} = \frac{1/300}{6/300} = \frac{1}{6}$$

32 **S** **Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* a *B* y después se extrae una bola de *B*, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.**

$$A\ \boxed{2b\ 2r} \begin{array}{l} \xrightarrow{2/4} b \longrightarrow B\ \boxed{4b\ 2r} \xrightarrow{4/6} b;\ P[1^{\underline{a}} \text{ b y } 2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \\ \xrightarrow[2/4]{} r \longrightarrow B\ \boxed{3b\ 3r} \xrightarrow{3/6} b;\ P[1^{\underline{a}} \text{ r y } 2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$P[2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[1^{\underline{a}} \text{ b}/2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{P[1^{\underline{a}} \text{ b y } 2^{\underline{a}} \text{ b}]}{P[2^{\underline{a}} \text{ b}]} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

33 **S** **Una urna *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna *B*, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *B*.**

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{1/2} A\ \boxed{5b\ 3n} \xrightarrow{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}} 2n \longrightarrow P[A \text{ y } 2n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{56} \\ \xrightarrow[1/2]{} B\ \boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}} 2n \longrightarrow P[B \text{ y } 2n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{15} \end{array}$$

$$P[2n] = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} = \frac{101}{840}$$

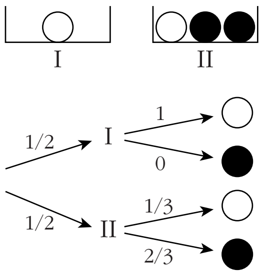
Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[B/2n] = \frac{P[B \text{ y } 2n]}{P[2n]} = \frac{1/15}{101/840} = \frac{56}{101}$$

34 **S** **Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.**

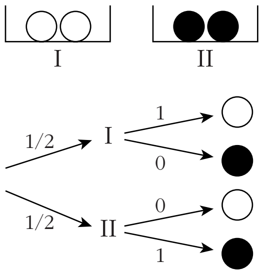
Hay cuatro posibles distribuciones. Veamos cuál es la probabilidad de obtener blanca en cada caso:

a)



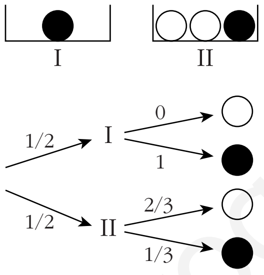
$$\left.\begin{array}{l} P[\text{I y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P[\text{II y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \end{array}\right\} P[\bigcirc] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$$

b)



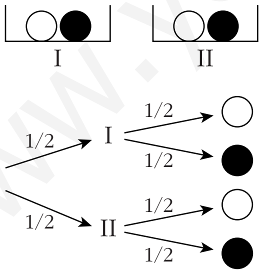
$$\left.\begin{array}{l} P[\text{I y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P[\text{II y } \bigcirc] = 0 \end{array}\right\} P[\bigcirc] = \dfrac{1}{2}$$

c)



$$\left.\begin{array}{l} P[\text{I y } \bigcirc] = 0 \\[2ex] P[\text{II y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} P[\bigcirc] = \dfrac{1}{3}$$

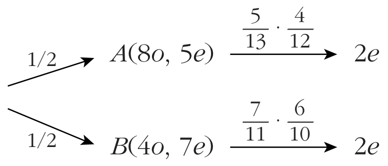
d)



$$\left.\begin{array}{l} P[\text{I y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] P[\text{II y } \bigcirc] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} P[\bigcirc] = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$$

Para obtener la máxima probabilidad de obtener una bola blanca, deberemos colocar una bola blanca en una de las urnas y las otras tres bolas en la otra urna.

35 **S** **Sean *A* y *B* dos montones de cartas. En *A* hay 8 oros y 5 espadas y, en *B*, 4 oros y 7 espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón *B*.**



$$P[A \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{78}$$

$$P[B \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{21}{110}$$

$$P[2e] = \frac{5}{78} + \frac{21}{110} = \frac{547}{2\,145}$$

Así, tenemos que:

$$P[B/2e] = \frac{P[B \text{ y } 2e]}{P[2e]} = \frac{21/110}{547/2\,145} = \frac{819}{1\,094} \approx 0{,}749$$

36 **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas.**

a) Se extrae una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Se extrae una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

c) Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

d) ¿Son independientes los sucesos “sacar bola marcada” y “sacar bola blanca”?

Resumimos la información en una tabla:

	MARCADAS	SIN MARCAR	
BLANCAS	75	25	100
NEGRAS	175	125	300
	250	150	400

a) $P[\text{BLANCA}] = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{BLANCA/MARCADA}] = \frac{75}{250} = \frac{3}{10}$

c) $P[\text{NEGRA y MARCADA}] = \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$

d) $P[\text{BLANCA}] \cdot P[\text{MARCADA}] = \frac{1}{4}\cdot\frac{250}{400} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{32}$

$P[\text{BLANCA y MARCADA}] = \frac{75}{400} = \frac{3}{16} \neq \frac{5}{32}$

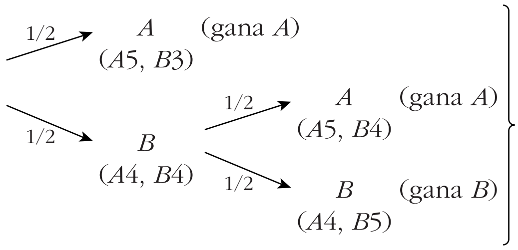
No son independientes.

37 **Dos personas se enfrentan en un juego en el que será vencedor el primero que gane 5 partidas. Pero antes de finalizar el juego, éste se interrumpe en el momento en que uno ha ganado 4 partidas y otro 3.**

¿Cómo deben repartirse los 4 200 euros que apostaron?

☛ ***Describe en un diagrama en árbol las posibles continuaciones de la partida.***

Llamamos A al jugador que lleva 4 partidas ganadas y B al de 3. Las posibles continuaciones del juego son:



$$P\,[\text{gana } A] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\,[\text{gana } B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, A debe llevarse $\frac{3}{4}$ del total y B, $\frac{1}{4}$; es decir:

$$A \;\rightarrow\; \frac{3}{4}\,4\,200 = 3\,150 \text{ €}; \quad B \;\rightarrow\; \frac{1}{4}\,4\,200 = 1\,050 \text{ €}$$

38 **En un centro escolar hay tres grupos de Bachillerato. El primero está compuesto por 10 alumnos de los que 7 prefieren la música moderna, 2 prefieren la clásica y 1 que no le gusta la música. En el segundo, compuesto por 12 alumnos, la distribución de preferencias es 5, 7, 0, respectivamente; y, en el tercero, formado por 14 alumnos, la distribución de preferencias es 6, 6, 2, respectivamente.**

Se elige un grupo al azar y se regalan 2 entradas para un concierto de música clásica a dos alumnos seleccionados al azar.

a) Halla la probabilidad de que los dos alumnos elegidos sean aficionados a la música clásica.

b) Si los dos alumnos agraciados son, efectivamente, aficionados a la música clásica, ¿cuál es la probabilidad de que sean del primer grupo?

☛ ***Organiza los datos en una tabla.***

Organizamos los datos en una tabla:

	MODERNA	CLÁSICA	NO	TOTAL
1º	7	2	1	10
2º	5	7	0	12
3º	6	6	2	14

La probabilidad de elegir un grupo cualquiera es $\frac{1}{3}$.

a) $P[\text{2 ALUMNOS DE CLÁSICA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}168$

b) $P[\text{2 ALUMNOS DEL 1º/AMBOS DE CLÁSICA}] = \frac{P[\text{DOS DE 1º DE CLÁSICA}]}{P[\text{DOS DE CLÁSICA}]} =$

$$= \frac{(1/3) \cdot (2/10) \cdot (1/9)}{0{,}168} \approx 0{,}044$$

Página 259

CUESTIONES TEÓRICAS

39 **S** **Sean A y B dos sucesos tales que $P[A] = 0{,}40$; $P[B/A] = 0{,}25$ y $P[B] = b$.**

Halla:

a) $P[A \cap B]$.

b) $P[A \cup B]$ si $b = 0{,}5$.

c) El menor valor posible de b.

d) El mayor valor posible de b.

a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = 0{,}40 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$

b) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}40 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}8$

c) El menor valor posible de b es $P[B] = P[A \cap B]$, es decir, 0,1.

d) El mayor valor posible de b es: $1 - (P[A] - P[A \cap B]) = 1 - (0{,}4 - 0{,}1) = 0{,}7$

40 **Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es p, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razónalo.**

Si $P[A \cap B] = p$, entonces:

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - p$$

41 **Razona la siguiente afirmación: Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que 1/2, la suma de las probabilidades de ambos (por separado), no puede exceder de 3/2.**

$$P[A] + P[B] = P[A \cup B] + P[A \cap B] < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

pues $P[A \cup B] \leq 1$ y $P[A \cap B] < \frac{1}{2}$.

42 **Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. ¿Es posible que p sea una probabilidad si: $P[A] = \frac{2}{5}$, $P[B] = \frac{1}{5}$ y $P[A' \cap B'] = \frac{3}{10}$?**

$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{7}{10}$$

Por otra parte:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{7}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{-1}{10}$$

Es imposible, pues una probabilidad no puede ser negativa.

43 **Sea A un suceso con $0 < P[A] < 1$.**

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario A'?

b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y C' independientes?

Justifica las respuestas.

a) $P[A] = p \neq 0$; $P[A'] = 1 - p \neq 0$

$P[A] \cdot P[A'] = p(1 - p) \neq 0$

$P[A \cap A'] = P[\emptyset] = 0$

No son independientes, porque $P[A \cap A'] \neq P[A] \cdot P[A']$.

b) $P[A \cap B] = P[B]$

¿$P[A] \cdot P[B] = P[B]$? Esto solo sería cierto si:

- $P[A] = 1$, lo cual no ocurre, pues $P[A] < 1$.
- $P[B] = 0$. Por tanto, solo son independientes si $P[B] = 0$.

c) A independiente de $C \Rightarrow P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$

$$P[A \cap C'] = P[A - (A \cap C)] = P[A] - P[A \cap C] =$$
$$= P[A] - P[A] \cdot P[C] = P[A]\,(1 - P[C]) = P[A] \cdot P[C']$$

Por tanto, A y C' son independientes.

44 **Si A y B son dos sucesos de experimento aleatorio y $P[A] = 0$:**

a) ¿Qué podemos decir de $P[A \cap B]$?

b) ¿Y de $P[A \cup B]$?

c) Responde a las mismas preguntas si $P[A] = 1$.

a) $P[A \cap B] = 0$

b) $P[A \cup B] = P[B]$

b) $P[A \cap B] = P[B]$; $P[A \cup B] = P[A] = 1$

45 **Al tirar tres dados, podemos obtener suma 9 de seis formas distintas:**

126, 135, 144, 225, 234, 333

y otras seis de obtener suma 10: 136, 145, 226, 235, 244, 334.

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener suma 10 que suma 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 → cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir:

$$3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$$

1, 4, 4; 2, 2, 5 → cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

$18 + 6 + 1 = 25$ formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 → $6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 → $3 \cdot 3 = 9$ formas

$18 + 9 = 27$ formas distintas de obtener suma 10.

$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

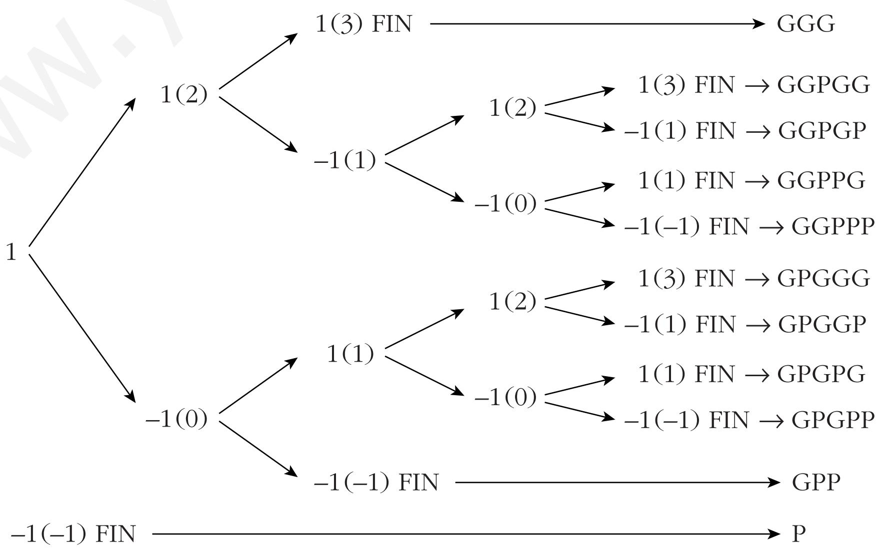
PARA PROFUNDIZAR

46 **Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces, a lo sumo. Cada apuesta es de 1 euro. El hombre empieza con 1 euro y dejará de jugar cuando pierda el euro o gane 3 euros.**

a) Halla el espacio muestral de los resultados posibles.

b) Si la probabilidad de ganar o perder es la misma en cada apuesta, ¿cuál es la probabilidad de que gane 3 euros?

a) Hacemos un esquema:



El espacio muestral sería:

E = {GGG, GGPGG, GGPGP, GGPPG, GGPPP, GPGGG, GPGGP, GPGPG, GPGPP, GPP, P}

donde G significa que gana esa partida y P que la pierde.

b) Por el esquema anterior, vemos que gana 3 euros con:

$$\text{GGG} \to \textit{probabilidad} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{GGPGG} \to \textit{probabilidad} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\text{GPGGG} \to \textit{probabilidad} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Por tanto:

$$P[\text{gane 3 euros}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

47 S **En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos.**

P[3 números distintos] = 1 · P[2ª dist. de la 1ª] · P[3ª dist. de la 1ª y de la 2ª] =

$$= 1 \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = \frac{192}{247}$$

48 S **Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)?**

P[ninguna coincidencia] = 1 · P[2ª en distinto día que la 1ª] · …

… · P[5ª en distinto día que 1ª, 2ª, 3ª y 4ª] =

$$= 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{360}{2\,401} = 0{,}15$$

P[alguna coincidencia] = 1 – P[ninguna coincidencia] = 1 – 0,15 = 0,85

49 S **En una competición de tiro con arco, cada tirador dispone, como máximo, de tres intentos para hacer diana. En el momento en que lo consigue, deja de tirar y supera la prueba y, si no lo consigue en ninguno de los tres intentos, queda eliminado. Si la probabilidad de hacer blanco con cada flecha, para un determinado tirador, es 0,8:**

a) Calcula la probabilidad de no quedar eliminado.

b) Si sabemos que superó la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya conseguido en el segundo intento?

a) **1ª forma**

$$P[\text{NO ELIMINADO}] = P[\text{AC } 1^{\underline{a}}] + P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y AC } 2^{\underline{a}}] + P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 2^{\underline{a}} \text{ y AC } 3^{\underline{a}}] =$$

$$= 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}992$$

2ª forma

$$P[\text{NO ELIMINADO}] = 1 - P[\text{ELIMINADO}] = 1 - P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 2^{\underline{a}} \text{ y NO AC } 3^{\underline{a}}] =$$

$$= 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$$

b) $P[\text{AC } 2^{\underline{a}}/\text{NO ELIMINADO}] = \dfrac{P[\text{NO AC } 1^{\underline{a}} \text{ y AC } 2^{\underline{a}}]}{P[\text{NO ELIMINADO}]} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}992} \approx 0{,}1613$

50 S **Sea A el suceso “una determinada persona A resuelve un determinado problema” y B el suceso “lo resuelve la persona B”. Se sabe que la probabilidad de que lo resuelvan las dos personas es de 1/6; y, la de que no lo resuelva ninguna de las dos es de 1/3. Sabiendo que la probabilidad de que lo resuelva una persona es independiente de que lo resuelva la otra, calcula $P(A)$ y $P(B)$.**

Llamamos $P[A] = x$; $P[B] = y$. Como A y B son independientes:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] \quad \to \quad x \cdot y = \frac{1}{6}$$

Además, tenemos que:

$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = \frac{1}{3} \quad \to \quad P[A \cup B] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Pero:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = x + y - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{es decir: } x + y = \frac{5}{6}$$

Uniendo las dos condiciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = \dfrac{1}{6} \\[2ex] x + y = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = \dfrac{5}{6} - x \\[2ex] x\left(\dfrac{5}{6} - x\right) = \dfrac{1}{6}; \quad \dfrac{5x}{6} - x^2 = \dfrac{1}{6}; \quad 5x - 6x^2 = 1 \end{array}$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{array}{l} \nearrow x = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \searrow x = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Hay dos soluciones:

$$x = \frac{1}{2} \quad \to \quad y = \frac{1}{3} \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} P[A] = 1/2 \\ P[B] = 1/3 \end{array}\right.$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \to \quad y = \frac{1}{2} \quad \to \quad \left\{\begin{array}{l} P[A] = 1/3 \\ P[B] = 1/2 \end{array}\right.$$

51 **¿Qué es más probable, obtener alguna vez un 6 lanzando un dado 4 veces o un doble 6 lanzando dos dados 24 veces?**

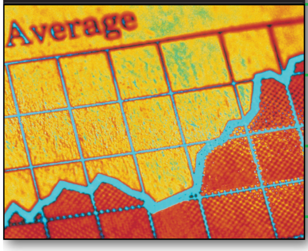
$$P[\text{AL MENOS UN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177$$

$$P[\text{DOBLE 6 CON 2 DADOS EN 24 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN DOBLE 6}] \overset{(*)}{=} 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914$$

$$^{(*)}\ P[\text{DOBLE 6 EN UNA TIRADA}] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \to \quad P[\text{NO DOBLE 6}] = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

Por tanto, es más probable sacar al menos un 6 lanzando 4 veces un dado.

UNIDAD 10



LAS MUESTRAS ESTADÍSTICAS

Página 261

Lanzamiento de varios dados

CUATRO DADOS

La distribución de probabilidades de la suma de cuatro dados es la siguiente:

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_i	$\frac{1}{6^4}$	$\frac{4}{6^4}$	$\frac{10}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{35}{6^4}$	$\frac{56}{6^4}$	$\frac{80}{6^4}$	$\frac{104}{6^4}$	$\frac{125}{6^4}$	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{146}{6^4}$

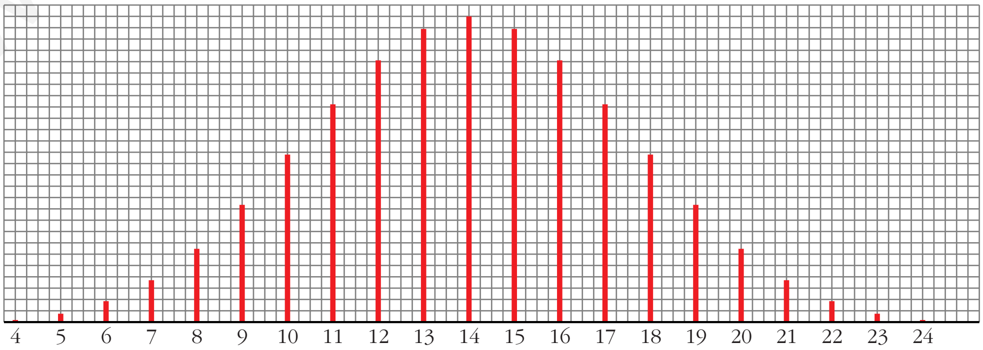
x_i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
p_i	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{125}{6^4}$	$\frac{104}{6^4}$	$\frac{80}{6^4}$	$\frac{56}{6^4}$	$\frac{35}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{10}{6^4}$	$\frac{4}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$

a) Haz su representación gráfica y observa su parecido con la distribución normal.

b) Calcula su media y su desviación típica. (Hazlo con calculadora y ten en cuenta que, puesto que los denominadores son iguales, puedes poner en las frecuencias los correspondientes numeradores).

c) Comprueba que los parámetros del promedio de los resultados son MEDIA = 3,5 y DESVIACIÓN TÍPICA = 0,855 pues se obtienen dividiendo por cuatro los correspondientes parámetros de sus sumas. La media es la misma que las anteriores y la desviación típica menor que las anteriores.

a)



b) $\mu = 14$; $\sigma = 3{,}42$

c) $14 : 4 = 3{,}5$; $3{,}42 : 4 = 0{,}855$

Página 265

1. Una ganadería tiene 3 000 vacas. Se quiere extraer una muestra de 120. Explica cómo se obtiene la muestra:

a) Mediante muestreo aleatorio simple.

b) Mediante muestreo aleatorio sistemático.

a) — Se numeran las vacas del 1 al 3 000.

— Se sortean 120 números de entre los 3 000.

— La muestra estará formada por las 120 vacas a las que correspondan los números obtenidos.

b) Coeficiente de elevación: $h = \frac{3\,000}{120} = 25$

— Se sortea un número del 1 al 25. Supongamos que sale el 9.

— Las vacas seleccionadas para la muestra serían las que correspondieran a los números 9, 34, 59, 84, 109, …, 2 984.

Página 266

2. Una ganadería tiene 2 000 vacas. Son de distintas razas: 853 de A, 512 de B, 321 de C, 204 de D y 110 de E. Queremos extraer una muestra de 120:

a) ¿Cuántas hay que elegir de cada raza para que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?

b) ¿Cómo ha de ser la elección dentro de cada estrato?

a) Llamamos n_1 al número de vacas que debemos elegir de raza A, n_2 al de raza B, n_3 al de C, n_4 al de D y n_5 al de E.

Ha de cumplirse que:

$$\frac{120}{2\,000} = \frac{n_1}{853} = \frac{n_2}{512} = \frac{n_3}{321} = \frac{n_4}{204} = \frac{n_5}{110}$$

Así, obtenemos:

$$n_1 = 51{,}18 \quad n_2 = 30{,}72 \quad n_3 = 19{,}26 \quad n_4 = 12{,}24 \quad n_5 = 6{,}6$$

La parte entera de estos número suma:

$51 + 30 + 19 + 12 + 6 = 118$. Faltan 2 para llegar a 120.

Por tanto, debemos elegir:

51 vacas de raza A, 31 vacas de B, 19 de C, 12 de D y 7 de E.

Página 267

3. **Obtén aleatoriamente cuatro números enteros al azar entre 1 y 95.**

Por ejemplo:

RAN# 0.226 × 95 + 1 = 22.47 → 22

RAN# 0.048 × 95 + 1 = 5.56 → 5

RAN# 0.277 × 95 + 1 = 27.315 → 27

RAN# 0.842 × 95 + 1 = 80.99 → 80

Hemos obtenido los números 5, 22, 27 y 80.

4. **Obtén cinco números enteros elegidos aleatoriamente entre 1 y 800.**

Por ejemplo:

RAN# 0.104 × 800 + 1 = 84.2 → 84

RAN# 0.098 × 800 + 1 = 79.4 → 79

RAN# 0.835 × 800 + 1 = 669 → 669

RAN# 0.449 × 800 + 1 = 360.2 → 360

RAN# 0.622 × 800 + 1 = 498.6 → 498

Hemos obtenido los números 79, 84, 360, 498 y 669.

Página 268

5. **De una población de N = 856 elementos, deseamos extraer una muestra de tamaño n = 10.**

Mediante el uso de números aleatorios, designa cuáles son los 10 individuos que componen la muestra.

Para multiplicar por 856 los números que aparezcan en pantalla, introducimos:

856 × × (factor constante)

Ahora recurrimos a los números aleatorios. Por ejemplo, podemos obtener:

RAN# 0.835 = 714.76 → 715

RAN# 0.419 = 358.664 → 359

RAN# 0.554 = 474.224 → 475

RAN# 0.567 = 485.352 → 486

RAN# 0.530 = 453.68 → 454

RAN# 0.057 = 48.792 → 49

RAN# 0.993 = 850.008 → 851

RAN# 0.396 = 338.976 → 339
RAN# 0.013 = 11.128 → 12
RAN# 0.636 = 544.416 → 545

Los individuos elegidos para la muestra serían los correspondientes a los números 12, 49, 339, 359, 454, 475, 486, 545, 715 y 851.

6. De una población de 543 individuos, queremos extraer una muestra de tamaño 40 mediante números aleatorios.

Obtén los cinco primeros elementos de dicha muestra.

Para multiplicar por 543 los números que aparezcan en pantalla, introducimos:

543 × × (factor constante)

Ahora recurrimos a los números aleatorios. Por ejemplo, podemos obtener:

RAN# 0.237 = 128.691 → 129
RAN# 0.071 = 38.553 → 39
RAN# 0.614 = 333.402 → 334
RAN# 0.497 = 269.871 → 270
RAN# 0.475 = 257.925 → 258

Los cinco primeros elementos de la muestra serían los correspondientes a los números 129, 39, 334, 270 y 258.

Página 270

1. Halla las siguientes probabilidades en una distribución $N(0, 1)$:

a) $P[z > 2{,}8]$ **b)** $P[z \leq -1{,}8]$ **c)** $P[z > -1{,}8]$
d) $P[1{,}62 \leq z < 2{,}3]$ **e)** $P[1 \leq z \leq 2]$ **f)** $P[-0{,}61 \leq z \leq 1{,}4]$
g) $P[-1 \leq z \leq 2]$ **h)** $P[-2{,}3 < z < -1{,}7]$ **i)** $P[-2 \leq z \leq -1]$

a) $P[z > 2{,}8] = 1 - P[z \leq 2{,}8] = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$

b) $P[z \leq -1{,}8] = P[z \geq 1{,}8] = 1 - P[z < 1{,}8] = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359$

c) $P[z > -1{,}8] = P[z < 1{,}8] = 0{,}9641$

d) $P[1{,}62 \leq z < 2{,}3] = P[z < 2{,}3] - P[z \leq 1{,}62] = 0{,}9893 - 0{,}9474 = 0{,}0419$

e) $P[1 \leq z \leq 2] = P[z \leq 2] - P[z \leq 1] = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

f) $P[-0{,}61 \leq z \leq 1{,}4] = P[z \leq 1{,}4] - P[z \leq -0{,}61] = P[z \leq 1{,}4] - P[z \geq 0{,}61] =$
$= P[z \leq 1{,}4] - (1 - P[z \leq 0{,}61]) = 0{,}9192 - (1 - 0{,}7291) = 0{,}6483$

g) $P[-1 \le z \le 2] = P[z \le 2] - P[z \le -1] = P[z \le 2] - P[z \ge 1] =$

$= P[z \le 2] - (1 - P[z \le 1]) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$

h) $P[-2{,}3 < z < -1{,}7] = P[1{,}7 < z < 2{,}3] = P[z < 2{,}3] - P[z < 1{,}7] =$

$= 0{,}9893 - 0{,}9554 = 0{,}0339$

i) $P[-2 \le z \le -1] = P[1 \le z \le 2] = P]z \le 2] - P[z \le 1] = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

2. **Calcula el valor de k (exacta o aproximadamente) en cada uno de los siguientes casos:**

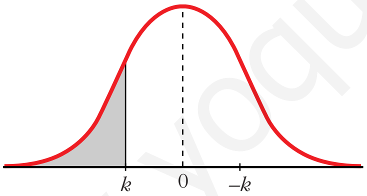
a) $P[z \le k] = 0{,}5$	**b)** $P[z \le k] = 0{,}8729$
c) $P[z \le k] = 0{,}9$	**d)** $P[z \le k] = 0{,}33$
e) $P[z \le k] = 0{,}2$	**f)** $P[z > k] = 0{,}12$
g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$	**h)** $P[z \ge k] = 0{,}6$

a) $P[z \le k] = 0{,}5 \ \rightarrow \ k = 0$

b) $P[z \le k] = 0{,}8729 \ \rightarrow \ k = 1{,}14$

c) $P[z \le k] = 0{,}9 \ \rightarrow \ k \approx 1{,}28$

d) $P[z \le k] = 0{,}33$



$P[z \ge -k] = 0{,}33 \ \rightarrow \ P[z \le -k] = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

$\rightarrow \ -k = 0{,}44 \ \rightarrow \ k = -0{,}44$

e) $P[z \le k] = 0{,}2$

$P[z \le -k] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \ \rightarrow \ -k \approx 0{,}84 \ \rightarrow \ k \approx -0{,}84$

f) $P[z > k] = 0{,}12$

$P[z \le k] = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 \ \rightarrow \ k \approx 1{,}175$

g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$

$P[z \le -k] = 0{,}9971 \ \rightarrow \ -k = 2{,}76 \ \rightarrow \ k = -2{,}76$

h) $P[z \ge k] = 0{,}6$

$P[z \le -k] = 0{,}6 \ \rightarrow \ -k \approx 0{,}25 \ \rightarrow \ k \approx -0{,}25$

Página 271

3. **En una distribución $N(18, 4)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 20]$ **b)** $P[x \ge 16{,}5]$ **c)** $P[x \le 11]$

d) $P[19 \le x \le 23]$ **e)** $P[11 \le x < 25]$

a) $P[x \le 20] = P\left[z \le \frac{20-18}{4}\right] = P[z \le 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[x \ge 16{,}5] = P\left[z \ge \frac{16{,}5-18}{4}\right] = P[z \ge -0{,}38] = P[z \le 0{,}38] = 0{,}6480$

c) $P[x \le 11] = P\left[z \le \frac{11-18}{4}\right] = P[z \le -1{,}75] = P[z \ge 1{,}75] = 1 - P[z \le 1{,}75] =$

$= 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

d) $P[19 \le x \le 23] = P\left[\frac{19-18}{4} \le z \le \frac{23-18}{4}\right] = P[0{,}25 \le z \le 1{,}25] =$

$= P[z \le 1{,}25] - P[z \le 0{,}25] = 0{,}8944 - 0{,}5987 = 0{,}2957$

e) $P[11 \le x < 25] = P\left[\frac{11-18}{4} \le z \le \frac{25-18}{4}\right] = P[-1{,}75 \le z \le 1{,}75] =$

$= P[z \le 1{,}75] - P[z \le -1{,}75] = P[z \le 1{,}75] - P[z \ge 1{,}75] =$

$= 2P[z \le 1{,}75] - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$

4. **En una distribución $N(6; 0{,}9)$, calcula k para que se den las siguientes igualdades:**

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$ **b)** $P[x \le k] = 0{,}8$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$ **d)** $P[x \ge k] = 0{,}6331$

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$

$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}9772 \rightarrow \frac{k-6}{0{,}9} = 2 \rightarrow k = 7{,}8$

b) $P[x \le k] = 0{,}8$

$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}8 \rightarrow \frac{k-6}{0{,}9} \approx 0{,}84 \rightarrow k \approx 6{,}756$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$

$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}3 \rightarrow -\left(\frac{k-6}{0{,}9}\right) \approx 0{,}52 \rightarrow k \approx 5{,}532$

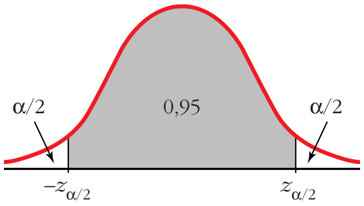
d) $P[x \ge k] = 0{,}6331$

$P[x \ge k] = P\left[z \ge \frac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}6331 \rightarrow -\left(\frac{k-6}{0{,}9}\right) = 0{,}34 \rightarrow k = 5{,}694$

Página 272

1. Calcula razonadamente los valores críticos correspondientes a las probabilidades 0,95 y 0,99.

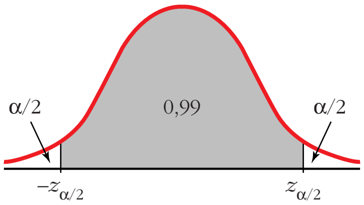
- Para una probabilidad de 0,95:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025; \quad 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

- Para una probabilidad de 0,99:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005; \quad 0{,}99 + 0{,}005 = 0{,}995$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

2. Calcula los valores críticos correspondientes:

a) $\alpha = 0{,}09$ **b)** $\alpha = 0{,}21$ **c)** $\alpha = 0{,}002$

a) $\alpha = 0{,}09 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}91$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045; \quad 0{,}91 + 0{,}045 = 0{,}955$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}955 \quad \to \quad z_{\alpha/2} \approx 1{,}70$$

b) $\alpha = 0{,}21 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}79$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}21}{2} = 0{,}105; \quad 0{,}79 + 0{,}105 = 0{,}895$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}895 \quad \to \quad z_{\alpha/2} \approx 1{,}25$$

c) $\alpha = 0{,}002 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}998$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}001; \quad 0{,}998 + 0{,}001 = 0{,}999$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}999 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 3{,}08$$

Página 273

3. En una distribución $N(173, 6)$ halla los intervalos característicos para el 90%, el 95% y el 99%.

Para el 90%: $(173 – 1{,}645 \cdot 6;\ 173 + 1{,}645 \cdot 6) = (163{,}13;\ 182{,}87)$

Para el 95%: $(173 – 1{,}96 \cdot 6;\ 173 + 1{,}96 \cdot 6) = (161{,}24;\ 184{,}76)$

Para el 99%: $(173 – 2{,}575 \cdot 6;\ 173 + 2{,}575 \cdot 6) = (157{,}55;\ 188{,}45)$

4. En una distribución $N(18, 4)$ halla los intervalos característicos para el 95% y el 99,8%.

Para el 95%: $(18 – 1{,}96 \cdot 4;\ 18 + 1{,}96 \cdot 4) = (10{,}16;\ 25{,}84)$

Para el 99,8%: $1 – \alpha = 0{,}998 \ \to\ \alpha = 0{,}002 \ \to\ \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}001$

$0{,}998 + 0{,}001 = 0{,}999 \ \to\ z_{\alpha/2} = 3{,}08$

$(18 – 3{,}08 \cdot 4;\ 18 + 3{,}08 \cdot 4) = (5{,}68;\ 30{,}32)$

Página 276

1. Los parámetros de una variable son: $\mu = 16{,}4$, $\sigma = 4{,}8$. Nos disponemos a extraer una muestra de $n = 400$ individuos:

a) Halla el intervalo característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $p = 0{,}99$.

b) Calcula $P[16 < \bar{x} < 17]$.

Como $n > 30$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 16{,}4$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}8}{\sqrt{400}} = \dfrac{4{,}8}{20} = 0{,}24$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(16{,}4;\ 0{,}24)$

a) Para $p = 0{,}99 \ \to\ z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo característico es:

$(16{,}4 – 2{,}575 \cdot 0{,}24;\ 16{,}4 + 2{,}575 \cdot 0{,}24)$; es decir: $(15{,}78;\ 17{,}02)$

b) $$P[16 < \bar{x} < 17] = P\left[\frac{16 – 16{,}4}{0{,}24} < z < \frac{17 – 16{,}4}{0{,}24}\right] = P[–1{,}67 < z < 2{,}5] =$$

$$= P[z < 2{,}5] – P[z < –1{,}67] = P[z < 2{,}5] – P[z > 1{,}67] =$$

$$= P[z < 2{,}5] – (1 – P[z \le 1{,}67]) = 0{,}9938 – (1 – 0{,}9525) = 0{,}9463$$

2. Los sueldos, en euros, de los empleados de una fábrica se distribuyen $N(1\,200, 400)$. Se elige al azar una muestra de 25 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus sueldos sea superior a 35 000 €?

Halla el intervalo característico para las sumas de 25 individuos, correspondientes a una probabilidad del 0,9.

La suma de los sueldos sigue una distribución normal de media $n\mu = 25 \cdot 1\,200 = 30\,000$ € y de desviación típica $\sigma\sqrt{n} = 400 \cdot \sqrt{25} = 400 \cdot 5 = 2\,000$ €; es decir:

$$\Sigma x \text{ es } N(30\,000;\ 2\,000)$$

Por tanto:

$$P[\Sigma x > 35\,000] = P\left[z > \frac{35\,000 - 30\,000}{2\,000}\right] = P[z > 2{,}5] =$$
$$= 1 - P[z \le 2{,}5] = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Intervalo característico:

Para una probabilidad del 0,9 es:

$(30\,000 - 1{,}645 \cdot 2\,000;\ 30\,000 + 1{,}645 \cdot 2\,000)$; es decir: $(26\,710;\ 33\,290)$

Página 278

1. La variable x es binomial, con $n = 1\,200$ y $p = 0{,}008$.

a) Calcula la probabilidad de que x sea mayor que 10.

b) Halla el intervalo característico para una probabilidad del 95%.

Como $np = 9{,}6 > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 9{,}6$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1\,200 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}992} = 3{,}09$.

Es decir:

$$x \text{ es } B(1\,200;\ 0{,}008) \ \rightarrow\ x' \text{ es } N(9{,}6;\ 3{,}09) \ \rightarrow\ z \text{ es } N(0,\ 1)$$

a) $P[x > 10] = P[x' \ge 10{,}5] = P\left[z \ge \frac{10{,}5 - 9{,}6}{3{,}09}\right] = P[z \ge 0{,}29] =$

$= 1 - P[z < 0{,}29] = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$

b) Para una probabilidad del 95%, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo característico será:

$(9{,}6 - 1{,}96 \cdot 3{,}09;\ 9{,}6 + 1{,}96 \cdot 3{,}09)$; es decir: $(3{,}54;\ 15{,}66)$

2. Si tenemos un dado correcto y lo lanzamos 50 veces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que “el 1” salga más de 10 veces?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga “múltiplo de 3” al menos 20 veces?

a) Llamamos x = "nº de veces que sale el 1"; así, x es $B\left(50; \frac{1}{6}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \frac{1}{6} = 8{,}33$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 2{,}64$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50; \frac{1}{6}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(8{,}33; 2{,}64) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$P[x > 10] = P[x' \geq 10{,}5] = P\left[z \geq \frac{10{,}5 - 8{,}33}{2{,}64}\right] = P[z \geq 0{,}82] = 1 - P[z < 0{,}82] =$$
$$= 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$$

b) Llamamos x = "nº de veces que sale múltiplo de 3". La probabilidad de obtener un múltiplo de 3 en una tirada es $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Así, x es $B\left(50; \frac{1}{3}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50; \frac{1}{3}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(16{,}67; 3{,}33) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$P[x \geq 20] = P[x' \geq 19{,}5] = P\left[z \geq \frac{19{,}5 - 16{,}67}{3{,}33}\right] = P[z \geq 0{,}85] = 1 - P[z < 0{,}85] =$$
$$= 1 - 0{,}8023 = 0{,}1977$$

Página 280

1. Como sabemos, en un dado correcto la proporción de veces que sale el 5 es $1/6 = 0{,}1\overset{\frown}{6}$. Halla los intervalos característicos correspondientes al 90%, 95% y 99% para la "proporción de cincos", en tandas de 100 lanzamientos de un dado correcto.

Las proporciones de cincos en tandas de 100 lanzamientos siguen una distribución normal de media $p = \frac{1}{6} = 0{,}17$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(1/6) \cdot (5/6)}{100}} =$ $= 0{,}037$; es decir:

pr es $N(0{,}17; 0{,}037)$

Hallamos los intervalos característicos:

- Para el 90%: $(0{,}17 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}037) = (0{,}109; 0{,}231)$
- Para el 95%: $(0{,}17 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}037) = (0{,}097; 0{,}243)$
- Para el 99%: $(0{,}17 \pm 2{,}575 \cdot 0{,}037) = (0{,}075; 0{,}265)$

Página 286

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Muestras

① **En cada uno de los casos que se mencionan a continuación, el colectivo ¿es población o es muestra?**

Explica por qué.

a) Un campesino tiene 87 gallinas. Para probar la eficacia de un nuevo tipo de alimentación, las pesa a todas antes y después de los 30 días que dura el tratamiento.

b) Un granjero prueba con 100 de sus gallinas la eficacia de un nuevo tipo de alimentación.

a) Es **población**, porque pesa a todas las gallinas.

b) Es **muestra**, porque no pesa a todas las gallinas, sino solo a una parte de ellas.

2 **Un fabricante de elásticos quiere estudiar su resistencia a la rotura. Para ello, los estira hasta que se rompen y anota el grado de estiramiento que alcanzan sin romperse.**

¿Puede realizar dicho estiramiento sobre la población o es imprescindible realizarlo sobre la muestra? ¿Por qué?

Es imprescindible hacerlo sobre una muestra, porque interesa romper la menor cantidad de elásticos posible.

③ **Solo uno de los siguientes procedimientos nos permite obtener una muestra representativa. Di cuál es y, en los otros, estudia el sentido del sesgo y su importancia:**

a) Para estudiar las frecuencias relativas de las letras, se toman al azar 20 libros de la biblioteca de un centro escolar y se cuenta las veces que aparece cada letra en la página 20 de los libros seleccionados.

b) Para conocer la opinión de sus clientes sobre el servicio ofrecido por unos grandes almacenes, se selecciona al azar, entre los que poseen tarjeta de compra, a 100 personas entre las que han gastado menos de 1 000 € el último año, otras 100 entre las que han gastado entre 1 000 € y 5 000 € y 100 más entre las que han gastado más de 5 000 €.

c) Para calcular el número medio de personas por cartilla en un Centro de Salud de la Seguridad Social, los médicos toman nota de las cartillas de las personas que acuden a las consultas durante un mes.

a) Es una muestra representativa.

b) No es representativa, porque hay mucha más gente en un intervalo (por ejemplo, entre 1 000 € y 5 000 €) que en otro (más de 5 000 €), y hemos tomado el mismo número de representantes. Además, hay otra mucha gente sin tarjeta que no se ha tomado en cuenta.

c) No es representativa, ya que lo que más se va a ver son las cartillas que corresponden a familias numerosas. Está claro que, cuanta más genta tenga esa cartilla, más fácil es que ese mes se tome nota de ella.

4 La validez de la información que nos proporciona una encuesta depende, en gran medida, de la cuidadosa elaboración del cuestionario.

Algunas de las características que deben tener las preguntas, son:

— Ser cortas y con un lenguaje sencillo.

— Sus respuestas deben presentar opciones no ambiguas y equilibradas.

— Que no requieran esfuerzo de memoria.

— Que no levanten prejuicios en los encuestados.

Estudia si las siguientes preguntas son adecuadas para formar parte de una encuesta y corrige los errores que observes:

a) ¿Cuánto tiempo sueles estudiar cada día?

Mucho ☐ Poco ☐ Según el día ☐

b) ¿Cuántas veces fuiste al cine a lo largo del año pasado?

c) ¿Qué opinión tienes sobre la gestión del alcalde?

Muy buena ☐ Buena ☐ Indiferente ☐

d) ¿Pierden sus hijos el tiempo viendo la televisión?

Sí ☐ No ☐

e) ¿En qué grado cree usted que la instalación de la planta de reciclado afectaría al empleo y a las condiciones de salud de nuestra ciudad?

a) y c) adecuadas (para mejorarlo, podríamos añadir en c) la opción: Mala ☐).

b) Cambiar por:

¿Con qué frecuencia vas al cine?

☐ Mucho ☐ Poco ☐ Nunca

d) Cambiar por:

¿Con qué frecuencia ven sus hijos la televisión?

☐ Mucho ☐ Poco ☐ Nunca

e) Cambiar por:

¿Instalaría una planta de reciclado en su ciudad?

☐ Sí ☐ No

5 **De un colectivo de 500 personas elige una muestra de 20 mediante:**

a) Un muestreo aleatorio sistemático.

b) Un muestreo aleatorio simple.

Utiliza la tecla RAN# de la calculadora.

Para los dos casos, numeramos a las personas del 1 al 500.

a) $h = \frac{500}{20} = 25$

Origen: 25 × RAN# + 1 = 14.075 (por ejemplo)

Deberemos elegir las personas cuyos números sean:

14, 39, 64, 89, 114, 139, 164, 189, 214, 239, 264, 289, 314, 339, 364, 389, 414, 439, 464, 489.

b) Con la tecla RAN# de la calculadora, hacemos: 500 × × RAN# = hasta obtener 20 resultados distintos.

6 **En un conjunto de 1 000 conductores hay:**

— 50 taxistas.

— 75 camioneros.

— 25 conductores de autobús.

El resto son conductores de vehículos corrientes y se reparten así:

— 250 con más de 20 años de experiencia.

— 425 con una experiencia de entre 5 y 20 años.

— 175 con una experiencia de 0 a 5 años.

Para confeccionar una muestra de 40 individuos mediante muestreo aleatorio estratificado proporcional, ¿cuántos hay que seleccionar de cada uno de los seis estratos?

Llamamos n_1 al número de taxistas que tendríamos que seleccionar, n_2 al número de camioneros, n_3 al número de conductores de autobuses, n_4 al número de conductores con más de 20 años de experiencia, n_5 al de conductores con una experiencia entre 5 y 20 años y n_6 al de conductores con una experiencia de 0 a 5 años. Entonces:

$$\frac{n_1}{50} = \frac{n_2}{75} = \frac{n_3}{25} = \frac{n_4}{250} = \frac{n_5}{425} = \frac{n_6}{175} = \frac{40}{1\,000}$$

Así, deberemos elegir:

n_1 = 2 taxistas

n_2 = 3 camioneros

n_3 = 1 conductor de autobús

n_4 = 10 conductores con más de 20 años de experiencia

n_5 = 17 con experiencia entre 5 y 20 años

n_6 = 7 con experiencia entre 0 y 5 años

Página 287

7 **S** **En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.**

a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Por qué?

b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2 500 niños, 7 000 adultos y 500 ancianos, se decide elegir la muestra utilizando muestreo estratificado.

b.1) Define los estratos.

b.2) Determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

a) Muestreo sin reemplazamiento para evitar repeticiones.

b) b.1) Niños, adultos y ancianos.

b.2) Llamamos n_1 al número de niños que deberíamos elegir, n_2 al número de adultos y n_3 al número de ancianos.

Tenemos que:

$$\frac{n_1}{2\,500} = \frac{n_2}{7\,000} = \frac{n_3}{500} = \frac{100}{10\,000}$$

Así, deberían elegirse:

n_1 = 25 niños

n_2 = 70 adultos

n_3 = 5 ancianos

8 **S** **En determinada provincia hay cuatro comarcas, C1, C2, C3 y C4, con un total de 1 500 000 personas censadas. De ellas, 300 000 residen en C1, 450 000 en C2 y 550 000 en C3. Se quiere realizar un estudio sobre las costumbres alimenticias en esa provincia basado en una muestra de 3 000 personas.**

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos realizar si queremos que en la muestra resultante haya representación de todas las comarcas?

b) ¿Qué número de personas habría que seleccionar en cada comarca, atendiendo a razones de proporcionalidad?

c) ¿Cómo seleccionarías las personas en cada comarca?

Justifica las respuestas.

a) Deberíamos realizar un muestreo aleatorio estratificado.

b) El número de personas que residen en C4 es:

$$1\,500\,000 - (300\,000 + 450\,000 + 550\,000) = 200\,000$$

Llamamos n_1, n_2, n_3 y n_4 al número de personas que tendríamos que seleccionar en cada comarca (C1, C2, C3 y C4, respectivamente). Entonces:

$$\frac{n_1}{300\,000} = \frac{n_2}{450\,000} = \frac{n_3}{550\,000} = \frac{n_4}{200\,000} = \frac{3\,000}{1\,500\,000}$$

Por tanto, debemos elegir:

n_1 = 600 personas de C1

n_2 = 900 personas de C2

n_3 = 1 100 personas de C3

n_4 = 400 personas de C4

c) Dentro de cada comarca, podríamos seleccionarlos mediante un muestreo aleatorio simple, o mediante un muestreo sistemático.

Intervalos característicos

Distribución de medias y proporciones muestrales

9 **En una distribución normal de media $\mu = 9{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 1{,}44$, halla el intervalo característico para el 99%.**

Para el 99% → $1 - \alpha = 0{,}99$ → $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - 2{,}575 \cdot \sigma, \mu + 2{,}575 \cdot \sigma)$$

En este caso, como $\mu = 9{,}5$ y $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, queda:

$$(9{,}5 - 2{,}575 \cdot 1{,}2; 9{,}5 + 2{,}575 \cdot 1{,}2), \text{ es decir: } (6{,}41; 12{,}59)$$

10 **En las distribuciones normales cuyos parámetros se dan, halla el intervalo característico que en cada caso se indica:**

	a)	b)	c)	d)	e)
MEDIA, μ	0	0	0	0	112
DESV. TÍPICA, σ	1	1	1	1	15
PROBABILIDAD	95	99	90	80	95

	f)	g)	h)	i)
MEDIA, μ	3 512	3 512	3 512	3 512
DESV. TÍPICA, σ	550	550	550	550
PROBABILIDAD	99	95	90	80

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma; \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}96; 1{,}96)$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-2,575;\ 2,575)$

c) $z_{\alpha/2} = 1,645$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1,645;\ 1,645)$

d) $z_{\alpha/2} = 1,28$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1,28;\ 1,28)$

e) $z_{\alpha/2} = 1,96$; $\mu = 112$; $\sigma = 15$

Intervalo $(82,6;\ 141,4)$

f) $z_{\alpha/2} = 2,575$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,095,75;\ 4\,928,25)$

g) $z_{\alpha/2} = 1,96$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,434;\ 4\,590)$

h) $z_{\alpha/2} = 1,645$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,607,25;\ 4\,416,75)$

i) $z_{\alpha/2} = 1,28$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,808;\ 4\,216)$

11 **En una distribución normal con media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5,3$; obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \mu + k)$, de forma que el 95% de los individuos estén en ese intervalo.**

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0,95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1,96$. Así, el intervalo será:

$(25 - 1,96 \cdot 5,3;\ 25 + 1,96 \cdot 5,3)$; es decir: $(14,612;\ 35,388)$

12 **En una distribución $N(10, 4)$, obtén un intervalo centrado en la media $(\mu - k, \mu + k)$, tal que:**

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0,90$$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0,90$, entonces $z_{\alpha/2} = 1,645$. Así, el intervalo será:

$(10 - 1,645 \cdot 4;\ 10 + 1,645 \cdot 4)$; es decir: $(3,42;\ 16,58)$

13 **Di cómo se distribuyen las medias muestrales en cada uno de los siguienes casos:**

		a)	b)	c)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Normal	Desc.	Normal
	MEDIA, μ	20	20	3,75
	DESV. TÍPICA, σ	4	4	1,2
TAM. MUESTRA, n		16	100	4

		d)	e)	f)	g)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Desc.	Norm.	Desc.	Desc.
	MEDIA, μ	3,75	112	112	3 512
	DESV. TÍPICA, σ	1,2	15	15	550
TAM. MUESTRA, n		50	100	100	40

Recordemos que si la población se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma)$, o bien seleccionamos una muestra de tamaño $n \geq 30$ en una población cualquiera (no necesariamente normal) con media μ y desviación típica σ, entonces, las medias muestrales siguen una distribución $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Aplicamos este resultado en cada uno de los casos propuestos:

a) $N\left(20, \frac{4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $N(20, 1)$

b) $N\left(20, \frac{4}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(20; 0{,}4)$

c) $N\left(3{,}75; \frac{1{,}2}{\sqrt{4}}\right)$; es decir, $N(3{,}75; 0{,}6)$

d) $N\left(3{,}75; \frac{1{,}2}{\sqrt{50}}\right)$; es decir, $N(3{,}75; 0{,}17)$

e) $N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1{,}5)$

f) $N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1{,}5)$

g) $N\left(3\,512, \frac{550}{\sqrt{40}}\right)$; es decir, $N(3\,512; 86{,}96)$

Página 288

14 **Halla el intervalo característico correspondiente a la probabilidad que en cada caso se indica, correspondiente a las medias muestrales del ejercicio anterior:**

a) 90% **b) 95%** **c) 99%** **d) 90%** **e) 95%** **f) 80%** **g) 99%**

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(20 - 1{,}645 \cdot 1;\ 20 + 1{,}645 \cdot 1)$; es decir: $(18{,}355;\ 21{,}645)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(20 - 1{,}96 \cdot 0{,}4;\ 20 + 1{,}96 \cdot 0{,}4)$; es decir: $(19{,}216;\ 20{,}784)$

c) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(3{,}75 - 2{,}575 \cdot 0{,}6;\ 3{,}75 + 2{,}575 \cdot 0{,}6)$; es decir: $(2{,}205;\ 5{,}295)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(3{,}75 - 1{,}645 \cdot 0{,}17;\ 3{,}75 + 1{,}645 \cdot 0{,}17)$; es decir: $(3{,}47;\ 4{,}03)$

e) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(112 - 1{,}96 \cdot 1{,}5;\ 112 + 1{,}96 \cdot 1{,}5)$; es decir: $(109{,}06;\ 114{,}94)$

f) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Intervalo $(112 - 1{,}28 \cdot 1{,}5;\ 112 + 1{,}28 \cdot 1{,}5)$; es decir: $(110{,}08;\ 113{,}92)$

g) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(3\,512 - 2{,}575 \cdot 86{,}96;\ 3\,512 + 2{,}575 \cdot 86{,}96)$; es decir:

$(3\,288{,}078;\ 3\,735{,}922)$

15 **Averigua cómo se distribuyen las proporciones muestrales, p_r, para las poblaciones y las muestras que se describen a continuación:**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, p, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, n, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

Recordemos que, si $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces, las proporciones muestrales siguen una distribución $N\left(p,\ \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

Aplicamos este resultado a cada uno de los casos propuestos. Comprobamos que en todo ellos se tiene que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

a) $N\left(0{,}5;\ \sqrt{\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{10}}\right)$; es decir, $N(0{,}5;\ 0{,}158)$

b) $N\left(0{,}6;\ \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{20}}\right)$; es decir, $N(0{,}6;\ 0{,}110)$

c) $N\left(0{,}8;\ \sqrt{\dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{30}}\right)$; es decir, $N(0{,}8;\ 0{,}073)$

d) $N\left(0{,}1;\ \sqrt{\dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{50}}\right)$; es decir, $N(0{,}1;\ 0{,}042)$

e) $N\left(0{,}05;\ \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{100}}\right)$; es decir, $N(0{,}05;\ 0{,}0218)$

f) $N\left(0{,}15;\ \sqrt{\dfrac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}\right)$; es decir, $N(0{,}15;\ 0{,}036)$

16 **Halla los intervalos característicos para las proporciones muestrales del ejercicio anterior, correspondientes a las probabilidades que, en cada caso, se indican:**

a) 90% **b) 95%** **c) 99%** **d) 95%** **e) 99%** **f) 80%**

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(0{,}5 - 1{,}645 \cdot 0{,}158;\ 0{,}5 + 1{,}645 \cdot 0{,}158)$; es decir: $(0{,}24;\ 0{,}76)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}110;\ 0{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}110)$; es decir: $(0{,}38;\ 0{,}82)$

c) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}8 - 2{,}575 \cdot 0{,}073;\ 0{,}8 + 2{,}575 \cdot 0{,}073)$; es decir: $(0{,}61;\ 0{,}99)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}042;\ 0{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}042)$; es decir: $(0{,}018;\ 0{,}182)$

e) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}05 - 2{,}575 \cdot 0{,}0218;\ 0{,}05 + 2{,}575 \cdot 0{,}0218)$; es decir: $(-0{,}006;\ 0{,}106)$

f) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Intervalo $(0{,}15 - 1{,}28 \cdot 0{,}036;\ 0{,}15 + 1{,}28 \cdot 0{,}036)$; es decir: $(0{,}104;\ 0{,}196)$

PARA RESOLVER

17 **En una distribución $N(20, 6)$, tomamos muestras de tamaño 64.**
S

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

a) Las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 20$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{\sqrt{64}} = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(20;\ 0{,}75)$

b) $$P[19 < \bar{x} < 21] = P\left[\frac{19 - 20}{0{,}75} < z < \frac{21 - 20}{0{,}75}\right] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] =$$

$$= P[z < 1{,}33] - P[z < -1{,}33] = P[z < 1{,}33] - (1 - P[z < 1{,}33]) =$$

$$= 2P[z < 1{,}33] - 1 = 2 \cdot 0{,}9082 - 1 = 0{,}8164$$

18
S **Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.**

a) Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

El cociente intelectual sigue una distruibución normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{729} = 27$; es decir, x es $N(100, 27)$.

a) Las medias en muestras de 81 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100, 3)$. Así:

$$P[\bar{x} < 109] = P\left[z < \frac{109 - 100}{3}\right] = P[z < 3] = 0{,}9987$$

b) Las medias en muestras de 36 alumnos se distribuyen según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{36}} = \frac{27}{6} = 4{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100; 4{,}5)$. Así:

$$P[\bar{x} > 109] = P\left[z > \frac{109 - 100}{4{,}5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

19 **Las notas en un cierto examen se distribuyen normal con media $\mu = 5{,}3$ y desviación típica $\sigma = 2{,}4$.**

Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:

a) Superior a 7.

b) Inferior a 5.

c) Comprendida ente 5 y 7.

Tomamos al azar 16 estudiantes.

Halla la probabilidad de que la media de las notas de estos 16 estudiantes:

d) Sea superior a 7.

e) Sea inferior a 5.

f) Esté comprendida entre 5 y 7.

g) Halla k para que el intervalo $(5{,}3 - k;\ 5{,}3 + k)$ contenga al 95% de las notas.

h) Halla b para que el intervalo $(5{,}3 - b;\ 5{,}3 + b)$ contenga al 95% de las notas medias de las muestras de 16 individuos.

x es $N(5{,}3; 2{,}4)$ → z es $N(0, 1)$

a) $P[x > 7] = P\left[z > \frac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z > 0{,}71] = 1 - P[z \le 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388$

b) $P[x < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z < -0{,}13] = P[z > 0{,}13] = 1 - P[z \leq 0{,}13] =$

$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

c) $P[5 < x < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4} < x < \dfrac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[-0{,}13 < z < 0{,}71] =$

$= P[z < 0{,}71] - P[z < -0{,}013] = 0{,}7612 - 0{,}4483 = 0{,}3129$

Las medias de las notas de 16 estudiantes se distribuyen $N\left(5{,}3; \dfrac{2{,}4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $\bar{x}$ es $N(5{,}3; 0{,}6)$.

d) $P[\bar{x} > 7] = P\left[z > \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z \leq 2{,}83] = 1 - 0{,}9977 = 0{,}0023$

e) $P[\bar{x} < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z < -0{,}5] = P[z > 0{,}5] = 1 - P[z \leq 0{,}5] =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

f) $P[5 < \bar{x} < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6} < z < \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[-0{,}5 < z < 2{,}83] =$

$= P[z < 2{,}83] - P(z < -0{,}5] = 0{,}9977 - 0{,}3085 = 0{,}6892$

g) Es un intervalo característico para la media de la población, por tanto:

$k = z_{\alpha/2} \cdot \sigma$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$k = 1{,}96 \cdot 2{,}4 = 4{,}704$

h) Es un intervalo característico para las medias muestrales, en muestras de tamaño 16, por tanto:

$b = z_{\alpha/2} \cdot 0{,}6$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$b = 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 1{,}176$

20 S **Cuatro de cada diez habitantes de una determinada población lee habitualmente el periódico Z.**

Halla el intervalo característico para la proporción de habitantes de esa población que leen el periódico Z, en muestras de tamaño 49, correspondiente al 95%.

p = proporción de lectores del periódico Z $= \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

El intervalo característico para la proporción de lectores, pr, en muestras de tamaño n es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo será:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}}\right); \text{ es decir: } (0{,}26;\ 0{,}54)$$

21 **En un saco mezclamos judías blancas y judías pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta.**

Extraemos un puñado de 100 judías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de judías pintas esté comprendida entre 0,05 y 0,1?

b) Halla un intervalo en el cual se encuentre el 99% de las proporciones de las muestras de tamaño 100.

a) La proporción de judías pintas es $p = \frac{1}{15}$. Si extraemos un puñado de 100 judías, tenemos una binomial $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$.

Una proporción entre 0,05 y 0,1 significa que haya entre $100 \cdot 0{,}05 = 5$ y $100 \cdot 0{,}1 = 10$ judías pintas.

Por tanto, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$, tenemos que calcular $P[5 < x < 10]$.

Como $100 \cdot \frac{1}{15} > 5$ y $100 \cdot \frac{14}{15} > 5$, podemos aproximar la binomial mediante una normal de media $\mu = 100 \cdot \frac{1}{15} = 6{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{15}} = 2{,}49$.

Así, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$ → x' es $N(6{,}67;\ 2{,}49)$ → z es $N(0, 1)$. Calculamos:

$$P[5 < x < 10] = P[5{,}5 \le x' \le 9{,}5] = P\left[\frac{5{,}5 - 6{,}67}{2{,}49} \le z \le \frac{9{,}5 - 6{,}67}{2{,}49}\right] =$$

$$= P[-0{,}47 \le z \le 1{,}14] = P[z \le 1{,}14] - P[z \le -0{,}47] =$$

$$= P[z \le 1{,}14] - P[z \ge 0{,}47] = P[z \le 1{,}14] - (1 - P[z \le 0{,}47]) =$$

$$= 0{,}8729 - (1 - 0{,}6808) = 0{,}5537$$

b) Si consideramos muestras de tamaño 100, el intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}}\right)$$

Para el 99% → $1 - \alpha = 0{,}99$ → $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Así, el intervalo será:

$$\left(\frac{1}{15} - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}},\ \frac{1}{15} + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}}\right);$$

es decir: (0,0024; 0,1309)

Página 289

22 **S** **El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es $N(14, 4)$.**

a) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera de 16 pacientes?

b) En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?

a) El tiempo medio de espera, $\bar{x}$, de 16 pacientes se distribuye según una normal de media $\mu = 14$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$; es decir $\bar{x}$ es $N(14, 1)$.

b) $P[10 < \bar{x} < 15] = P\left[\frac{10 - 14}{1} < z < \frac{15 - 14}{1}\right] = P[-4 < z < 1] =$

$= P[z < 1] - P[z < -4] = 0{,}8413 - 0 = 0{,}8413$

23 **S** **Una variable aleatoria se distribuye $N(\mu, \sigma)$. Si se extraen muestras de tamaño n:**

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) Si se toman muestras de tamaño $n = 4$ de una variable aleatoria x con distribución $N(165, 12)$, calcula $P[\bar{x} > 173{,}7]$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Las medias muestrales en muestras de tamaño $n = 4$ se distribuyen según una normal de media $\mu = 165$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = \frac{12}{2} = 6$; es decir, $\bar{x}$ es $N(165, 6)$. Así:

$$P[\bar{x} > 173{,}7] = P\left[z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right] = P[z > 1{,}45] =$$

$$= 1 - P[z \leq 1{,}45] = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$$

24 **S** **Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de bachillerato de Madrid es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg. En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?**

La variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$, sigue una distribución normal con la misma media que la población, llamémosla μ, y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

25
S
En una ciudad, la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?

La altura en la población, x, sigue una distribución normal $N(175, 8)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 100$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 175$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$; es decir, $\bar{x}$ es $N(175; 0,8)$. Así:

$$P[\bar{x} > 176] = P\left[z > \frac{176 - 175}{0,8}\right] = P[z > 1,25] = 1 - P[z \le 1,25] =$$

$$= 1 - 0,8944 = 0,1056$$

26 **En una localidad de 6 000 habitantes, la proporción de menores de 16 años es de 1 500/6 000.**

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de menores de 16 años en muestras de 50 habitantes de dicha población?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 50 habitantes, haya entre 15 y 20 menores de 16 años.

a) La proporción, pr, de menores de 16 años en muestras de tamaño $n = 50$ sigue una distribución normal de media $p = \frac{1\,500}{6\,000} = 0,25$ y de desviación típica:

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{50}} = 0,061, \text{ es decir, } pr \text{ es } N(0,26; 0,061).$$

b) El número de menores de 16 años en una muestra de 50 es una binomial $B(50; 0,25)$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot 0,25 = 12,5$ y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 3,06$$

Así, si x es $B(50; 0,25)$ → x' es $N(12,5; 3,06)$ → z es $N(0, 1)$, entonces:

$$P[15 < x < 20] = P[15,5 < x' < 19,5] = P\left[\frac{15,5 - 12,5}{3,06} < z < \frac{19,5 - 12,5}{3,06}\right] =$$

$$= P[0,98 < z < 2,29] = P[z < 2,29] - P[z < 0,98] =$$

$$= 0,9890 - 0,8365 = 0,1525$$

27 **El 42% de los habitantes de un municipio es contrario a la gestión del alcalde y el resto son partidarios de este. Si se toma una muestra de 64 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que ganen los que se oponen al alcalde?**

En muestras de 64, el número de personas que se oponen al alcalde, x, sigue una distribución binomial $B(64;\ 0{,}42)$. Tenemos que calcular $P[x > 32]$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0{,}42 = 26{,}88$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58} = 3{,}95$. Así, si: x es $B(64, 0{,}42) \to x'$ es $N(26{,}88;\ 3{,}95) \to z$ es $N(0, 1)$, entonces:

$$P[x > 32] = P[x' \geq 32{,}5] = P\left[z \geq \frac{32{,}5 - 26{,}88}{3{,}95}\right] = P[z \geq 1{,}42] =$$

$$= 1 - P[z < 1{,}42] = 1 - 0{,}9222 = 0{,}0778$$

28 **La probabilidad de que un bebé sea varón es 0,515. Si han nacido 184 bebés, ¿cuál es la probabilidad de que haya 100 varones o más?**

Halla el intervalo característico correspondiente al 95% para la proporción de varones en muestras de 184 bebés.

- El número de varones entre 184 bebés, x, sigue una distribución binomial $B(184;\ 0{,}515)$. Tenemos que calcular $P[x \geq 100]$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 184 \cdot 0{,}515 = 94{,}76$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{184 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485} = 6{,}78$. Así, si:

  x es $B(184;\ 0{,}515) \to x'$ es $N(94{,}76;\ 6{,}78) \to z$ es $N(0, 1)$, entonces:

  $$P[x \geq 100] = P[x' \geq 99{,}5] = P\left[z \geq \frac{99{,}5 - 94{,}76}{6{,}78}\right] = P[z \geq 0{,}70] =$$

  $$= 1 - P[z < 0{,}70] = 1 - 0{,}7580 = 0{,}2420$$

- El intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

  $$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

  Para el 95% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}95 \to z_{\alpha/2} = 1{,}96$

  Así, el intervalo será:

  $$\left(0{,}515 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}515 \cdot 0{,}485}{184}},\ 0{,}515 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}515 \cdot 0{,}485}{184}}\right);$$

  es decir: $(0{,}4428;\ 0{,}5872)$

29
S **La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ.**

Para el 90% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}90 \to z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo característico para las medias de las muestras de 81 jóvenes (para el 90%) es:

$$\left(\mu - 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \mu + 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El centro del intervalo es μ:

$$\mu = \frac{173{,}4 + 175{,}8}{2} = 174{,}6 = \mu$$

La semiamplitud del intervalo es:

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{81}} = \frac{175{,}8 - 173{,}4}{2}$$

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{9} = 1{,}2 \ \ \to \ \ \sigma = \frac{1{,}2 \cdot 9}{1{,}645} = 6{,}57$$

㉚ **Sabemos que al lanzar al suelo 100 chinchetas, en el 95% de los casos, la proporción de ellas que quedan con la punta hacia arriba está en el intervalo (0,1216; 0,2784). Calcula la probabilidad *p* de que una de esas chinchetas caiga con la punta hacia arriba y comprueba que la amplitud del intervalo dado es correcta.**

- p es el centro del intervalo, es decir:

$$p = \frac{0{,}2784 + 0{,}1216}{2} = 0{,}2 = p$$

- Veamos que la amplitud del intervalo dado es correcta:

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo característico es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ \ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

En este caso $(p = 0{,}2;\ q = 0{,}8;\ n = 100;\ z_{\alpha/2} = 1{,}96)$, queda:

$$\left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}};\ \ 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}}\right); \text{ es decir:}$$

(0,1216; 0,2784), como queríamos probar.

31
S **De 120 alumnos, la proporción de que tengan dos o más hermanos es de 48/120. Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de tamaño 30.**

En muestras de tamaño $n = 30$, la proporción muestral, pr, seguiría una distribución normal de media:

$$\mu = np = 30 \cdot \frac{48}{120} = 30 \cdot 0{,}4 = 12$$

y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{30}} = 0{,}089$$

Es decir, pr es $N(12;\ 0{,}089)$.

32 **S** **Si la distribución de la media de las alturas en muestras de tamaño 49 de los niños de 10 años tiene como media 135 cm y como desviación típica 1,2 cm, ¿cuánto valen la media y la varianza de la altura de los niños de esa ciudad?**

Si la media en la población es μ y la desviación típica es σ, entonces, la distribución de las medias muestrales es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, tenemos que:

$$\mu = 135 \text{ cm}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7} = 1{,}2 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \sigma = 1{,}2 \cdot 7 = 8{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, la media es $\mu = 135$ cm y la varianza es $\sigma^2 = 8{,}4^2 = 70{,}56$.

PARA PROFUNDIZAR

33 **S** **Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de los paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?**

Sabemos que la suma de los pesos de n de esas bolsas tomadas al azar sigue una distribución normal de media $n\mu$ y de desviación típica $\sigma\sqrt{n}$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es } N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \text{ es } N(25 \cdot 300;\ 50\sqrt{25}); \text{ es decir } N(7\,500;\ 250)$$

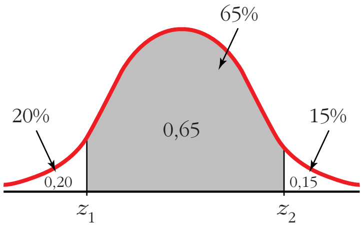
Tenemos que calcular:

$$P\left[\sum_{i=1}^{25} x_i > 8\,200\right] = P\left[z > \frac{8\,200 - 7\,500}{250}\right] = P[z > 2{,}8] =$$

$$= 1 - P[z \le 2{,}8] = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$$

34 **S** **Tras realizar un test de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones se distribuyen $N(68, 18)$. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura, de cultura aceptable, de cultura excelente), de manera que el primero abarque un 20% de la población, el segundo un 65%, y el tercero un 15%. ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?**

- Obtenemos las puntuaciones que marcarían el paso de un grupo a otro en una $N(0, 1)$:

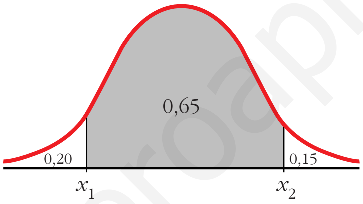


$P[z \leq z_1] = 0{,}20$

$P[z \geq -z_1] = 0{,}20 \quad \rightarrow \quad P[z < -z_1] = 0{,}80 \quad \rightarrow \quad -z_1 = 0{,}84 \quad \rightarrow \quad z_1 = -0{,}84$

$P[z \leq z_2] = 0{,}65 + 0{,}20 = 0{,}85 \quad \rightarrow \quad z_2 = 1{,}04$

- En una $N(68, 18)$ será:



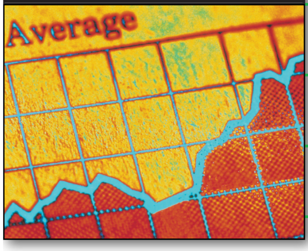
$$\frac{x_1 - 68}{18} = -0{,}84 \quad \rightarrow \quad x_1 = 52{,}88$$

$$\frac{x_2 - 68}{18} = 1{,}04 \quad \rightarrow \quad x_2 = 86{,}72$$

- Por tanto, habrá que considerar:

  - — Baja cultura general → Puntuación menor que 52,88.
  - — Cultura general aceptable → Entre 52,88 y 86,72 puntos.
  - — Cultura general excelente → Puntuación superior a 86,72.

UNIDAD 11 INFERENCIA ESTADÍSTICA



Página 291

Problema 1

- **A partir de una muestra de 500 individuos hemos estimado, con un nivel de confianza del 90%, que la estatura media de los soldados de un cierto reemplazo está comprendida entre 174,3 cm y 175,1 cm.**

  Utilizando el sentido común, y sin realizar ningún tipo de cálculo, responde a las siguientes preguntas:

  a) Imagina que disminuimos el tamaño de la muestra pero queremos que el nivel de confianza se mantenga.

  ¿Cómo influirá este cambio en la longitud del intervalo? ¿Aumentará? ¿Quedará igual? ¿Disminuirá?

  b) Ahora aumentamos el tamaño de la muestra pero queremos que se mantenga la longitud del intervalo.

  ¿Cómo influirá este cambio en el nivel de confianza? ¿Aumentará? ¿Quedará igual? ¿Disminuirá?

  c) Manteniendo el tamaño de la muestra, disminuimos la longitud del intervalo.

  ¿Cómo influirá este cambio en el nivel de confianza? ¿Aumentará? ¿Quedará igual? ¿Disminuirá?

a) Aumentará la longitud del intervalo.

b) Aumentará el nivel de confianza.

c) Disminuirá el nivel de confianza.

Problema 2

- **Reflexionemos sobre cada una de las siguientes experiencias:**

  a) Lanzamos una moneda 10 veces y obtenemos 6 caras.

  b) Lanzamos una moneda 100 veces y obtenemos 60 caras.

  c) Lanzamos una moneda 1000 veces y obtenemos 600 caras.

¿Podemos deducir de alguna de ellas que la moneda es incorrecta? ¿Con cuál de ellas llegamos a esa conclusión con más seguridad? (Responde intuitivamente).

De los apartados b) y c) podemos deducir que la moneda es incorrecta. Con el apartado a) llegamos a esa conclusión con más seguridad.

Página 294

1. De una variable estadística conocemos la desviación típica, $\sigma = 8$, pero desconocemos la media, μ. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño $n = 60$ cuya media obtenemos: $\bar{x} = 37$. Estima μ mediante un intervalo de confianza del 99%.

Para un nivel de confianza del 99% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(37 - 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}};\ 37 + 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}}\right); \text{ es decir, } (34{,}34;\ 39{,}66)$$

Por tanto, tenemos una confianza del 99% de que μ esté comprendida entre 34,34 y 39,66.

Página 295

2. La desviación típica de las estaturas de los soldados es de 5,3 cm.

¿Qué tamaño ha de tener la muestra para estimar la estatura media, μ, de la población con un error menor de 0,5 cm y con un nivel de confianza del 95%?

Para un nivel de confianza del 95% $(\alpha = 0{,}05)$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Queremos que $E < 0{,}5$ cm. Despejamos n:

$$1{,}96 \cdot \frac{5{,}3}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} > \frac{1{,}96 \cdot 5{,}3}{0{,}5} = 20{,}776 \quad \rightarrow \quad n > 431{,}64$$

La muestra ha de ser de, al menos, 432 soldados.

Página 296

3. Sabemos que la desviación típica de los pesos de los pollos adultos es 300 g. Queremos estimar el peso medio de los pollos adultos de una granja con un error menor que 100 g y para ello tomamos una muestra de 50 individuos. ¿Con qué nivel de confianza podremos realizar la estimación?

Despejamos $z_{\alpha/2}$ en la fórmula del error:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 100 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{50}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{100 \cdot \sqrt{50}}{300} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}36$$

Hallamos el nivel de confianza:

$$P[z < z_{\alpha/2}] = P[z < 2{,}36] = 0{,}9909$$

$$\frac{\alpha}{2} = P[z \geq 2{,}36] = 1 - 0{,}9909 = 0{,}0091$$

$$\alpha = 2 \cdot 0{,}091 = 0{,}0182 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9818$$

El nivel de confianza es del 98,18%.

Página 298

1. **Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 72 veces el valor 4. Estimar el valor de la probabilidad *P*[4] con un nivel de confianza del 90%.**

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. La proporción de cuatros obtenida en la muestra es:

$$pr = \frac{72}{400} = 0{,}18$$

El intervalo de confianza para estimar *P*[4] será:

$$\left(0{,}18 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{400}}; 0{,}18 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{400}}\right), \text{ es decir:}$$

(0,148; 0,212)

Es decir, con un nivel de confianza del 90%, la probabilidad de obtener 4 está entre 0,148 y 0,212.

2. **¿Cuántas veces hemos de lanzar un dado, que suponemos levemente incorrecto, para estimar la probabilidad de "6" con un error menor que 0,002 y un nivel de confianza del 95%?**

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Como desconocemos el valor de pr, tomaremos $pr = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ (suponemos el dado levemente incorrecto).

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}} \rightarrow 0{,}002 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{n}} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = 135\,512{,}44$$

Deberemos lanzarlo, al menos, 135 513 veces.

Página 301

1. Repite, paso a paso, el CASO 1 para un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$.

1º Enunciación:

H_0: $p = 0{,}167$ $\qquad$ H_1: $p \neq 0{,}167$

2º Zona de aceptación:

Las proporciones muestrales se distribuirían:

$$N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0{,}167, \sqrt{\frac{0{,}167 \cdot 0{,}833}{100}}\right) = N(0{,}167,\ 0{,}037)$$

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Zona de aceptación: $(0{,}167 \pm 2{,}575 \cdot 0{,}037) = (0{,}072;\ 0{,}262)$

3º Verificación:

Se extrae la muestra y se calcula el valor del parámetro:

$$pr = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

4º Decisión:

0,25 sí está en la zona de aceptación. Se acepta la hipótesis nula. Consideramos el dado correcto.

2. Repite, paso a paso, el CASO 2 para un nivel de significación $\alpha = 0{,}10$.

1º Enunciación:

H_0: $\mu = 102$ $\qquad$ H_1: $\mu \neq 102$

2º Zona de aceptación:

Las medias muestrales se distribuirían:

$$N\left(102, \frac{11}{\sqrt{400}}\right) = N(102;\ 0{,}55)$$

Nivel de significación: $\alpha = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Zona de aceptación:

$$(102 \pm 1{,}645 \cdot 0{,}55) = (101{,}09;\ 102{,}90)$$

3º Verificación:

Se extrae la muestra y se calcula el valor del parámetro: $\bar{x} = 101$

4º Decisión:

101 no está en la zona de aceptación. Se rechaza la hipótesis nula.

Los conocimientos de los soldados no son los mismos que hace cinco años.

Página 302

1. **a) En una población para la cual es $\sigma = 29$, contrasta la hipótesis de que $\mu = 347$, con un nivel de significación del 1%, mediante una muestra de 200 individuos en la que se obtiene $\bar{x} = 352$.**

b) Repite el contraste para $\alpha = 10\%$.

a) **1^er^ paso: Hipótesis:**

H_0: $\mu = 347$; H_1: $\mu \neq 347$

2º paso: Zona de aceptación:

Para un nivel de significación del 1%, $\alpha = 0{,}01$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. La zona de aceptación sería el intervalo:

$$\left(347 - 2{,}575 \cdot \frac{29}{\sqrt{200}}; 347 + 2{,}575 \cdot \frac{29}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (341{,}72; 352{,}28)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 352$.

4º paso: Decisión:

Como 352 está en la zona de aceptación, aceptamos la hipótesis nula. Es decir, aceptamos que $\mu = 347$.

b) **1^er^ paso: Hipótesis:**

H_0: $\mu = 347$; H_1: $\mu \neq 347$

2º paso: Zona de aceptación:

Para un nivel de significación del 10% ($\alpha = 0{,}10$), tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. La zona de aceptación sería el intervalo:

$$\left(347 - 1{,}645 \cdot \frac{29}{\sqrt{200}}; 347 + 1{,}645 \cdot \frac{29}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (343{,}63; 350{,}37)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 352$.

4º paso: Decisión:

Como 352 no está en la zona de aceptación, rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu \neq 352$.

Página 303

2. **En una población para la cual es $\sigma = 29$, contrasta la hipótesis de que $\mu \leq 347$ con un nivel de significación del 1%, mediante una muestra de 200 individuos en la que se obtiene $\bar{x} = 352$.**

1^er^ paso: Hipótesis:

H_0: $\mu \leq 347$; H_1: $\mu > 347$

2º paso: Zona de aceptación:

Para $\alpha = 0{,}01$, $z_\alpha = 2{,}33$.

La zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(-\infty;\ 347 + 2{,}33 \cdot \frac{29}{\sqrt{200}}\right) = (-\infty;\ 351{,}78)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 352$.

4º paso: Decisión:

Como 352 no está en la zona de aceptación, rechazamos la hipótesis nula, es decir, aceptamos que $\mu > 347$.

Página 305

1. Respecto a un cierto dado, A opina que *P*[6] = 0,15, B opina que *P*[6] ≤ 0,15 y C opina que *P*[6] ≥ 0,15. Contrasta las tres hipótesis con un nivel de significación de 0,10, sabiendo que se arrojó el dado 1 000 veces y se obtuvo 183 veces el "6".

1^er^ paso: Hipótesis:

	PARA A	PARA B	PARA C
HIPÓTESIS NULA	H_0: $p = 0{,}15$	H_0: $p \leq 0{,}15$	H_0: $p \geq 0{,}15$
HIPÓTESIS ALTERNATIVA	H_1: $p \neq 0{,}15$	H_1: $p > 0{,}15$	H_1: $p < 0{,}15$

2º paso: Zona de aceptación:

A → $\alpha = 0{,}10$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo: $\left(0{,}15 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{1\,000}}\right) = (0{,}131;\ 0{,}169)$

B → $\alpha = 0{,}10$ → $z_\alpha = 1{,}28$

Intervalo: $\left(-\infty;\ 0{,}15 + 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{1\,000}}\right) = (-\infty;\ 0{,}164)$

C → $\alpha = 0{,}10$ → $z_\alpha = 1{,}28$

Intervalo: $\left(0{,}15 - 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{1\,000}};\ +\infty\right) = (0{,}136;\ +\infty)$

3$^{\text{er}}$ paso: Verificación:

Hemos obtenido una proporción muestral de:

$$pr = \frac{183}{1\,000} = 0{,}183$$

4º paso: Decisión:

A → Rechazamos H_0 (es decir, aceptamos que $p \neq 0{,}15$).

B → Rechazamos H_0 (es decir, aceptamos que $p > 0{,}15$).

C → Aceptamos H_0 (es decir, aceptamos que $p \geq 0{,}15$).

Página 313

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Intervalos de confianza. Error. Tamaño muestral. Nivel de confianza

① S **Para estimar la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de una localidad, se ha medido a 40 de estos jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:**

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)
Nº JÓVENES	2	4	11

ESTATURA (cm)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
Nº JÓVENES	14	5	4

Estima, con un nivel de confianza del 99%, el valor de la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de dicha localidad.

Hallamos $\bar{x}$ y s para la muestra obtenida:

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
MARCA DE CLASE (x_i)	150,5	155,5	160,5	165,5	170,5	175,5
FRECUENCIA (f_i)	2	4	11	14	5	4

$$\bar{x} = 164 \quad \text{y} \quad s = 6{,}24$$

Para un nivel de confianza del 99%, se tiene:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

Así, el intervalo de confianza para estimar μ al 99% es:

$$\left(164 - 2{,}575 \cdot \frac{6{,}24}{\sqrt{40}};\ 164 + 2{,}575 \cdot \frac{6{,}24}{\sqrt{40}}\right); \quad \text{es decir:} \quad (161{,}46;\ 166{,}54)$$

2 **En una muestra de 50 jóvenes encontramos que la dedicación media diaria de ocio es de 400 minutos y su desviación típica de 63 minutos. Calcula el intervalo de confianza de la media de la población al 95% de nivel de confianza.**

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(400 - 1{,}96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}};\ 400 + 1{,}96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}}\right); \text{ es decir: } (382{,}54;\ 417{,}46)$$

3 **La desviación típica de una variable estadística es $\sigma = 5$. Para estimar la media de dicha variable, extraemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ y obtenemos $\bar{x} = 28$. Obtén un intervalo de confianza del 95% para estimar la media de la población, μ.**

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

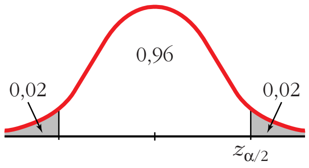
$$\left(28 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}};\ 28 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir: } (27{,}02;\ 28{,}98)$$

4 **Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ desconocida y de desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 horas.**

Halla un intervalo de confianza al 96% para la media de horas de sueño, μ.

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para el 96% → $1 - \alpha = 0{,}96$:

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}98 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 2{,}055$$



El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(7 - 2{,}055 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}};\ 7 + 2{,}055 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}}\right); \text{ es decir: } (5{,}87;\ 8{,}13)$$

5
S **Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, de los estudiantes de bachillerato de cierta comunidad. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para estos gastos:**

100; 150; 90; 70; 75; 105; 200; 120; 80

Se supone que la variable objeto del estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del gasto semanal en fotocopias por estudiante.

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Hallamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{100 + 150 + 90 + \dots + 80}{9} = \frac{990}{9} = 110 \text{ céntimos de euro.}$$

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(110 - 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}};\ 110 + 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}}\right); \text{ es decir: } (102{,}16;\ 117{,}84)$$

6 **S** **Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm³. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm³.**

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

a) Para el 90% → $1 - \alpha = 0{,}90$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo de confianza para μ al 90% es:

$$\left(110 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 110 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir: } (106{,}71;\ 113{,}29)$$

b) El error máximo es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, es decir:

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 2 = 3{,}29$$

7 **S** **La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza σ^2 = 0,16 m².**

a) Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

a) $n = 400$; $\bar{x} = 1{,}75$ m; $\sigma^2 = 0{,}16$ → $\sigma = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Para el 95% → $1 - \alpha = 0{,}95$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza es:

$$\left(1{,}75 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}};\ 1{,}75 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}}\right); \text{ es decir: } (1{,}7108;\ 1{,}7892)$$

b) 90% de confianza → $1 - \alpha = 0{,}90$ → $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Buscamos n para que $E < 0,02$ m:

$$1,645 \cdot \frac{0,4}{\sqrt{n}} < 0,02 \quad \to \quad \frac{0,658}{\sqrt{n}} < 0,02 \quad \to \quad \frac{\sqrt{n}}{0,658} > \frac{1}{0,02}$$

$$\sqrt{n} > \frac{0,658}{0,02} \quad \to \quad \sqrt{n} > 32,9 \quad \to \quad n > 1\,082,41$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 1 083 personas.

8 **S** **Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas, hechos por una determinada máquina dieron una media de 2 cm y una desviación típica de 0,1 cm. Halla los intervalos de confianza del:**

a) 68,26% **b) 95,44%** **c) 99,73%**

para el diámetro medio de todos los cojinetes.

a) Para el 68,26% → $1 - \alpha = 0,6826 \to z_{\alpha/2} = 1$

El intervalo de confianza para μ es:

$$\left(2 - 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,993;\ 2,007)$$

b) Para el 95,44% → $1 - \alpha = 0,9544 \to z_{\alpha/2} = 2$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,986;\ 2,014)$$

c) Para el 99,73% → $1 - \alpha = 0,9973 \to z_{\alpha/2} = 3$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,979;\ 2,021)$$

9 **La duración de las bombillas fabricadas por una empresa sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 50 horas. Para estimar la duración se experimenta con una muestra de tamaño *n*.**

Calcular el valor de *n* para que, con un nivel de confianza del 95%, se consiga un error en la estimación inferior a 5 horas.

Para el 95% → $1 - \alpha = 0,95 \to z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Buscamos n para que $E < 5$ horas.

Como $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\sigma = 50$, queda:

$$1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} < 5 \quad \to \quad \frac{98}{\sqrt{n}} < 5 \quad \to \quad \sqrt{n} > \frac{98}{5} = 19,6 \quad \to \quad n > 384,16$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 385 bombillas.

Página 314

10 S **Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?**

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\ \text{Buscamos } n \text{ para que } E \le 0{,}05:$$

$$1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \rightarrow \frac{0{,}98}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{0{,}98}{0{,}05} = 19{,}6 \rightarrow n \ge 384{,}16$$

Deberá hacer, al menos, 385 medidas.

11 **Al medir el diámetro de los cojinetes producidos por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es de 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones.**

¿Se puede afirmar, con el 99% de confianza, que el error en la estimación de la media no excederá a 0,01 cm?

Para el 99% $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 0{,}0117 > 0{,}01 \text{ cm}$$

Por tanto, no podemos afirmar que el error en la estimación no excederá a 0,01 cm.

12 S **Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663 € y 5 839 €.**

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

a) La media de las ventas es el punto medio del intervalo; es decir:

$$\overline{x} = \frac{4\,663 + 5\,839}{2} = 5\,251 \text{ €}$$

b) El estudio se ha realizado en los últimos 9 meses, es decir, se ha considerado una muestra de tamaño $n = 9$.

El error máximo admisible es la mitad de la longitud del intervalo, es decir:

$$E = \frac{5\,839 - 4\,663}{2} = 588$$

Así, sabemos que: $n = 9$; $\sigma = 900$; $E = 588$, y como:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{9}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot 300 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{588}{300} = 1{,}96 \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

que corresponde a un nivel de confianza del 95%.

⑬ **Se realizó una encuesta a 350 familias preguntando si poseían ordenador en casa, encontrándose que 75 de ellas lo poseían. Estima la proporción real de las familias que disponen de ordenador con un nivel de confianza del 95%.**

La proporción de familias con ordenador en la muestra es $pr = \frac{75}{350} = \frac{3}{14}$

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para p es:

$$\left(\frac{3}{14} - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)(1 - 3/14)}{350}}; \frac{3}{14} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)(1 - 3/14)}{350}}\right); \text{ es decir:}$$

(0,17; 0,26)

14 **Tomada al azar una muestra de 500 personas en cierta comunidad autónoma, se encontró que 220 leían algún periódico habitualmente. Calcula, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo en el que se encontrará la verdadera proporción de lectores de periódicos y explica el proceso seguido para dicho cálculo.**

La proporción de lectores del periódico en la muestra es $pr = \frac{220}{500} = 0{,}44$.

Para un 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para p es:

$$\left(0{,}44 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}44 \cdot 0{,}56}{500}}; 0{,}44 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}44 \cdot 0{,}56}{500}}\right); \text{ es decir:}$$

(0,396; 0,484)

⑮ **¿De qué tamaño conviene tomar la muestra de una línea de producción para tener una confianza del 95% de que la proporción estimada no difiere de la verdadera en más de un 4%? Se sabe, por estudios previos, que la proporción de objetos defectuosos es del orden del 0,05.**

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}}$. Buscamos n para que $E \le 0{,}04$ (no más de un 4%):

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}05(1 - 0{,}05)}{n}} \le 0{,}04 \quad \to \quad n \ge 114{,}05$$

El tamaño mínimo de la muestra ha de ser $n = 115$.

16
S
Se desea estimar la proporción, *p*, de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos, de tamaño *n*.

a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30%, calcula el valor de *n* para que, con un nivel de confianza de 0,95, el error cometido en la estimación sea inferior al 3,1%.

b) Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos, y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35%, determina, usando un nivel de significación del 1%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

a) Para un nivel de confianza del 95%, $1 - \alpha = 0{,}95 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}}$. Buscamos n para que $E < 0{,}031$ (inferior al 3,1%):

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} < 0{,}031 \quad \to \quad n > 839{,}48$$

La muestra ha de ser, como mínimo, de 840 individuos.

b) Para un nivel de significación del 1%, tenemos que:

$$\alpha = 0{,}01 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}99 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

El intervalo de confianza para p será:

$$\left(0{,}35 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{64}};\ 0{,}35 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{64}}\right);\ \text{es decir:}$$

(0,196; 0,504)

Contrastes de hipótesis

17
S
Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2 400 horas, con una desviación típica igual a 300.

Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra da una duración media de 2 320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%?

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$$H_0\colon \mu = 2\,400 \quad \text{frente a} \quad H_1\colon \mu \ne 2\,400$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Conocemos los siguientes datos:

$\mu_0 = 2\,400;\ \ \sigma_0 = 300;\ \ n = 100$

$\alpha = 0{,}05 \ \ \to \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, la zona de aceptación será:

$$\left(2\,400 - 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{100}};\ 2\,400 + 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{100}}\right);$$ es decir, el intervalo:

$(2\,341{,}2;\ 2\,458{,}8)$

3$^{\underline{er}}$ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 2\,320$.

4º paso: Decisión:

Como $\bar{x} = 2\,320$ no cae dentro de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar la validez del nuevo proceso de fabricación.

18 Un laboratorio afirma que un calmante quita la jaqueca en 14 minutos en los casos corrientes. Con el fin de comprobar esta información, se eligen al azar 30 pacientes con jaqueca y se toma como variable en el experimento el tiempo que transcurre entre la administración del calmante y el momento en que desaparece la jaqueca.

Los resultados obtenidos en esta muestra fueron media 17 minutos y desviación típica 7 minutos. ¿Podemos admitir como cierta la afirmación del laboratorio a un nivel de confianza del 95%?

1$^{\underline{er}}$ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

H_0: $\mu = 14$ frente a H_1: $\mu \neq 14$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Conocemos los siguientes datos:

$\mu_0 = 14;\ \ \sigma_0 = 7;\ \ n = 30$

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \ \to \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, la zona de aceptación será:

$$\left(14 - 1{,}96 \cdot \frac{7}{\sqrt{30}};\ 14 + 1{,}96 \cdot \frac{7}{\sqrt{30}}\right);$$ es decir, el intervalo $(11{,}495;\ 16{,}505)$

$3^{\underline{er}}$ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 17$ minutos.

$4^{\underline{o}}$ paso: Decisión:

Como $\bar{x} = 17$ no cae dentro de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que el calmante quite la jaqueca en 14 minutos.

19 S **Se sabe que la renta anual de los individuos de una localidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 400 €. Se ha observado la renta anual de 16 individuos de esa localidad escogidos al azar, y se ha obtenido un valor medio de 16 000 €. Contrasta, a un nivel de significación del 5%, si la media de la distribución es 14 500 €. Para ello, responde:**

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?

b) Determina la forma de la región crítica.

c) ¿Se acepta la hipótesis nula, con el nivel de confianza indicado?

a) Tenemos que contrastar la hipótesis nula:

$$H_0: \mu = 14\,500$$

frente a la hipótesis alternativa:

$$H_1: \mu \neq 14\,500$$

b) La zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 14\,500$; $\sigma = 2\,400$; $n = 16$

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$; tenemos que la zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(14\,500 - 1{,}96 \cdot \frac{2\,400}{\sqrt{16}};\ 14\,500 + 1{,}96 \cdot \frac{2\,400}{\sqrt{16}}\right);\ \text{es decir, } (13\,324;\ 15\,676)$$

c) Como hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 16\,000$ €, que no está en el intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que la media sea de 14 500 €.

Página 315

20 S **Se sabe por experiencia que el tiempo obtenido por los participantes olímpicos de la prueba de 100 metros, en la modalidad de decathlon, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 12 segundos y desviación típica 1,5 segundos. Para contrastar, con un nivel de significación del 5%, si no ha variado el tiempo medio en la última Olimpiada, se extrajo una muestra aleatoria de 10 participantes y se anotó el tiempo obtenido por cada uno, con los resultados siguientes, en segundos:**

13 12 11 10 11 11 9 10 12 11

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?

b) Determina la región crítica.

c) Realiza el contraste.

a) Tenemos que contrastar la hipótesis nula:

H_0: $\mu = 12$

frente a la hipótesis alternativa:

H_1: $\mu \neq 12$

b) La zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 12$; $\sigma = 1,5$; $n = 10$;

$\alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$; tenemos que la zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(12 - 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{10}};\ 12 + 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{10}}\right); \text{ es decir, } (11,07;\ 12,93)$$

c) Calculamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{13 + 12 + 11 + \ldots + 11}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

Como no está dentro del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que la media siga siendo la misma.

21 **Sabemos que la vida media de las lavadoras de una determinada marca sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,7 años. Un fabricante de dicha marca afirma que sus lavadoras tienen una vida media de 10 años. Para comprobar dicha afirmación se obtuvo una muestra de 50 lavadoras, cuya duración media fue de $\bar{x} = 9,2$ años.**

a) Formula la hipótesis nula y la hipótesis alternativa del contraste.

b) Determina la zona de aceptación y realiza el contraste (con un nivel de confianza del 95%).

c) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten cada uno de los errores del tipo I y II.

a) Tenemos que contrastar la hipótesis nula:

H_0: $\mu = 10$

frente a la hipótesis alternativa:

H_1: $\mu \neq 10$

b) La zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 10$; $\sigma = 0{,}7$; $n = 50$

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$; tenemos que la zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(10 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}7}{\sqrt{50}};\ 10 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}7}{\sqrt{50}}\right);\text{ es decir, } (9{,}81;\ 10{,}19)$$

Como hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 9{,}2$, que no pertenece a la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que la duración media sea de 10 años.

c) El error de tipo I consiste en rechazar H_0 siendo verdadera. En este caso, consistiría en rechazar que la media es de 10 años, siendo verdad.

El error de tipo II consiste en aceptar H_0 siendo falsa. En este caso, consistiría en aceptar que la media es de 10 años, siendo falso.

22
S
Se ha comprobado que el tiempo de espera (en minutos) hasta ser atendido, en cierto servicio de urgencias, sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 personas que fueron atendidas en dicho servicio, se ha calculado un tiempo medio de espera de 14,25 minutos y una desviación típica de 2,5 minutos.

a) ¿Podríamos afirmar, con un nivel de significación del 5% ($\alpha = 0{,}05$), que el tiempo medio de espera, en ese servicio de urgencias, no es de 15 minutos?

b) ¿Qué podríamos concluir si el nivel de significación hubiese sido del 0,1% ($\alpha = 0{,}001$)?

c) ¿Existe contradicción en ambas situaciones?

Justifica las respuestas.

a) **1^er^ paso: Hipótesis:** Tenemos que contrastar:

H_0: $\mu = 15$ frente a H_1: $\mu \neq 15$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 15$; $\sigma = 2{,}5$; $n = 100$;

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$; tenemos que la zona de aceptación es:

$$\left(15 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}};\ 15 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}\right);\text{ es decir, el intervalo } (14{,}51;\ 15{,}49)$$

3^er^ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 14{,}25$.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que el tiempo medio sea de 15 minutos.

b) Si $\alpha = 0{,}001$, entonces $z_{\alpha/2} = 3{,}27$, y la zona de aceptación sería:

$$\left(15 - 3{,}27 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}};\ 15 + 3{,}27 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}\right);$$ es decir, el intervalo (14,18; 15,82)

Por tanto, como $\bar{x} = 14{,}25$ sí está en el intervalo de aceptación, no podríamos rechazar H_0, es decir, aceptaríamos que el tiempo medio es de 15 minutos.

c) No existe contradicción. En el apartado b) el riesgo que estamos asumiendo es muy pequeño, mucho menor que en el caso a), por tanto, el intervalo es más amplio.

23
S
La duración de las bombillas de 100 vatios que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas.

Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

1^er^ paso: Hipótesis: Queremos contrastar:

$$H_0\text{: } \mu \geq 800 \quad \text{frente a} \quad H_1\text{: } \mu < 800$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$$

Para $\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_\alpha = 2{,}33$. Como $\mu_0 = 800$; $\sigma_0 = 120$ y $n = 50$, la zona de aceptación será:

$$\left(800 - 2{,}33 \cdot \frac{120}{\sqrt{50}};\ +\infty\right);$$ es decir, el intervalo (760,46; +∞)

3^er^ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 750$ horas.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral no está dentro de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía.

24 **Una empresa asegura que unas determinadas pastillas de jabón duran más de 11 días. Para comprobarlo, se realiza una encuesta en 100 casos. Estas son las respuestas:**

DURACIÓN (días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24
RESPUESTAS	24	46	19	11

¿Se puede dar como válida la afirmación de la empresa, para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}05$?

Calculamos la media muestral y la desviación típica:

DURACIÓN (días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24
x_i	7	12	17	22
f_i	24	46	19	11

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} = \frac{1\,285}{100} = 12{,}85 \text{ días}; \quad s = 4{,}59$$

1^er^ paso: Hipótesis: Queremos contrastar:

$$H_0\text{: } \mu \le 11 \quad \text{frente a} \quad H_1\text{: } \mu > 11$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty;\ \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Para $\alpha = 0{,}05 \ \to\ z_\alpha = 1{,}645$. Como $\mu_0 = 11$; $\sigma_0 = 4{,}59$ y $n = 100$, la zona de aceptación es:

$$\left(-\infty;\ 11 + 1{,}645 \cdot \frac{4{,}59}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir, el intervalo } (-\infty;\ 11{,}76)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 12{,}85$ días.

4º paso: Decisión:

Como $\bar{x} = 12{,}85$ está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que las pastillas de jabón duran más de 11 días.

25 S **Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6,5 años, con una desviación típica de 4.**

¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justifica adecuadamente la respuesta.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$$H_0\text{: } \mu \le 6 \quad \text{frente a} \quad H_1\text{: } \mu > 6$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty;\ \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de significación del 5%, tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo es:

$$\left(-\infty;\ 6 + 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}\right); \text{ es decir, } (-\infty;\ 6{,}8225)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 6{,}5$ años.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral pertenece al intervalo de aceptación, no podemos rechazar H_0, es decir, aceptamos que el tiempo medio es menor o igual que 6 años.

Página 316

26 **S** **En función de la información disponible, la dirección de un centro de secundaria ha establecido que la media de horas semanales dedicadas por el alumnado de ese centro al estudio es superior a 15, con una desviación típica igual a 1 hora. Durante el presente curso, el Departamento de Matemáticas quiere demostrar que esta media ha disminuido. Para ello, elige una muestra aleatoria de 150 alumnos, obteniendo una media muestral de 12,7 horas.**

a) ¿Puede afirmarse, con un nivel de confianza del 90%, que ha disminuido el tiempo medio dedicado al estudio por los alumnos y alumnas del centro?

b) Responde a la pregunta a) con un nivel de significación del 1%.

a) **1^er^ paso: Hipótesis:** Queremos contrastar:

H_0: $\mu \geq 15$ frente a H_1: $\mu < 15$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

Para el 90% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow z_\alpha = 1{,}28$

Como $\mu_0 = 15$; $\sigma_0 = 1$; $n = 150$, la zona de aceptación es:

$$\left(15 - 1{,}28 \cdot \frac{1}{\sqrt{150}};\ +\infty\right);\ \text{es decir, el intervalo } (14{,}895;\ +\infty)$$

3^er^ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 12{,}7$ horas.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la media ha disminuido.

b) Si consideramos un nivel de significación del 1%, entonces $\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_\alpha = 2{,}33$. La zona de aceptación sería el intervalo:

$$\left(15 - 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{150}};\ +\infty\right);\ \text{es decir } (14{,}810;\ +\infty)$$

La media muestral sigue estando fuera de la zona de aceptación. Por tanto, tomaríamos la misma decisión: rechazaríamos H_0, es decir, aceptaríamos que la media ha disminuido.

27
S

Según la normativa sobre contaminación atmosférica, los motores de los automóviles no deben emitir más de 5 ppm (partes por millón) de CO_2. Dentro de sus procesos de control de calidad, un fabricante ha medido la emisión de CO_2 en una muestra de 36 motores, obteniendo una media de 5,5 ppm y una desviación típica de 0,6 ppm.

Contrasta, con un nivel de significación igual a 0,05, la hipótesis de que los motores de este fabricante cumplen en media la normativa sobre contaminación.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$$H_0: \mu \le 5 \ \text{ frente a } \ H_1: \mu > 5$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty;\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05 \ \to \ z_\alpha = 1{,}645$. Como $\mu_0 = 5$; $\sigma_0 = 0{,}6$ y $n = 36$, tenemos que la zona de aceptación es:

$$\left(-\infty;\ 5 + 1{,}645 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{36}}\right); \text{ es decir, el intervalo } (-\infty;\ 5{,}16)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 5{,}5$ ppm.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que los motores de este fabricante cumplan la normativa sobre contaminación.

28
S

La Concejalía de Juventud de un Ayuntamiento maneja el dato de que la edad a la que los hijos se independizan de sus padres es una variable normal con media 29 años y desviación típica 3 años. Aunque la desviación típica no plantea dudas, sí se sospecha que la media ha descendido, sobre todo por la política de ayuda al empleo que ha llevado a cabo el Ayuntamiento. Así, de un estudio reciente sobre 100 jóvenes que se acaban de independizar, se ha obtenido una media de 28,1 años de edad.

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿puede defenderse que la edad media no ha disminuido, frente a que sí lo ha hecho como parecen indicar los datos? Plantea el contraste o test de hipótesis y resuélvelo.

b) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten cada uno de los errores del tipo I y II.

a) **1^er^ paso: Hipótesis:** Tenemos que contrastar:

$$H_0: \mu \ge 29 \ \text{ frente a } \ H_1: \mu < 29$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$$

Para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}01$, tenemos que $z_\alpha = 2{,}33$. Así, el intervalo es:

$$\left(29 - 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}};\ +\infty\right);\ \text{es decir, } (28{,}301;\ +\infty)$$

3^er^ paso: Verificación:

La media muestral obtenida es $\bar{x} = 28{,}1$ años.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la media de edad ha disminuido.

b) • El error de tipo I consiste en rechazar H_0 siendo verdadera. En el contexto de este problema sería aceptar que la media ha disminuido, siendo falso.

• El error de tipo II consiste en aceptar H_0 siendo falsa. En este problema sería aceptar que la media no ha disminuido, siendo falso.

29 **Un dentista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de caries dental. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 30 presentaban indicios de caries.**

Utilizando la aproximación normal, comprueba, a un nivel de significación del 5%, si el resultado proporciona evidencia que permita rechazar la afirmación del dentista.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

H_0: $p = 0{,}4$ frente a H_1: $p \neq 0{,}4$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El intervalo será:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right);\ \text{es decir, } (0{,}304;\ 0{,}496)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{30}{100} = 0{,}3$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral queda fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, rechazamos la afirmación del dentista.

30 **Una empresa de productos farmacéuticos afirma en su publicidad que uno de sus medicamentos reduce considerablemente los síntomas de la alergia primaveral en el 90% de la población.**

Una asociación de consumidores ha experimentado dicho fármaco en una muestra de 200 socios de la misma, obteniendo el resultado indicado en la publicidad en 170 personas.

Determina si la asociación de consumidores puede considerar que la afirmación de la empresa es estadísticamente correcta al nivel de significación de 0,05.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

H_0: $p = 0{,}9$ frente a H_1: $p \neq 0{,}9$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El intervalo será:

$$\left(0{,}9 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}};\ 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}}\right);\ \text{ es decir, } (0{,}858;\ 0{,}942)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{170}{200} = 0{,}85$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos considerar válida la afirmación de la empresa.

31 **S** **Se afirma que, en una determinada ciudad, al menos el 30% de las familias poseen ordenador. Se toma una muestra aleatoria de 200 familias de la ciudad y resulta que 50 poseen ordenador.**

A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación?

1^er^ paso: Hipótesis: Queremos contrastar:

H_0: $p \geq 0{,}3$ frente a H_1: $p < 0{,}3$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ +\infty\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(0{,}3 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{200}};\ +\infty\right);\ \text{ es decir, } (0{,}247;\ +\infty)$$

3$^{\underline{er}}$ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{50}{200} = 0{,}25$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está dentro del intervalo de aceptación, no podemos rechazar H_0, es decir, aceptamos que, al menos, el 30% de las familias poseen ordenador.

32 **S** **Un investigador, utilizando información de anteriores comicios, sostiene que, en una determinada zona, el nivel de abstención en las próximas elecciones es del 40% como mínimo.**

Se elige una muestra aleatoria de 200 individuos para los que se concluye que 75 estarían dispuestos a votar.

Determina, con un nivel de significación del 1%, si se puede admitir como cierta la afirmación del investigador.

La proporción de abstenciones en la muestra es:

$$pr = \frac{120}{200} = 0{,}625 \ (62{,}5\%)$$

1$^{\underline{er}}$ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$$H_0\colon p \le 0{,}4 \quad \text{frente a} \quad H_1\colon p > 0{,}4$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty;\ p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación del 1%, tenemos que $\alpha = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_\alpha = 2{,}33$. El intervalo será:

$$\left(-\infty;\ 0{,}4 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{200}}\right); \quad \text{es decir, } (-\infty;\ 0{,}48)$$

3$^{\underline{er}}$ paso: Verificación:

La proporción de abstenciones en la muestra es $pr = 0{,}625$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la proporción de abstenciones superará el 40%.

Página 317

33 **S** **El 42% de los escolares de un cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1 000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias.**

Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido.

a) Contrasta, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

b) ¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido?

a) **1er paso: Hipótesis:** Queremos contrastar:

$$H_0 \colon p \le 0{,}42 \text{ frente a } H_1 \colon p > 0{,}42$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty; \, p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación del 5%, tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(-\infty; \, 0{,}42 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}42 \cdot 0{,}58}{1\,000}}\right); \text{ es decir, } (-\infty; \, 0{,}446)$$

3er paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \dfrac{450}{1\,000} = 0{,}45$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la proporción ha aumentado.

b) La probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido, es decir, de aceptar H_0, siendo falsa, es la probabilidad de cometer un error de tipo II.

CUESTIONES TEÓRICAS

34 **Con una muestra de 500 individuos hemos estimado, con un nivel de confianza del 90%, que la estatura media de los soldados de un cierto reemplazo está entre 174,3 cm y 175,1 cm (problema de la página inicial, pág. 290).**

a) Si la desviación típica de la población era desconocida, averigua la media, $\bar{x}$, y la desviación típica, s, de la muestra.

b) ¿Cuál sería el intervalo si la muestra fuera de tamaño la cuarta parte (500 : 4 = 125) y mantuviéramos el nivel de confianza?

a) • La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza:

$$\bar{x} = \frac{174{,}3 + 175{,}1}{2} = 174{,}7 \text{ cm}$$

- La semiamplitud del intervalo es:

$$\frac{175{,}1 - 174{,}3}{2} = 0{,}4, \quad \text{que coincide con:}$$

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad s = \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{n}}{z_{\alpha/2}}$$

Para un 90% de confianza, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Por tanto, la desviación típica de la muestra es:

$$s = \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{500}}{1{,}645} = 5{,}44$$

b) Si $z_{\alpha/2} = 1{,}645$, y mantenemos las condiciones del problema, salvo el tamaño muestral, que es $\frac{n}{4}$, el intervalo tendría el doble de amplitud que el anterior, pues:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{500/4}} = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{500}} = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$$

Es decir, el intervalo sería:

(174,7 – 0,8; 174,7 + 0,8); esto es: (173,9; 175,5)

35 **S** **Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud igual a ± 4. Si el tamaño de la muestra hubiera sido $n = 100$, permaneciendo invariables todos los demás valores que intervienen en el cálculo, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?**

La semiamplitud del intervalo es igual al error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad \text{Para } n = 25, \text{ sabemos que } E = 4.$$

Si $n = 100$, tendríamos que:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot 25}} = \frac{1}{2}\left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

La amplitud del intervalo sería ± 2.

36 **A partir de una muestra aleatoria, hemos estimado el peso de los toros de una manada mediante el intervalo (443, 528). ¿Cuál es la media de la muestra obtenida?**

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza, es decir:

$$\bar{x} = \frac{443 + 528}{2} = 485{,}5$$

37 **Mediante una muestra de 100 individuos estimamos la estatura de un colectivo de personas con un nivel de confianza del 95%. El error máximo admisible obtenido es $E = 1{,}274$. ¿Cuál es la desviación típica de la muestra obtenida?**

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad \text{Como} \quad E = 1{,}274, \quad n = 100 \quad \text{y} \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96, \quad \text{tenemos que:}$$

$$1{,}274 = 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{100}} \quad \rightarrow \quad s = \frac{12{,}74}{1{,}96} = 6{,}5 \quad \rightarrow \quad s = 6{,}5$$

38 **A partir de una muestra de tamaño 400 se estima la proporción de individuos que leen el periódico en una gran ciudad. Se obtiene una cota de error de 0,0392 con un nivel de confianza del 95%.**

a) ¿Podríamos, con la misma muestra, mejorar el nivel de confianza en la estimación? ¿Qué le ocurriría a la cota de error?

b) ¿Sabrías calcular la proporción, *pr*, obtenida en la muestra?

a) Aumentando la cota de error mejoraría el nivel de confianza.

b) La cota de error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}}$$

Como $E = 0{,}0392$; $n = 400$ y $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$, tenemos que:

$$0{,}0392 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}0392}{1{,}96} = \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 0{,}02 = \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \quad \rightarrow \quad 0{,}0004 = \frac{pr(1 - pr)}{400} \quad \rightarrow \quad 0{,}16 = pr(1 - pr)$$

$$0{,}16 = pr - pr^2 \quad \rightarrow \quad pr^2 - pr + 0{,}16 = 0$$

$$pr = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}64}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}36}}{2} = \frac{1 \pm 0{,}6}{2} \begin{cases} pr = 0{,}8 \\ pr = 0{,}2 \end{cases}$$

Podría ser $pr = 0{,}8$ o bien $pr = 0{,}2$. Con los datos que tenemos, no podemos decidir cuál de estos dos resultados es el válido.

PARA PROFUNDIZAR

39 **En un test de hipótesis para estudiar si el cociente intelectual medio de los estudiantes de una universidad es 113, hemos seleccionado una muestra aleatoria de 180 estudiantes, obteniendo una media de 115. La zona de aceptación obtenida ha sido el intervalo (111,98; 114,02) y sabemos que la desviación típica es $\sigma = 7$. Por tanto, hemos rechazado la hipótesis.**

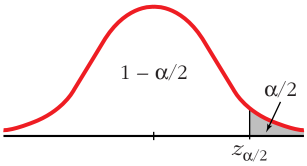
¿Cuál es la probabilidad de habernos equivocado, es decir, de haber rechazado la hipótesis, cuando en realidad era verdadera? ¿Cómo se llama este tipo de error?

El error que consiste en rechazar H_0 cuando esta es verdadera, se llama error de tipo I. La probabilidad de cometerlo es precisamente α, el nivel de significación. Lo calculamos en este caso concreto:

- La semiamplitud del intervalo de aceptación es:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \text{ En este caso concreto es igual a: } \frac{114{,}02 - 111{,}98}{2} = 1{,}02$$

- Sabemos que $\sigma = 7$ y que $n = 180$. Por tanto, podemos despejar $z_{\alpha/2}$:



$$1{,}02 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{180}} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}95 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9744 \rightarrow \alpha = 0{,}0512$$

- La probabilidad de haber cometido un error de tipo I (rechazar H_0 siendo cierta) es $\alpha = 0{,}0512$.

40 **En una determinada provincia, la nota media en matemáticas de los alumnos de 2º de Bachillerato del curso pasado fue de 5,8, con una desviación típica de 2,3 puntos. Con un nivel de significación de 0,05 y suponiendo que la desviación típica sigue siendo la misma, queremos contrastar la hipótesis de que la media no ha variado. Para ello, vamos a extraer una muestra aleatoria de tamaño 100. Así, la zona de aceptación será el intervalo (5,35; 6,25). Si al final la media real fuera de 5 puntos, ¿cuál es la probabilidad de obtener una media muestral que nos lleve a cometer un error de tipo II (es decir, aceptar H_0 siendo falsa)?**

Si la media real fuera $\mu = 5$, las medias muestrales en muestras de tamaño $n = 100$, con $\sigma = 2{,}3$, se distritribuirían según una $N\left(5; \frac{2{,}3}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, según una $N(5;\ 0{,}23)$.

Así, la probabilidad de aceptar H_0 siendo falsa (esto es, la probabilidad de cometer un error de tipo II) sería la probabilidad de obtener una media muestral que cayera dentro de la zona de aceptación, es decir:

$$P[5{,}35 < \bar{x} < 6{,}25] = P\left[\frac{5{,}35 - 5}{0{,}23} < z < \frac{6{,}25 - 5}{0{,}23}\right] = P[1{,}52 < z < 5{,}43] =$$

$$= P[z < 5{,}43] - P[z < 1{,}52] = 1 - 0{,}9357 = 0{,}0643$$