EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades: a) y=3|x|+5; b) y=$\begin{cases} x+2 \text{ si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} \text{ si } -1<x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; c) $y=\begin{cases} 4 \text{ si } x>0 \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$;

d) $y=\begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x=0 \end{cases}$; e) $y=\begin{cases} x+2 \text{ si } x<1 \\ 4x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$; f) $y=\begin{cases} x^2 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$; g) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

h) y=$\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si } x=2 \end{cases}$; i) y=$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{|x|}{x} \text{ si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases}$ j) y=$\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ k) $y=\begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} \text{ si } x<0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } x>0 \end{cases}$

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b

a) y=$\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<-1 \\ ax+b \text{ si } -1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$; b) y=$\begin{cases} a(x-2)^2 \text{ si } x \leq 0 \\ bx+1 \text{ si } 0<x<5 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$; c) y=$\begin{cases} x \text{ si } x<1 \\ ax+2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si } x<0 \\ ax+b \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ x+a \text{ si } x>3 \end{cases}$; e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si } x=0 \end{cases}$; f) y=$\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ b \text{ si } x=2 \end{cases}$;

g) y=$\begin{cases} a\cos x \text{ si } x \leq b \\ x^2 \text{ si } x>b \end{cases}$; h) y=$\begin{cases} ae^x-1 \text{ si } x \leq 0 \\ be^{-x} \text{ si } 0<x<1 \\ 3 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ i)$\begin{cases} senx \text{ si } x \leq -\pi/2 \\ msenx+n \text{ si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ 2\cos x \text{ si } x \geq \pi/2 \end{cases}$

SOLUCIONES

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades:

a) y=3|x|+5= $\begin{cases} -3x+5 \text{ si } x<0 \\ 3x+5 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ La función es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0,\infty)$ por estar definida en cada uno de ellos como una función polinómica. El único punto que podría tener problema es x=0. 5; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-3x+5) = 5; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x+5) = 5;$ f(0)=5 Luego f es continua en R

b) y= $\begin{cases} x+2 \text{ si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} \text{ si } -1<x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; Las funciones y=x+2 e y=x^2 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos (–∞,-1) y (0,∞) en los que están definidas. La función y=-1/x es continua en R-{0}, y por lo tanto lo es en el intervalo (-1,0). Así pues los únicos puntos en los que la función que nos dan puede tener problemas de continuidad es en x=-1 y en x=0

Continuidad en x=-1: ; $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x+2) = 1; \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(-1/x) = 1;$ f(-1)∄. Por lo tanto la función presenta en x=-1 una discontinudad evitable.

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1/x) = \infty; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ Por lo tanto la función presenta en x=0 una discontinuidad asintótica. f es continua en R-{-1,0}

c) $y = \begin{cases} 4 \text{ si } x>0 \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ Tanto la función y=4 como y=3x-1 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(0,\infty)$ y (-∞,0) Debemos estudiar la continuidad en x=0: : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 4 = 4$ Luego f presenta en x=0 una discontinuidad de salto finito y es continua en R-{0}

d)$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x=0 \end{cases}$; La función y=1/x^2 es continua en R-{0}. Estudiamos la continuidad en x=0 de la función dada : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty;$ f(0)=3 Luego f presenta en x=0 una discontinuidad asintótica y es continua en R-{0}

e) $y = \begin{cases} x+2 \text{ si } x<1 \\ 4x-1 \text{ si} x>1 \end{cases}$ Las 2 funciones que componen a f(x) son continuas en todo R por ser polinómicas, por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0,\infty)$. Así, el único punto problemático que presenta nuestra función es x=1:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 3; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4x-1) = 3;$ f(1)∄ Entonces: en x=1 la función es discontinua evitable, en R-{1} f es continua.

f) $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ y=0 es continua en $(-\infty, 0)$ por serlo en R; y=x^2 es continua en $(0,\infty)$ por la misma razón. Estudiamos la continuidad en x=0 : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(0) = 0;$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$; f(0)=0⇒ f es continua en todo R

g) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ La función y=1/x es continua en $(-\infty, 1)$-{0}. La función y=$\frac{1}{x-2}$ es continua en $(1,\infty)$-{2}. Además en x=1 hay un cambio de función , por lo tanto tenemos que estudiar la función en esos 3 puntos.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1/x)=\infty \Rightarrow$ f tiene en x=0 una discontinuidad asintótica
$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2})=\infty \Rightarrow$ f presenta en x=2 una discontinuidad asintótica
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1/x)=1; \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{1}{x-2})=-1 \Rightarrow$ En x=1 f es discontinua de salto finito. f es continua en R-{0,1,2}

h)y=$\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x\neq 2 \\ 3 \text{ si x=2} \end{cases}$ La función y=$\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ es continua en R-{-2, 2} y por lo tanto f también lo es.
Continuidad en x=-2 $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{-16}{0}=\infty$ luego en x=-2 f es discontinua asintótica.

Continuidad en x=2 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\infty$ Factorizamos los dos polinomios obteniendo: x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4); x^2-4=(x-2)(x+2). En consecuencia:

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=\frac{12}{4}=3;$ f(2)=3. Por lo tanto f es continua en x=2
En resumen f es continua en R-{-2} y es discontinua asintótica en x=-2.

i) y=$\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} \text{ si x<-3} \\ \dfrac{|x|}{x} \text{ si -3} \le x \le 3 \\ \dfrac{x^2}{9} \text{ si x>3} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} \text{ si x<-3} \\ \frac{-x}{x} \text{ si -3} \le x < 0 \\ \frac{x}{x} \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x^2}{9} \text{ si x>3} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} \text{ si x<-3} \\ -1 \text{ si -3} \le x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x^2}{9} \text{ si x>3} \end{cases}$
La función y=$\dfrac{1}{x-3}$ es continua en $(-\infty,-3)$ por serlo en R-{3}, las funciones y=-1, y=1 e y=$\dfrac{x^2}{9}$ son continuas respectivamente en (-3,0) y (0,3) y (3,∞) por serlo en R. En consecuencia, los puntos problemáticos de nuestra función son x=0, x=-3 y x=3.
$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}(\dfrac{1}{x-3})=-1/6; \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+} -1=-1$ Discontinua de salto finito en x=-3
$\lim\limits_{x\to-0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}(-1)=-1; \lim\limits_{x\to-0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-0^+} 1=1$ Discontinua de salto finito en x=0
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} 1=1; \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^2}{9}=1; f(3)=1$ continua en x=3
La función es continua en R-{-3,0}

j) y=$\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ Hallamos el dominio de la función: x^3+7x-8=0⇒ $x=1$ luego D=R-{1}
; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\dfrac{0}{0}$ y factorizando: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+8)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)}{(x^2+x+8)}=\frac{2}{10};$
f(1) no existe⇒ f es discontinua evitable en x=1 y continua en su dominio.

k)$y=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} \text{ si x < 0} \\ \dfrac{x^2+1}{2} \text{ si x >0} \end{cases}$ El único punto problemático de la función es x=0 ya que las funciones y=$\dfrac{e^x}{e^x+1}$ e y=$\dfrac{x^2+1}{2}$ son continuas en todo R.
$\lim\limits_{x\to-0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-0^-}(\dfrac{e^x}{e^x+1})=\frac{1}{2}; \lim\limits_{x\to-0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-0^+}\dfrac{x^2+1}{2}=\frac{1}{2};$ f(0)∄ luego f presenta una discontinuidad evitable en x=0, siendo continua en R-{0}, es decir en s dominio.

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b

a) y= $\begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ six<-1} \\ ax+b \text{ si } -1 \le x < 2 \\ 2 \text{ si x} \ge 2 \end{cases}$; La función y=1/x es continua en $(-\infty,-1)$ al serlo en R-{0}; las funciones y=ax+b e y=2 son continuas en los intervalos en los que están definidas al serlo en R. Por tanto los únicos problemas de continuidad de esta función pueden estar en x=-1 y x=2.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (ax+b) = -a+b$; f(-1)=-a+b$\Rightarrow -a+b=-1$ para que f sea continua en x=-1

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2 = 2$; f(2)=2$\Rightarrow 2a+b=2$ para que f sea continua en x=2. Entonces, para que f sea continua en R ha de verificarse:

$$\begin{cases} -a+b=-1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

b) y= $\begin{cases} a(x-2)^2 \text{ si x} \le 0 \\ bx+1 \text{ si 0<x<5} \\ \dfrac{1}{x} \text{ si x} \ge 5 \end{cases}$; Las funciones y=a(x-2)^2 e y=bx+1 son continuas en todo R para cualquier valor de a y b, al ser funciones polinómicas, en consecuencia lo son en el intervalo en el que están definidas. La función y=1/x es continua en $(5,\infty)$ por serlo en R-{0}. Hay que estudiar entonces únicamente la continuidad en x=0 y x=5

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} a(x-2)^2 = 4a$;$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (bx+1) = 1$; f(0)=4a$\Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=1/4$ para este valor de a f es continua en x=0

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (bx+1) = 5b+1$;$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} 1/x = 1/5$; f(5)=1/5$\Rightarrow 5b+1=1/5$

$\Rightarrow b=-4/25$ Para ese valor es continua en x=5.

Por tanto para a=1/4 y b=-4/25 es continua en R

c) y=$\begin{cases} x \text{ si x<1} \\ ax+2 \text{ si x} \ge 1 \end{cases}$ Tanto la función y=x como la función y=ax+2 son continuas en su interlo de definición por serlo en R.

Continuidad en x=1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$;$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax+2) = a+2$; f(1)=a+2$\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=a+2 \Rightarrow a=-1$. Para ese valor de a f es continua en R

d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si x<0} \\ ax+b \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ x+a \text{ si x>3} \end{cases}$; Todas las funciones que componen f son polinómicas y por tanto continuas en el intervalo en el que están definidas. Veamos la continuidad en x=0 y x=3: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 4-x = 4$;$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax+b) = b$; f(0)=b$\Rightarrow b=4$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$;$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+a) = 3+a; f(3) = 3+b \Rightarrow 3a+b = 3+a \Rightarrow$

3a+4=3+a$\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-1/2$

e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si x} \ne 0 \\ a \text{ si x=0} \end{cases}$; 8x^3+3x=0$\Rightarrow x(8x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$ Por lo tanto la función y=$\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$ es continua en R-{0} y en consecuencia nuestra función también lo es. Veamos la continuidad en x=0: : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \frac{0}{0}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(8x^2+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x+1}{(8x^2+3)} = \frac{1}{3}$; f(0)=a. Para que f sea continua a=1/3

f) $y=\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ b \text{ si } x=2 \end{cases}$ La función $y=\frac{ax^3-16}{x-2}$ es continua en R-{2}, por lo tanto también lo es la función que nos ocupa. Veamos la continuidad en x=2:: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{ax^3-16}{x-2} = \frac{8a-16}{0}$;
Si 8a-16 es distinto de cero ese límite sería infinito y la función presentaría en x=2 una discontinuidad de asintótica para cualquier valor de b. La única posibilidad de que ese límite exista es que sea del tipo 0/0 y, por lo tanto que 8a-16=0$\Rightarrow a = 2$.
Para ese valor de a: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^3-16}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x^2+4x+8)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}(2x^2+4x+8) = 24$;f(2)=b
Luego b=24 y a=2 para que f sea continua

g) $y=\begin{cases} a\cos x \text{ si } x \leq b \\ x^2 \text{ si } x>b \end{cases}$; Las funciones y=acosx e y=x^2 son continuas en R y por lo tanto en los intervalos en los que están definidas. Veamos la continuidad en x=b
$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} a\cos x = a\cos b$; $\lim\limits_{x\to b+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^+} x^2 = b^2 \Rightarrow a\cos b = b^2 \Rightarrow a = \frac{b^2}{\cos b}$
La función es continua $\forall b \in R$ t q cosb$\neq$ 0 siempre que para ese valor de b sea $a = \frac{b^2}{\cos b}$
En definitiva b puede tomar cuaquier valor excepto $\begin{cases} \pi/2 + 2k\pi \\ 3\pi/2 + 2k\pi \end{cases}$ $k \in Z;\ a = \frac{b^2}{\cos b}$

h) $y=\begin{cases} ae^x - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ be^{-x} \text{ xi } 0<x<1 \\ 3 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ Todas las funciones que intervienen en la composiión de f son continuas en todo R, por tanto los únicos puntos problemáticos son x=0 y x=1
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(ae^x - 1) = a - 1$;$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(be^{-x}) = b$; f(0)=a-1$\Rightarrow a - 1 = b$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(be^{-x}) = b/e$;$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3) = 3$; f(1)=3$\Rightarrow b/e = 3 \Rightarrow b = 3e$
Como a-1=b$\Rightarrow a = b + 1 = 3e + 1$
b=3e, a=3e+1 para que f sea continua en R

I) $\begin{cases} senx \text{ si } x \leq -\pi/2 \\ msenx + n \text{ si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ 2\cos x \text{ si } x \geq \pi/2 \end{cases}$ Todas las funciones que componen f son continuas en R

Estudiemos la continuidad en x=.$\pi/2$ y en x=$\pi/2$
$\lim\limits_{x\to -\pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi/2^-}$ (senx)=sen(-$\pi/2$) = -1 ; $\lim\limits_{x\to -\pi/2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi/2^+}$(msenx+n)=-m+n;
f($-\pi/2$) = $-1\Rightarrow$ para que f sea continua en x=.$\pi/2$ debe verificarse que -m+n=-1

(msenx+n)-= $m + n$; $\lim\limits_{x\to \pi/2+} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi/2^+}$(2cosx)=0$\Rightarrow m + n = 0$ para que sea continua en x=$\pi/2$
Para que f sea continua han de cumplirse las dos condiciones:
$$\begin{cases} -m + n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1/2 \\ n = -1/2 \end{cases}$$