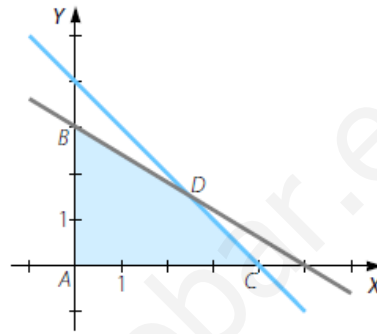


1.-

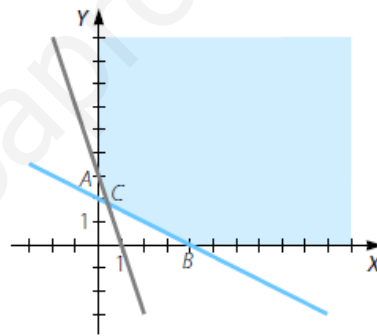
Halla las regiones del plano determinadas por los sistemas de inecuaciones, e indica en cada caso si son acotadas o no.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x + y \leq 4 \end{array} \right\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{b) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

- a) La región del plano que se obtiene está acotada y tiene como vértices $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 0)$ y $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, que es la intersección de las rectas $3x + 5y = 15$ y $x + y = 4$. Los segmentos de recta que unen los vértices también forman parte de la región.



- b) La región del plano que se obtiene no está acotada superiormente y tiene como vértices $A(0, 3)$; $B(4, 0)$ y $C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, que es el punto intersección de las rectas $3x + y = 3$; $x + 2y = 4$. Los segmentos de recta que delimitan la región también forman parte de ella.



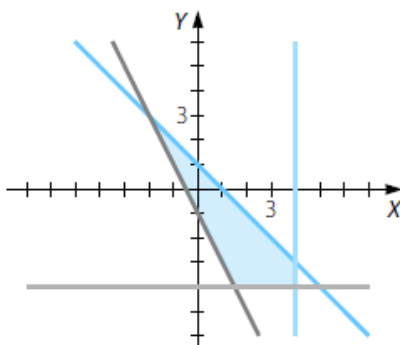
2.-

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1 \\ -2x - y \leq 1 \\ x \leq 4 \\ y \geq -4 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas asociadas: $x + y = 1$; $-2x - y = 1$; $x = 4$; $y = -4$.

El punto $(0, 0)$ satisface las cuatro inecuaciones, por lo que la solución está formada por la región del plano delimitada por las cuatro rectas y que contiene al punto $(0, 0)$.



3.-

Plantea este problema: «Tenemos como máximo 120 unidades de dos productos, A y B. Hay 65 unidades de A, con unas ganancias de 4 € por unidad, y 55 de B, con 6,50 € por unidad. Determinar las cantidades que se venden para maximizar los beneficios».

$x \rightarrow$ n.º de unidades del producto A $y \rightarrow$ n.º de unidades del producto B

	Producto A	Producto B	
Ganancias por unidad (€)	4	6,50	$\rightarrow f(x, y) = 4x + 6,50y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $f(x, y) = 4x + 6,50y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65 \\ 0 \leq y \leq 55 \\ x + y \leq 120 \end{array} \right\}$

4.-

Plantea: «Tenemos mesas de tipo A con 2 m² de madera, 1 hora de trabajo y un beneficio de 80 € cada una, y de tipo B con 1 m² de madera, 3 horas de trabajo y 50 € de beneficio. Si hay 600 m² de madera y un máximo de 900 horas, determina cómo obtener el máximo beneficio».

$x \rightarrow$ n.º de mesas de tipo A $y \rightarrow$ n.º de mesas de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Total	
Madera (m ²)	2	1	600	$\rightarrow 2x + y \leq 600$
Trabajo (horas)	1	3	900	$\rightarrow x + 3y \leq 900$
Beneficio (€)	80	50		$\rightarrow f(x, y) = 80x + 50y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $f(x, y) = 80x + 50y$

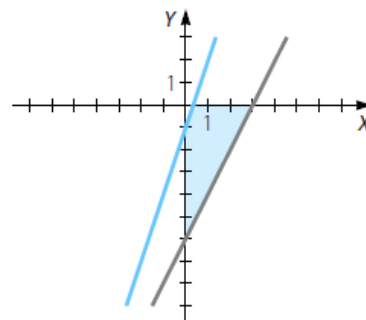
Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

5.-

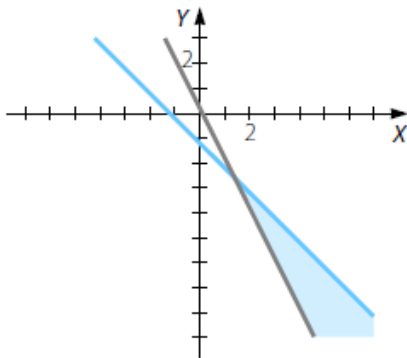
Dibuja la región factible que representan estas restricciones.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - y \geq 1 \\ 2x - y < 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 1 \\ -x - y > 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

a) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones: $3x - y = 1$; $2x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Imponiendo las condiciones del sistema de inecuaciones, se obtiene una región factible acotada de vértices $A(0, -1)$; $B(0, -6)$; $C(3, 0)$ y $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

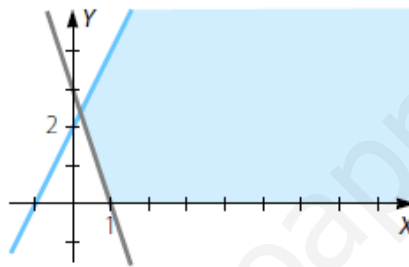


- b) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones: $2x + y = 1$; $-x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Se obtiene una región factible no acotada cuyo vértice es el punto de intersección de las rectas $2x + y = 1$ y $-x - y = 6 \rightarrow (7, -13)$.



6.-

Determina las restricciones que representan a la siguiente región factible:



Recta que pasa por $(1, 0)$ y $(0, 3) \rightarrow y = -3x + 3$

Inecuación que no contiene al punto $(0, 0) \rightarrow y \geq -3x + 3$

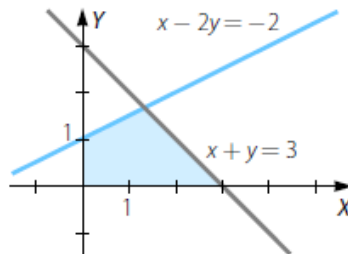
Recta que pasa por $(-1, 0)$ y $(0, 2) \rightarrow y = 2x + 2$

Inecuación que contiene al punto $(0, 0) \rightarrow y \leq 2x + 2$

Las restricciones que determinan esta región son:
$$\left. \begin{array}{l} y \geq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

7.-

Determina los vértices de la siguiente región:



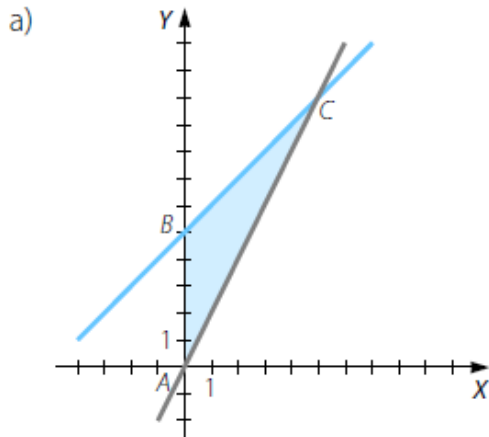
Vértices: $(0, 0)$; $(0, 1)$ y $(3, 0)$, y el punto solución del sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -2 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

8.-

Halla los vértices de las regiones factibles que representan estas restricciones.

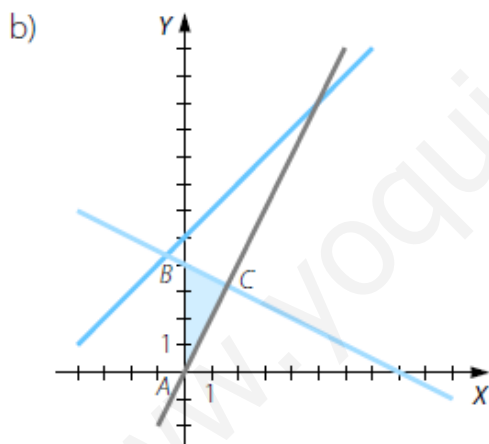
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$



Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 5)$ y C , que es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(5, 10)$$

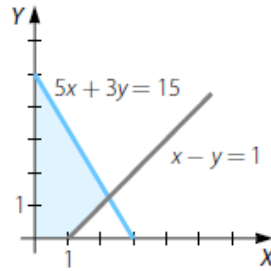


Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 4)$ y C , que es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

9.-

Determina la solución óptima que maximiza la función $f(x, y) = 2x - y$ en esta región factible:

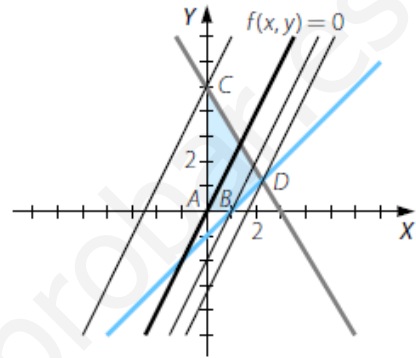


Como la región factible está acotada, el máximo se va a alcanzar en uno de los vértices. Trazando rectas paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza

en el vértice $D\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$, que es la solución

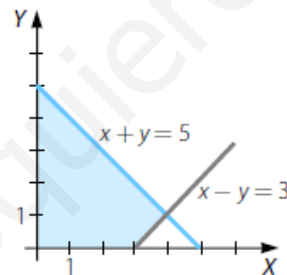
del sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

El valor del máximo es: $2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$



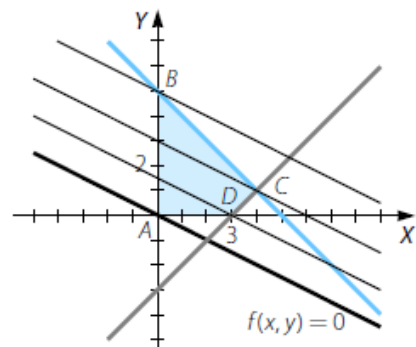
10.-

Halla la solución óptima que maximiza la función $f(x, y) = x + 2y$ en la siguiente región factible:



Como la región factible está acotada, el máximo se alcanzará en uno de sus vértices.

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, observamos que el máximo se alcanza en el vértice $B(0, 5)$ y vale: $0 + 2 \cdot 5 = 10$



11.-

Disponemos de 90.000 m² para construir parcelas de 3.000 y 5.000 m², A y B. Los beneficios son de 10.000 € por cada parcela A y de 20.000 € por B. El número máximo de parcelas B es de 120, y el de parcelas A, 150. Determina cuántas parcelas de cada tipo necesitamos para obtener beneficios máximos.

$x \rightarrow$ n.º de parcelas de tipo A $y \rightarrow$ n.º de parcelas de tipo B

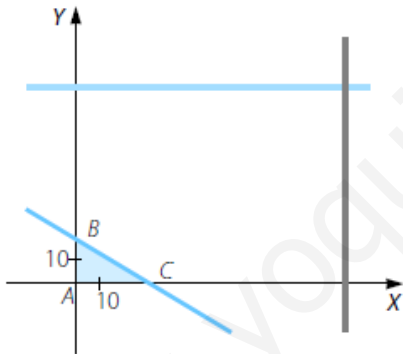
	Parcelas tipo A	Parcelas tipo B	
Tamaño (m ²)	3.000	5.000	$\rightarrow 3.000x + 5.000y \leq 90.000$
Total parcelas	150	120	$\rightarrow 0 \leq x \leq 150; 0 \leq y \leq 120$
Beneficio (€)	10.000	20.000	$\rightarrow f(x,y) = 10.000x + 20.000y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $f(x,y) = 10.000x + 20.000y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 3.000x + 5.000y \leq 90.000 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 120 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: A(0, 0); B(0, 18) y C(30, 0).



Como $f(A) = 0$; $f(B) = 360.000$ y $f(C) = 300.000$, el máximo se alcanza en el vértice B, lo que significa que para obtener el máximo beneficio: 360.000 €, es necesario construir 18 parcelas de tipo B y ninguna de tipo A.

12.-

Resuelve este problema de programación lineal:

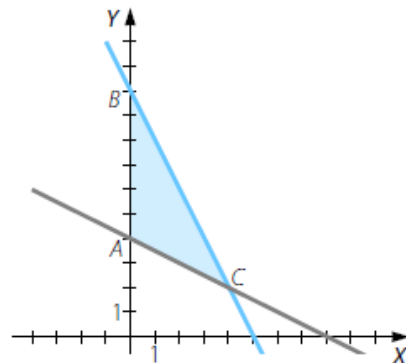
Maximizar $f(x,y) = x - 2y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 8 \\ -2x - y \geq -10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: A(0, 4); B(0, 10) y C(4, 2).

Como $f(A) = -8$; $f(B) = -20$ y $f(C) = 0$, el máximo se alcanza en el vértice C y su valor es 0.



13.-

Vamos a invertir en dos productos financieros A y B . La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B . El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

$x \rightarrow$ Cantidad de dinero invertida en el producto financiero A

$y \rightarrow$ Cantidad de dinero invertida en el producto financiero B

	Producto financiero A	Producto financiero B
Beneficio (€)	0,10	0,05

$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,05y$

\rightarrow Función objetivo

Maximizar $f(x, y) = 0,10x + 0,05y$

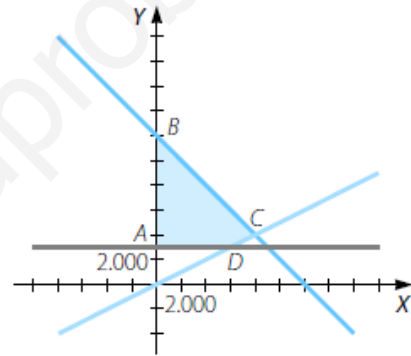
Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12.000 \\ 3.000 \leq y \\ 0 \leq x \leq 2y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 3.000)$; $B(0, 12.000)$; $C(8.000, 4.000)$ y $D(6.000, 3.000)$.

Como $f(A) = 150$; $f(B) = 600$; $f(C) = 1.000$ y $f(D) = 750$, el máximo se alcanza en C .

Es decir, debemos invertir 8.000 € en el producto A y 4.000 € en el producto B para alcanzar un beneficio máximo de 1.000 €.



14.-

Resuelve el problema de programación lineal:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

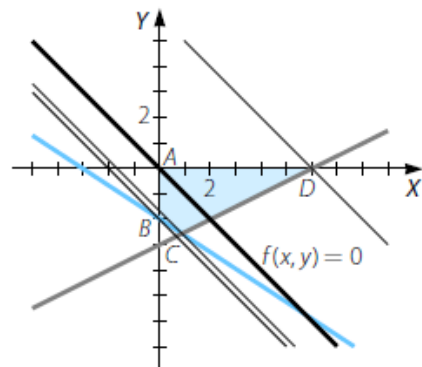
Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por $A(0, 0)$;

$B(0, -2)$; $C\left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{7}\right)$ y $D(6, 0)$.

El máximo se alcanza en D y vale 6.



15.-

Se fabrican dos tipos de aparatos A y B en los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabajan 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas del taller X y 1 hora de Y, y cada aparato B, 1 y 2 horas, respectivamente.

Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B a 150 €. Calcula, gráficamente, el número de aparatos de cada tipo que hay que producir para que la facturación sea máxima.

$x \rightarrow$ n.º de aparatos de tipo A $y \rightarrow$ n.º de aparatos de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Horas trabajadas	
Taller X (horas)	3	1	100	$\rightarrow 3x + y \leq 100$
Taller Y (horas)	1	2	100	$\rightarrow x + 2y \leq 100$
Precio por aparato (€)	100	150		$\rightarrow f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow$ Función objetivo

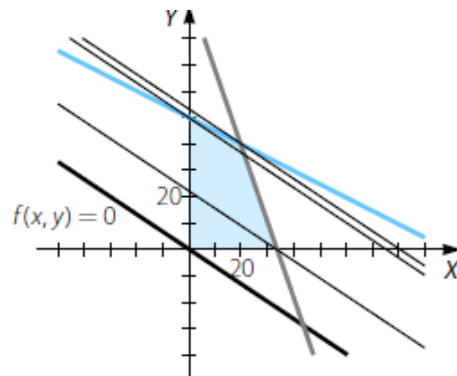
Maximizar $f(x, y) = 100x + 150y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 50)$; $C(20, 40)$ y $D\left(\frac{100}{3}, 0\right)$.

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, vemos que el máximo se alcanza en C. Así, es necesario producir 20 aparatos de tipo A y 40 aparatos de tipo B para alcanzar un beneficio máximo de 8.000 €.



16.-

Tenemos 120 refrescos de naranja y 180 de limón. Se venden en paquetes de dos tipos: los paquetes de tipo A contienen 3 refrescos de naranja y 3 de limón, y los de tipo B contienen 2 refrescos de naranja y 4 de limón. El beneficio es de 6 € por cada paquete de tipo A y 5 € por cada paquete de tipo B. Halla, gráficamente, cuántos paquetes de cada tipo hay que vender para maximizar los beneficios.

$x \rightarrow$ n.º de paquetes de tipo A $y \rightarrow$ n.º de paquetes de tipo B

	Paquetes tipo A	Paquetes tipo B	Total	
Naranja	3	2	120	$\rightarrow 3x + 2y \leq 120$
Limón	3	4	180	$\rightarrow 3x + 4y \leq 180$
Beneficio (€)	6	5		$\rightarrow f(x,y) = 6x + 5y \rightarrow$ Función objetivo

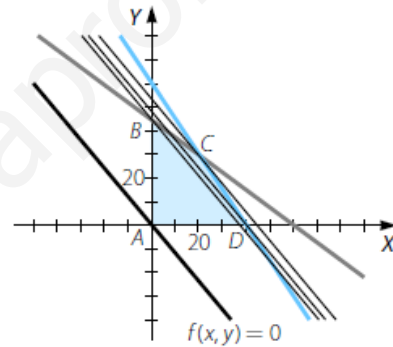
Maximizar $f(x,y) = 6x + 5y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 45)$; $C(20, 30)$ y $D(40, 0)$.

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza en C. Así, es necesario vender 20 paquetes de tipo A y 30 paquetes de tipo B para que el beneficio máximo sea de 270 €.



17.-

Resuelve este problema de programación lineal:

Maximizar $f(x,y) = 2x + 4y$

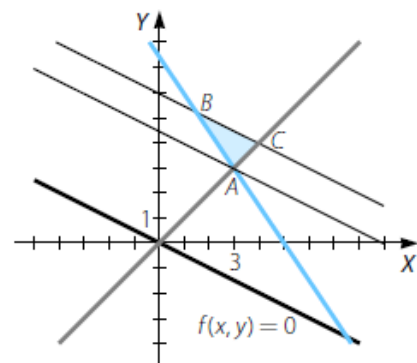
Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 12 \\ x - y \leq 0 \\ 6x + 4y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por $A(3, 3)$;

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$ y $C(4, 4)$.

El máximo se alcanza en B y C y, por tanto, se alcanza en todos los puntos del segmento BC.



18.-

Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$ n.º de unidades del producto de tipo A

$y \rightarrow$ n.º de unidades del producto de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Total	
Obreros	2	3	60	$\rightarrow 2x + 3y \leq 60$
Tiempo (horas)	20	10	480	$\rightarrow 20x + 10y \leq 480$
Beneficio por unidad (€)	1.500	1.000		$\rightarrow f(x, y) = 1.500x + 1.000y \rightarrow$ Función objetivo

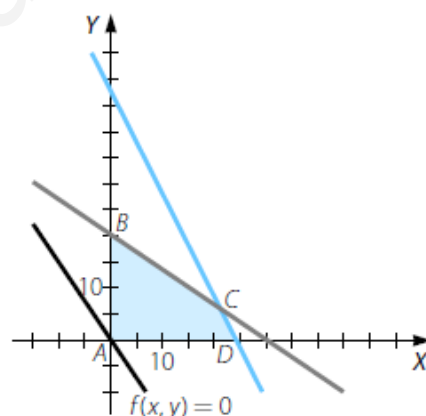
Maximizar $f(x, y) = 1.500x + 1.000y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ 20x + 10y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(0, 20)$; $C(21, 6)$ y $D(24, 0)$.

Como $f(A) = 0$; $f(B) = 20.000$; $f(C) = 37.500$ y $f(D) = 36.000$, el máximo se alcanza en el vértice C. Así, hay que fabricar 21 unidades de tipo A y 6 unidades de tipo B para que el beneficio sea máximo y valga 37.500 €.



19.-

Una fábrica de conserva tiene 800 kg de guisantes para conservar en dos tipos de latas. La lata pequeña contiene 200 g y aporta un beneficio de 10 céntimos por lata. La lata grande contiene 500 g y un beneficio de 30 céntimos. Si en el almacén solo disponemos de 2.000 latas de tamaño pequeño y 1.000 grandes, determina la cantidad de latas de cada tamaño que tenemos que producir para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$ n.º de latas pequeñas $y \rightarrow$ n.º de latas grandes

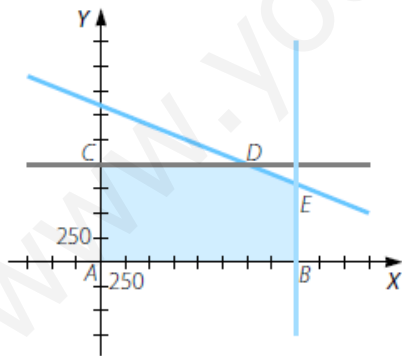
	Lata pequeña	Lata grande	Total	
Cantidad de guisantes (kg)	0,2	0,5	800	$\rightarrow 0,2x + 0,5y \leq 800$
Total latas	2.000	1.000		$\rightarrow x \leq 2.000; y \leq 1.000$
Beneficio por unidad (€)	0,10	0,30		$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,30y \rightarrow$ Función objetivo

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 0,10x + 0,30y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} 0,2x + 0,5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2.000 \\ 0 \leq y \leq 1.000 \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible está acotada.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(2.000, 0)$; $C(0, 1.000)$; $D(1.500, 1.000)$ y $E(2.000, 800)$.

Como $f(A) = 0$; $f(B) = 200$; $f(C) = 300$; $f(D) = 450$ y $f(E) = 440$, el valor máximo se alcanza en el punto D . Por tanto, debemos fabricar 1.500 latas pequeñas y 1.000 latas grandes para maximizar el beneficio y que este sea de 450 €.



20.-

Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

$x \rightarrow$ n.º de dosis del compuesto X

$y \rightarrow$ n.º de dosis del compuesto Y

	Compuesto X	Compuesto Y	Cantidad	
Vitamina A (mg)	10	10	60	$\rightarrow 10x + 10y \geq 60$
Vitamina B (mg)	15	10	90	$\rightarrow 15x + 10y \geq 90$
Coste (€)	0,50	0,30		$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,30y$ \rightarrow Función objetivo

Minimizar $f(x, y) = 0,50x + 0,30y$

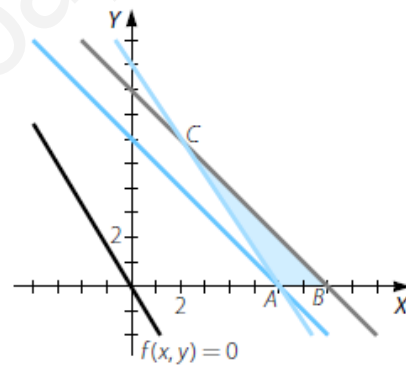
Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 10x + 10y \geq 60 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: A(6, 0); B(8, 0) y C(2, 6).

Sustituyendo en la función objetivo obtenemos que $f(A) = 3$; $f(B) = 4$ y $f(C) = 2,8$, por lo que el mínimo se alcanza en el punto C.

Así, los animales tienen que tomar 2 dosis del compuesto X y 6 dosis del compuesto Y para que el coste sea mínimo, siendo este de 2,80 €.



21.-

Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En estos momentos están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y su transporte cuesta 0,90 €. El lote de tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y necesitan elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada clase han de elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

$x \rightarrow$ n.º de lotes de tipo A $y \rightarrow$ n.º de lotes de tipo B

	Lote tipo A	Lote tipo B	Total	
Queso	1	3	200	$\rightarrow x + 3y \leq 200$
Botellas de vino	2	1	100	$\rightarrow 2x + y \leq 100$
Coste del transporte (€)	0,90	1,50		$\rightarrow f(x,y) = 0,90x + 1,50y \rightarrow$ Función objetivo

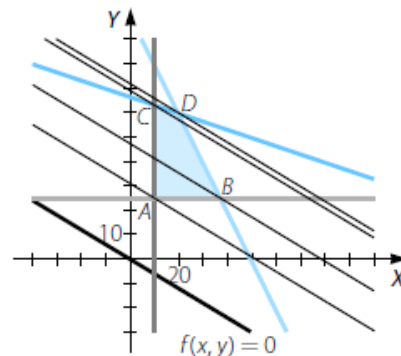
Minimizar $f(x,y) = 0,90x + 1,50y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ 10 \leq x \\ 25 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

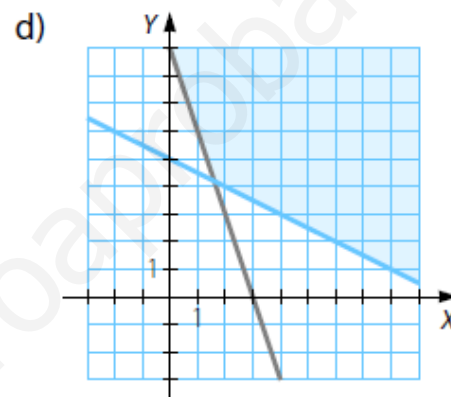
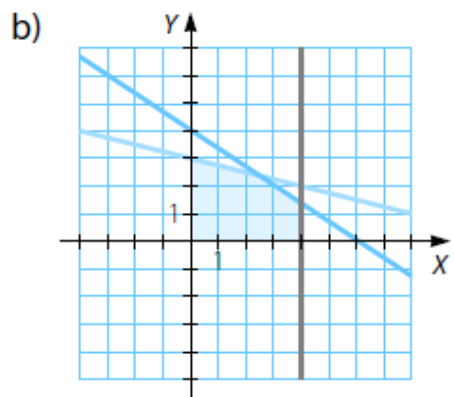
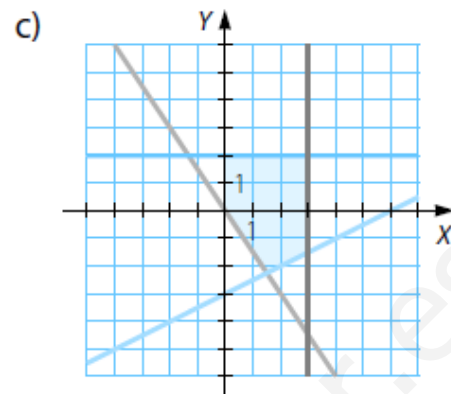
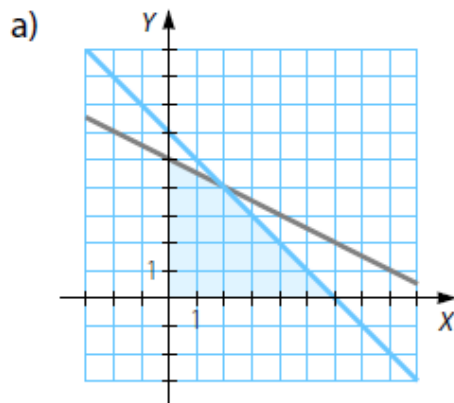
Vértices: $A(10, 25)$; $B\left(\frac{75}{2}, 25\right)$; $C\left(10, \frac{190}{3}\right)$ y $D(20, 60)$.

Como $f(A) = 46,5$; $f(B) = 71,25$; $f(C) = 104$ y $f(D) = 108$, el mínimo se alcanza en A y su valor es 46,5. Es decir, para que los gastos del transporte sean mínimos se han de elaborar 10 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B, ascendiendo los gastos a 46,50 €.



22.-

Determina un sistema de inecuaciones para cada solución representada en estas gráficas.



a) Las ecuaciones de ambas rectas son $x + y = 6$ y $x + 2y = 10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Las ecuaciones de las tres rectas son $x = 4$; $x + 4y = 12$ y $3y + 2x = 12$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

- c) Las ecuaciones de las cuatro rectas son $x = 3$; $y = 2$; $x - 2y = 6$ y $2y + 3x = 0$.
El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 2 \geq y \\ x - 2y \leq 6 \\ 2y + 3x \geq 0 \end{array} \right\}$$

- d) Las ecuaciones de las dos rectas son $3x + y = 9$ y $x + 2y = 10$.
El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 10 \end{array} \right\}$$

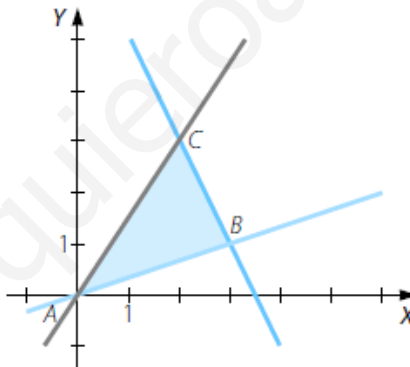
23.-

Determina un sistema de inecuaciones que tenga como conjunto de soluciones el interior y los lados del triángulo del plano de vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(3, 1)$.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

- Recta que pasa por $(0, 0)$ y $(2, 3) \rightarrow 3x - 2y = 0$
- Recta que pasa por $(0, 0)$ y $(3, 1) \rightarrow x - 3y = 0$
- Recta que pasa por $(3, 1)$ y $(2, 3) \rightarrow 2x + y = 7$

La región factible dada por el triángulo es:



El sistema de inecuaciones que da lugar a la región factible es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 7 \\ x - 3y \leq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{array} \right\}$$

24.-

a) Representa gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6 \quad -x + y \leq 3 \quad 4x + y \leq 10 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

y determina sus vértices.

b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indica dónde se alcanza.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 1)

a) Región factible acotada con estos vértices:

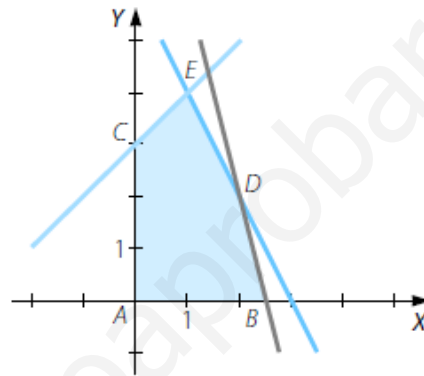
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 10 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow B\left(\frac{10}{4}, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ -x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{array} \right\} \rightarrow D(2, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{array} \right\} \rightarrow E(1, 4)$$



b) Como la región factible está acotada, el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ se alcanza en uno de sus vértices. Y como $f(A) = -3$; $f(B) = 7$; $f(C) = 3$; $f(D) = 9$ y $f(E) = 9$, el máximo se alcanza en los vértices D y E y, por tanto, en todos los puntos del segmento DE , y vale 9.

25.-

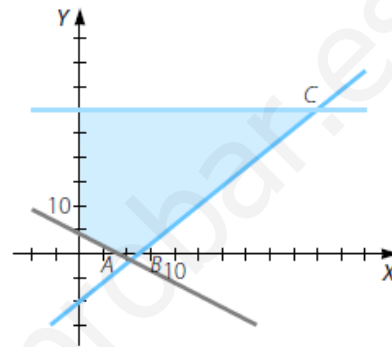
De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 12 \quad y \leq 30 \quad x \leq \frac{10 + y}{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

- Representa gráficamente la región factible del problema y calcula sus vértices.
- Maximiza en esa región factible la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.
- ¿Pertenece el punto $(11, 10)$ a la región factible?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} 4x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x = 10 + y \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(5, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x = 10 + y \\ y = 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow C(20, 30) \\ & \left. \begin{aligned} y = 30 \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(0, 30) \\ & \left. \begin{aligned} 4x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E(0, 4) \end{aligned}$$



- El máximo de la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$ se alcanza en uno de los vértices. Como $F(A) = 3$; $F(B) = 5$; $F(C) = 110$; $F(D) = 90$ y $F(E) = 12$, el máximo se alcanza en C y tiene un valor de 110.
- El punto $(11, 10)$ no pertenece a la región factible.

26.-

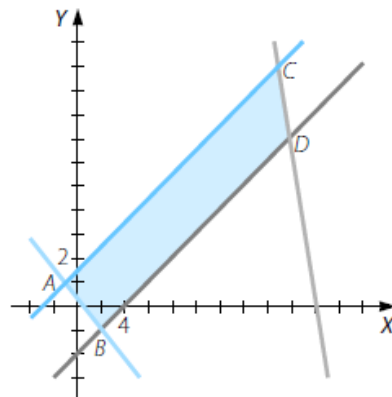
a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 60 \quad x - 2y \geq -3 \quad y \geq \frac{x}{2} - 2 \quad 2x + 3y \geq 1$$

b) Calcula los puntos de la región donde la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determina estos.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio A. Problema 2)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(-1, 1) \\ & \left. \begin{aligned} 2y = x - 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(2, -1) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow C\left(\frac{117}{7}, \frac{69}{7}\right) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow D\left(\frac{124}{7}, \frac{48}{7}\right) \end{aligned}$$



- b) Como la región está acotada, el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ se alcanzan en los vértices.

Y como $f(A) = -5$; $f(B) = 8$; $f(C) = \frac{213}{7}$ y $f(D) = \frac{276}{7}$, el máximo se alcanza en D y su valor es $\frac{276}{7}$, y el mínimo se alcanza en A y su valor es -5 .

27.-

Considera el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{array} \right\}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en dicha región.

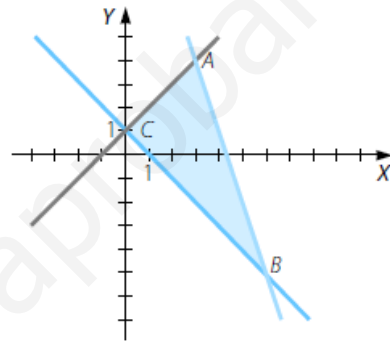
(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 3)

- a) La región factible está acotada y tiene como vértices los puntos:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(3, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 13 \end{array} \right\} \rightarrow B(6, -5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 1)$$



- b) Sustituimos los vértices en la función objetivo: $f(A) = -9$; $f(B) = 21$ y $f(C) = -3$. El máximo se alcanza en el vértice $B(6, -5)$ y su valor es 21.

28.-

Se desea minimizar la función lineal $3x + 4y + 2(10 - x) + 3(18 - y)$ con las restricciones:

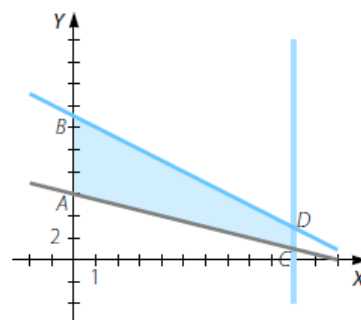
$$\begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 10 - x \geq 0 \quad 18 - y \geq 0 \\ x + y \leq 13 \quad (10 - x) + (18 - 2y) \leq 16 \end{array}$$

Se pide:

- a) Representación gráfica del conjunto factible.
b) Hallar las coordenadas de todos sus vértices.
c) Hallar todas las soluciones óptimas.

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 1. Opción A)

- a) $(10 - x) + (18 - 2y) = 16 \rightarrow x + 2y = 12$
b) Los vértices son $A(0, 6)$; $B(0, 13)$; $C(10, 1)$ y $D(10, 3)$.
c) Como la región factible está acotada, la función objetivo alcanza sus soluciones óptimas en los vértices. Y como $f(A) = 80$; $f(B) = 87$; $f(C) = 85$ y $f(D) = 87$, el mínimo se alcanza en A , y su valor es 80, y el máximo se alcanza en B y D , y por tanto, en todos los puntos del segmento BD , y su valor es 87.



29.-

En un concurso el premio consiste en un cheque de 240 € para gastar en libros y juegos. Los libros cuestan 8 € y los juegos 24 €. La organización establece la condición de que el número de libros que el ganador compre no puede superar al doble del número de juegos.



- Plantea un sistema de inecuaciones con las restricciones y representa la región factible.
- Determina razonadamente si el ganador podría comprar 12 libros y 6 juegos.
- ¿Podría adquirir 7 libros y 7 juegos? En el caso de que le sobre dinero, ¿cuánto es?

a) $x \rightarrow$ n.º de libros $y \rightarrow$ n.º de juegos

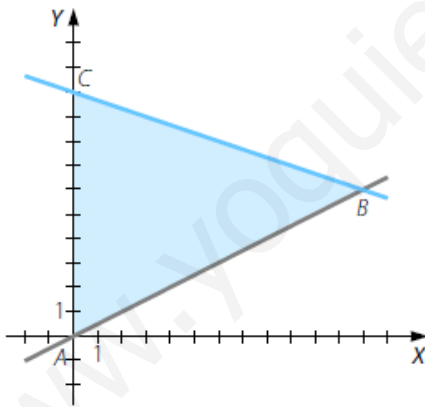
	Libros	Juegos	Total
Coste (€)	8	24	240

$\rightarrow 8x + 24y \leq 240$

El sistema de inecuaciones que hay que resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La región factible está acotada y sus vértices son $A(0, 0)$; $B(12, 6)$ y $C(0, 10)$.



- Los vértices pertenecen a la región factible, porque en las inecuaciones se da la igualdad. El punto B representa 12 libros y 6 juegos, por lo que el ganador sí los podrá comprar.
- Sí podrá comprar 7 libros y 7 juegos, porque el punto $(7, 7)$ pertenece a la región factible. El coste será de 224 € y le sobrarán 16 €.

30.-

Disponemos de 105.000 € para invertir en dos tipos de acciones: A y B. Las de tipo A tienen un interés anual del 8% y las de tipo B del 7%. Si invierto como máximo 65.000 € en las de tipo A, como mínimo 3.000 € en las de tipo B y quiero que la inversión en las de tipo A sea, al menos, igual a la inversión en las de tipo B, ¿cuál es la distribución con la que mayor beneficio obtengo?

$x \rightarrow$ Dinero invertido en A $y \rightarrow$ Dinero invertido en B

	Tipo A	Tipo B
Interés anual (%)	0,08	0,07

$\rightarrow f(x, y) = 0,08x + 0,07y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar $f(x, y) = 0,08x + 0,07y$

Sujeto a $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65.000 \\ y \geq 3.000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 105.000 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada con vértices en A(3.000, 3.000); B(65.000, 3.000); C(65.000, 40.000) y D(52.500, 52.500).

Como $f(A) = 450$; $f(B) = 5.410$; $f(C) = 8.000$ y $f(D) = 7.875$, el máximo se alcanza en C.

Debemos invertir 65.000 € en las acciones de tipo A y 3.000 € en las acciones de tipo B. Obtendremos 8.000 €.

