

## MATRICES

### Ejercicio 1.-

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , calcula  $BB^t - AA^t$ .

### Ejercicio 2.-

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , halla  $x$  e  $y$  para que se verifique  $ABC = A^tC$ .

### Ejercicio 3.-

Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ¿se pueden encontrar matrices  $C$  y  $D$  para que existan los productos  $ACB$  y  $BDA$ ?

### Ejercicio 4.-

Halla  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  y  $A^5$ , siendo  $A$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Se percibe algún patrón que permita adivinar cuánto vale  $A^{50}$  y en general  $A^n$ ?

### Ejercicio 5.-

Encuentra todas las matrices  $X$  cuadradas de orden 2 que satisfacen la ecuación  $AX = XA$  con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

### Ejercicio 6.-

Determina dos matrices  $X$  e  $Y$  tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 7.-

Calcula el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$$

Según los valores del parámetro real  $m$ .

**Ejercicio 8.-**

Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de m no existe la matriz inversa de A?

**Ejercicio 9.-**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla una matriz B tal que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 10.-**

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , halla la matriz X que verifica que  $AXB = 2C$ .

**Ejercicio 11.-**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla una matriz B tal que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 12.-**

Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

a)  $A^t C \cdot C$   
b)  $CD^t$

c)  $(B+E)^t$   
d)  $DD^t$

e)  $A^t C$   
f)  $(3E)^t$

**Ejercicio 13.-**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- Calcula  $A^2 + 2AB + B^2$
- Calcula  $(A + B)^2$

#### **Ejercicio 14.-**

Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determina la dimensión de la matriz M para que pueda hacerse el producto AMC.
- Determina la dimensión de N para que  $C^t N$  sea una matriz cuadrada.

#### **Ejercicio 15.-**

Sea la matriz  $1 \times 3$   $A = (1 \quad 2 \quad a)$ . Calcula el valor de a sabiendo que  $AA^t = 5$ .

#### **Ejercicio 16.-**

Determina los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

#### **Ejercicio 17.-**

Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

#### **Ejercicio 18.-**

Sabiendo que el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$  es 2, determina el valor de a.

#### **Ejercicio 19.-**

Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{j) } J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### **Ejercicio 20.-**

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula  $C + AB$ ,  $C^{-1} + (AB)^{-1}$  y  $(C+AB)^{-1}$

### **Ejercicio 21.-**

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , calcula  $AA^t - 5A^{-1}$ , siendo  $A^t$  y  $A^{-1}$ , las matrices traspuesta e inversa de  $A$ , respectivamente.

### **Ejercicio 22.-**

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , calcula el valor de  $a$  sabiendo que no tiene inversa.

### **Ejercicio 23.-**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , halla los valores de  $k$  para los que la matriz  $BA$  tiene inversa.

**Ejercicio 24.-**

Encuentra una matriz  $X$  que verifique  $X - B^2 = A \cdot B$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 25.-**

Determina la matriz  $X$  que verifica  $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 26.-**

Prueba que la matriz  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  no tiene inversa.

**Ejercicio 27.-**

Si  $A$  es una matriz de orden  $n$  tal que  $A^2 = A$  y  $B = 2A - I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ , calcula  $B^2$ .

**Ejercicio 28.-**

Calcula las matrices  $A$  y  $B$  que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 29.-**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .

**Ejercicio 30.-**

Comprueba que la matriz inversa de  $A$  es  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 31.-**

Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 32.-**

Calcula X tal que  $X - B^2 = A \cdot B$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 33.-**

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^2, A^3, \dots, A^{128}$ .

**Ejercicio 34.-**

Comprueba que  $A^2 = 2A - I$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  e I la matriz identidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular  $A^4$ .

**Ejercicio 35.-**

a) Comprueba que la inversa de A es  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica que  $XA = B$ , siendo A la matriz anterior y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 36.-**

Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 37.-**

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 38.-**

Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 39.-**

Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz  $(A - kI)^2$  sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 40.-**

Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ .

	T	O
$M_1$	300	200
$M_2$	400	250
$M_3$	250	180
$M_4$	500	300

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo. El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2 % en el modelo  $M_1$ , el 5 % en el  $M_2$ , el 8 % en el  $M_3$  y el 10 % en el  $M_4$ .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas que se producen.

### Ejercicio 41.-

Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula, si es posible:

- Una matriz  $X$  tal que  $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- Una matriz  $Y$  tal que  $Y \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Ejercicio 42.-

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla el valor de  $x$  e  $y$  para que se cumpla la igualdad  $A^2 - xA - yI = 0$ .

### Ejercicio 43.-

Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

- Calcula  $A + A^2$
- Resuelve el sistema  $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Ejercicio 44.-

Sean  $A$  y  $B$  las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique que  $A \cdot B = B \cdot A$ .

### **Ejercicio 45.-**

Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

- ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?
- Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante sea 2?

### **Ejercicio 46.-**

¿Es posible añadir una fila a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que la nueva matriz tenga rango 4?. Razona tu respuesta.

### **Ejercicio 47.-**

Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### **Ejercicio 48.-**

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

### **Ejercicio 49.-**

Estudia el rango de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 50.-**

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 51.-**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Halla  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$ .
- Halla la matriz inversa de  $A \cdot B$ .

**Ejercicio 52.-**

Sea  $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Halla los valores de  $x$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.
- Calcula, si es posible,  $A^{-1}$  para  $x = 2$ .

**Ejercicio 53.-**

Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución. En caso afirmativo, determina la matriz solución:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIONES - MATRICES**

$$1. BB^t = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} \quad AA^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad BB^t - AA^t = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$2. ABC = \begin{pmatrix} -X+2 \\ -X+2y \end{pmatrix} \quad A^tC = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Igualando se obtiene el sistema:}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x+2=0 \\ -x+2y=2 \end{array} \right\} \text{cuya solución es } x=2 \text{ e } y=2.$$

3. C cuadrada de orden 2 y D cuadrada de orden 3.

$$4. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ en general } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y en particular } A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Las matrices han de ser diagonales.

$$6. X = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Si  $m \neq -15$ , el rango es 3.  
Si  $m = -15$ , el rango es 2.

8. Para  $m = 1$  no existe la inversa.

$$9. A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10. A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11. Coincide con el ejercicio 9.

12.

$$a) A^tC = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } A^tCC = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 22 \\ -44 & -50 & -32 \\ -14 & -14 & -14 \end{pmatrix}$$

b) No se puede realizar.

$$\text{c) } (B+E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } DD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Hecho en el apartado a).

$$\text{f) } (3E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$13. \left| \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \\ (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

14.

a) M matriz cuadrada de orden 3.

b) C orden  $3 \times 2$ ,  $C^t$  es de orden  $2 \times 3$ . N ha de ser de orden  $3 \times 2$  y, por tanto,  $C^t N$  será cuadrada de orden 2.

15.  $a=0$ .

16. Multiplicando las matrices se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} x-y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array} \end{array} \right\} \text{cuya solución es } x = \frac{-5}{4} \quad y = \frac{23}{4}$$

17. Rango A = 2, rango B = 3, rango C = 2, rango D = 3, rango E = 3.

18. Para que el rango sea 2 ha de ser  $a = 5$ .

19.

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & 11 \\ -5 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{j) } J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

20.  $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$   $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$   $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , por lo que se tiene que  $C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $(C + AB)^{-1} = I$ .

21. Con cálculos previos, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

22. Para  $a = 2$  no tiene inversa.

23. Para cualquier valor de  $k$  tiene inversa.

$$\text{24. } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y por tanto, } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\text{25. } X = A^{-1}BA^{-1}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y por tanto } X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

26. Tan sólo hay que probarlo.

27.  $B^2$  es la identidad de orden  $n$ .

$$28. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Es comprobarlo.

30. Hay que hacer los productos  $A \cdot A^{-1}$  y  $A^{-1} \cdot A$  y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

31. Rango  $A = 3$ ; Rango  $B = 2$ ; Rango  $C = 2$ ; Rango  $D = 4$ .

$$32. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = B^2 + AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$33. A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$A^{128} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

34. Análogo al ejercicio 27.

35.

a) Hay que hacer los productos  $A \cdot A^{-1}$  y  $A^{-1} \cdot A$  y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

$$b) X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$36. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

37.

- Rango  $M = 3$  para cualquier valor de  $k$ .
- Si  $k = -1/2$  el rango de  $N$  es 2. Para  $k \neq -1/2$  el rango es 3.
- Si  $k = -2$ , el rango de  $P$  es 1. Si  $k \neq -2$ , el rango es 2.
- Si  $k = 2$ , el rango de  $Q$  es 2. Si  $k \neq 2$ , el rango es 3.

38. Si  $k = 2$ , el rango es 2.

39. No es posible encontrar dicho valor de  $k$ .

$$41. X = \begin{pmatrix} -1/11 & 9/11 & 1/11 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 3/11 & -5/11 & -3/11 \\ 6/11 & 12/11 & 5/11 \end{pmatrix}$$

$$42. x = 3 ; y = -8.$$

$$43. a) A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b) x = 20; y = -5; z = -9$$

44. Ha de verificarse  $a = b = c$

45. Si quitamos una columna el rango será 2.

46. No, ya que tiene rango 2.

47. Matriz M

- $a \neq -2, 1$  rango de M es 3
- Si  $a = -2$ , el rango de M es 2
- Si  $a = 1$ , el rango de M es 2.

Matriz A

- $a \neq 0$  rango de A es 3
- Si  $a = 0$ , el rango de A es 2

48. Las inversas son:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ -3/4 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

49. a) Rango 3. b) Rango 2

50. Matriz A

- $a \neq 2$  rango de A es 3
- Si  $a = 2$ , el rango de A es 2.

Matriz B

- $a \neq -8, 1$  rango de B es 3
- Si  $a = -8$ , el rango de B es 2

- Si  $a = 1$ , el rango de B es 2.

$$51. A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -9 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

52. Tiene inversa para cualquier valor de  $x$  distinto de 0.

$$\text{Para } x = 2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

53.

a) No tiene solución, ya que no existe la inversa de la matriz  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) La solución es  $\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$