Montevideo Martes 27 de Noviembre de 2012

2° Parcial Práctico de Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1)

a) **Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si esta experiencia se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener:**

1) Tres bolas rojas. 2) Menos de tres rojas. 3) Más de tres rojas. 4) Alguna roja.

Si consideramos éxito = "sacar roja", *x* es *B* (5; 0,3).

1) $P\,[x = 3] = C_3^5 * 0.3^3 * 0.7^2 = 0.1323$

2) $P\,[x < 3] = P\,[x = 0] + P\,[x = 1] + P\,[x = 2] = 0.16807 + 0.36015 + 0.3087 =$ 0.,83692

3) $P\,[x > 3] = 1 - P\,[x<=3] = 1 - (0.1323 + 0.8369) = 0.0308$

4) $P\,[x \neq 0] = 1 - P\,[x = 0] = 1 - 0.7^5 = 0.8319$

b) **El kilometraje, en miles de kilómetros que los automovilistas logran para cierto tipo de neumáticos es una Variable Aleatoria con función de Densidad:**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{x}{20}} \quad \forall \; x > 0 \\ \\ 0 \text{ para todo otro caso} \end{cases}$$

1) Calcula el valor de k para que f (x) sea función de densidad.
2) Calcula la probabilidad de que el neumático dure a lo sumo 10.000 km.
3) Calcula la probabilidad de que el neumático dure entre 16.000 y 24.000 km.
4) Calcula la probabilidad de que el neumático supere el kilometraje medio o esperado.

1) $\frac{1}{k} . \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{0}} dx = \frac{1}{k} . \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{20}} dx = -\frac{20}{k} . \left[e - \frac{x}{20} \right]_0^{+\infty} = \frac{20}{x} = 1 \Rightarrow k = 20$

2) P(X>10) = $\frac{1}{20}.\int_0^{10} e^{-\frac{x}{20}}dx = -\left[e^{-\frac{x}{20}}\right]_0^{10} = -(0.606-1) = 0.394$

3) P(16< X < 24) = $\frac{1}{20}.\int_{16}^{24} e^{-\frac{x}{20}}dx =$ -(0.301 – 0.449)= 0.148

4) P(X> η), siendo η = $\frac{1}{20}.\int_0^{+\infty} x.e^{-\frac{x}{20}}dx = \left[-x.e^{-\frac{x}{20}} - 20e^{-\frac{x}{20}}\right]_0^{+\infty} = 20$, por lo tanto debemos calcular: P(X>η) = $\frac{1}{20}.\int_{20}^{+\infty} e^{-\frac{x}{20}}dx = 0.367$

Una Primitiva de x.$e^{-\frac{x}{20}} = -20x e^{-\frac{x}{20}} - 20^2.e^{-\frac{x}{20}}$, utilizar esto para el cálculo de η, se pide verificación.

c) Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

1) Más de 61 kg. 2) Entre 63 y 69 kg. 3) Menos de 70 kg. 4) Más de 75 kg.

X sigue una N(65,8)

1) *P* [*x* > 61] = *P* [*z* > $\frac{65-61}{8}$] = *P* [*z* > –0,5] = *P* [*z* < 0,5] = 0,6915

2) *P* [63 < *x* < 69] = *P* [–0,25 < *z* < 0,5] = P[z < 0.5] – P[z < -0.25] = P[z < 0.5] – P[z > 0.25]
= P[z < 0.5] – (1 – P[z < 0.25]) = 0,2902

3) *P* [*x* < 70] = *P* [*z* < 0,625] = 0,7357

4) *P* [*x* > 75] = *P* [*z* > 1,25] = 1 – *P* [*z* < 1,25] = 0,1056

<u>Ejercicio 2)</u>

a) La ley de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$\textbf{p(x)} = \begin{cases} k \Leftrightarrow x = 0 \\ 2k \Leftrightarrow x = 1 \\ 3k \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

1) Determina k así como P (X ≤ 2), P (0 < X < 2).
2) Encuentra el menor valor x_0 tal que P (X ≤ x_0) > 0,5.
3) Calcula la media y la varianza.
4) Determina la función de distribución de X y represéntala.

1) Como $\sum_{1}^{3} p(i)$ = 1 entonces 6k = 1 entonces k = 1/6; P(X<=2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 y P(0 <X < 2)= P(X=1) = 1/3

2) P(X <= 1) < = 0.5 por lo tanto el menor valor de X para el cual se tiene probabilidad mayor que 0.5 es X_0 = 2

3) E(X) = 0.1/6 + 1.1/3 + 2.1/5 = 4/3 entonces E(X^2) = 7/3 por lo tanto $\sigma = \frac{5}{9} = 0.55$

4) F(X) = 0 $\Leftrightarrow$ x < 0; 1/6 $\Leftrightarrow$ 0 ≤ x < 1; ½ $\Leftrightarrow$ 1≤x < 2 y 1 $\Leftrightarrow$ x ≥2

b) Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho:

1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas? 2. ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

1. Sea la variable aleatoria *X*, con distribución de Poisson de parámetro λ = E(X) = 8, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento. Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable *Y* que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\eta = E[Y] = 8/4 = 2$.

   Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente: $P(Y = 1) = \frac{e^{-2}.2^1}{1!} = 0.27067$

2. Análogamente, definimos una variable aleatoria U con distribución de Poisson de parámetro V= 8/2 = 4, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento.

Se tiene entonces que: $P(U<=2) = \sum_{0}^{2} \frac{e^{-4}.4^{i}}{i!}$ = 0.2381

c) **Entre 12 hombres que soliciten un trabajo en el servicio postal, las esposas de 9 trabajan. Si se seleccionan aleatoriamente a 2 de los solicitantes para una consideración adicional, cuales son las probabilidades de que:**

1) La esposa de ninguno trabaje; 2) Solo la esposa de uno trabaje; 3) Las esposas de ambos trabajen.

Se considera una VAD X, que sigue una distribución Hipergeométrica de parámetros N = 12, N_1 = 9, N_2 = 3, n = 2 y r con valores 0, 1 y 2 respectivamente, por lo tanto será:

1) P(X=0) = $\frac{C_2^3 \cdot C_0^9}{C_2^{12}}$ = 0.045; 2) P(X=1) = $\frac{C_1^9 \cdot C_1^3}{C_2^{12}}$ = 0.401; 3) P(X=2) = $\frac{C_2^9 \cdot C_0^3}{C_2^{12}}$ = 0.545

Prof. Enrique Espínola