Resolución mediante el método de Gauss

1) Resolver los siguientes sistemas, aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} \mathbf{x+2y+2z=2} \\ \mathbf{x+2y+z=3} \\ \mathbf{-x+3y=1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x+2y+5z=-1} \\ \mathbf{3x+y=-2} \\ \mathbf{-x+3y=4} \end{cases}$

SOLUCIÓN:

1) Consideramos la matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, A^*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3+F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'\leftrightarrow F2']{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

nº de ecuaciones = nº de incógnitas $\rightarrow$ SCD

Sistema escalonado: $\begin{cases} x+2y+2z=2 \rightarrow x=2-2+2=2 \\ 5y+2z=3 \rightarrow 5y=3+2 \rightarrow y=1 \\ -z=1 \rightarrow z=-1 \end{cases}$

2) Consideramos la matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, A^*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{C3\leftrightarrow C1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right)_{\;x\;\;y\;\;z} \xrightarrow{F3'=F2+3F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right)_{\;z\;\;x\;\;y}$$

nº de ecuaciones = nº de incógnitas $\rightarrow$ SCD

Sistema escalonado: $\begin{cases} 5z+x+2y=-1 \rightarrow 5z=-1+1-2 \rightarrow z=-\dfrac{2}{5} \\ 3x+y=-2 \rightarrow 3x=-2-1 \rightarrow x=-1 \\ 10y=10 \rightarrow y=1 \end{cases}$

NOTA: Es preciso tener en cuenta que si se intercambian columnas en la matriz de los coeficientes ha de hacerse de igual forma el cambio correspondiente de incógnitas, teniendo especial cuidado con la columna de los términos independientes que conviene no moverla.

2) Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible:

a) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-4y+6z=2 \\ y+2z=-3 \\ x-3y+z=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=4 \\ -4x+3y+z=2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-3F1]{F2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Rang(A) = rang(A*) = 3 = nº de incógnitas → SCD

Sistema escalonado: $\begin{cases} x+y+z=11 \\ -y-2z=-9 \\ 5z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=11-y-z \rightarrow x=4 \\ y=9-2z \rightarrow y=5 \\ z=2 \end{cases}$ → Solución: x = 4,y = 5,z = 2

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F1=\frac{1}{2}F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Rang(A) = rang(A*) = 2 < nº incógnitas → SCI

$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ y+2z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1+2y-3z \rightarrow x=-7\lambda-5 \\ y=-3-2z \rightarrow y=-3-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ → Solución: x = $-7\lambda-5$, y = $-3-2\lambda$, z = λ

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3+4F1]{F2=F2-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Rang(A) = 2 ; rang(A*) = 3 → S.I.

3) Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible:

a) $\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ x+y+5z=3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[F3=F3+F1]{F2=F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow{F3\leftrightarrow F2}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Rang(A) = rang(A*) = 3 = nº incógnitas → S.C.D.

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ 2y=4 \\ 2z=10 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=y+z-3\rightarrow x=4 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$$ → Solución: x = 4, y = 2, z = 5

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-2F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Rang(A) = rang(A*) = 2 < nº incógnitas → S.C.I.

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+y=1-z \\ -3y=z \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1-z-y\rightarrow x=1-\frac{2}{3}z \\ y=-\frac{1}{3}z \end{cases}$$ → Solución: x = $\frac{3-2\lambda}{3}$, y = $-\frac{1}{3}\lambda$, z = λ

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{F2\leftrightarrow F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-2F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{F3=F3-2F2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Rang(A) = 2 rang(A*) = 3 → S.I.

4) Discutir y resolver, en caso de ser compatible, el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2=\frac{1}{3}F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Rang(A) = rang(A^*) = 3 $\rightarrow$ SCD $\rightarrow$ Solución: x = y = z = 0

5) Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z - 3t = 4 \\ x + 3y - z + 2t = 2 \\ -3x + y - 3z + 8t = -7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \\ -x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3+2F1]{F2=F2-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=F2+8F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -29 & -58 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ -29z = -58 \\ y + 5z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3z + 1 \rightarrow x = 1 \\ z = 2 \\ y = 7 - 5z \rightarrow y = -3 \end{cases}$ $\rightarrow$ Solución: x = 1, y = -3, z = 2

b) $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -3 & 8 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[E3=E3+3E2]{E1=E1-2E2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -6 & 14 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E3=E3+2E1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ S.I.

c) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3+F2]{F1=F1-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ S.C.I.

$\begin{cases} -8y + 4z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y - z = 1 \rightarrow z = 2y - 1 \\ x + 2y - z = 3 \rightarrow x = -2y + z + 3 = -2y + 2y - 1 + 3 = 2 \end{cases}$

Solución: x = 2, y = λ, z = $2\lambda - 1$

SISTEMAS CON PARÁMETROS

1) Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x+y+z=k+2} \\ \mathbf{x-ky+z=1} \\ \mathbf{kx+y+z=4} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -1-k & 0 & -k-1 \\ k-1 & 0 & 0 & -k+2 \end{array}\right)$$

Empleando el método de Gauss:

- Si k = 1 $\rightarrow$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ S.I.

- Si k = -1 $\rightarrow$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2x=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ -2x=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=1-z-x \rightarrow y=\frac{5}{2}-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

- Si $k \neq 1, k \neq -1 \rightarrow$ S.C.D.

$$\begin{cases} x+y+z=k+2 \\ (-1-k)y=-1-k \\ (k-1)x=2-k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=k+2-y-x \rightarrow z=k+2-1+\frac{k-2}{k-1}=\frac{k^2+k-3}{k-1} \\ y=1 \\ x=\frac{2-k}{k-1} \end{cases}$$

2) Discutir, según los distintos valores del parámetro m, el siguiente sistema. Resolver en el caso de m = -2.

$$\begin{cases} (\mathbf{m}-\mathbf{6})\mathbf{y}+\mathbf{3z}=\mathbf{0} \\ \mathbf{2x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}=\mathbf{m}-\mathbf{4} \\ (\mathbf{m}+\mathbf{1})\mathbf{x}+\mathbf{2y}=\mathbf{3} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & m-6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & m-6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & m-4 \\ m+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Aplicamos el teorema de Rouché- Fröbenius:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow \text{rang}(A)\geq 2$$

Si |A| = 0 → rang(A) = 2 → |A| =15 – m^2 + 2m = 0 → m = 5, m = -3

- m = 5 → $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{F3=F3-3F2}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ → rang(A) = rang(A^*) = 2 < nº incógnitas → SCI

$$\begin{cases} -y+3z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=3z \\ 2x+y-z=1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=3z \\ 2x=1-y+z \end{cases}\xrightarrow{z=\lambda}\begin{cases} y=3\lambda \\ 2x=1-3\lambda+\lambda\rightarrow x=\dfrac{1-2\lambda}{2} \end{cases}$$

Solución: $x=\dfrac{1-2\lambda}{2}$; $y=3\lambda$; $z=\lambda \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

- m = -3 → $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow[F1=\frac{1}{3}F1]{F3=F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)\xrightarrow{F3=F3+F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

rang(A) = 2, rang(A^*) = 3 → S.I.

- Si $m\neq 5, m\neq -3$ → S.C.D.

Para m = -2:

$$\begin{cases} -8y+3z=0 \\ 2x+y-z=-6 \\ -x+2y=3 \end{cases}\rightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)\rightarrow |A| = 7$$

Aplicamos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -8 & 3 \\ -6 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7}=-\frac{21}{7}=-3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{7}=0 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{7}=0$$

3) Discutir, según los distintos valores del parámetro A, el siguiente sistema. Resolver el sistema para a = 8

$$\begin{cases} \mathbf{x+2y+z=2} \\ \mathbf{2x-y+3z=2} \\ \mathbf{7x-y+az=6} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & a & 6 \end{array}\right)$$

Aplicamos el teorema de Rouché- Fröbenius:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

Si |A| = 0 → rang(A) = 2 → $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & a-7 \end{vmatrix} = -5(a-7)+15 = -5(a-10) = 0 \rightarrow a = 10$

- Si a = 10 → $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 10 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-7F1]{F2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -15 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ → S.I.
- Si $a \neq 10$ → rang(A) = rang(A*) = 3 = nº incógnitas → S.C.D.
- Para a = 8:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-7F1]{F2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -15 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ -5y+z=-2 \\ -2z=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-2y-z \rightarrow x=2-\frac{6}{5}-1=-\frac{1}{5} \\ 5y=z+2 \rightarrow y=\frac{3}{5} \\ z=1 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{3}{5},\ z=1$$