Título: Matrices y determinantes

Autor: © Juan José Isach Mayo

Fecha: 04 Septiembre del 2007

Contents

Part I

Matrices y determinantes

Chapter 1

Matrices

Definition 1 *Matriz de orden mxn*

Es un conjunto de "mxn" elementos de un cuerpo conmutativo K, dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .... & a_{2,n} \\ .. & .. & .... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{mxn}$$

donde el elemento $a_{i,j}$ representa el elemento del cuerpo K , que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima

Example 2 $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3 & 1+i \\ 4 & 1+i & 1-i \\ 3-2i & -\sqrt{2} & 3+2i \end{pmatrix}_{3x3}$ *En esta matriz sus elementos son números complejos (Recuerda que $i = \sqrt{-1}$)*

Example 3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$ *En esta matriz sus elementos son números reales*

Remark 1 *A partir de ahora trabajaremos siempre con matrices cuyos elementos serán números reales; salvo que se indique lo contrario*

Definition 4 *Matriz fila*
Es una matriz de orden $1xn$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .... & a_{1,n} \end{pmatrix}_{1xn}$. También se llama matriz fila del vector $\overrightarrow{f} \in \Re^n$; cuyas componentes en una base concreta son las dadas

Definition 5 *Matriz columna*
Es una matriz de orden $mx1$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ .. \\ a_{m,1} \end{pmatrix}_{mx1}$. También se llama matriz columna del vector $\overrightarrow{c} \in \Re^m$; cuyas componentes en una base concreta son las dadas

Remark 2 *Basándonos en estas definiciones, podríamos considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .... & a_{2,n} \\ .. & .. & .... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$ *como:*
a) Una matriz formada por n vectores columna pertenecientes a $\Re^m$

$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & .... & \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix}$ *donde* $\overrightarrow{c_j} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ .. \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$

b) Una matriz formada por m vectores fila pertenecientes a $\Re^n$

$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ .. \\ \overrightarrow{f_m} \end{pmatrix}$ *donde* $\overrightarrow{f_i} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & .... & a_{i,n} \end{pmatrix}$

Definition 6 *Matriz nula*
Es aquella matriz de orden mxn donde todos sus elementos son nulos. Se representara siempre por la letra mayúscula $O \rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ .. & .. & .... & .. \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Definition 7 *Matriz opuesta de la matriz A*
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .... & a_{2,n} \\ .. & .. & .... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$ *Llamaremos matriz opuesta de A y lo representaremos por* $-A$ *a la matriz* $\rightarrow -A = \begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & .... & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & .... & -a_{2,n} \\ .. & .. & .... & .. \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & & -a_{m,n} \end{pmatrix}$

Definition 8 *Matriz traspuesta de una matriz A de orden mxn*
Es la matriz que se obtiene al intercambiar en la matriz A las filas por las columnas.Se representara por A^t

;según esto si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .... & a_{2,n} \\ .. & .. & .... & .. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{mxn} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & .... & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & .... & a_{m,2} \\ .. & .. & .... & .. \\ a_{1,n} & a_{2,n} & & a_{m,n} \end{pmatrix}_{nxm}$

Example 9 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Definition 10 *Matriz cuadrada de orden n*
Son aquellas matrices donde el número de filas coincide con el de columnas

Example 11 *Un ejemplo de matriz cuadrada de orden 3 es la matriz*
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1+i & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

Definition 12 *Matriz cuadrada identidad*
Son aquellas matrices cuadradas donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto son ceros

$$I_{n=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 13 $I_{3=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definition 14 *Matriz cuadrada simétrica*
Son aquellas matrices cuadradas; tales que los elementos $a_{i,j} = a_{j,i}$ con i y j variando de 1 a n
Estas matrices se caracterizan por el hecho de que $A = A^t$

Example 15 *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *es simétrica ; ya que*
$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = A$

Definition 16 *Matriz cuadrada antisimétrica*
Son aquellas matrices cuadradas; tales que los elementos $a_{i,j} = -a_{j,i}$ con i y j variando de 1 a n
Observa que los elementos de la diagonal principal son nulos (ya que éstos verifican $a_{i,i} = -a_{i,i} \to 2a_{i,i} = 0 \to a_{i,i} = 0$)
Estas matrices se caracterizan por el hecho de que $-A = A^t$

Example 17 *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *es antisimétrica ; ya que*
$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -5 \\ 7 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *y la matriz A son opuestas*

1.1 Suma de matrices del mismo orden

<u>**NOTACIÓN**</u> :Al conjunto de las matrices de orden mxn y cuyos elementos son números reales lo representamos utilizando la notación $M_{mxn}(\Re)$

Definition 18 *Suma de matrices pertenecientes a* $M_{mxn}(\Re)$
Sean $\left.\begin{array}{c} A = (a_{i,j}\ )_{i,j=1..n} \\ B = (b_{i,j}\ )_{i,j=1..n} \end{array}\right\} \in M_{mxn}(\Re) \to A + B = C = (c_{i,j}\ )_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re)$
Donde los elementos $c_{i,j}$ de la matriz C son tales que$\to c_{i,j}\ = a_{i,j}\ + b_{i,j}$

Example 19 *Si* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *entonces* $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Proposition 20 *El conjunto $M_{mxn}(\Re)$ con la ley suma tiene estructura de grupo conmutativo (abeliano); es decir verifica las propiedades:*

$$\begin{array}{lll}
1. & \textit{Ley de composición interna} & \Leftrightarrow \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow A + B \in M_{mxn}(\Re) \\
2. & \textit{Asociativa} & \Leftrightarrow \forall A, B, C \in M_{mxn}(\Re) \ A + (B + C) = (A + B) + C \\
3. & \textit{Elemento neutro} & \Leftrightarrow \textit{La matriz nula } O \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + O = A \\ O + A = A \end{array} \right\} \\
4. & \textit{Elemento opuesto de } A & \Leftrightarrow -A \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + (-A) = O \\ (-A) + A = O \end{array} \right\} \\
5. & \textit{Conmutativa} & \Leftrightarrow \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow A + B = B + A
\end{array}$$

1.2 Multiplicación de un número real por una matriz

Definition 21 *Multiplicación de un número real por una matriz de $M_{mxn}(\Re)$*
Sean $\left. \begin{array}{l} A = (a_{i,j}\ )_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re \\ \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha A = C = (c_{i,j}\ )_{i,j=1..n} \in M_{mxn}(\Re)$
Donde los elementos $c_{i,j}$ de la matriz C son tales que$\rightarrow c_{i,j} \ = \alpha \cdot a_{i,j}$

Example 22 *Si* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces* $4A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 0 & 16 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 23 *El producto de un número real por una matriz del conjunto $M_{mxn}(\Re)$ verifica las propiedades:*

$$\begin{array}{lll}
6. & \textit{Ley de composición externa} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot A \in M_{mxn}(\Re) \\
7. & \textit{Distributiva respecto suma reales} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow (\alpha + \beta)A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\
8. & \textit{Distributiva respecto suma matrices} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A, B \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\
9. & \textit{Pseudoasociativa números reales} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A \\
10. & \textit{Elemento unidad} & \Leftrightarrow \forall A \in M_{mxn}(\Re) \rightarrow 1 \cdot A = A
\end{array}$$

Nota: La terna $(M_{mxn}(\Re), +, \cdot\Re)$ se dice que tiene una estructura de espacio vectorial real; ya que con ambas operaciones verifica las diez propiedades enumeradas con anterioridad

a) Ley simplificativa suma$\Longleftrightarrow (Si\ A + B = A + C \rightarrow B = C)$
b) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\}$ siempre se verifica que $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$
c)$\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{mxn}(\Re) \\ \forall \alpha, \beta \in \Re \sim \{0\} \end{array} \right\}$ Si $\alpha \cdot A = \beta \cdot A \rightarrow \alpha = \beta$
d) $(A + B)^t = A^t + B^t \qquad \forall A, B \in M_{mxn}(\Re)$
Demuéstralas como ejercicio

1.3 Producto de matrices

Definition 24 *Producto de matrices*
Dada una matriz Ade orden mxn y una matriz B =de orden nxp. La matriz $A \cdot B$ será una matriz de orden mxp cuyos elementos se calculan de la siguiente manera:

$$A \cdot B = C \qquad c_{i,j=} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \text{ con } i = 1....m \text{ y } j = 1...p$$

El elemento $c_{i,j}$ es el resultado de multiplicar escalarmente la fila i de A por la columna j de B

Example 25 *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ *calcula:*
$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 12 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 0 - 4 & 6 + 0 + 2 \\ -1 + 0 - 6 & 2 - 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que $A \cdot B$ es de orden $3x3$; mientras que $B \cdot A$ es de orden $2x2$

Example 26 *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2x2}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2x3}$ *calcula:*
$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 & -2 & -2 + 6 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Observa que $A \cdot B$ es de orden $2x3$, mientras que el producto $B \cdot A$ no tiene sentido ya que el número de columnas de B no coincide con las filas de A

Example 27 *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3x3}$ *calcula:*
$A \cdot B$ y $B \cdot A$ si tienen sentido ambos productos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 2 \\ 10 & 11 & -2 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: El producto de dos matrices cuadradas del mismo orden siempre se puede efectuar en los dos sentidos. En el ejercicio anterior has visto que $A \cdot B$ no coincide con $B \cdot A$

1.4 Propiedades del producto de matrices cuadradas

Proposition 28 *El producto de matrices cuadradas del mismo orden verifica las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{lll}
1. & \textit{Ley de composición interna} & \Leftrightarrow \forall A,B \in M_{nxn}(\Re) \rightarrow A\cdot B \in M_{nxn}(\Re) \\
2. & \textit{Asociativa} & \Leftrightarrow \forall A,B,C \in M_{nxn}(\Re) \rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \\
3. & \textit{Elemento neutro (Matriz identidad)} & \Leftrightarrow A\cdot I_n = I_n\cdot A = A \quad \forall A \in M_{nxn}(\Re) \\
4. & \textit{Distributiva con suma (ambos lados)} & \Leftrightarrow \forall A,B,C \in M_{nxn}(\Re) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \\ (B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A \end{array} \right. \\
5. & \textit{No conmutativa} & \Leftrightarrow A\cdot B \textit{ no siempre coincide con } B\cdot A
\end{array}$$

Nota: *El conjunto $M_{nxn}(\Re)$ con las leyes suma y producto de matrices se dice que tiene una estructura de anillo unitario no conmutativo*

Otras propiedades

a) $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t \qquad \forall A,B \in M_{nxn}(\Re)$

b) $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in M_{nxn}(\Re) \\ \forall \alpha \in \Re \end{array} \right\}$ siempre se verifica que $(\alpha\cdot A)^t = \alpha\cdot A^t$

d1) $A\cdot O = O$ y $O\cdot B = O$ $\forall A,B \in M_{nxn}(\Re)$

d2) Si $A = O$ o $B = O \Longrightarrow A\cdot B = O$ (O es la matriz nula)

Nota: La recíproca de esta última implicación no es cierta en general; ya que podemos encontrar un par de matrices cuadradas, del mismo orden, no nulas y de manera que su producto dé la matriz nula

e) Sean $A,B,C \in M_{nxn}(\Re)$ Si $A\cdot B = A\cdot C$ eso no implicará siempre que $B = C$

Es decir; pueden existir tres matrices A,B,C cuadradas del mismo orden tal que $B \neq C$ y sin embargo que se verifique la igualdad $A\cdot B = A\cdot C$

f) Si $A,B \in M_{nxn}(\Re) \qquad A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$

g)Si $A,B \in M_{nxn}(\Re) \qquad (A-B)^2 \neq A^2 - 2A\cdot B + B^2$

h) Si $A,B \in M_{nxn}(\Re) \qquad (A+B)^2 \neq A^2 + 2A\cdot B + B^2$

Example 29 *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $B \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula:*
$A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^2, B^2, A+B, (A+B)^2, A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2, A^2 + 2A\cdot B + B^2, A+B, (A-B)^2, A^2 - A\cdot B - B\cdot A + B^2, A^2 - 2A\cdot B + B^2, A^2 - B^2, (A-B)(A+B), (A\cdot B)^t, B^t\cdot A^t$

- $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4-6 & 4+6+15 & 0+4-9 \\ 0+8+4 & 0+12-10 & 0+8+6 \\ 2+2+6 & -8+3-15 & 0+2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}$

- $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -2+16+0 & -3-8+0 \\ -2+0-4 & 4+12+2 & 6-6-6 \\ 2+0+6 & -4+20-3 & -6-10+9 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & -11 \\ -6 & 18 & -6 \\ 8 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix}$

- $(A+B)^2 =$ [1] $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 48 & -24 \\ 10 & 61 & 6 \\ 44 & -18 & 24 \end{pmatrix}$

- $A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A(A+B) + B(A+B)$

$= (A+B)(A+B) = (A+B)^2$

- $A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 51 & -18 \\ 28 & 45 & 26 \\ 46 & -51 & 42 \end{pmatrix}$

Fíjate que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$

- $(A-B)^2 =$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 8 \\ -2 & 21 & -10 \\ 8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

- $A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 = A(A-B) + B(A-B)$

$= (A-B)(A-B) = (A-B)^2$

- $A^2 - 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -17 & 2 \\ -20 & 37 & -30 \\ 6 & 29 & -2 \end{pmatrix}$

- $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -24 \\ 4 & -13 & -2 \\ -10 & 5 & -18 \end{pmatrix}$

---

[1] $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

[2] $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

- $(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 4 & -18 \\ 22 & -29 & 18 \\ -8 & -28 & 0 \end{pmatrix}$

- $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -2 & -30 \\ -14 & 3 & -22 \\ -12 & 38 & -36 \end{pmatrix}$

Fíjate que $A^2 - B^2 \neq \begin{cases} (A-B)(A+B) \\ y \\ (A+B)(A-B) \end{cases}$

- $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 10 \\ 17 & 2 & -20 \\ -5 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

- $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 10 \\ 17 & 2 & -20 \\ -5 & 14 & 11 \end{pmatrix}$

Remark 3 *Fíjate que* $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Example 30 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ *determina la/s matriz/ces B de orden dos tal que* $A \cdot B = O$ *(matriz nula)*

Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Por ser $A \cdot B = O \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Operando las matrices tendremos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ -2x-6z & -2y-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+3z=0 \\ y+3t=0 \\ -2x-6z=0 \\ -2y-6t=0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es

$$x=-3z, y=-3t, t=t, z=z \text{ } con \text{ } z,t \in \Re$$

Todas las matrices del conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -3z & -3t \\ z & t \end{pmatrix} / z,t \in \Re \right\}$ verifican la condición pedida

Si nos pidiesen cuatro; bastaría con asignar a las incógnitas z y t cuatro parejas de valores distintos. Por ejemplo si:

$$\text{Si } z = 1 \text{ y } t = 0 \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A \cdot B_1 = O$$
$$\text{Si } z = 0 \text{ y } t = 1 \rightarrow B_2 \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A \cdot B_2 = O$$
$$\text{Si } z = 1 \text{ y } t = 1 \rightarrow B_3 \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A \cdot B_3 = O$$
$$\text{Si } z = 0 \text{ y } t = 0 \rightarrow O \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ verifica que } A \cdot O = O$$

Nota: Comprueba tú que los productos $B_1 \cdot A, B_2 \cdot A, B_3 \cdot A$ no dan la matriz nula

1.5 Matriz inversa de una matriz cuadrada respecte al producto

Definition 31 *Matriz inversa de una matriz cuadrada*
Dada la matriz $A \in M_{nxn}(\Re)$, diremos que admite inversa con respecto al producto de matrices siempre que podamos encontrar una única matriz $B \in M_{nxn}(\Re)$ tal que:
$\begin{matrix} A \cdot B = I_n \\ B \cdot A = I_n \end{matrix}$ *donde $I_n$es la matriz identidad*
A dicha matriz se le representa por A^{-1}

A las matrices cuadradas que admiten inversa se les denomina *matrices regulares*

1.5.1 Propiedades de las matrices regulares

Proposition 32 *Si A y B son dos matrices regulares de orden n*
a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
b) $(\alpha \cdot A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1}$ *con* $\alpha \in \Re \sim \{0\}$
c) $(A^{-1})^{-1} = A$
d) $\left(A^{-1}\right)^t = (A^t)^{-1}$

Remark 4 *El cálculo de la matriz inversa de una dada es muy útil para resolver ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$ si A es una matriz cuadrada regular de orden n.*

Como A es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por A^{-1} por la izquierda obtendremos que :
$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ Por definición de inversa
$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ Por ser I el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot B$

Remark 5 *El cálculo de la matriz inversa es muy útil para resolver ecuaciones matriciales del tipo $A \cdot X \cdot C = B$ si A y C son matrices cuadradas regulares de orden n.(B es una matriz cuadrada del mismo orden que las anteriores al igual que la matriz incógnita X)*

Como A es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por A^{-1} por la izquierda obtendremos que :
$A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot C) = A^{-1} \cdot B$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B$ Por definición de inversa
$I \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B$ Por la asociativa del producto
$I \cdot (X \cdot C) = A^{-1} \cdot B$ Por ser I el elemento unidad del producto
$X \cdot C = A^{-1} \cdot B$
Como C es regular, si multiplicamos la ecuación matricial por C^{-1} por la derecha obtendremos que :
$(X \cdot C) \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por la asociativa del producto
$X \cdot \left(C \cdot C^{-1}\right) = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por definición de inversa
$X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$Por ser I el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

Exercise 1.5.1 *Demuestra que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *admite inversa y calcúlala. Después resuelve la ecuación matricial* $AX = C$ *donde* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Por la definición se trata de buscar una matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$ y $B \cdot A = I_2$

Considerando la 1^a $A \cdot B = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obtenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x - 3z & y - 3t \\ 4x + 5z & 4y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3z = 1 \\ y - 3t = 0 \\ 4x + 5z = 0 \\ 4y + 5t = 1 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es:

$$x = \tfrac{5}{17}\ , y = \tfrac{3}{17},\ z = -\tfrac{4}{17},\ t = \tfrac{1}{17}$$

Hemos obtenido pues la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$ que verifica que $A{\cdot}B = I_2$
Comprobemos ahora que el otro producto también nos da la matriz identidad

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusión: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$

- Resolvamos ahora la ecuación matricial $A \cdot X = C$. Por ser A un matriz regular, admite inversa y por lo tanto si multiplicamos la ecuación por A^{-1} ,por la izquierda, tendremos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C$. Por la asociativa del producto
$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot C$ Por definición de inversa
$I \cdot X = A^{-1} \cdot C$ Por ser I el elemento unidad del producto
$X = A^{-1} \cdot C$
Así pues, la solución será $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ \frac{11}{17} \end{pmatrix}$

Remark 6 *Resolver la ecuación matricial* $A \cdot X = C$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *es equivalente a resolver el sistema* [3] $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = -2 \\ 4x + 5y = 3 \end{array} \right.$

Example 33 *Demuestra que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ *no admite inversa*

Por la definición se trata de buscar una matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$ y $B \cdot A = I_2$
Considerando la 1^a $A \cdot B = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obtenemos la siguiente igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} x - 3z & y - 3t \\ 2x - 6z & 2y - 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que da lugar al sistema:

$$\left. \begin{array}{r} x - 3z = 1 \\ y - 3t = 0 \\ 2x - 6z = 0 \\ 2y - 6t = 1 \end{array} \right\}$$

Dicho sistema es incompatible

Conclusión: A no admite inversa

Example 34 *Demuestra que toda matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *con la condición* $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ *admite inversa y ésta es* $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

Comentario Es evidente, que para determinar si una matriz cuadrada de orden tres admite inversa tendríamos que resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas (no es tan complejo; más bien largo)

[3] $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.5.2 Cálculo de la matriz inversa (Método de Gauss-Jordan)

El cálculo de matrices inversas suele realizarse de una forma parecida al método de Gauss. Por ejemplo, para calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

realizaremos operaciones análogas a las del método de Gauss con las <u>filas</u>[4] de la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

con el objetivo de transformar la parte izquierda en la matriz identidad. Cuando lo consigamos la parte derecha de la matriz obtenida , será la matriz inversa de A.

Las únicas transformaciones posibles a realizar son:

- Intercambiar filas
- Multiplicar una fila por un número real no nulo
- A cualquier fila le puedo sumar una combinación lineal de otra (Ejemplo $3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a$)

Pasos:

- 1^o Intercambiamos las filas 1^a y 2^a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- 2^o Restamos a la 2^a el doble de la 1^a y a la 3^a le restamos el triple de la 1^a

$$\left. \begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

- 3^o Intercambiamos las filas 2^a y 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

[4] Las transformaciones a realizar son :
Intercambiar filas
Multiplicar una fila por un número real no nulo
A cualquier fila le puedo sumar una combinación lineal de otra (Ejemplo $3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a$
Nota: Si apareciesen parámetros intentad evitar siempre el siguiente tipo de combinación lineal $3^{a\prime} = (a+2)3^a - 2^a$; es mejor éste $3^{a\prime} = 3^a - (a+3) \cdot 2^a$

- 4^o Dividimos la 3^a por -5 ($3^{a\prime} = -\dfrac{3^a}{5}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right)$$

- 5^o $\left.\begin{array}{r} 2^{a\prime} = 2^a + 7\cdot 3^a \\ 1^{a\prime} = 1^a - 3\cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right)$

Observa que en las tres primeras columnas hemos obtenido I_3 la matriz identidad de orden tres

Una vez conseguido esto, la matriz inversa es la formada por las otras tres columnas: Así pues:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba tú que $A\cdot A^{-1} = I_3$ y $A^{-1}\cdot A = I_3$

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A = \left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Aplicación}}$:Utilizando la matriz inversa anterior resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z = 4 \\ x + 3z = -1 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema anterior es lo mismo que resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\cdot X = B \text{ Ecuación } *$$

Donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matriz columna de las incógnitas y $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

Ahora bien; como A es regular$\rightarrow$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Si multiplicamos la ecuación * por A^{-1} tendremos:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$$

Por la propiedad asociativa del producto

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

Por la definición de matriz inversa

$$I_3\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

Por ser I_3 el elemento neutro para la multiplicación de matrices cuadradas

$$X=A^{-1}\cdot B$$

La solución del sistema es:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{27}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado $S=\left\{\left(\frac{13}{5},-\frac{27}{5},-\frac{6}{5}\right)\right\}$

Example 35 *Dada la matriz* $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *determina con el procedimiento anterior su matriz inversa. Después resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+2y+3z=2 \\ x+z=-5 \\ y+3z=-2 \end{array}\right\}$

Consideramos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pasos:

- 1^o Restamos a la segunda la primera $2^{a\prime} = 2^a - 1^a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2^o Intercambiamos las filas 2^a y 3^a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3^o Sumamos a la 3^a el doble de la 2^a $(3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 2^a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4^o Dividimos la 3^a por 4 $(3^{a\prime} = \dfrac{3^a}{4})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

- 5^o A la segunda le restamos el triple de la tercera y a la primera también le restamos el triple de la 3^a

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 3 \cdot 3^a \\ 3^{a\prime} = 2^a - 3 \cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-6}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

- 6^o Por último; a la primera le resto el doble de la 2^a $(1^{a\prime} = 1^a - 2 \cdot 2^a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

Observa que en las tres primeras columnas hemos obtenido I_3 la matriz identidad de orden tres

Una vez conseguido esto, la matriz inversa es la formada por las otras tres columnas: Así pues:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprueba tú que $C \cdot C^{-1} = I_3$ y $C^{-1} \cdot C = I_3$

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} \cdot C = \left(-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & +2 \\ -3 & 3 & +2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & +2 \\ -3 & 3 & +2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Aplicación Resolvamos ahora el sistema:

$$\left. \begin{array}{c} x + 2y + 3z = 2 \\ x + z = -5 \\ y + 3z = -2 \end{array} \right\}$$

Resolver el sistema anterior es lo mismo que resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$C \cdot X = B \text{ Ecuación } *$$

Donde $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ se denomina matriz de coeficientes del sistema,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matriz columna de las incógnitas y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

Ahora bien; como C es regular$\rightarrow$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$

Si multiplicamos la Ecuación * por C^{-1} tendremos:

$$\begin{gathered} C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot B \\ \left(C^{-1} \cdot C\right) \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ I_3 \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ X = C^{-1} \cdot B \end{gathered}$$

La solución del sistema es:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{25}{4} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado $S=\left\{\left(-\frac{9}{4},\frac{25}{4},-\frac{11}{4}\right)\right\}$

Example 36 *Con las matrices A y C anteriores calcula:*
a) $A\cdot C$
b) $(A\cdot C)^{-1}$ *con el procedimiento anterior*
c) Comprueba que dicha matriz coincide con $C^{-1}\cdot A^{-1}$

Como $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ entonces:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&9\\1&5&12\\4&8&16\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de $H=A\cdot C$. Para ello consideramos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&9&1&0&0\\1&5&12&0&1&0\\4&8&6&0&0&1\end{array}\right)$$

Intercambiamos 1^a y 2^a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&12&0&1&0\\2&5&9&1&0&0\\4&8&16&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a\\3^{a\prime}=3^a-4\cdot 1^a\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&12&0&1&0\\0&-5&-15&1&-2&0\\0&-12&-32&0&-4&1\end{array}\right)$$

Dividimos la 2^a por -5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&12&0&1&0\\0&1&3&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&-12&-32&0&-4&1\end{array}\right)$$

$$3^{a\prime}=3^a+12\cdot 2^a\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&12&0&1&0\\0&1&3&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&4&-\frac{12}{5}&\frac{4}{5}&1\end{array}\right)$$

Divido la 3^a por 4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&12&0&1&0\\0&1&3&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&1&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}2^{a\prime}=2^a-3\cdot 3^a\\1^{a\prime}=1^a-12\cdot 1^a\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&0&\frac{36}{5}&-\frac{7}{5}&-3\\0&1&0&\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{4}\\0&0&1&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\text{Por último } 1^{a\prime} = 1^a - 5 \cdot 2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora

$$C^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Example 37 *Dada la matriz* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

a) Determina su matriz inversa por el método de Gauss_ Jordan

b) Utilizando el cálculo de la matriz inversa resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + 10z = -1 \end{array}\right\}$

Solución:
a) Consideramos la matriz de orden $3x6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & | & -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dividimos la 3^a por -20

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a + 7 \cdot 3^a \\ 1^{a\prime} = 1^a - 3 \cdot 3^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{-7}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{pmatrix}$$

Por último, a la primera le resto la segunda

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{array}\right) \rightarrow D^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{array}\right)$$

b) Resolver el sistema $\left.\begin{array}{c} x+y+3z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+10z=-1 \end{array}\right\}$ es equivalente a resolver la ecuación matricial $D \cdot X = B$ donde $D = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 10 \end{array}\right)$ se denomina matriz de coeficientes del sistema; $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ matriz columna de las incógnitas y $B = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ -1 \end{array}\right)$ matriz columna de los términos independientes

Como la matriz A es regular (admite inversa); entonces multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, la relación $D \cdot X = B$ tendremos:

$D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1} \cdot B \rightarrow \left(D^{-1} \cdot D\right) \cdot X = D^{-1} \cdot B \rightarrow I_3 \cdot X = D^{-1} \cdot B$

Así pues:

$$X = D^{-1} \cdot B \rightarrow X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{-30}{20} & \frac{10}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{23}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-7}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-3}{20} & \frac{-1}{20} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\frac{12}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Chapter 2

DETERMINANTES

A toda matriz cuadrada, A, le vamos a asociar un número real que denominaremos determinante de A y que escribiremos así $|A|$

2.1 Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$

Example 38 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$

2.2 Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1}$

Example 39 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 9 - 4 + 12 = -15$

Example 40 *Calcula los siguientes determinantes*

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

2.3 Menor complementario del elemento $a_{i,j}$ de una matriz cuadada

Dada una matriz cuadrada, A, de orden n; llamaremos Menor complementario de ese elemento $a_{i,j}$ al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j. Lo representaremos así: $M.C(a_{i,j})$

Example 41 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *determina* $M.C\left(a_{2,3}\right)$ *,* $M.C\left(a_{1,3}\right)$*,* $M.C\left(a_{2,1}\right)$*,* $M.C\left(a_{2,2}\right)$

$$M.C\left(a_{2,3}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 18$$
$$M.C\left(a_{1,3}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$
$$M.C\left(a_{2,1}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$M.C\left(a_{2,2}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

2.4 Adjunto del elemento $a_{i,j}$ de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada, A, de orden n; llamaremos adjunto del elemento $a_{i,j}$ al Menor complementario de ese elemento $a_{i,j}$ multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Lo representaremos así: $\Delta_{i,j}$

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} M.C\left(a_{i,j}\right)$$

Example 42 *De la matriz anterior calcula*
a) $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 1ª fila)*
b) El determinante de A
c) Calcula $a_{1,1}\Delta_{1,1}+a_{1,2}\Delta_{1,2}+a_{1,3}\ \Delta_{1,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 1ª fila por sus adjuntos correspondientes)*
d) $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{2,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 2ª fila)*
e) Calcula $a_{2,1}\Delta_{2,1}+a_{2,2}\Delta_{2,2}+a_{2,3}\ \Delta_{2,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 2ª fila por sus adjuntos correspondientes)*
f) $\Delta_{3,1}$, $\Delta_{3,2}$, $\Delta_{3,3}$ *(adjuntos de los elementos de la 3ª fila)*
g) Calcula $a_{3,1}\Delta_{3,1}+a_{3,2}\Delta_{3,2}+a_{3,3}\ \Delta_{3,3}$ *(Suma de los productos de los elementos de la 3ª fila por sus adjuntos correspondientes)*

Solución :

a)$\Delta_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$

c) $a_{1,1}\Delta_{1,1} + a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\ \Delta_{1,3} = 5\,(-1) + 3\,(1) + 4\,(-1) = -6$

d) $\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$

$\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18$

e) $a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{2,2}\Delta_{2,2} + a_{2,3}\ \Delta_{2,3} = 1\,(0) - 4\,(24) - 5(-18) = -6$

f) $\Delta_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 29$

$\Delta_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3$

g) $a_{3,1}\Delta_{3,1} + a_{3,2}\Delta_{3,2} + a_{3,3}\ \Delta_{3,3} = -1\,(1) + 3\,(29) + 4\,(-23) = -6$

Nota: Fíjate que:

El determinante de la matriz cuadrada A coincide con la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos correspondientes

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{h,k}\Delta_{h,k} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ siendo} \begin{cases} a_{h,k} \text{ el elemento de } A \text{ que ocupa fila } h \text{ y columna } k \\ \Delta_{h,k} \text{ el adjunto del elemento } a_{h,k} \end{cases}$$

Comprueba tú que $|A|$ coincide con la suma de los productos de los elementos de una columna por sus adjuntos correspondientes

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{k,j}\Delta_{k,j} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ siendo} \begin{cases} a_{k,j} \text{ el elemento de } A \text{ que ocupa fila } k \text{ y columna } j \\ \Delta_{k,j} \text{ el adjunto del elemento } a_{k,j} \end{cases}$$

2.5 Determinante utilizando adjuntos

Según todo lo visto anteriormente, el determinante de una matriz cuadrada, de orden n, se puede determinar así:

El $|A|$ coincide con la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos correspondientes

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\Delta_{j,k} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ o....} n \text{ (fila j-ésima)} \\ |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Delta_{k,j} \text{ con } j = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 3\text{o....} n \text{ (columna j-ésima)} \end{aligned}$$

Example 43 *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *calcula su determinante*

Hemos de elegir de la matriz A aquella línea que más ceros tenga.
Si observas verás que la 4^a columna tiene dos ceros; por lo tanto:

$$|A|=\sum_{k=1}^{4} a_{k,4}\Delta_{k,4}=a_{1,4}\Delta_{1,4}+a_{2,4}\Delta_{2,4}+a_{3,4}\Delta_{3,4}+a_{4,4}\Delta_{4,4}$$

Como $a_{1,4}=0$ y $a_{4,4}=0$ entonces:

$$|A|=a_{2,4}\Delta_{2,4}+a_{3,4}\Delta_{3,4}=1(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}+2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-40$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-180$ obtendremos:

$$|A|=1(-1)^{2+4}(-40)+2(-1)^{3+4}(-180)=-40+360=320$$

Example 44 *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula su determinante*

Hemos de elegir de la matriz A aquella línea que más ceros tenga.
Si observas verás que la 3^a fila tiene tres ceros; por lo tanto:

$$|A|=\sum_{k=1}^{4} a_{3,k}\Delta_{3,k}=a_{3,1}\Delta_{3,1}+a_{3,2}\Delta_{3,2}+a_{3,3}\Delta_{3,3}+a_{3,4}\Delta_{3,4}$$

Como $a_{3,1}=0$, $a_{3,3}=0$ y $a_{3,4}=0$ entonces:

$$|A|=a_{3,2}\Delta_{3,2}=3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -4 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & -3 \end{vmatrix}=-3(-90)=270$$

2.6 Matriz adjunta de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada ,A, de orden n, denominaremos matriz adjunta a aquella matriz cuyos elementos son los adjuntos correspondientes de la matriz A. La representaremos por $Adj(A)$

Example 45 *Dada la matriz* $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *determina* $\Delta_{2,3}$,$\Delta_{1,3}$, $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$

$$\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} M.C\,(a_{2,3}) = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$
$$\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} M.C\,(a_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$
$$\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} M.C\,(a_{2,1}) = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} M.C\,(a_{2,2}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

Example 46 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *calcula* $Adj(A)$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) =$$
$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) == \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$$

Exercise 2.6.1 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *calcula* $|A|\,, A{\cdot}(Adj(A))^t\,, (Adj(A))^t{\cdot}$ *A. Al realizar estos productos observas alguna relación entre ellos, el determinante de A y la matriz identidad I.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

En el ejercicio anterior hemos calculado la matriz $Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$

$$A{\cdot}(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$$
$$-6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|\,I$$

$(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} =$
$-6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|\, I$

La relación es la siguiente:

$$\begin{aligned} A \cdot (Adj(A))^t &= |A|\, I \\ (Adj(A))^t \cdot A &= |A|\, I \end{aligned}$$

Exercise 2.6.2 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ *calcula* $|A|, A \cdot (Adj(A))^t, (Adj(A))^t \cdot A$

2.6.1 Propiedades de la matriz adjunta

1. $(Adj(A))^t = Adj(A^t)$
2. $A \cdot (Adj(A))^t = |A|\, I$ y $A \cdot (Adj(A))^t = |A|\, I$

Casos:

Según si el $|A|$ se anule o no se pueden presentar las siguientes opciones:

1. a) Si $|A| \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{|A|}\left[A \cdot (Adj(A))^t\right] &= I \\ \frac{1}{|A|}\left[(Adj(A))^t \cdot A\right] &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A \cdot \left[\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t\right] &= I \\ \left[\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t\right] \cdot A &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}\right\}$

   La matriz inversa de A es pues:$\rightarrow$ $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$[1]

1. b) Si $|A| = 0$ entonces la matriz A no tiene inversa ;puesto que en esta situación $A \cdot (Adj(A))^t = 0 \cdot I = O$

2.7 Matriz inversa de una matriz cuadrada

Recuerda: Si una matriz admite inversa A^{-1}, entonces ha de verificar siempre que ésta es única y además $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad. A esas matrices se les denomina regulares

Solamente aquellas matrices cuadradas cuyo determinante sea no nulo admiten inversa con respecto al producto. Y además por propiedades de la matriz adjunta hemos deducido que $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$

[1] también $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$ ya que $(Adj(A))^t = Adj(A^t)$

2.7.1 Pasos para calcular la inversa de una matriz regular

Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1^o Calculamos su determinante $|A| = -6$

2^o Calculamos su matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & -18 \\ 1 & 29 & -23 \end{pmatrix}$$

3^o Calcularemos la traspuesta de la matriz anterior $(Adj(A))^t$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}$$

4^o Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$ entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix}$$

Nota: Comprobemos si $A \cdot A^{-1} = I$ *y que* $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left[-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \left[-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 24 & 29 \\ -1 & -18 & -23 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8 Propiedades de los determinantes

1 El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = \left|A^t\right|$$

<u>*Demostración*</u>

$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} -$
$a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} -$
$-a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$

Nota: En virtud de esta propiedad, todas las propiedades que se verifiquen para filas también serán válidas para columnas

2 El determinante de una matriz cuadrada es opuesto al determinante de la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas (o columnas) paralelas

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{vmatrix}$$

Demuéstrala como ejercicio

3 El determinante de una matriz cuadrada es nulo si hay dos filas (o columnas) proporcionales (o iguales)

$$\begin{vmatrix} kb & a_{1,2} & b \\ kc & a_{2,2} & c \\ kd & a_{3,2} & d \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} kb & kc & kd \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

Demuéstrala como ejercicio

4 El determinante de una matriz cuadrada es lineal con respecto a cada una

de sus filas (o columnas)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b & a_{1,2}+c & a_{1,3}+d \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \alpha a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+k & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1}+j & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1}+h & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & a_{1,2} & a_{1,3} \\ j & a_{2,2} & a_{2,3} \\ h & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \beta a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \beta a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \beta a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Demuéstrala como ejercicio

Nota: Ten presente que es lineal con respecto a cada fila o columna. Aquí la linealidad sólo se ha aplicado a la 1^a fila y a la 1^a columna

5 El determinante de una matriz cuadrada no varía si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras filas (u otras columnas):

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha a_{2,1} & a_{1,2}+\alpha a_{2,2} & a_{1,3}+\alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Demostración:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha a_{2,1} & a_{1,2}+\alpha a_{2,2} & a_{1,3}+\alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} {}^{2}= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \alpha a_{2,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$${}^{3}= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

6 El determinante de una matriz cuadrada es nulo si alguna de sus filas (o columnas) es combinación lineal de las otras

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1}+\beta a_{2,1} & \alpha a_{1,2}+\beta a_{2,2} & \alpha a_{1,3}+\beta a_{2,3} \end{vmatrix} = 0$$

Demostración:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1}+\beta a_{2,1} & \alpha a_{1,2}+\beta a_{2,2} & \alpha a_{1,3}+\beta a_{2,3} \end{vmatrix} {}^{4}= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \alpha a_{1,3} \end{vmatrix} +$$

[2] Por ser lineal el determinante con respecto a la 1^a fila

[3] El segundo determinante es nulo por tener la 1^a y 2^a filas proporcionales

[4] Por ser lineal el determinante con respecto a la 3^a fila

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \beta a_{2,1} & \beta a_{2,2} & \beta a_{2,3} \end{vmatrix} = \text{[5]} = 0$$

7 Regla de Laplace $\rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B|$

8 Si A es una matriz cuadradada de orden n, entonces $|\alpha A| = \alpha^n\,|A|\;\forall\alpha \in \Re$

9 Si una matriz cuadrada A es triangular superior o triangular inferior (elementos por encima o por debajo de la diagonal principal nulos) su determinante coincide con el producto de los elementos de la diagonal superior:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

10 La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos correspondientes de una fila (o columna) paralela son nulos.

<u>Demostración por filas:</u>

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ hemos de comprobar alguna de estas tres relaciones:

$$\begin{aligned} a_{1,1}\Delta_{2,1} + a_{1,2}\Delta_{2},_{2} + a_{1,3}\Delta_{2},_{3} &= 0 \\ a_{1,1}\Delta_{3,1} + a_{1,2}\Delta_{3},_{2} + a_{1,3}\Delta_{3},_{3} &= 0 \\ a_{2,1}\Delta_{3,1} + a_{2,2}\Delta_{3},_{2} + a_{2,3}\Delta 3,_{3} &= 0 \end{aligned}$$

donde $\Delta_{i,j}$ es el adunto del elemento $a_{i,j}$ de la matriz A
Veamos sólo una de las tres.
$a_{1,1}\Delta_{2,1} + a_{1,2}\Delta_{2},_{2} + a_{1,3}\Delta_{2},_{3} =$ [6] $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales

11 El determinante de una matriz cuadrada es no nulo$\Longleftrightarrow$Sus filas(o columnas) son linealmente independientes

[5] El primer determinante es nulo por ser la 3^a fila proporcional a la 1^a y el segundo también por ser la 3^a fila proporcional a la 2^a

[6] Recuerda como se calcula un determinante utilizando una fila y sus adjuntos correspondientes

Chapter 3

RANGO DE UNA MATRIZ

Por filas: Dada cualquier matriz A, se define el rango de A por filas como el n^o máximo de filas linealmente independientes

Por columnas: Dada cualquier matriz A, se define el rango de A por columnas como el n^o máximo de columnas linealmente independientes

3.1 Propiedades del rango de una matriz

1 El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta

Nota: El rango de una matriz por filas o por columnas coincide siempre

2 El rango de una matriz no varía si intercambiamos filas (o columnas)

3 El rango de una matriz no varía si multiplicamos cualquier fila (o columna) por un número real no nulo

4 El rango de una matriz coincide con el rango de la matriz obtenida al sustituir una fila por ella más una combinación lineal de otras

5 Si una fila (o columna) es nula o es combinación lineal de otras el rango de dicha matriz coincide con el de la matriz obtenida al suprimir dicha fila (o columna)

3.2 Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

Para calcular el rango de una matriz , utilizaremos un procedimiento aná logo al que utilizabamos en los sistemas. Intentaremos triangularizar la matriz inicial. El rango de la matriz inicial coincidirá con el rango de la matriz obtenida al suprimir aquellas filas que sean nulas.

Example 47 *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$ [1] $$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

[2]

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Example 48 *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ [3] $$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

[4]

$$= Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

3.3 Calculo de rangos por menores

El rango de una matriz coincide con el orden de la mayor submatriz cuadada, extraída de la matriz inicial , cuyo determinante sea no nulo.

1^o Método : basado en el cálculo de menores por filas

Comenzando por el orden $k = 2$, se realiza el proceso siguiente : (para una etapa k cualquiera)

- Se busca un menor de orden k no nulo; entonces el rango será mayor o igual que k
- Se añade a dicho menor una fila i, y cada una de las columnas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden $k + 1$.

[1] $2^a fila' = 2^a fila + 1^a fila$
$3^a fila' = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila - 1^a fila$
[2] $3^a fila' = 3^a fila - 2 \cdot 2^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila + 2^a fila$
[3] $2^a fila' = 2^a fila + 1^a fila$
$3^a fila' = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila - 1^a fila$
[4] $3^a fila' = 3^a fila - 2 \cdot 2^a fila$
$4^a fila' = 4^a fila + 2^a fila$

Si todos estos menores son nulos, significa que la fila i es combinación lineal de las k filas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa fila.

- Seguimos probando con las restantes filas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo k filas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es k.

Si alguno de los menores $k+1$ es distinto de cero, el rango es mayor o igual que $k+1$ y repetimos el proceso para otro etapa superior (en concreto la $k+1$).
Nota importante:
Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

2^o Método : basado en el cálculo de menores por columnas
Comenzando por el orden $k = 2$, se realiza el proceso siguiente :(para una etapa k cualquiera)

- Se busca un menor de orden k no nulo; entonces el rango será mayor o igual que k
- Se añade a dicho menor una columna j , y cada una de las filas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden $k+1$.

Si todos estos menores son nulos, significa que la columna j es combinación lineal de las k columnas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa columna

- Seguimos probando con las restantes columnas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo k columnas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es k.

Si alguno de los menores $k+1$ es distinto de cero, el rango es mayor o igual que $k+1$ y repetimos el proceso para otro etapa superior (en concreto la $k+1$).
Nota importante:
Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

Example 49 *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 10 & -11 & 3 & -15 & 22 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$

Por filas
1^o Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ La 1^a y la 2^a fila son L.I (no existe ninguna relación entre ellas)
Por lo tanto el $rangA \geq 2$
2^a ¿ La 3^a fila es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior con los elementos de la 3^a fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -11 & -15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 10 & -11 & 22 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -11 & -15 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 10 & -11 & 22 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ La tercera fila es combinación lineal de la 1^a y la 2^a

Recuerda que si una fila es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha fila

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 10 & -11 & 3 & -15 & 22 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$$

3^a ¿ La 4^a fila es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior (el de orden dos) con los elementos de la 4^a fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -40 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 23 & -22 & 44 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -40 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 23 & -22 & 44 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ La cuarta fila también es combinación lineal de la 1^a y la 2^a

Recuerda que si una fila es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha fila

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 23 & -22 & -3 & -40 & 44 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix}$$

3^o¿ La5^a fila es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior (el de orden dos) con los elementos de la 5^a fila y el resto de columnas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 25 & -29 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 25 & -29 & -35 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 25 & -29 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 25 & -29 & -35 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix} = 3 \end{array}\right\}$ →La 5^a fila no es combinación lineal de la 1^a y la 2^a

Por lo tanto; las únicas filas linealmente independientes son la 1^a, 2^a y la 5^a

$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 25 & -29 & 12 & -35 & 57 \end{pmatrix} = 3$

Observa que el menor, no nulo, de mayor orden que podemos extraer de la matriz A es $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 25 & -29 & 57 \end{vmatrix}$

Haz el mismo ejercicio pero razonando por columnas

Example 50 *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{pmatrix}$

Por columnas

1^o Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ La 1^a y la 2^a columnas son L.I (no existe ninguna relación entre ellas)

Por lo tanto el $rangA \geq 2$

2^a ¿ La 3^a columna es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior con los elementos de la 3^a columna y el resto de filas formando así los siguientes menores de orden tres $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 23 & -22 & -3 \end{vmatrix}$

Como $\left.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 6 \right\}$ → La tercera columna no es combinación lineal de la 1^a y la 2^a

Las tres primeras columnas son L.I→ $RangA \geq 3$

3^o ¿ La 4^a columna es combinación lineal de la 1^a , la 2^ay la 3^a?

Para contestar a esta pregunta; tendré que orlar el menor no nulo anterior(el de orden tres) con los elementos de la 4^a columna y la ultima fila formando así el siguiente menor de orden cuatro $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix}$

Calculémoslo por la regla de Chio

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix}$$

realizamos las siguientes transformaciones $\left\{ \begin{array}{l} 2^a col\prime = 2^a col + 2 \cdot 1^a col \\ 3^a col\prime = 3^a col - 3 \cdot 1^a col \end{array} \right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 10 & -11 & 1 & -15 \\ 23 & -22 & -3 & -40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 5 \\ 10 & 9 & -29 & -15 \\ 23 & 24 & -72 & -40 \end{vmatrix}$$

Por ser lineal el determinante respecto a la 2^acol y 4^a col tendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 5 \\ 10 & 9 & -29 & -15 \\ 23 & 24 & -72 & -40 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 1 \\ 10 & -3 & -29 & -3 \\ 23 & -8 & -72 & -8 \end{vmatrix}$$

Al tener dos columnas iguales este determinante es nulo

Por lo tanto; la 4^acol es combinación lineal de la 1^a ,2^a y 3^a. Recuerda que si una columna es combinación lineal de otras; entonces el rango de la matriz inicial coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir dicha columna

El $rangA = rang \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \\ 23 & -22 & -3 \end{pmatrix} = 3$

Observa que el menor, no nulo, de mayor orden que podemos extraer de la matriz A es $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 10 & -11 & 1 \end{vmatrix}$

Haz el mismo ejercicio pero razonando por filas

Example 51 *Calcular el rango de la siguiente matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Por Gauss

$Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$
2

Utilizando menores complementarios

- – Por filas

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ (no nulo) . Las filas 1^a y 2^a son L.I$\rightarrow$ $RangoA \geq 2$

¿La tercera fila es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y la tercera columna; obteniendo el siguiente menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ Si fuese nulo, la 3^a fila sería C.Lineal de las dos primeras; en caso contrario las tres serían L. Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ entonces la 3^a fila es C.lineal de las dos primeras$\rightarrow$ $RangoA \geq 2$

De las tres primeras filas, sabemos que las dos primeras son L.independientes. Ahora bien nos falta plantear la siguiente pregunta: ¿La cuarta fila es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la cuarta fila y la tercera columna; obteniendo el siguiente menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Si fuese nulo, la 4^a fila sería C.Lineal de las dos primeras; en caso contrario las filas 1^a,2^a y 4^a serían L. Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ entonces la 4^a fila es C.lineal de las dos primeras

Conclusión: Las únicas filas L.Independientes son la 1^a la $2^a$$\rightarrow$ $RangoA = 2$

- − Por columnas

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ (no nulo) . Las columnas 1^a y 2^a son L.I$\rightarrow$ $RangoA \geq 2$

¿La tercera columna es C.Lineal de las dos primeras?

Para saberlo, tendré que orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con la restantes filas y la tercera columna; obteniendo los siguientes menores de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ Si fuesen nulos, la 3^a columna sería C.Lineal de las dos primeras (rangoA=2); en caso contrario las tres serían L. Independientes ($RangoA = 3$)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ entonces la 3^a columna es C.lineal de las dos primeras

Conclusión: Las únicas columnas L.Independientes son la 1^a la $2^a$$\rightarrow$ $RangoA$

Chapter 4

PROBLEMAS DE MATRICES Y DETERMINANTES

4.1 Ejercicios Resueltos

Exercise 4.1.1 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $B \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula* $3A - 2B$, $A \cdot B$ *y* $B.A$

$$3A-2B = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -4 & 6 & -10 \\ -2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 17 & -5 \\ 12 & 2 & 14 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -11 \\ -6 & 18 & -6 \\ 8 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.2 *Con las matrices anteriores, calcula* $A^2, B^2, A^2 + B^2$ *y* $6A^2 - 12B^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2+B^2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 & -8 \\ 4 & 41 & -2 \\ 26 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

Calculemos $6A^2 - 12B^2$

$$6\begin{pmatrix} -5 & 9 & -16 \\ 4 & 14 & -2 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 0 & 27 & 0 \\ 18 & -8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -138 & -42 & -192 \\ 24 & -240 & -12 \\ -168 & 78 & -222 \end{pmatrix}$$

$$6A^2 - 12B^2 = \begin{pmatrix} -138 & -42 & -192 \\ 24 & -240 & -12 \\ -168 & 78 & -222 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.3 *Dada la matriz cuadrada* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ *calcula las matrices* $A + A^t$ *y* $A - A^t$ *y comprueba que la primera es simétrica y la segunda antisimétrica. Después demuestra que dicha matriz se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ Esta matriz es simétrica.

$A - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Esta matriz es antisimétrica

Si denominamos B a $A + A^t$ y C a $A - A^t$ es evidente que $A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Con lo que acabamos de demostrar que A es suma de una matriz simétrica $\frac{1}{2}B$ y una antisimétrica $\frac{1}{2}C$

$$A = \frac{(A + A^t)}{2} + \frac{(A - A^t)}{2}$$

Exercise 4.1.4 *Determina la matriz* X *cuadrada de orden 2 que verifica la siguiente igualdad* $A \cdot X \cdot B = C$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *,*$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

Como no conocemos la matriz X $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6x + 4z + 3y + 2t & 9x + 6z + 6y + 4t \\ 8x + 6z + 4y + 3t & 12x + 9z + 8y + 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4z+3y+2t=29 \\ 9x+6z+6y+4t=40 \\ 8x+6z+4y+3t=34 \\ 12x+9z+8y+6t=47 \end{array}\right\} \text{Resolviéndolo por el método de Gauss}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 6 & 4 & 3 & 2 & 29 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 40 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 34 \\ 12 & 9 & 8 & 6 & 47 \end{array}\right), \text{ eliminación Gaussiana } \left(\begin{array}{ccccc} 6 & 4 & 3 & 2 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Tendremos que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 6x+4z+3y+2t=29 \\ z+2y+2t=-11 \\ -4y-3t=8 \\ t=4 \end{array}\right\} \text{cuyas soluciones son } x=12; y=-5; z=-9; t=$$
4

La matriz pedida es: $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

Nota Cuando ya sepas calcular la inversa de una matriz podrás calcular el ejercicio de la siguiente manera:

Dada la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$ .Como las matrices A y B admiten inversa por ser matrices regulares (determinante no nulo); entonces

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad, por la izquierda, por A^{-1}

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) = A^{-1} \cdot C \to \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$
$$I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \to X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

Si ahora multiplicamos por la derecha esta igualdad por B^{-1}

$$(X \cdot B) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \to X \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$
$$X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ [1]

$$X = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.5 *Determina las matrices* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix}$ *cuadradas de orden 2 que conmutan con* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

[1] Recuerda que toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con la condición $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ admite inversa y ésta es $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ como B ha de conmutar con A entonces

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Operando tendremos

$$\begin{pmatrix} 3x+4y & 2x+3y \\ 3z+4t & 2z+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix}$$

Obteniendo el siguiente sistema
$\left.\begin{array}{r} 3x+4y=3x+2z \\ 2x+3y=3y+2t \\ 3z+4t=4x+3z \\ 2z+3t=4y+3t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y-z=0 \\ x-t=0 \\ x-t=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$ Eliminando dos ecuaciones tendremos que resolver el siguiente sistema compatible doblemente indeterminado
$\left.\begin{array}{r} 2y-z=0 \\ x-t=0 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son $x=t$ y $z=2y$

Por lo tanto todas las matrices del siguiente conjunto $\left\{\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix}/t, y \in \Re\right\}$ conmutan con la matriz A

Es interesante remarcar que dentro de este conjunto, encontraremos las siguientes matrices

- $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz nula
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ la propia matriz A
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ su inversa
- $-A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Comprobación $\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+3t & 3y+2t \\ 6y+4t & 4y+3t \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & y \\ 2y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+3t & 3y+2t \\ 6y+4t & 4y+3t \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.6 *Determina la/s matriz/ces $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cuadradas de orden 2; tales que $A \cdot B = O$ donde A es la matriz del ejercicio anterior y O es la matriz nula ($O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)*

Como $A \cdot B = O$ entonces

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+2z=0 \\ 3y+2t=0 \\ 4x+3z=0 \\ 4y+3t=0 \end{array} \right\}$$

Cuyas soluciones son $x = y = z = t = 0$

La única matriz B es la nula $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota Otra manera de resolver este ejercicio

Como la matriz A es regular[2] (admite inversa); entonces de la igualdad $A \cdot B = O$ si multiplicamos por la inversa de A tendremos

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot O = O \rightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = O \rightarrow I \cdot B = O \rightarrow B = O$$

Exercise 4.1.7 *Determina la/s matriz/ces* $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *cuadradas de orden 2; tales que* $A \cdot B = O$ *donde* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ *y* O *es la matriz nula* ($O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Como $A \cdot B = O$ entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ -4x-2z & -4y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+z=0 \\ 2y+t=0 \\ -4x-2z=0 \\ -4y-2t=0 \end{array} \right\} \text{podemos eliminar}$$

dos ecuaciones; obteniendo un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas que es compatible doblemente indeterminado. Siendo sus soluciones todas las matrices del conjunto

$$H =^{3} \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} / x, y \in \Re \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota 1 Es interesante hacer resaltar que $B \cdot A$ no da la matriz nula

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & x-2y \\ -4x+8y & -2x+4y \end{pmatrix}$$

Sólo se verificarán ambos igualdades $B \cdot A = O, A \cdot B = O$ cuando B coincida con la matriz nula

---

[2] $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$

Nota 2 Demuestra que el conjunto de las matrices B tales que $B \cdot A = O$ es de la forma

$$H = {}^4\left\{ \begin{pmatrix} 4x & 2x \\ 2y & y \end{pmatrix} / x, y \in \Re \right\}$$

Exercise 4.1.8 *Dada la matriz* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *determina la matriz cuadrada X de orden 2 tales que $X \cdot B = I$ donde I es la matriz identidad ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)*

Exercise 4.1.9 *Demuestra que* $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Por el principio de inducción, he de demostrar que se verifica para $n = 1$ y $n = 2$, luego suponer que la igualdad es cierta para n y después comprobar que también se verifica para $n + 1$ utilizando la hipótesis anterior

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \cdot a^0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

Si se verifica para n [5] tengo que demostrar que es cierta para $n + 1$

$A^{n+1} = A^n \cdot A =^6 \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n(n+1) \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$

Como es cierto; entonces puedo afirmar que

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \forall n \in N \sim \{0\}$$

Exercise 4.1.10 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que $A \cdot B = B \cdot A = O$, $A \cdot C = A$, $C \cdot A = C$

b) Aplicando los resultados de a) demostrar que $A \cdot C \cdot B = C \cdot B \cdot A = O$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$

Exercise 4.1.11 *Calcular B^{27} si sabemos que* $B = \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix}$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 3 \\ 40 & -8 & 8 \\ -35 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

[5] Hipótesis de inducción $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

[6] Por la hipótesis de inducción sabemos que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 3 \\ 40 & -8 & 8 \\ -35 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -8 & -1 \\ 49 & -21 & -3 \\ -46 & 19 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; es evidente que $B^{27} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.12 *Calcular C^n si sabemos que* $C = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

Como $C = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix}$;entonces

$$C^2 = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -10 & -6 \\ 20 & -19 & -12 \\ -15 & 15 & 10 \end{pmatrix} = C$$

$$C^3 = C^2 C = C \cdot C = C^2 = C$$

Es evidente pues que $C^n = C \ \forall n \in N \sim \{0\}$

Exercise 4.1.13 *Calcular E^7 si sabemos que* $E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{34}{49} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^7 = E^4 \cdot E^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{24}{49} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{34}{49} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.14 *Calcular D^{20} si sabemos que* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^3 = D^2 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D^4 = D^3.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es fácil demostrar que:

$D^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.15 *Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Averiguar si son ciertas las siguientes igualdades: a) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ b)$(A-B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$*

$(A-B)(A+B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A + B^2 \neq A^2 - B^2$ ya que las matrices A y B en general no conmutan

$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 \neq A^2 - 2A \cdot B + B^2$ por la misma razón de antes

Conclusión: Estas igualdades sólo se cumplen cuando A y B sean matrices cuadradas del mismo orden y que además conmuten, es decir que $A \cdot B = B \cdot A$

Exercise 4.1.16 *Demostrar que si A es una matriz cuadrada que verifica la relación $A^2 - A + I = O$ (donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula) entonces A admite inversa. Hallarla*

Per ser I la matriz identidad $\begin{cases} IA = A \\ AI = A \end{cases}$

Como $A^2 - A + I = O$

Entonces $-A^2 + A = +I \rightarrow \begin{cases} -A^2 + AI = I \ @ \\ -A^2 + IA = I \ @@ \end{cases}$

Si en @ sacamos factor común A por la izquierda y en @@ sacamos factor común A por la derecha tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A(-A+I) = I \\ (-A+I)A = I \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -A + I$$

Exercise 4.1.17 *Demostrar que $E^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \frac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si sabemos que la matriu $E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

Comprobemos que se verifica para $n = 1$ y $n = 2$

$E^1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1^2 + 13 \cdot 1}{98} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Si se verifica para $n = 1$

Como $\left.\begin{array}{l} E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2}{7} & \dfrac{2^2+13\cdot 2}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{15}{49} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow$ se verifica para $n = 2$

Supongamos que es cierta para $n =$ [7] y con esta hipótesis hemos de demostrar que se verifica para el siguiente $n + 1$

$$E^{n+1} = E^n \cdot E = {}^{8} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} + \frac{1}{7}n & \frac{1}{7} + \frac{15}{98}n + \frac{1}{98}n^2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} + \frac{1}{7}n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sea cierta para $n+1$; bastará con que calcules $\dfrac{(n+1)^2 + 13(n+1)}{98}$ y te fijes si coincide con $\frac{1}{7} + \frac{15}{98}n + \frac{1}{98}n^2$. Observarás que la respuesta es afirmativa.

Como es cierto; entonces puedo afirmar que

$$E^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in N \sim \{0\}$$

Exercise 4.1.18 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *comprobar que* $(A+I)^2 = O$ *(O es la matriz nula). Justifica que A admite inversa y obtén su matriz inversa*

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Como $(A+I)^2 = O; A^2 + AI + IA + I^2 = O; A^2 + 2AI + I = O$

Per ser I la matriz identidad $IA = AI$

Entonces $-A^2 - 2AI = +I \rightarrow \begin{cases} -A^2 - 2AI = I \ @ \\ -A^2 - 2IA = I \ @@ \end{cases}$

Si en @ sacamos factor común A por la izquierda y en @@ sacamos factor común A por la derecha tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A(-A-2I) = I \\ (-A-2I)A = I \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -A - 2I$$

[7] Hipótesis de inducción

$$E^n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{7} & \dfrac{n^2+13n}{98} \\ 0 & 1 & \dfrac{n}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[8] Por la hipótesis de inducción

$$A^{-1} = -A - 2I = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.19 *Sea B* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *Demuestra que: a)* $B^3 + I = O$ *b) Justifica que B es invertible y obtén* B^{-1} *c) Calcula razonadamente* B^{10}

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observa que $B^3 = -I$. Si sumamos a los miembros de esta igualdad la matriz identidad tendremos:

$$B^3 + I = -I + I = O$$

Para calcular la inversa de B he de tener presente que

$$\left.\begin{array}{l} B^2B = -I. \\ BB^2 = -I. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (-B^2)\,B = I. \\ B\,(-B^2) = I. \end{array}\right\} \rightarrow B^{-1} = -B^2$$

Así pues; $B^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Si nos piden ahora B^{10} tendremos presente que:

$B^{10} = B^3B^3B^3B = (-I)(-I)(-I)B = -B = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.20 *Calcula los valores* x_1,$x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$*que satisfacen las ecuaciones siguientes:;* $\left\{\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array}\right.$ *donde* $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$

En primer lugar calcularé la inversa de la matriz A

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{array}\right.$

Si multiplicamos la 2^a ecuación por 2 y le sumamos la 1^a obtendremos que: $-AY = B - 2C$.Multiplicando por -1 tendremos:

$$AY = -B + 2C = -\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Si multiplicamos la 2^a ecuación por -3 y le sumamos la 1^a obtendremos que: $-AX = B - 3C$.Multiplicando por -1 tendremos:

$$AX = -B + 3C = -\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Si multiplicamos las expresiones $*$ y $**$ por A^{-1}tendremos

$$A^{-1}(AY) = A^{-1}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.21 *Calcula los valores de α tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3\alpha - 2 - \alpha^3 = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que los valores del parámetro α que anulan el determinante de A son 1 y -2

Exercise 4.1.22 *Calcula los valores de a tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4 - 4a = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que el valor del parámetro a que anula el determinante de A es 1

Exercise 4.1.23 *Calcula los valores de m tales que el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} m+1 & 3 & m \\ 3 & m+1 & 2 \\ m & 2 & m \end{pmatrix}$ *sea nulo*

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 3 & m \\ 3 & m+1 & 2 \\ m & 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^2 - 4 = 0$$

Si resolvemos la ecuación anterior tendremos que los valores del parámetro α que anulan el determinante de A son 2 y -2

Exercise 4.1.24 *Encontrar el valor de x (real) para el cual se cumple que el determinante de la matriz B es 20, donde* $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} |B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1 \\ \text{Como } |B| = 20 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 20$$

Transponiendo términos

$x^3 - x^2 + x - 21 = 0$

Si la resolvemos mediante la regla de Ruffini tendremos que las soluciones son:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= -1 + i\sqrt{6} \\ x &= -1 - i\sqrt{6} \end{aligned}$$

La única que vale es $x = 3$

Exercise 4.1.25 *Calcula la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1^o Calculamos su determinante $|A| = -16$
2^o Calculamos su matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

3^o Calcularemos la traspuesta de la matriz anterior $(Adj(A))^t$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4^o Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$ entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Nota: Comprobemos si $A \cdot A^{-1} = I$ *y que* $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.26 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide obtener:

$$C + A \cdot B \; , C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \; , \; (C + A \cdot B)^{-1}, \; |C| \, , \; \left|C^{-1}\right|$$

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = {}^{9}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} = I^{-1} = I$$

---

[9] $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|C| = 1$

$\left|C^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. No hacía falta calcular $\left|C^{-1}\right|$, ya que $C \cdot C^{-1} = I$ y $\left|C \cdot C^{-1}\right| = |I| = 1 \rightarrow \left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{|C|} = 1$

Exercise 4.1.27 *Calcula las inversas, si existen, de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \; D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark 7 *Recuerda que si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *es tal que* $ab - cd \neq 0$ *entonces* A *admite inversa y* $A^{-1} = \dfrac{1}{ab-cd}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Por la nota anterior:

- $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ C no admet inversa ya que $|C| = 0$

Remark 8 *Recuerda que si* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ *es tal que* $|A| \neq 0$ *entonces* A *admite inversa y además* $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$

donde $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ es la matriz adjunta de A

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow |D| = 7$ por lo tanto D tiene inversa

Calculemos su adjunta $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}\left(Adj(D)\right)^t = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow |E| = -5$ por lo tanto E tiene inversa

Comprueba tú que $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |F| = 1$ por lo tanto F tiene inversa

Comprueba tú que $F^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -25 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.28 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *se pide*

a) Calcular $(A - I_3)^2 \cdot (A - 5I_3)$
b) Obtener A^t *y razonar si existe* A^{-1}

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^2 \cdot (A - 5I_3) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 4 \rightarrow A$ admite inversa y además:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.29 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ *comprobar que* $A^2 = -2A - I_3$ *siendo* I_3 *la matriz identidad. Usando la fórmula anterior calcula* A^{-1}.

- $$\left.\begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I_3 = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow$$
  $A^2 = 2A - I_3$

- Como $A^2 = 2A - I_3 \rightarrow -A^2 + 2A = I_3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} A(-A+2I_3) = I_3 \\ (-A+2I_3)A = I_3 \end{array}\right\} \rightarrow A^{-1} = -A + 2I_3$

Así pues:

$$A^{-1} = -A + 2I_3 = -\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Remark 9 *Perfectamente puedes calcular A^{-1} por otro procedimiento, pero explícitamente te han pedido que lo calcules con la relación que has demostrado*

Exercise 4.1.30 *Demostrar usando las propiedades de los determinantes*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =^{10} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} {}^{11} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} =^{12} 0$$

Otra manera de resolver esta cuestión.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =^{13} \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & -(b-a) \\ 0 & c-a & -(c-a) \end{vmatrix} =^{14} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =^{15} 0$$

Exercise 4.1.31 *Calcular, sin desarrollar, el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

[10] Si a una columna le sumamos una combinación lineal de otras columnasel determinante no varía. Aquí en concreto $3^a col = 3^a col + 2^a col$

[11] Un determinante es lineal respecto de cada columna

[12] Si dos columnas son iguales el determinante es nulo

[13] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto
$2^a fil = 2^a fil - 1^a col$
$3^a fil = 3^a fil - 1^a col$

[14] Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas 2^a y 3^a

[15] Un determinante que tenga dos filas iguales es nulo.

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =^{16} abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =^{17} abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} =^{18} abc(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} =$$

$$=^{19} abc(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} =^{20} abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Exercise 4.1.32 *Calcula los siguientes determinantes por triangularización*

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix} =^{21} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & -7 \\ -2 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix} =^{22} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -27 & -4 & 17 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$=^{23} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & -27 & -4 & 17 \end{vmatrix} =^{24} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -58 & -199 \end{vmatrix} =$$

$$=^{25} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -1301 \end{vmatrix} = -1301$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{26} - \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{27} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

[16] Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas 1^a,2^a y 3^a

[17] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto

$2^a fil = 2^a fil - 1^a col$

$3^a fil = 3^a fil - 1^a col$

[18] Teniendo presente que $z^2 - t^2 = (z-t)(z+t)$ y además que:

Un determinante es lineal respecto de cada fila. Lo aplico para las filas 2^a y 3^a

[19] Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas el determinante no varía. Aquí en concreto.

$3^a fil = 3^a fil - 2^a col$

[20] $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$

[21] Modificamos la primera columna sumándole la segunda

[22] 2^afil′=2^afil′+10·1^afil ; 3^afil′=3^afil′+2·1^afil ; 4^afil′=4^afil′-2·1^afil

[23] Si intercambiamos la 2^afila con la 4^a el determinante cambia de signo

[24] 3^afil′=3^afil′+2·2^afil ; 4^afil′=4^afil′+27·2^afil

[25] 4^afil′=4^afil′+58·3^afil

[26] Si intercambiamos la 1^afila con la 4^a el determinante cambia de signo

[27] Si intercambiamos la 1^acolumna con la 4^a el determinante cambia de signo

$$=^{28}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & -11 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =^{29} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{30} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -43 & -19 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =^{31} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 24 & -19 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=^{32} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -19 & -43 \end{vmatrix} =^{33} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -91 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=^{34} -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -91 & 5 \end{vmatrix} =^{35} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -91 \end{vmatrix} =$$

$$=^{36} 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56 \end{vmatrix} = -224$$

Exercise 4.1.33 *Calcula el determinante* $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *por la regla de Sarrus y mediante un desarrollo por adjuntos*

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1$$

Si desarrollamos este determinante, por los adjuntos de la primera columna tendremos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

[28] 4^afila$'$=4^afila-2·1^afila
[29] Si intercambiamos la 2^acolumna con la 3^a el determinante cambia de signo
[30] 3^afila$'$=3^afila-7·2^afila; 4^afila$'$=4^afila-2^afila
[31] Si intercambiamos la 3^acolumna con la 5^a el determinante cambia de signo
[32] Si intercambiamos la 3^afila con la 5^a el determinante cambia de signo
[33] 5^afila$'$=5^afila-24·3^afila
[34] Por ser lineal el determinante con respecto a cada columna
[35] Si intercambiamos la 4^acolumna con la 5^a el determinante cambia de signo
[36] 5^afila$'$=5^afila-5·3^afila

Exercise 4.1.34 *Calcular* $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *y* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ *en función de* $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =^{37} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =^{38}$$

$$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{39} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercise 4.1.35 *Probar sin desarrollar que* $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ p & q+r & r+p \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ p & q+r & r \\ x & y+z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b+c & a \\ p & q+r & p \\ x & y+z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ q & q & r+p \\ y & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix} =^{40}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ p & r & r \\ x & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c \\ q & r & r \\ y & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} =^{41}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} =^{42} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Exercise 4.1.36 *Probar sin desarrollar que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

[37] Por ser el determinante lineal con respecto a cada fila
[38] Por ser el determinante lineal con respecto a cada fila
[39] Un determinante es nulo si hay filas repetidas
[40] El segundo y el tercer determinante son nulos por tener columnas repetidas
[41] El segundo y el tercer determinante son nulos por tener columnas repetidas
[42] Si en el segundo determinante intercambiamos la 3^a columna por la segunda y después la 2^a por la 1^a volvemos a obtener $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ al realizar dos cambios de columnas consecutivas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =^{43} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} =^{44} 0$$

Exercise 4.1.37 *Calcula los determinantes que a continuación se indican, aplicando convenientemente la regla de Chio a)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \\ 4 & 10 & 20 & 1 \\ 5 & 15 & 35 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 1 \\ 4 & 10 & 20 & 1 \\ 5 & 15 & 35 & 1 \end{vmatrix} =^{45} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 16 & 0 \\ 3 & 12 & 31 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} =$

  $- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} =$

  $=^{46} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -1$

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{47} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 10 & 12 & 0 & -1 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 10 & 12 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$

  $= \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 12 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} =^{48} \begin{vmatrix} 3 & -8 & 0 \\ 15 & 7 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 141$

- $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =^{49} 4 \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

  $8 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 144$

---

[43] Si modificamos la 2^a columna restándole la primera y modificamos la 3^acolumna restándole la 1^a el determinante no varía

[44] Un determinante es nulo si hay columnas repetidas

[45] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 1^a$
$3^a\ 'fila = 3^a fila - 1^a$
$4^a\ 'fila = 4^a fila - 1^a$

[46] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$3^a\ 'fila = 3^a fila - 3 \cdot 1^a fila$

[47] $3^a\ 'fila = 3^a fila + 2 \cdot 2^a fila$

[48] $1^a\ 'fila = 1^a fila + 3^a fila$
$2^a\ 'fila = 2^a fila + 3^a fila$

[49] $2^a\ 'fila = 2^a fila - 1^a fila$

Exercise 4.1.38 *Si* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -5$ *calcula: a)* $\begin{vmatrix} a+4b & b & c \\ d+4e & e & g \\ h+4i & i & j \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} a+4b & 5b & c+5a \\ d+4e & 5e & g+5d \\ h+4i & 5i & j+5h \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a+4b & b & c \\ d+4e & e & g \\ h+4i & i & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4b & b & c \\ 4e & e & g \\ 4i & i & j \end{vmatrix}$ =[50] $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -5$

- $\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = -25$

- $\begin{vmatrix} a+4b & 5b & c+5a \\ d+4e & 5e & g+5d \\ h+4i & 5i & j+5h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5b & c+5a \\ d & 5e & g+5d \\ h & 5i & j+5h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4b & 5b & c+5a \\ 4e & 5e & g+5d \\ 4i & 5i & j+5h \end{vmatrix}$ =[51]

$= \begin{vmatrix} a & 5b & c+5a \\ d & 5e & g+5d \\ h & 5i & j+5h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 5b & 5a \\ d & 5e & 5d \\ h & 5i & 5h \end{vmatrix}$ =[52] $\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & g \\ h & 5i & j \end{vmatrix} = -25$

Exercise 4.1.39 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *determina a)*$|A|$ *b)* $(Adj(A))^t$ *c)* $A \cdot (Adj(A))^t$ *d)* $(Adj(A))^t \cdot A$ *y e)* A^{-1}

- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 24 - 2 = 42$

- $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 8 \\ 9 & 9 & -3 \\ -16 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

[50] El segundo determinante es nulo ya que la 1^acol y la 2^a son L.D

[51] El segundo determinante es nulo ya que la 1^acol y la 2^a son L.D

[52] El segundo determinante es nulo ya que la 2^acol y la 3^a son L.D

$$A\cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I$$

- $(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$(Adj(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I$$

- Vamos a calcular A^{-1}

Por los apartados anteriores; podemos observar con facilidad que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$

Por lo tanto $A^{-1} = \dfrac{1}{42}\begin{pmatrix} -10 & 9 & -16 \\ 4 & 9 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{21} & \frac{3}{14} & -\frac{8}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{21} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{14} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.40 *Dadas las matrices* $D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *e* I *la matriz identidad de orden 3, comprobar: a) Que* D^2 *es la matriz nula b) Que* D *no tiene inversa c) Que* $D-I$ *si admite inversa. d) Demostrar que siempre que* D^2 *sea la matriz nula entonces se tiene que* $(D-I)^{-1} = -D-I$ *e) Calcula la inversa de* $D-I$

- $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- D no es regular (no admite inversa); ya que $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ por tener una columna nula

- Calculemos $D - I = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$D-I$ es regular (admite inversa); ya que $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -1$

- Veamos si es cierta la implicación. Si $D^2 = O \Longrightarrow (D-I)^{-1} = -D-I$

Para demostrar la tesis, bastará con comprobar que $\begin{cases} (-D-I)(D-I) = I \\ (D-I)(-D-I) = I \end{cases}$

Veamos la primera

$(-D-I)(D-I) = -D^2 + D\cdot I - I\cdot D + I^2 =$[53]$O+O+I=I$
Veamos la segunda
$(D-I)(-D-I) = -D^2 - D\cdot I + I\cdot D + I^2 =$[54]$O+O+I=I$
Con lo que queda demostrado que

$$(D-I)^{-1} = -D-I$$

- Calculemos ahora $(D-I)^{-1}$

Por el apartado anterior, sabemos que $(D-I)^{-1} = -D-I$, por lo tanto

$$(D-I)^{-1} = -D-I = -\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.41 *Dadala matriz* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *determina a)*$|A|$ *b)* $(Adj(A))^t$ *c)* $A\cdot(Adj(A))^t$ *d)* $(Adj(A))^t\cdot A$*(Nota: Cuidado; porque B no admite inversa)*

Exercise 4.1.42 *Calcula como quieras el determinante* $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} =^{55} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} ==^{56} (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$4a+1$

Exercise 4.1.43 *Calcula como quieras el determinante* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2 & b+3 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =^{57} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & b+3 & c-1 \\ a+b+c & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+3 & c-1 \\ 1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} =^{58} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

[53] Por hipótesis $D^2 = O$
Por ser I la matriz identidad $\begin{cases} D\cdot I = I\cdot D \to DI - ID = O \\ I^2 = I \end{cases}$

[54] Por hipótesis $D^2 = O$
Por ser I la matriz identidad $\begin{cases} D\cdot I = I\cdot D \to -DI + ID = O \\ I^2 = I \end{cases}$

[55] Si a la 1^acol le sumamos la 2^acol, la 3^acol y la 4^a col el determinante no varía

[56] Si a la 2^a le restamos la 1^a , a la 3^a le restamos la 1^a y a la 4^a le restamos la 1^a el determinante no varía

[57] Si a la 1^acol le sumamos la 2^acol y la 3^acol el determinante no varía

[58] Si a la 2^a le restamos la 1^a y a la 3^a le restamos la 1^a el determinante no varía

$$=^{59}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(a+b+c)$$

Exercise 4.1.44 *Calcula el determinante de la matriz* $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Y si alguien se aburre que calcule C^{-1} *(¡Suerte!)*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =^{60} \begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{61} 2\begin{vmatrix} -11 & 8 & 1 & -3 \\ 14 & -2 & 0 & 0 \\ 79 & -57 & 0 & 24 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 14 & -2 & 0 \\ 79 & -57 & 24 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=^{62} 2\begin{vmatrix} 14 & -2 & 0 \\ 7 & -9 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = 2(-14\cdot 9 + 2\cdot 7) = -224$$

Si alguien está aburrido que compruebe que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{112} & \frac{9}{112} & -\frac{1}{56} & -\frac{5}{56} & \frac{3}{7} \\ \frac{13}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & 3 \\ -\frac{15}{28} & \frac{1}{28} & \frac{3}{14} & \frac{15}{14} & -\frac{15}{7} \\ -\frac{45}{28} & \frac{3}{28} & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} & -\frac{97}{14} \\ \frac{167}{112} & -\frac{13}{112} & -\frac{11}{56} & -\frac{167}{56} & \frac{40}{7} \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.45 *Calcula los siguientes determinantesa)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} =^{63} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 19 & 37 & 61 \end{vmatrix} =$

[59] Si a la 3^a le sumamos la 2^a el determinante no varía

[60] $1^{a\prime} = 1^a - 2\cdot 4^a$

[61] $2^a\prime = 2^a - 1^a$

$3^a\prime = 3^a - 7\cdot 1^a$

[62] $2^a\prime = 2^a - 24\cdot 3^a$

[63] $\begin{cases} 2^a col' = 2^a col - 1^a col \\ 3^a col' = 3^a col - 2^a col \\ 4^a col' = 4^a col - 3^a col \end{cases}$

$$\stackrel{[64]}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 8 & 19 & 18 & 24 \end{vmatrix} \stackrel{[65]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 19 & 18 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

$$\text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \stackrel{[66]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 & d^2-c^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-b^3 & d^3-c^3 \end{vmatrix} \stackrel{[67]}{=}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+b & d+c \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+cb+b^2 & d^2+dc+c^2 \end{vmatrix} \stackrel{[68]}{=}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-a & d-b \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+cb-ab-a^2 & d^2+dc-cb-b^2 \end{vmatrix} \stackrel{[69]}{=}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-a & d-b \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & (c-a)(c+a+b) & (d-b)(d+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c+a+b & d+b+c \end{vmatrix} \stackrel{[70]}{=}$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c+a+b & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-b)(d-a)$$

Exercise 4.1.46 *Calcular el determinante* $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}$ *en función del determinante* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$

---

[64] $\begin{cases} 3^a col'' = 3^a col' - 2^a col' \\ 4^a col'' = 4^a col' - 3^a col' \end{cases}$

[65] $4^a col''' = 4^a col'' - 3^a col''$

[66] Restando cada columna a la anterior

[67] $\begin{cases} b^2-a^2 = (b-a)(b+a) \\ b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2) \end{cases}$
$\begin{cases} c^2-b^2 = (c-b)(c+b) \\ c^3-b^3 = (c-b)(c^2+cb+b^2) \end{cases}$
$\begin{cases} d^2-c^2 = (d-c)(d+c) \\ d^3-c^3 = (d-c)(d^2+dc+c^2) \end{cases}$

[68] $3^a col\prime = 3^a col - 2^a col$
$4^a col\prime = 4^a col - 3^a col$

[69] $c^2+cb-ab-a^2 = c^2-a^2+cb-ab = (c-a)(c+a)+(c-a)b = (c-a)(c+a+b)$
$d^2+dc-cb-b^2 = d^2-b^2+dc-cb = (d-b)(d+b)+(d-b)c = (d-b)(d+b+c)$

[70] Restando 4^a columna a la anterior

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} =^{71} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(m+n+l) & n+l & l+m \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

Por ser lineal el determinante con respecto a la 1^a col

$$= 2 \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ m+n+l & n+l & l+m \\ x+y+z & y+z & z+x \end{vmatrix} =^{72}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b-a & c+a \\ m & n-m & l+m \\ x & y-x & z+x \end{vmatrix} =^{73} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Exercise 4.1.47 *Calcula utilizando las propiedades*

$$a) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$a) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$$

Restándole a cada fila la anterior tendremos

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f)$$

$$b) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Restándole a cada columna la anterior tendremos

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 2a & b-a & b-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante por los adjuntos de la 3^a fila

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 2a & b-a & b-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-ab \\ b-a & b-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,(b-a) & b\,(b-a) \\ b-a & b-a \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)^2(a-b)$$

Como $(b-a)^2 = (a-b)^2$ entonces

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

---

[71] $1^a col' = 1^a col + 2^a col + 3^a col$

[72] Restando a cada columna la siguiente

[73] $2^a col' = 2^a col + 1^a col$

$3^a col\prime = 3^a col - 1^a$

c) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

Hazlo como ejercicio

$$\text{Ayuda}\left\{:\begin{array}{l} \begin{pmatrix} b+c \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b \\ c+a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ c \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ b \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Con esta ayuda has de obtener que $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ 0 & a & c \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$

después, calcúlalo por los adjuntos de una fila(o columna). Has de obtener $4abc$

Exercise 4.1.48 *Calcula los siguientes determinantes, ahora por la regla de Chio*

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Exercise 4.1.49 *Resuelve la ecuación* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

En primer lugar calcularemos el determinante.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 2(x-1)(x-2)-(x+3)+4(x-1)-(x-2)(x+3) = x^2-4x+3$

El problema queda reducido a resolver la ecuación

$$\begin{aligned} x^2-4x+3 &= 1-7x \to x^2+3x+2=0 \\ \textit{Cuyas soluciones son } x &= -1 \text{ y } x=-2 \end{aligned}$$

Exercise 4.1.50 *Resuelve la ecuación* $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$

En primer lugar calcularemos el determinante.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =^{[74]} \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 2x \\ 6+2x & x-1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x+2 & 2x \\ 6+2x & 5 \end{vmatrix} = 4x^2+7x+10$$

El problema queda reducido a resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 4x^2+7x+10 &= 67 \rightarrow 4x^2+7x-57=0 \\ \textit{Cuyas soluciones son } x &= 3 \text{ y } x = -\frac{19}{4} \end{aligned}$$

Exercise 4.1.51 *Calcula el siguiente determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =^{[75]} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$=^{[76]} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -17 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -17 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{33}{2}$$

Exercise 4.1.52 *Calcula el siguiente determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}$ *triangularizando*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}^{[77]} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}^{[78]} =$$

[74] 1^acol$'$ =1col+2·2^a*col*
[75] 1^a fila$'$=1^afila+2^a fila
[76] 1^a fila$'$=1^afila+3^a fila
4^a fila$'$=4^afila+5·3^a fila
[77] Intercambiamos 1^a fila y 2^a fila. El determinante cambia de signo
[78] 1^a fila$'$=1^afila+2^a fila

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix} =$$ [79] $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 20 \end{vmatrix}$$ [80] $=$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$ [81] $$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix} =$$

[82] $$= -3\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}$$ [83] $$= -3\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} =$$

$$-3\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{33}{2}$$

Exercise 4.1.53 *Determina los valores de m que anulan el determinante* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$

En primer lugar, calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix} = (m+1)(2m+1) - 2m^2 + m(2m+1) - m(2m+1) = 3m+1$

Por lo tanto, el único valor que anula el determiante es la solución de la ecuación $3m+1=0 \to m = -\frac{1}{3}$

Exercise 4.1.54 *Comprueba que el determinante* $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3560 \\ 1 & 7 & 4 & 1740 \\ 2 & 8 & 3 & 2830 \\ 7 & 9 & 9 & 7990 \end{vmatrix}$ *es nulo*

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3560 \\ 1 & 7 & 4 & 1740 \\ 2 & 8 & 3 & 2830 \\ 7 & 9 & 9 & 7990 \end{vmatrix}$$ [84] $= 0$

---

[79] Por ser lineal el determinante con respecto a la 2^a fila, introducimos el -1 multiplicando a la 2^a fila

[80] 3^a fila$'$=3^afila-2^a fila
4^a fila$'$=4^afila-5·2^a fila

[81] 4^a fila$'$=4^afila-4·3^a fila
5^a fila$'$=5^afila-3·3^a fila

[82] Por ser lineal el determinante con respecto a la 4^a fila

[83] 5^a fila$'$=5^afila-4^a fila

[84] Como la 4^a columna es combinación lineal de la 1^a,2^a,3^a entonces el determinante se

Exercise 4.1.55 *Comprueba que* $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3563 \\ 1 & 7 & 4 & 1743 \\ 2 & 8 & 3 & 2833 \\ 7 & 9 & 9 & 7993 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3563 \\ 1 & 7 & 4 & 1743 \\ 2 & 8 & 3 & 2833 \\ 7 & 9 & 9 & 7993 \end{vmatrix} =^{85} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercise 4.1.56 *Determina la matriz* X *que satisface la ecuación:* $3X + I_3 = A \cdot B - A^2$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}$

Como $3X + I_3 = A \cdot B - A^2 \to 3X = A \cdot B - A^2 - I_3 = A(B - A) - I_3$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B - A) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Como $3X = A \cdot (B - A) - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \to X = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.57 *Sea* $C = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix}$ *encontrar* k *para que a)* $\exists C^{-1}$ *b)* $Rango C = 3$

Calculo $|C| = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} =^{86} -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & -k & -1 \end{vmatrix} =$

$$=^{87} -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =^{88} 3k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$=^{89} 3k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k(-3k + k^2) = 3k^2(k - 3)$$

anula (*En concreto* ,$4^a col = 1000 \cdot 1^a col + 100 \cdot 2^a col + 10 \cdot 3^a$)

[85] $4^a col' = 4^a col - 1000 \cdot 1^a col - 100 \cdot 2^a col - 10 \cdot 3^a col$

[86] Por ser lineal el determinante con respecto a cada columna

[87] $2^{a\prime} fil$=2^afil-1^afil; $3^{a\prime} fil$=3^afil-1^afil; $4^{a\prime} fil$=4^afil-1^afil

[88] Por ser lineal el determinante con respecto a cada fila

[89] Calculando el determinante por los adjuntos de la primera columna

Valores que anulan el determinante de C

$$3k^2(k-3)=0 \to k=0 \text{ y } k=3$$

Casos:

$I)$ Si $k \neq 0$ y $k \neq 3 \to |C| \neq 0 \to RangoC = 4$ y además C es regular (C admite inversa)

$II)$Si $k=0 \to |C| = 0 \to RangoC < 4$

Estudiemos su rango $rang \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$
$rang \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$

$II)$Si $k=3 \to |C| = 0 \to RangoC < 4$

Estudiemos su rango $rang \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -8 & -7 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -8 & -7 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$
$= rang \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$

Exercise 4.1.58 *Calcula el rango por columnas de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *utilizando determinantes*

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \to RangoA \geq 2$ ya que la 1^ay 2^acolumnas son L.Independientes

¿La 3^acol es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la tercera columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas 1^a,2^a y 3^a.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .Si fuesen los dos nulos, la 3^a columna sería C.L de la 1^a y la 2^a. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}, = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$la 3^a columna es C.L de la 1^a y la 2^a

¿La 4^acol es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la cuarta columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas 1^a,2^a y 4^a.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ .Si fuesen nulos, la 4^a columna sería C.L de la 1^a y la 2^a. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$la 4^a columna es C.L de la 1^a y la 2^a

¿La 5^acol es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Para saberlo; tendré que orlar el menor anterior no nulo con la quinta columna y el resto de filas para obtener todos los menores de orden tres donde intervengan las columnas 1^a,2^a y 5^a.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ .Si fuesen nulos, la 5^a columna sería C.L de la 1^a y la 2^a. En caso contrario (al menos uno no nulo) las tres columnas serían L.Independientes

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$la 5^a columna no es C.L de la 1^a y la 2^a

Las columnas 1^a,2^a y 5^a son L.I y además la 3^a es C.L. de la 1^a y la 2^a ; al igual que ocurre con la 4^a

Por lo tanto $RangA = 3$

Exercise 4.1.59 *Calcula el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro a*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 1+a & 1-2a \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 1-2a \\ -2 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} = -2a^2 + 12a - 18 = -2(a-3)^2,$$

$I)$ Si $a \neq 3 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow RangoA = 4$

$II)$Si $a = 3 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow RangoA < 4$

$$Rang\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\3&1&1&1\\1&-1&3&-3\\4&2&0&3\end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&4&-5\\0&-2&4&-5\\0&-2&4&-5\end{pmatrix}=$$
$$=Rang\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&4&-5\\0&-2&4&-5\end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&4&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

Exercise 4.1.60 *Calcula el rango de la matriz* $A=\begin{pmatrix}a&a-1&1\\a+2&1&1\\a+1&0&a+1\end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro a*

$|A|=\begin{vmatrix}a&a-1&1\\a+2&1&1\\a+1&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix}a&a-1&1\\a+2&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=(a+1)(a-a^2)==-a\,(a-1)\,(a+1)$

Valores que anulan $|A|$

$-a\,(a-1)\,(a+1)=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\a=1\\a=-1\end{cases}$

$I)$Si $a\neq0$ y $a\neq1$ y $a\neq-1\rightarrow|A|\neq0\rightarrow RangoA=3$

$II)$ Si $a=0\rightarrow|A|=0\rightarrow RangoA<3$

$$rang\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=$$
$$=rang\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=2$$

$III)$Si $a=1\rightarrow|A|=0\rightarrow RangoA<3$

$$rang\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

$IV)$Si $a=-1\rightarrow|A|=0\rightarrow RangoA<3$

$$rang\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=2$$

Exercise 4.1.61 *Dada la matriz* $M=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&m\\m&2&-1\end{pmatrix}$ *donde m es un parámetro real, se pide:*
a) Determinar el rango de M según los valores de m
b) Calcular $|M|$ si $m=3$.¿ Tiene inversa?
c) Dar un valor de m para que M sea singular (no admita inversa)
d) Si $m=0$, calcula M^{-1}

a) $M=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&m\\m&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow|M|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&m\\m&2&-1\end{vmatrix}=-1-m+2m^2=2\left(m+\frac{1}{2}\right)(m-1)$

Casos:

I) Si $m \neq 1$ y $m \neq -\dfrac{1}{2} \rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow$Las tres filas (o columnas son L.I), por lo tanto el $RangM = 3$

II) Si $m = 1 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$Las tres filas de M son L.Dependientes $\rightarrow Rang(M) < 3$

$Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$[90] $= Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

III) Si $m = -\dfrac{1}{2} \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$Las tres filas de M son L.Dependientes $\rightarrow Rang(M) < 3$

$Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$[91] $= Rang\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

b) Como $|M| = 2m^2 - m - 1$,entonces si $m = 3 \rightarrow |M| = 14$

M es regular ya que $|M| \neq 0$

c) Para que M sea singular (*no admita inversa*) su determinante ha de ser cero. Esto ocurre para los siguientes valores $m = 1$ y $m = -\dfrac{1}{2}$

d) Si $m = 0 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

- $|M| = -1$
- $Adj(M) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
- $(Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
- $M^{-1} = \dfrac{1}{|M|}(Adj(M))^t = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.62 *Estudiar el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$

Por Gauss

---

[90] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

[91] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix} =^{92} Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & -k+4 \end{pmatrix} =^{93} Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} =$$

$$^{94} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & 0 & k^2-4k+3 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -k+4 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) \end{pmatrix}$$

Casos

I) Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \rightarrow RangA = 3$

II) Si $k = 1 \rightarrow RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$

III) Si $k = 3 \rightarrow RangA = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$
2

Hazlo ahora tú; pero utilizando menores complementarios

Exercise 4.1.63 *Calcular el valor de k para que el rango de A sea 2*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 & 6 & k \end{pmatrix}^{95} = Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & k \end{pmatrix}$$

Es evidente que el $RangA = 2$ si $k = -1$ ya que las dos últimas filas coincidirían.

Exercise 4.1.64 Selectivo 2004 *Determinar el valor real x para el cual se cumple la propiedad siguiente:*

el determinante de la matriz 2B es 160 donde $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $\left.\begin{array}{c} |2B| = 2^3\,|B| \\ y \\ |2B| = 160 \end{array}\right\} \rightarrow |B| = 20$

Como $|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1$,entonces tendremos que resolver la ecuación:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \rightarrow x^3 - x^2 + x - 21 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 3, x = -1 + i\sqrt{6}, x = -1 - i\sqrt{6}$

La que nos pide es $x = 3$; ya que las otras dos no son números reales.

---

[92] $3^a fila\prime = 3^a fila - 4 \cdot 1^a fila$
[93] Si intercambiamos la 2^a y 3^afila el rango no varía
[94] $3^a fila\prime = 3^a fila - k \cdot 2^a fila$
[95] $2^a fila\prime = 2^a fila - 2 \cdot 1^a fila$
$3^a fila\prime = 3^a fila - 4 \cdot 1^a fila$

Exercise 4.1.65 Selectivo (2004) *Calcular la matriz X cuadrada de orden tal que $A \cdot X = X \cdot A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*

Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ como $A \cdot X = X \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$ Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y+2z = 0 \\ -2x-3y+2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\}^{96} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z-t = 0 \\ -2x-3y+2t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\}$$

Si utilizamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{97} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow^{98}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+z-t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El sistema es compatible doblemente indeterminado}$$

El conjunto solución es $S = \left\{(-z+t, \frac{2}{3}z, z, t) \ / \ z, t \in \Re\right\}$

Otra manera de expresar el conjunto solución sería ésta:

$S = \{(-3\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha, \beta) \ / \ \alpha, \beta \in \Re\} = \{\alpha(-3,2,3,0) + \beta(1,0,0,1) \ / \ \in \Re\}$

El conjunto de las matrices X que conmutan con la matriz A son de la forma:

$$S = \left\{\begin{pmatrix} -z+t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix} \ / \ z, t \in \Re\right\}$$

También se puede expresar así:

$$S = \left\{\begin{pmatrix} -3\alpha+\beta & 2\alpha \\ 3\alpha & \beta \end{pmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \Re\right\}$$

o así

$$S = \left\{\alpha\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ \alpha, \beta \in \Re\right\}$$

Exercise 4.1.66 Selectivo 2004 *Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

a) Justificad que existe la matriz A^{-1}, y calculad el determinante de A^{-1}

b) Calcula la matriz $B = A(A+4I)$

c) Setermina los números reales x, y, z, t tales que $A^{-1} = xA + yI$, $A^2 = zA + tI$

[96] la 1^a ecuación y la última son opuestas. Podemos prescindir de una de ellas

[97] $2^a fila\prime = 2^a fila + 2 \cdot 1^a fila$

[98] $3^a fila\prime = 3^a fila + 2^a fila$

a) Como $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow A$ admite inversa

En virtud de la regla de Laplace$\rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B|$

Como $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1$

$\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{-1}{8}$

b) $B = A(A{+}4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$

Calculem $(A + 4I) \cdot A = A^2 + 4IA = A^2 + 4AI = A(A + 4I) = -4I$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\left. \begin{array}{l} A(A+4I) = -4I \\ (A+4I)A = -4I \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A\left[-\dfrac{1}{4}(A+4I)\right] = I \\ \left[-\dfrac{1}{4}(A+4I)\right] A = I \end{array} \right\} \rightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A+$
$4I) = -\frac{1}{4}A - I$

Por ser $A(A{+}4I) = -4I \rightarrow A^2{+}4AI = -4I \rightarrow A^2 = -4AI{-}4I = -4A{-}4I$

Por lo tanto $x = -\frac{1}{4}$, $y = -1$, $z = -4, t = -4$

No nos piden A^{-1}, pero si quisieramos calcularla:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}A{-}I = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.67 Selectivo (2002) *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 1 & z & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los determinantes de A *y de* B

b) Para $x = y = z = 1$ *calcular el determinante de* $A \cdot B$

c) Obtener razonadamente, para qué valores de x, y, z *ninguna de las matrices* A *y* B *tiene inversa*

a) $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 8y + 2z$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix} = -4y + 3z - x$

b) Si $x = y = z = 1 \rightarrow \begin{array}{l} |A| = 4 \\ |B| = -2 \end{array} \rightarrow |A \cdot B| = |A|\,|B| = 4 \cdot (-2) = -8$

Otra forma de resolverlo más larga

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & 13 & -7 \end{vmatrix} = -8$$

c) Ninguna de las dos matrices tiene inversa $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} |A| = 0 \\ y \\ |B| = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 10x - 8y + 2z = 0 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

La solución es $S = \left\{ (\frac{1}{2}y, y, \frac{3}{2}y) \ / \ z \in \Re \right\}$

Exercise 4.1.68 Selectivo (2002) *Para cada número real* $\lambda, M(\lambda)$ *es la matriz* $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ *Se pide:*
a) Calcular$|M(\lambda)|$*,y justificar que para cualquier valor de* λ *existe la inversa* $(M(\lambda))^{-1}$
b) Calcular $(M(0))^{-1}$
c) Si $A = M(8), B = M(4)$ *y* $C = M(3)$ *calcúlese razonadamente, el determinante de la matriz producto* $A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$

a)$|M(\lambda)| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

La ecuación $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ no tiene solución real; por lo tanto sea cual sea el valor de λ el determinante de la matriz $M(\lambda)$ nunca se anula. Por lo que la matriz $M(\lambda)$ es regualar (admite siempre inversa).

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|M(0)| = 2$

$Adj(M(0)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

$[Adj(M(0))]^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$[M(0)]^{-1} = \dfrac{1}{|M(0)|} [Adj(M(0))]^t = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $|A| = |M(8)| = 8^2 - 2 \cdot 8 + 2 = 50, |B| = |M(4)| = 16 - 8 + 2 = 10$ y$|C| = |M(3)| = 9 - 6 + 2 = 5$

Además $\left|B^{-1}\right| = \dfrac{1}{10}, \left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{5}$

Como $\left|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}\right| = |A| \cdot \left|B^{-1}\right| \cdot \left|C^{-1}\right| = 50 \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{5} = 1$

Exercise 4.1.69 Selectivo (2002) *Dadas las matrices reales*

$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $M = A - 2B \cdot C$
b) Justifica que existe la matriz D^{-1}, inversa de, D y calcular tal matriz
c) Calcular las matrices X, Y que cumplen $D \cdot X = M = Y \cdot D$

a) $M = A - 2B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa ya que $|D| = -1$

Su inversa será $D^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Si $D \cdot X = M \to D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1} \cdot M \to I \cdot X = D^{-1} \cdot M$

$X = D^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}$

Si $Y \cdot D = M \to (Y \cdot D)D^{-1} = M \cdot D^{-1} \to Y \cdot I = M \cdot D^{-1}$

$Y = M \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.70 Selectivo (2001) *Calcular el vector* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *que verifique* $A \cdot X + B = C$ *siendo:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \to A$ es regular (admite inversa)

Calculémosla:

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

Para resolver la ecuación $A \cdot X + B = C \to A \cdot X = C - B$

Multiplicando esta igualdad por A^{-1} tendremos

$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}(C - B) \to \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1}(C - B)$

$I \cdot X = A^{-1}(C - B) \to X = A^{-1}(C - B)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}(C - B) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix} \rightarrow x = 1, y = -\frac{3}{2}, z = -\frac{17}{6}$$

Exercise 4.1.71 (Valencia 2005) *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, *y* $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *,calcular razonadamente la matriz* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *que satisface la ecuación* $(A \cdot B' + C) \cdot X = (A' \cdot D) \cdot E$ *donde* M' *significa la matriz traspuesta de la matriz* M

$$A \cdot B' + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta matriz $T = A \cdot B' + C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$$(A' \cdot D) \cdot E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta matriz $H = (A' \cdot D) \cdot E = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

El problema queda reducido a resolver la ecuación $T \cdot X = H$

Como $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ es tal que $|T| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 7$; entonces T es regular (admite inversa)

Multiplicando la relación $T \cdot X = H$ por T^{-1} tendremos:

$T^{-1} \cdot (T \cdot X) = T^{-1} \cdot H \rightarrow \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot X = T^{-1} \cdot H \rightarrow I \cdot X = T^{-1} \cdot H$

Así pues; la matriz incógnita X será igual a $T^{-1} \cdot H$

Calculemos pues T^{-1}

$$Adj(T) = \begin{pmatrix} -1 & -14 & -21 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(T)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} [Adj(T)]^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot H = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1.72 (Valencia 2003)*Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$
y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
a) ¿Para qué valores reales de m es A invertible?
b) En la matriz A con $m = 0$ obtened la matriz real cuadada X de orden 3 que satisfaga la igualdad $B - A \cdot X = A \cdot B$

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ calculemos su determinante

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3)$
Recuerda que una matriz cuadrada, A, es regular (admite inversa) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
Por lo tanto A admite inversa $\Longleftrightarrow m \neq 1$ y $m \neq 3$
Suponiendo pues que $m \neq 1$ y $m \neq 3$,vamos a calcular sus inversa

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(m-1)(m-3)}\begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix}$$

- Vamos ahora a resolver la ecuación $B - A \cdot X = A \cdot B$ cuando $m = 0$

$B - A \cdot X = A \cdot B \rightarrow B - A \cdot B = A \cdot X$
Como $B = I \cdot B$ entonces la ecuación queda así:
$I \cdot B - A \cdot B = A \cdot X$
Sacando factor común la matriz B, tendremos:
$(I - A) \cdot B = A \cdot X$
Multiplicando por la izquierda por A^{-1} tendremos:

$A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=A^{-1}\cdot(A\cdot X)\rightarrow A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=(A\cdot A^{-1})\cdot X$
$A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=I\cdot X\rightarrow X=A^{-1}\cdot[(I-A)\cdot B]=\left[A^{-1}\cdot(I-A)\right]\cdot B$
De donde deducimos:

$$X=\left[A^{-1}\cdot(I-A)\right]\cdot B\text{ [99]}=\left[A^{-1}-I\right]\cdot B$$

Como $m=0\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&3&0\\-4&-15&3\\1&0&0\end{pmatrix}$ y por lo tanto, la matriz buscada es:

$$X=\left[A^{-1}-I\right]\cdot B=\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&3&0\\-4&-15&3\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&1&0\\-\frac{4}{3}&-6&1\\\frac{1}{3}&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\-6&-\frac{4}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$$

Exercise 4.1.73 (Valencia 2003) *Dadas las matrices reales de orden 2* $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ *y* $Q=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ *calcular:*
a) La matriz P^{-1}
b) La matriz real cuadrada X*, de orden 2, tal que* $Q=P^{-1}\cdot X\cdot P$
c) Calcular $\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2$

- Como $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ y $|P|=-1\rightarrow P$ admite inversa y vale $P^{-1}=-\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}$
- ¿X? / $Q=P^{-1}\cdot X\cdot P$.

Multiplicamos, por la izquierda, por P
$P\cdot Q=P\cdot\left(P^{-1}\cdot X\cdot P\right)=\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot(X\cdot P)\rightarrow P\cdot Q=I\cdot(X\cdot P)=X\cdot P$
Multiplicando ahora, por la derecha, por P^{-1}
$(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=(X\cdot P)\cdot P^{-1}\rightarrow P\cdot Q\cdot P^{-1}=X\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)$
$(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=X\cdot I\rightarrow(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=X$
$X=(P\cdot Q)\cdot P^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=$
$X=\begin{pmatrix}2&6\\4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}$

- $\left(P\cdot Q\cdot P^{-1}\right)^2=X^2=\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-2\\6&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-10\\30&-11\end{pmatrix}$

Exercise 4.1.74 (Valencia 2003) *a)Calcular las matrices reales cuadradas de orden 3,* X *y* Y*, que satisfacen las ecuaciones siguientes* $\left\{\begin{array}{l}2X+Y=B\\X-2Y=C\end{array}\right.$ *, Solution is :* $\left\{Y=\frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C,X=\frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C\right\}$ *donde* $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ *y* $C=$

[99] $A^{-1}\cdot I=A^{-1}$ y $A\cdot A^{-1}=I$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcular la matriz $(2X+Y)\,X-(2X+Y)\,2Y$

- $\left\{ \begin{array}{l} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{array} \right.$ Resolviendo este sistema tendremos que:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{5}B+\frac{1}{5}C=\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ Y &= \frac{1}{5}B-\frac{2}{5}C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$