12 Representación de funciones

ACTIVIDADES INICIALES

12.I. Factorizando previamente las expresiones, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x^3-7x^2-14x+15=0$

b) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=x+\dfrac{7}{6}$

c) $x^6-4x^4-x^2+4=0$

d) $x+|x+2|+|x+3|=0$

a) $6x^3-7x^2-14x+15=0 \Rightarrow (x-1)(6x^2-x-15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 6x^2-x-15=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2},\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

b) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=x+\dfrac{7}{6} \Rightarrow 6\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)+6x^2=6x^2\left(x^2-1\right)+7x(x^2-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^4-6+6x^2=6x^4-6x^2+7x^3-7x \Rightarrow -7x^3+12x^2+7x-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(-7x^2-2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{\sqrt{22}}{7}-\dfrac{1}{7},\ x=-\dfrac{\sqrt{22}}{7}-\dfrac{1}{7} \end{cases}$

c) $x^6-4x^4-x^2+4=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x^2+1)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=1,\ x=-2,\ x=2$

d) $x+|x+2|+|x+3|=0 \Rightarrow \begin{cases} -x-5=0 & \text{si } x<-3 \\ x+1=0 & \text{si } -3\le x<-2 \\ 3x+5=0 & \text{si } x\ge -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 & \text{si } x<-3 \\ x=-1 & \text{si } -3\le x<-2 \\ x=\dfrac{-5}{3}=0 & \text{si } x\ge -2 \end{cases}$

Las soluciones son $x=-5$ y $x=\dfrac{-5}{3}$. $x=-1$ no es solución ya que está fuera del intervalo $[-3,-2)$.

12.II. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^3-7x+6\le 0$ **b)** $\dfrac{5x-2}{2x+1}\ge 0$ **c)** $\dfrac{x^2-1}{x+2}\le 0$ **d)** $|2x-4|-x\ge 0$

a) $x^3-7x+6\le 0 \Rightarrow x^3-7x+6=0 \Rightarrow x=-3,\ x=1,\ x=2$

$(-\infty,-3) \Rightarrow x=-4 \Rightarrow -64-28+6\le 0$. Sí

$(-3,1) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 6>0$. No

$(1,2) \Rightarrow x=1{,}5 \Rightarrow 3{,}375-10{,}5+6\le 0$. Sí

$(2,+\infty) \Rightarrow x=3 \Rightarrow 27-21+6>0$. No

Por tanto, la solución es: $(-\infty,-3]\cup[1,2]$.

b) $\dfrac{5x-2}{2x+1}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{5} \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2}, \text{ no pertenece a la solución.} \end{cases}$

$\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right) \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \dfrac{-7}{-1}\ge 0$. Sí $\quad \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5}\right] \Rightarrow x=0 \Rightarrow \dfrac{-2}{1}<0$. No $\quad \left[\dfrac{2}{5},+\infty\right) \Rightarrow x=1 \Rightarrow \dfrac{3}{3}\ge 0$. Sí

Por tanto, la solución es: $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right)$.

c) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\le 0 \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2, \text{ no pertenece a la solución.} \end{cases}$

$(-\infty,-2 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \dfrac{8}{-1}\le 0$. Sí

$(-2,-1] \Rightarrow x=-1{,}5 \Rightarrow \dfrac{1{,}25}{0{,}5}>0$. No

$[-1,1] \Rightarrow x=0 \Rightarrow \dfrac{-1}{2}\le 0$. Sí

$[1,+\infty) \Rightarrow x=2 \Rightarrow \dfrac{3}{4}>0$. No

Por tanto, la solución es: $(-\infty,-2)\cup[-1,1]$.

d) $|2x-4|-x=\begin{cases} -2x+4-x & \text{si } x<2 \\ 2x-4-x & \text{si } x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-3x\ge 0 & \text{si } x<2 \\ x-4\ge 0 & \text{si } x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{4}{3} \\ x\ge 4 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\cup[4,+\infty)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1. Indica los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos para las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{2}$ c) $f(x)=x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ e) $f(x)=x+\operatorname{sen}x$ g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2+4}$ d) $f(x)=|x+1|+|x-3|$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ h) $f(x)=e^{|x|}$

a) $D(f)=\mathbf{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{3x^2-6x}{2}=0\Rightarrow x=0,\ x=2$ son los puntos singulares y críticos.

b) $x^3+x^2+4=(x+2)(x^2-x+2)=0\Rightarrow x=-2$ es un punto de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{-x(3x+2)}{(x^3+x^2+4)^2}=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\dfrac{-2}{3}$ son los puntos singulares y críticos.

c) $D(f)=\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right)$ .En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función es continua solo por la derecha : $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}}\neq 0$.

No hay puntos singulares y no hay puntos críticos, ya que en $x=-\dfrac{1}{2}$ la función no es continua.

d) $D(f)=\mathbf{R}$. No hay puntos de discontinuidad.
Los puntos $x=-1$ y $x=3$ son críticos pero no singulares (en ellos no existe la primera derivada).
e) $D(f)=\mathbf{R}$. No hay puntos de discontinuidad.
$f'(x)=1+\cos x=0\Rightarrow x=(2k+1)\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$ son puntos singulares y críticos.
f) $D(f)=(-2, 2)\cup(2,+\infty)$. Es discontinua para $x=-2$ y para $x=2$.

$f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{2\sqrt{x}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ $f'(x)=0$ si $x=2$ ó $x=-2$, pero no son puntos singulares porque no pertenecen al dominio de definición, y no son críticos porque en ellos la función no es continua.
g) $D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2, 2)\cup(2,+\infty)$. Es discontinua para $x=2$ y $x=-2$.

h) $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x>0 \\ -e^{-x} & \text{si } x<0\end{cases}$ $\Rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad ni críticos. El punto $x=0$ es un punto crítico.

12.2. Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2$ b) $g(x)=\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ c) $h(x)=e^{x+2}$ d) $k(x)=(x+1)\ln|x|$

a) Eje Y: $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0, 0)$
Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=3\Rightarrow(0,\ 0)$ y $(3,\ 0)$
b) Eje Y: $x=0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow(0, 1)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}+3k\pi\Rightarrow\left(\dfrac{3\pi}{2}+3k\pi,\ 0\right)$ con $k\in\mathbf{Z}$

c) Eje Y: $x=0\Rightarrow f(0)=e^2\Rightarrow(0,\ e^2)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow e^{x+2}\neq 0\ \ \forall x\in\mathbf{R}$
d) Eje Y: $x=0\Rightarrow$ No existe $f(0)$.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x+1)\ln|x|=0\Rightarrow\begin{cases} x+1=0 \\ |x|=1\end{cases}\Rightarrow x=1,\ x=-1\Rightarrow(1, 0)$ y $(-1, 0)$

12.3. (TIC) Estudia el signo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ **c)** $f(x) = xe^x$ **e)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x-2}$ **f)** $f(x) = \ln|x|$

a) $f(x) = x^3+x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$

Los puntos de corte con el eje X son: $x(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 2 \quad x = -3$

La función es continua en todo **R**. Por tanto, solo se consideran los intervalos:

$(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

En $(-\infty, -3)$ la función es negativa; en $(-3, 0)$ positiva; en $(0, 2)$ negativa; y en $(2, +\infty)$ positiva.

b) Los puntos de corte con el eje X son $x = 2$ y $x = -2$.

Los puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = -1$.

Se consideran los intervalos de signo: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

En $(-\infty, -2)$ la función es positiva; en $(-2, -1)$ negativa; en $(-1, 1)$ positiva; en $(1, 2)$ negativa y en $(2, +\infty)$ positiva.

c) Los puntos de corte con el eje X son: $xe^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$

La única solución es $x = 0$, ya que el valor de una potencia de base e nunca puede ser nulo.

La función es continua en todo **R**.

En $(-\infty, 0)$ la función es negativa y en $(0, +\infty)$ es positiva.

d) La función es positiva en todo su dominio $[2, +\infty)$.

e) Los puntos de corte con el eje X son: $\dfrac{\ln x}{x-3} = 0 \Rightarrow x = 1$. El dominio es $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

En $(0, 1)$ la función es positiva; en $(1, 3)$ es negativa; y en $(3, +\infty)$ es positiva.

f) El dominio es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Los puntos de corte con X son $\ln|x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$.

En $(-\infty, -1)$ la función es positiva; en $(-1, 0)$ es negativa; en $(0, 1)$ es negativa; y en $(1, +\infty)$ es positiva.

12.4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x) = 1 + \dfrac{1+x^2}{x^4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ **c)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

a) $f(-x) = 1 + \dfrac{1+(-x)^2}{(-x)^4} = 1 + \dfrac{1+x^2}{x^4} = f(x) \Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y. Función par.

b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)+1} = \dfrac{-2x}{-x+1} = \dfrac{2x}{x-1} \Rightarrow$ No es par ni impar.

c) $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

d) $f(-x) = \dfrac{-x}{1-|-x|} = -\dfrac{x}{1-|x|} = -f(x) \Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

12.5. (TIC) Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, indica el período mínimo.

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ **b)** $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$ **c)** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ **d)** $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

a) $f(x+2\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+2\pi)}{1+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \Rightarrow$ Función periódica con período 2π.

b) $f(x+\pi) = 1 + \dfrac{1}{\cos^2(x+\pi)} = 1 + \dfrac{1}{(-\cos x)^2} = 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = f(x) \Rightarrow$ Función periódica con período π.

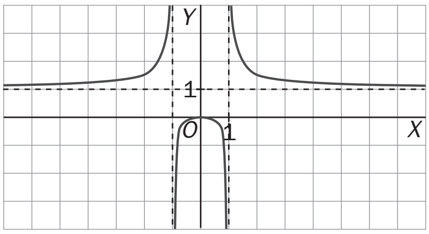
c) $f(x+2\pi) = \operatorname{sen}(3x+2\pi) + \operatorname{sen}(2x+4\pi) = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x = f(x) \Rightarrow$ Función periódica con período π.

d) No es periódica.

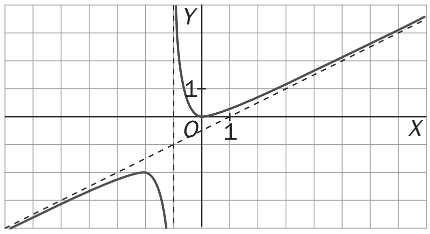
www.yoquieroaprobar.es

12.6. Indica las ramas infinitas que poseen las siguientes funciones:

a)



b)



a) La función presenta seis ramas infinitas:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

b) La función presenta cuatro ramas infinitas:

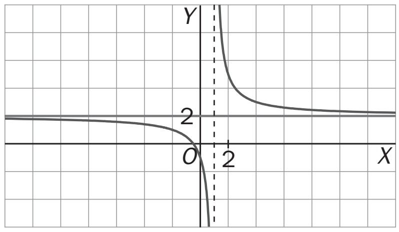
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

12.7. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

Con ayuda de estas asíntotas, traza, de forma aproximada, un esquema sobre las ramas infinitas de cada una de ellas.

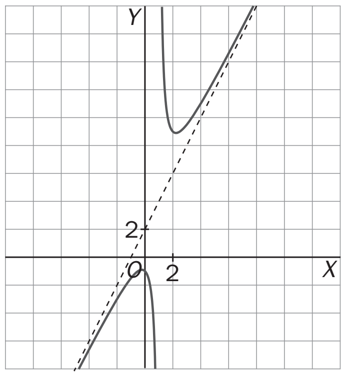


a) x = 1 es una asíntota vertical porque:

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

y = 2 es asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2 \Rightarrow y=2$

Al haber asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$, no hay oblicuas.



b) x = 1 es asíntota vertical pues $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$.

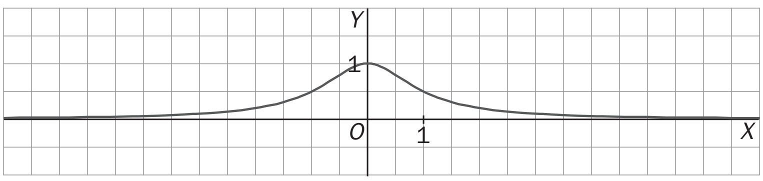
No hay asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\pm\infty$ $\Rightarrow y = 2x + 2$ es asíntota oblicua porque:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}=2\\[2ex] \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+2x}{x-1}=2\end{cases}$$

c) El dominio de la función es todo **R**; por tanto, no existen asíntotas verticales.

y = 0 es asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2+3}=0$.

No hay asíntotas oblicuas.



www.youquieroaprobar.es

12.8. Comprueba que la recta $y = x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6} - (x+6) \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1 - (x+6)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{22x - 35}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

12.9. (PAU) Dada la función $f(x) = xe^{-x}$:

a) Estudia si tiene asíntotas verticales.

b) Estudia si tiene asíntotas horizontales u oblicuas y la posición de la curva respecto a ellas.

a) El dominio es todo **R** y, por tanto, no puede haber asíntotas verticales.

b) La recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$ porque $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$ La función queda por encima de la asíntota, ya que para valores grandes de x se verifica que $xe^{-x} - 0 = \dfrac{x}{e^x} > 0$ .No hay asíntota oblicua en $-\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^{-x}}{x} = +\infty$.

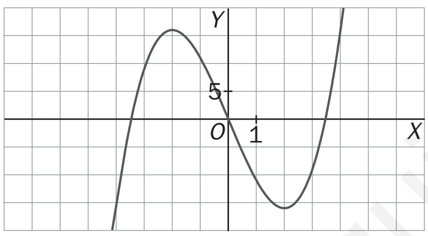
12.10. Representa gráficamente las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^3 - 12x$

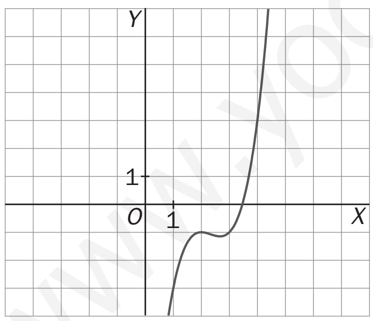
b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 13$

c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9x^2}{2}$

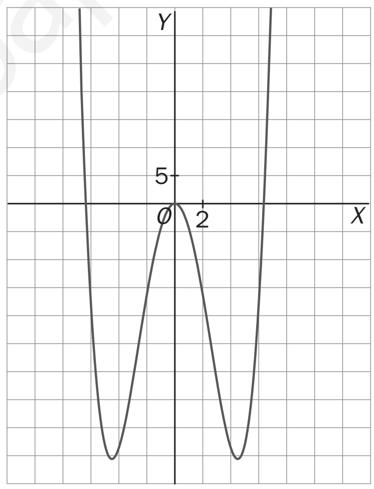
a)



b)



c)



12.11. (PAU) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 113$ tenga un máximo en el punto (5, 162).

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 113$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(5) = 163 \Rightarrow 125 + 25a + 5b - 113 = 162 \Rightarrow 25a + 5b = 150 \Rightarrow 5a + b = 30$

$f'(5) = 0 \Rightarrow 75 + 10a + b = 0 \Rightarrow 10a + b = -75$

$$\begin{cases} 5a + b = 30 \\ 10a + b = -75 \end{cases} \Rightarrow 5a = -105 \Rightarrow a = -21,\ b = 135$$

Por tanto, la función buscada es $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x - 113$.

www.yoquieroaprobar.es

12.12. (PAU) Calcula los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x - \frac{28}{3}$ tenga un punto de inflexión en (2, 0).

$f(2) = 0 \Rightarrow 4 + 8a + 4b + 24 - \frac{28}{3} = 0$

$f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx \rightarrow f''(x) = 3x^2 + 6ax + 2b = 0$

$f''(2) = 0 \Rightarrow 12 + 12a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema $4 + 8a + 4b + 24 - \frac{28}{3} = 0$ y $12 + 12a + 2b = 0$, se obtiene $a = \frac{-1}{3}$ y $b = -4$.

Por tanto, la función buscada es $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - \frac{28}{3}$

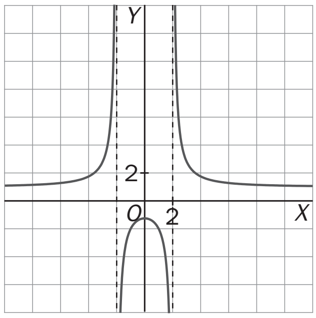
12.13. (PAU)(TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2-4}$ **b)** $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

Para ello, estudia las siguientes características:

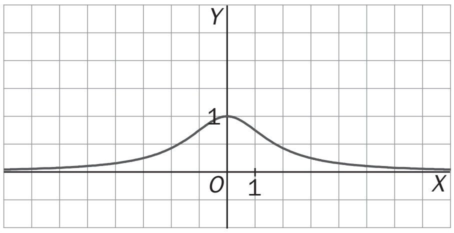
I. Dominio y continuidad
II. Puntos de corte con los ejes
III. Simetrías
IV. Asíntotas
V. Puntos singulares y crecimiento
VI. Puntos de inflexión y concavidad

a) I. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Es discontinua para $x = -2$ y para $x = 2$.
II. Presenta simetría respecto al eje *Y*.
III. $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$
IV. Asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = -2$.
Asíntotas horizontales: $y = 1$ es asíntota horizontal, ya que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$



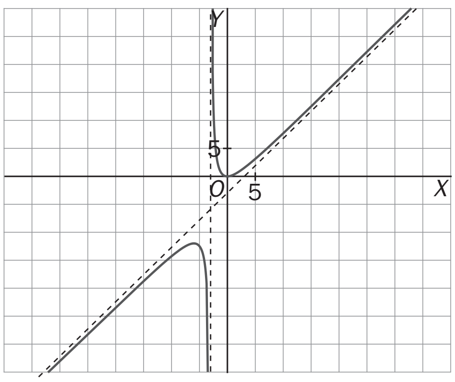
V. $f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-4)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; Máximo: $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$
Crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.
VI. $f''(x) = \frac{54x^2 + 72}{(x^2-4)^3} \neq 0$, por tanto, no hay puntos de inflexión.
Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$.

b) I. $D(f) = \mathbf{R}$. Es continua en todo su dominio.
II. Es simétrica respecto al eje *Y*.
III. (0, 1).
IV. Solo tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.



V. $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+3)^2}$ Decrece en $(0, +\infty)$ y crece en $(-\infty, 0)$.
Máximo en (0, 1).
VI. $f''(x) = \frac{18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$. Puntos de inflexión $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$
Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1) \cup (1 + \infty)$.

c) I. $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$
II. No es simétrica.
III. (0, 0)
IV. Asíntotas verticales: $x = -3$. Asíntotas oblicuas: $y = x - 3$.



V. $f'(x) = \frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -6, x = 0$.
Decrece en $(-6, -3) \cup (-3, 0)$ y crece en $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$.
Máximo en $(-6, -12)$ y mínimo en $(0, 0)$
VI. $f''(x) = \frac{18}{(x+3)^3} \neq 0$. Por tanto, no hay puntos de inflexión.
Es cóncava hacia arriba en $(-3, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3)$.

www.yoquieroaprobar.es

12.14. (TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones irracionales, estudiando su dominio, los puntos de corte con los ejes, sus asíntotas y los máximos y mínimos relativos. Establece el crecimiento, la concavidad y los puntos de inflexión.

a) $f(x) = x + \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

a) 1. $D(f) = [0, +\infty)$

2. Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

3. Asíntotas verticales: no tiene.

Asíntotas horizontales: no tiene.

Asíntotas oblicuas: no tiene porque

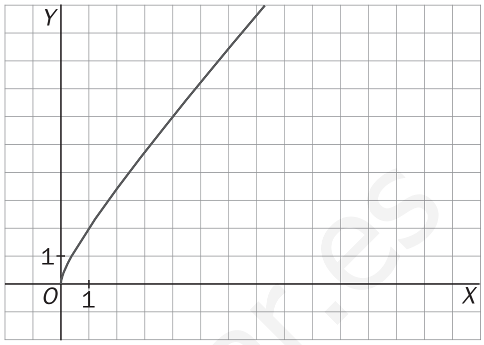
$n = \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty.$

4. Máximos y mínimos: no tiene.

Crece en todo su dominio.

5. No tiene puntos de inflexión.

Es cóncava hacia abajo en todo su dominio.



b) 1. $D(f) = (-1, +\infty)$

2. Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

3. $x = -1$ es asíntota vertical porque $\lim_{x\to-1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}} = +\infty.$

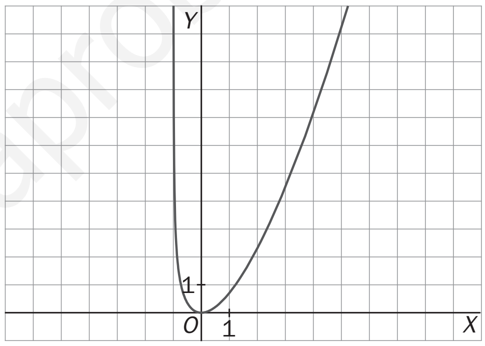
No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

4.Máximos y mínimos: Mínimo relativo en el (0,0)

Crece en $(0, +\infty)$. Decrece en (–1, 0)

5. No tiene puntos de inflexión.

Es cóncava hacia arriba en todo su dominio.



12.15. Estudia los intervalos de crecimiento y los puntos singulares de la siguiente función: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

El dominio de la función es todo **R**.

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

No hay ningún punto de discontinuidad y ningún punto anula la derivada. Además, para $x = 0$ la derivada no está definida. Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. El (0, 0) es un mínimo relativo.

12.16. (TIC) Halla las asíntotas oblicuas de la función: $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

$y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ porque:

$m = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$ y $n = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

$y = -x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ porque:

$m = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1$ y $n = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

12.17. (PAU)(TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones exponenciales, realizando el estudio de:

I. Dominio

II. Puntos de corte con los ejes

III. Simetrías

IV. Puntos singulares y crecimiento

V. Asíntotas

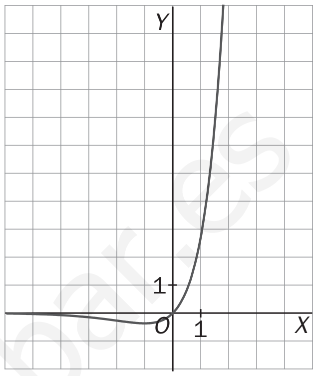
a) $f(x) = xe^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **c)** $f(x) = e^{x+1}$ **d)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4}$

a) I. El dominio es todo el conjunto **R**.
II. La función no es par ni impar.
III. Puntos de corte con los ejes $xe^x = 0 \Rightarrow (0, 0)$
IV. No tiene asíntotas verticales porque el dominio es **R**.
La recta $y = 0$ es asíntota tanto en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

No hay asíntota oblicua ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

V. $f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$
En $(-\infty, -1)$ $f'(-2) < 0 \Rightarrow$ La función decrece.
En $(-1, +\infty)$ $f'(0) > 0 \Rightarrow$ La función crece. Mínimo en $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$

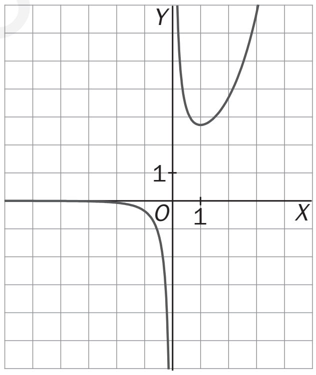


b) I. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
II. La función no es par ni impar.
III. No corta a los ejes.
IV. La recta $x = 0$ es asíntota vertical porque:

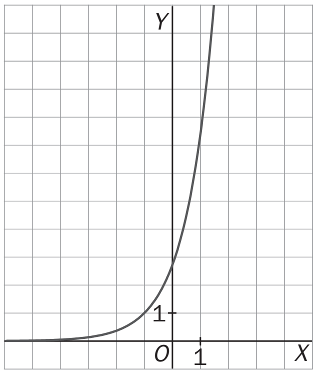
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.
En $+\infty$ no hay asíntota oblicua, ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

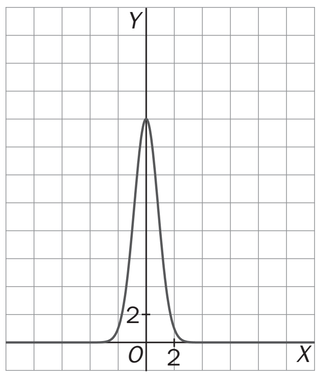
V. $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$ En $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ la función decrece;
y en $(1, +\infty)$ crece. Máximo en $(1, e)$.



c) I. $D(f) = (-\infty, +\infty)$
II. La función no es par ni impar.
III. No tiene puntos de corte con los ejes.
IV. Asíntotas verticales no tiene.
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.
No tiene asíntotas oblicuas.
V. $f'(x) = e^{x+1} \neq 0$
No tiene máximos ni mínimos y la función es siempre creciente.



d) I. $D(f) = (-\infty, +\infty)$
II. La función es par.
III. Punto de corte con los ejes: (0, 16).
IV. La recta $x = 0$ es asíntota horizontal.
V. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4} \cdot \ln\dfrac{1}{2} \cdot 2x = 0 \Rightarrow x = 0$
En $(-\infty, 0)$ la función es creciente, en $(0, +\infty)$ es decreciente.
En (0, 16) hay un máximo absoluto.



www.yoquieroaprobar.es

12.18. (PAU)(TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas, mediante el estudio de:

I. Dominio

II. Puntos de corte con los ejes

III. Asíntotas

IV. Puntos singulares y crecimiento

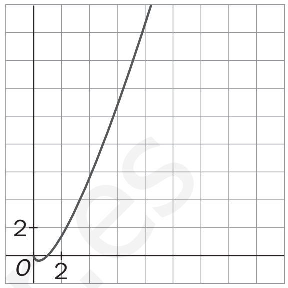
a) $f(x) = x \ln x$ **b)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **c)** $f(x) = \log(x^2 - 1)$ **d)** $f(x) = \ln(2x + 3)$

a) I. $D(f) = (0, +\infty)$

II. Puntos de corte con los ejes: (1, 0)

III. No tiene asíntotas verticales porque:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$



No tiene asíntota horizontal porque: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$.

No hay asíntotas oblicuas porque: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

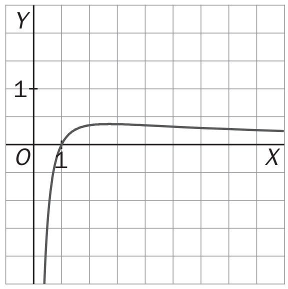
IV. $f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ la función decrece y en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ crece. Mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

b) I. $D(f) = (0, +\infty)$

II. Puntos de corte con los ejes (1, 0)

III. $x = 0$ es asíntota vertical porque: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$



$y = 0$ es asíntota horizontal porque: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

IV. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

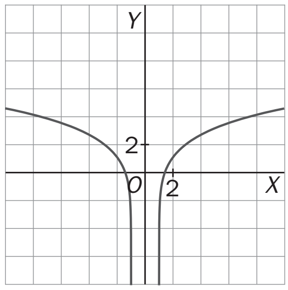
En $(0, e)$ la función crece y en $(e, +\infty)$ decrece. Mínimo relativo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

c) I. $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

II. Puntos de corte con los ejes: $\log(x^2 - 1) = 0$: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

III. La recta $x = -1$ es asíntota vertical por la izquierda porque

$\lim\limits_{x\to -1^-} \log(x^2 - 1) = -\infty$



La recta $x = 1$ es asíntota vertical por la derecha porque: $\lim\limits_{x\to 1^+} \log(x^2 - 1) = -\infty$

No tiene asíntotas oblicuas porque: $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\log(x^2 - 1) - x\right) = +\infty$

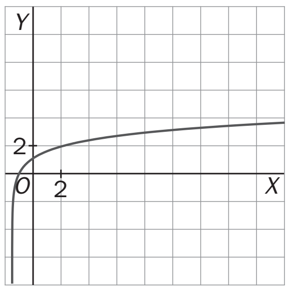
IV. $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 - 1)\cdot\ln 10} = 0 \Rightarrow x = 0$ que no pertenece al dominio.

La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. No presenta extremos relativos.

d) I. $D(f) = \left(\dfrac{-3}{2}, +\infty\right)$

II. Puntos de corte con los ejes $\ln(2x+3) = 0 \Rightarrow 2x+3 = 1 \Rightarrow (1, 0)$

III. La recta $x = \dfrac{-3}{2}$ es asíntota vertical porque $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} \ln(2x+3) = -\infty$



No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

IV. $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3} \neq 0$ no tiene extremos relativos.

La función es creciente en su dominio.

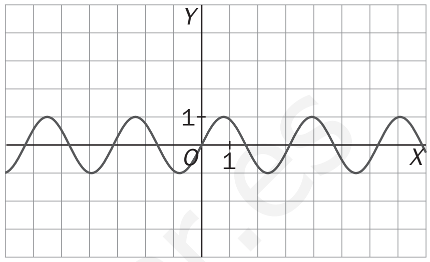
www.yoquieroaprobar.es

12.19. (TIC) Traza la gráfica de las siguientes funciones trigonométricas, haciendo un estudio completo de sus características:

a) $f(x) = \text{sen}(2x)$	**e) $f(x) = \text{tg}(2x)$**
b) $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$	**d) $f(x) = -2 + \cos(2x)$**
c) $f(x) = \text{sen}^2(\pi x)$	**f) $f(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right)$**

a) 1. Dominio: todo **R**

2. $f(-x) = \text{sen}(-2x) = -2\text{sen}2x \Rightarrow$ La función es impar.
$f(x + \pi) = \text{sen}(2(x + \pi)) = \text{sen}(2x + 2\pi) = \text{sen}2x = f(x)$
La función es periódica con período π.
Por tanto, solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, \pi]$.
El comportamiento de la gráfica en este intervalo se generalizará a todo **R**.



3. Eje X: $\text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = 0,\ 2x = \pi \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

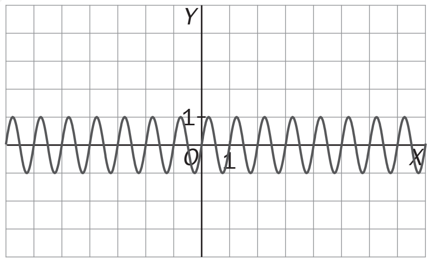
Los puntos de corte son $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, 0)$.

4. Asíntotas: no hay.

5. $f'(x) = 2\cos2x = 0 \Rightarrow \cos2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4}$. En $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ la función es creciente; en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ decreciente; y en $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ($\frac{3\pi}{4}$,π) creciente. Máximo $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$.

b) 1. Dominio: **R**

2. $f(-x) = \text{sen}(-2\pi x) = -2\text{sen}(2\pi x) = -f(x) \Rightarrow$ La función es impar.
$f(x+1) = \text{sen}(2\pi(x+1)) = \text{sen}(2\pi x + 2\pi) = \text{sen}(2\pi x) = f(x)$
La función es periódica con período 1.
Solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, 1]$.
El comportamiento de la gráfica en este intervalo se generalizará a todo **R**.



3. Los puntos de corte son $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(1, 0)$.

4. Asíntotas: no hay.

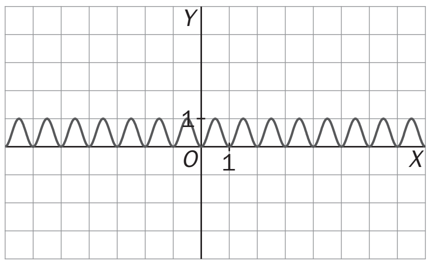
5. $f'(x) = 2\pi\cos2\pi x = 0 \Rightarrow \cos2\pi x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4},\ x = \frac{3}{4}$

En $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ la función es creciente; en $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ es decreciente; y en $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ la función es creciente.

Máximo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$.

c) 1. Dominio: **R**

2. $f(-x) = \text{sen}^2(-\pi x) = (-\text{sen}(\pi x))^2 = f(x) \Rightarrow$ La función es par.
$=f(x + 1) = \text{sen}^2(\pi\ (x+1)) = \text{sen}^2(\pi x + \pi) = (-\text{sen}(\pi x))^2 = \text{sen}^2 f(\pi x) = f(x) \Rightarrow$ La función es periódica con período 1.
Solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, 1]$.
El comportamiento de la gráfica en este intervalo, se generalizará a todo **R**.



3. Los puntos de corte son $(0, 0)$, $(1, 0)$.

4. Asíntotas: no hay.

5. $f'(x) = 2\pi\cdot\text{sen}\pi x\cdot\cos\pi x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 1$

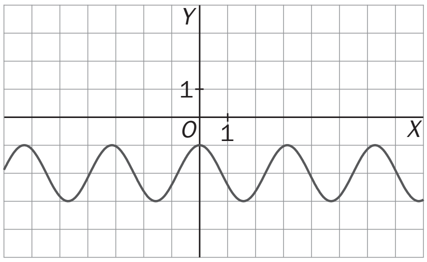
En $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ la función es creciente.

En $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ la función es decreciente.

Mínimo $(0,0)$. Máximo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Mínimo $(1, 0)$

www.yoquieroaprobar.es

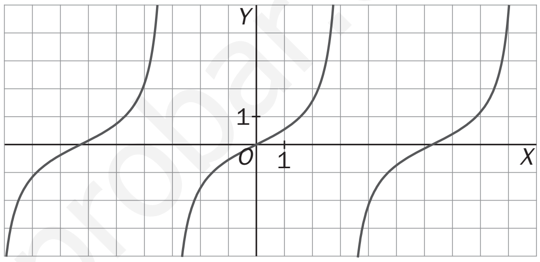
d) 1. Dominio: **R**
2. $f(-x) = -2 + \cos(-2x) = -2 + \cos(2x) \Rightarrow$ La función es par.
La función es periódica con período π.
Por tanto, solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, \pi]$.
El comportamiento de la gráfica en este intervalo se generalizará a todo **R**.
3. Puntos de corte con los ejes: (0, –1).
4. Asíntotas: no hay.
5. $f'(x) = 2\text{sen}(-2x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(-2x) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}$.



En $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función es decreciente, y en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ es creciente.

Mínimo $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$ .Máximo (0, –1)

e) 1. Dominio: **R** $-\left\{\frac{\pi}{4}k; k \in Z\right\}$
2. Simetrías y período:
$f(-x) = \text{tg}(-2x) = -\text{tg}(2x) = -f(x) \Rightarrow$ La función es impar.
$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = tg\left(-2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{tg}(-2x - \pi) = \text{tg}(x) = f(x)$



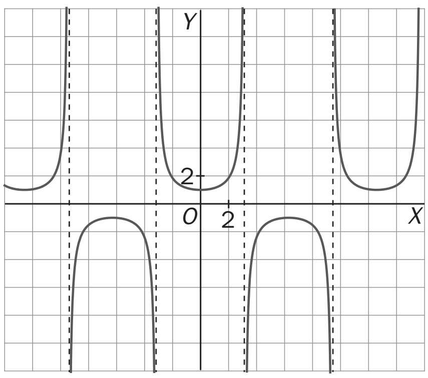
La función es periódica con período $\frac{\pi}{2}$.

Por tanto, solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

El comportamiento de la gráfica en este intervalo, se generalizará a todo **R**.
3. Puntos de corte con los ejes:
Eje X: $\text{tg}(-2x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Los puntos de corte son (0, 0), (1, 0).
4. Asíntotas: no hay.
5. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento.

$f'(x) = (1 + \text{tg}^2(-2x))(-2) \neq 0$. No presenta extremos relativos. Es creciente en todo su dominio.

f) 1. Dominio: **R** $-\{k\pi; k \in Z\}$
2. Simetrías y período
$f(-x) = \sec\left(\frac{-x}{2}\right) = \sec\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) \Rightarrow$ La función es par.
$f(x + 4\pi) = \sec\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sec\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$
La función es periódica con período 4π.
Solo es necesario realizar el estudio en el intervalo $[0, 4\pi]$.
El comportamiento de la gráfica en este intervalo, se generalizará a todo **R** .
3. Eje X: No corta al eje X y corta al eje Y en (0, 1).
4. Asíntotas: no hay.

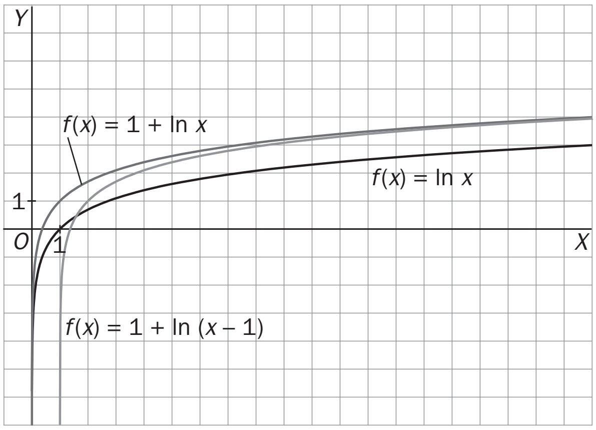


5. $f'(x) = \dfrac{-\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi, 4\pi$.

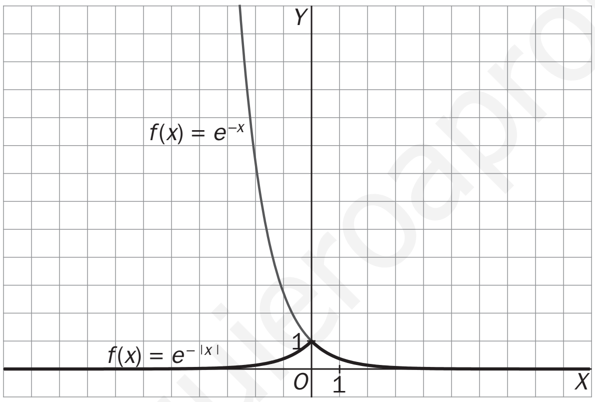
En $(0, 2\pi)$ la función es creciente; en $(2\pi, 4\pi)$ es decreciente.
Máximo: (0, 1). Mínimo: $(2\pi, -1)$

www.yoquieroaprobar.es

12.20. Partiendo de la gráfica de $f(x) = \ln x$, traza la gráfica de las funciones: $f(x) = 1 + \ln x$ y $f(x) = 1 + \ln(x - 1)$.

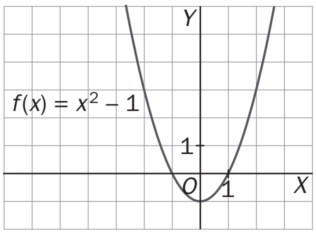


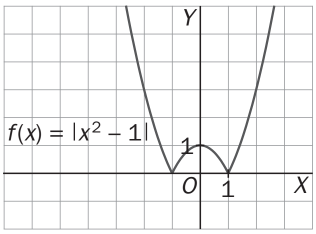
12.21. A partir de la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$, traza la gráfica de $g(x) = e^{-|x|}$.

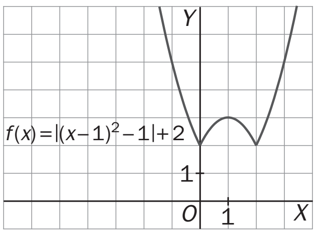


12.22. (TIC) A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, traza las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ **b)** $g(x) = \left|(x-1)^2 - 1\right| + 2$







www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIOS

Puntos de discontinuidad

12.23. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$ **e)** $f(x) = \sqrt{e^{2x^2 - 5x + 2}}$

b) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{2x - 3}$ **d)** $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

a) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

b) $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{3}{2}, \ +\infty\right)$

c) $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{4 - x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq 4 - x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow \left[-2, \ -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \ 2\right]$

d) $\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, con $k \in \mathbf{Z}$

e) La potencia de base positiva es positiva. Por tanto, la raíz cuadrada siempre existe y el dominio es todo **R**.

12.24. Indica los puntos de discontinuidad de especial interés (puntos de discontinuidad en los que al menos existe uno de los límites laterales) en las funciones del ejercicio anterior. Indica también si en alguno de estos puntos la función es continua a la izquierda o a la derecha.

a) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

b) En $x = \frac{3}{2}$ la función es continua por la derecha.

c) En $x = -2$ y $x = \sqrt{3}$ la función es continua por la derecha, y en $x = 2$ y $x = -\sqrt{3}$ la función es continua por la izquierda.

d) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

e) No hay puntos de discontinuidad.

Signo de una función

12.25. Estudia el signo de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ **c)** $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$ **e)** $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$ **g)** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ **d)** $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2 - 8)$

a) Los puntos de corte con el eje *X* son: $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$. La función es continua en todo **R**. En $(-\infty, -2)$ la función es negativa; en $(-2, 1)$ positiva; en $(1, 2)$ negativa; y en $(2, +\infty)$ positiva.

b) En $(-\infty, -5)$ la función es negativa, y en $(-5, +\infty)$ positiva.

c) El signo de $f(x)$ será el mismo que el de $y = x^2 - 4$ excepto en $x = -2$ y $x = 2$, en los cuales la función no existe.

Por tanto, es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, y negativa en $(-2, 2)$.

d) La función es positiva en todo su dominio que es $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ excepto en $x = 1$, que vale 0.

e) El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La función no corta al eje de abscisas.

En $(-\infty, 0)$ la función es positiva, y en $(0, +\infty)$ es negativa.

f) El dominio de la función es $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$. La función corta al eje *X* en $x = -3$, $x = 3$.

Por tanto, se consideran los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, -\sqrt{8})$, $(\sqrt{8}, 3)$ y $(3, +\infty)$. En dichos intervalos el signo de la función es, respectivamente, positivo, negativo, negativo y positivo.

g) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$. La función es positiva en todos los números reales excepto en los que $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

www.yoquieroaprobar.es

12.26. Estudia las simetrías de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^6}{x^4-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4}$ **e)** $f(x)=\text{sen } 3x+\cos 5x$

b) $f(x)=\dfrac{x^6+1}{x^3-x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{\text{sen}x+\text{tg}x}{\cos x}$

a) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ par (simétrica respecto a Y)

b) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ impar (simétrica respecto a O)

c) No es par ni impar.

d) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ impar (simétrica respecto a O)

e) $f(-x) = \text{sen}(-3x)+\cos(-5x) = -\text{sen}3x+\cos5x \Rightarrow$ no es par ni impar $f(x)=\dfrac{\text{sen}x+\text{tg}x}{\cos x}$

f) $f(-x)=\dfrac{\text{sen}(-x)+\text{tg}(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\text{sen}x-\text{tg}x}{\cos x}=-\dfrac{\text{sen}x+\text{tg}x}{\cos x}=-f(x)\Rightarrow$ impar (simétrica respecto a O)

12.27. Estudia si son periódicas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}x + \text{tg } x$ **b)** $f(x) = \text{sen } 2x + \text{tg}2x$ **c)** $f(x) = \text{sen}3x + \text{tg}3x$

a) $f(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 2\pi) + \text{tg}(x + 2\pi) = \text{sen}x + \text{tg}x = f(x) \Rightarrow$ periódica con período $T = 2\pi$

b) $f(x + \pi) = \text{sen}(2(x + \pi)) + \text{tg}(2(x + \pi)) = \text{sen}(2x + 2\pi) + \text{tg}(2x + 2\pi) = \text{sen}2x + \text{tg}2x = f(x) \Rightarrow$ periódica con período $T = \pi$

c) $f(x + \frac{2\pi}{3}) = \text{sen}(3(x + \frac{2\pi}{3}))+\text{tg}(3(x + \frac{2\pi}{3})) = \text{sen}(3x + 2\pi)+\text{tg}(3x + 2\pi) = \text{sen}3x + \text{tg}3x = f(x) \Rightarrow$ periódica con período $T = \frac{2\pi}{3}$

12.28. Señala el período de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sec x$ **c)** $f(x) = \text{tg }(\pi x)$ **e)** $f(x) = \text{sen}^4 x$ **g)** $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

b) $f(x) = \text{tg } x$ **d)** $f(x) = \text{sen } 4x$ **f)** $f(x) = \text{sen } x + \cos 3x$

a) $T = 2\pi$ c) $T = 1$ e) $T = \pi$ g) $f(x) = 1$

b) $T = \pi$ d) $T = \frac{\pi}{2}$ f) $T = 2\pi$

12.29. Comprueba que si una función $f(x)$ tiene período T, entonces la función $f(ax)$ tiene período $\frac{T}{a}$.

Aplicando esta propiedad, halla el período de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}\frac{\pi}{3}x$ **c)** $f(x) = \text{tg}(3\pi x)$ **e)** $f(x) = \sec 3\pi x$

b) $f(x) = \cos 2\frac{\pi}{3}x$ **d)** $f(x) = \text{cotg}^2\frac{\pi}{3}x$

$f\left(a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)\Rightarrow f(ax)$ es periódica con período $\dfrac{T}{a}$.

a) $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$ b) $T=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ c) $T=\dfrac{\pi}{3\pi}=\dfrac{1}{3}$ d) $T=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ e) $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

www.yoquieroaprobar.es

Asíntotas

12.30. Estudia las asíntotas de la siguiente función polinómica: $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$.

Por ser una función polinómica, no hay asíntotas.

12.31. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^3 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{2x^2 - 3}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 1}$

a) Asíntota vertical: $x = -1$ a la izquierda y a la derecha. Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

b) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 4$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

c) Asíntotas verticales: $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\quad x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua: $y = x - \dfrac{3}{2}$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

d) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

e) No hay ningún tipo de asíntotas.

f) Asíntota vertical: $x = -2$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales.

g) Asíntota vertical: $y = x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. Asíntota vertical: $x = 1$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

12.32. Estudia las asíntotas horizontales y oblicuas, y su posición respecto de la curva, para las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2 + 1}$

a) Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. En $+\infty$ y en $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

Asíntota horizontal: $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

b) $\dfrac{2x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 2} - 1 = \dfrac{2x}{2x^2 - x + 2}$

En $+\infty$ la curva queda por encima de la asíntota. En $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2 + 1} = x - \dfrac{x}{2x^2 + 1}$. Asíntota oblicua: $y = x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

12.33. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = \sqrt{x + \frac{3}{4}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 16}}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}}$

a) El dominio de la función es $[-1, +\infty)$. No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x + \frac{3}{4}} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas porque $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x + \frac{3}{4}}}{x} = 0$.

b) El dominio de la función es $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

No tiene asíntotas verticales.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 16}}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 16}}{x} = -\infty$.

y = *x* es asíntota en $+\infty$ y en $-\infty$ porque:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 16}}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 - 16}}{x} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x^4 - 16} - x^2\right)\left(\sqrt{x^4 - 16} + x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4 - 16} + x^2\right)} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-16}{x\left(\sqrt{x^4 - 16} + x^2\right)} = 0$$

c) El dominio de la función es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

y = −*x* es asíntota oblicua porque:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1 \qquad n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

d) El dominio es todo **R**.

No hay asíntotas verticales ni horizontales.

y = *x* es asíntota oblicua en $+\infty$ y por ser una función par, *y* = −*x* es asíntota oblicua en $-\infty$ ya que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}} - x\right)\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}} + x\right)\left(\left(\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}}\right)^2 + x^2\right)\right)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}} + x\right)\left(\left(\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}}\right)^2 + x^2\right)\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}}{\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}} + x\right)\left(\left(\left(\sqrt[4]{x^4 + \frac{1}{4}}\right)^2 + x^2\right)\right)} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

www.yoquieroaprobar.es

12.34. (TIC) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ **c)** $f(x)=\ln(2x-3)$

a) El dominio es todo **R**. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{-\frac{x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+x^2}{e^{\frac{x}{2}}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=$$

$=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}}=0\Rightarrow$ La recta y = 0 es asíntota horizontal en $-\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}}{x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota oblicua en $+\infty$.

b) El dominio es todo **R**. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\Rightarrow$ La recta y = 0 es asíntota horizontal en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=+\infty$, $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)}{xe^x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $-\infty$.

c) El dominio es $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\ln(2x-3)=-\infty\Rightarrow$ x = $\dfrac{3}{2}$ es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-3)=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

12.35. (TIC) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^x$ **b)** $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

a) El dominio es (0 $+\infty$). $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$. No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

b) El dominio es (-1, $+\infty$) $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\sqrt{x+1}=-\infty\Rightarrow$ x = -1 es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt{x+1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(x+1)}=0\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua.

12.36. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x)$ = sen$x$

b) $f(x)$ = sen$x$ + 3cos$x$

a) No tiene asíntotas verticales ya que el dominio es todo **R**.
No tiene asíntotas horizontales ya que no existe el límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.
b) Al igual que la anterior, no tiene asíntotas.

www.yoquieroaprobar.es

12.37. (TIC) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones con valores absolutos:

a) $f(x) = |2x-3| + x|x-1|$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ **c)** $f(x) = \dfrac{|x|+2}{x+2}$ **d)** $f(x) = \ln(|x-2|)$

a) La función se puede escribir como una función definida a trozos en la que todos los tramos están expresados por polinomios. Por tanto, no tiene asíntotas.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ $x = 0$ es asíntota vertical tanto por la izquierda como por la derecha.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$ es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

c) $x = -2$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

En $-\infty$, $y = -1$ es asíntota horizontal.

En $+\infty$, $y = 1$ es asíntota horizontal.

d) $x = 2$ es asíntota oblicua.

Funciones polinómicas

12.38. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Halla los máximos y mínimos relativos.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibuja la gráfica de la función.

d) ¿Hay puntos de corte con los ejes de coordenadas?

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $f''(x) = 6x - 6$. Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 3$

a) Crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Decrece en $(-1, 3)$

b) Máximo $(-1, 10)$. Mínimo $(3, -22)$

d) Corta al eje Y en $(0, 5)$ y al eje X en tres puntos.

12.39. Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$:

a) Halla los puntos de corte con los ejes.

b) Estudia el signo de la función.

c) Halla el crecimiento de *f*.

d) Halla los máximos y mínimos relativos.

e) Dibuja la gráfica de la función.

f) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función?

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x-1)^2(x+3)^2$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x+1)(x-1)(x+3)$

a) Puntos de corte con los ejes: $(0, 9)$, $(1, 0)$ $(-3, 0)$.

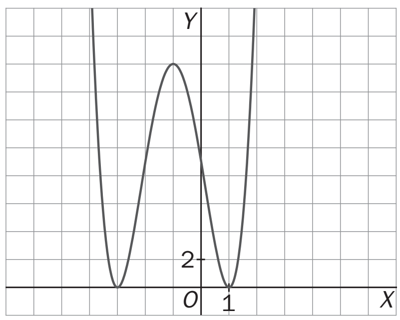
b) La función es siempre positiva, excepto en los puntos que se anula.

c) Crece: $(-3, -1) \cup (31, +\infty)$. Decrece: $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

d) Máximo$(-1, 16)$. Mínimo$(-3, 0)$. Mínimo$(1, 0)$.

f) Tiene dos puntos de inflexión.

e)



www.yoquieroaprobar.es

12.40. Dada la función $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + ax^3 - 2x^2 + bx - \frac{14}{3}$:

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que tenga un punto de inflexión en (−2, 0).

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento para los valores de *a* y *b* hallados.

c) Halla los extremos relativos para los valores de *a* y *b* hallados.

d) Estudia los intervalos de concavidad para los valores de *a* y *b* hallados.

e) Halla los puntos de inflexión de *f*.

f) Dibuja la gráfica de la función.

g) ¿Cuántos puntos de corte tiene con el eje de abscisas?

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3ax^2 - 4x + b$, $f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6ax - 4$

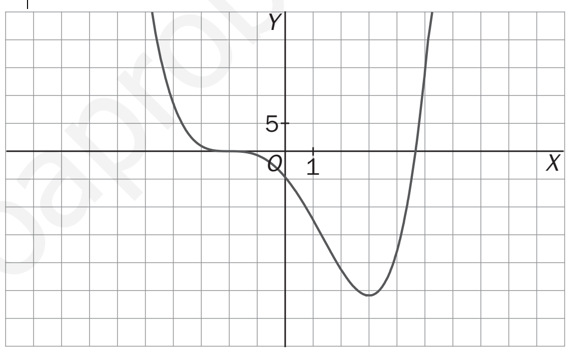
a) $f''(-2) = 6 - 12a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$ y $f(-2) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{6}(-8) - 8 - 2b - \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow b = -6$

Por tanto, $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 - 6x - \frac{14}{3}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+2)^2$ Crece en (3, +∞). Decrece en (–∞, 3)

c) Mínimo en $\left(3, \frac{-625}{24}\right)$

f)



d) $f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ $x = -2$

Cóncava hacia arriba $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Cóncava hacia abajo: $(-2, \frac{4}{3})\left(-2, \frac{4}{3}\right)$

e) Puntos de inflexión (–2, 0) y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1250}{81}\right)$.

Funciones racionales

12.41. Dibuja las siguientes funciones racionales, realizando el estudio de:

I. Dominio

II. Simetrías

III. Puntos de corte con los ejes

IV. Asíntotas

V. Puntos singulares y crecimiento

VI. Puntos de inflexión y concavidad

a) $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{3x}{x^3-8}$

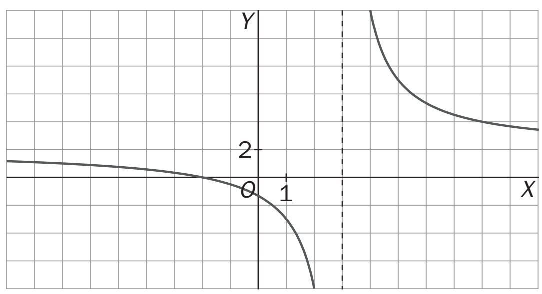
a) I. Dominio $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
II. No es par ni impar.

III. Puntos de corte con los ejes(−2, 0), (0, $-\frac{4}{3}$)

IV. Asíntotas verticales: $x = 3$
Asíntotas horizontales: $y = 2$

V. $f'(x) = -\frac{10}{(x-3)^2}$. Siempre decrece. No tiene extremos relativos.

VI. $f''(x) = \frac{20}{(x-3)^3}$. Cóncava hacia arriba en $(3, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 3)$. No tiene puntos de inflexión.



www.yoquieroaprobar.es

b) I. Dominio: **R**.

II. Es una función par.

III. Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

IV. Asíntotas horizontales: $y = 1$

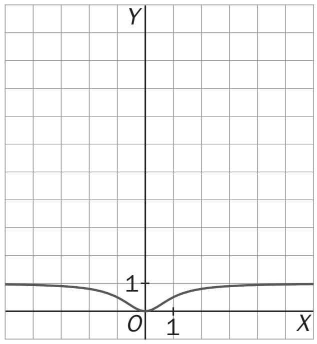
V. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Decrece en $(-\infty, 0)$, y crece en $(0, +\infty)$.

Mínimo en (0, 0)

VI $f''(x) = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$. Cóncava hacia arriba $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Cóncava hacia abajo: $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$



c) I. Dominio $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

II. No es par ni impar.

III. Puntos de corte con los ejes: (0, 0)

IV. Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales y oblicuas no tiene.

V. $f'(x) = -\frac{6(x^3+4)}{(x^3-8)^2}$. Decrece en $(-\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, +\infty)$.

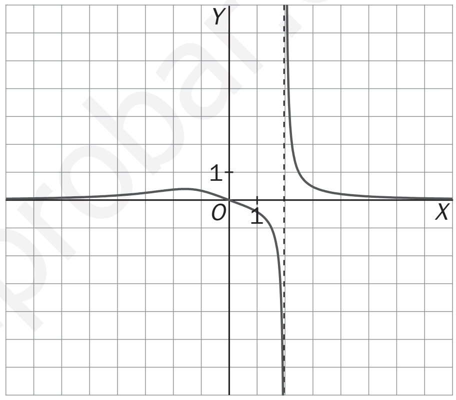
Crece en $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$. Máximo en $\left(-\sqrt[3]{4}, \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)$

VI. $f''(x) = \frac{18x^2(x^2+16)}{(x^3-8)^3}$

Cóncava hacia abajo $(-\sqrt[3]{16}, 0) \cup (0,2)$

Cóncava hacia arriba $(-\infty, -\sqrt[3]{16}) \cup (2,+\infty)$

Punto de inflexión: $\left(-\sqrt[3]{16}, \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)$



12.42. (PAU) Calcula el valor de *k* para que la siguiente función tenga una asíntota oblicua en $y = 2x - 5$:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + 7x + 3k}{x^2 + 3}}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + 7x + 3k}{x^2+3} = 2x + k + \frac{x}{x^2+3} \Rightarrow k = -5$$

12.43. (PAU) Calcula el valor de *k* para que la siguiente función tenga un máximo relativo en el punto $x = 2$:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x + k}{x^2 - 2x + 1}}$$

¿Cuál es el valor de este máximo?

$f(x) = \frac{2x+k}{x^2-2x+1} = \frac{2x+k}{(x-1)^2}$, $f'(x) = \frac{-2(x+k+1)}{(x-1)^3} \Rightarrow f'(2) = -6-2k = 0 \Rightarrow k = -3$. Se puede observar que a la izquierda de 2 la función crece y a la derecha decrece. El valor de la función en $x = 2$ es 1.

www.yoquieroaprobar.es

Funciones irracionales

12.44. (PAU)(TIC) Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$:

a) Halla el dominio de *f*.

b) Halla los puntos de corte con los ejes.

c) Estudia el crecimiento de la función.

d) Halla los máximos y mínimos relativos de *f*.

e) Dibuja la gráfica de la función.

f) De acuerdo con la gráfica, señala los intervalos de concavidad de la función.

a) Dominio: **R**

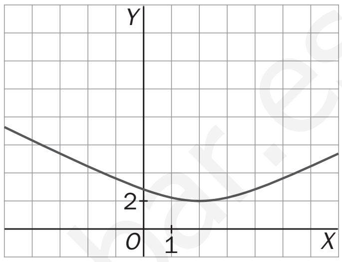
b) No corta a los ejes.

c) $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

Decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

d) Mínimo en (2, 2)

f) La función siempre es cóncava hacia arriba.



12.45. (PAU)(TIC) Dada la función $f(x)=x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}$, halla el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos de *f*, y traza la gráfica de la función.

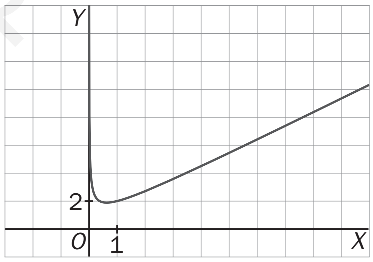
Dominio: $[0, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes: ninguno

Asíntotas verticales: $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=+\infty$

Asíntotas oblicuas $y = x$ en $+\infty$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}, \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}, \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$



12.46. (TIC) Dada la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}$:

a) Halla el dominio de *f*.

b) Halla los puntos de corte con los ejes.

c) Estudia las asíntotas de la función.

d) Calcula los extremos relativos de *f*.

e) Traza la gráfica de la función.

a) Dominio: $(-\infty, -1)\cup[0, +\infty)$

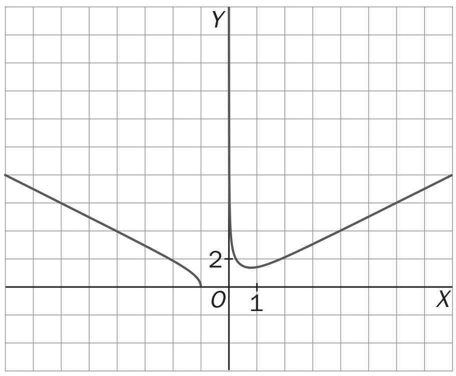
b) Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$

c) Asíntotas verticales: $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}=+\infty$

Asíntotas oblicuas $y = x$ en $+\infty$ $y = -x$ en $-\infty$

d) $f'(x)=\dfrac{(2x^3-1)\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}}{2x(x^3+1)}$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}, \dfrac{\sqrt[6]{432}}{2}\right)$



www.yoquieroaprobar.es

12.47. Halla el valor de *k* para que la función $f(x) = \dfrac{2x+k}{\sqrt{x-1}}$ tenga un extremo relativo en $x = \dfrac{5}{2}$.

a) ¿Qué tipo de extremo es?

b) Determina el dominio de la función.

c) Halla las asíntotas de la función para el valor obtenido.

d) Traza la gráfica de la función para dicho valor.

e) A la vista de la gráfica, establece los intervalos de crecimiento.

f) A la vista de la gráfica, establece los intervalos de concavidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

a) $f'(x) = \dfrac{2x-k-4}{2\sqrt{(x-1)^3}}$, $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow k = 1$. Es un mínimo.

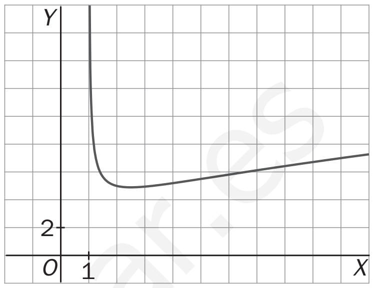
b) Dominio: $(1, +\infty)$

c) Asíntotas verticales: $x = 1$

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

d) Crece en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Decrece en $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$.

e) $f''(x) = \dfrac{11-2x}{4\sqrt{(x-1)^5}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{11}{2}$. Punto de inflexión: $\left(\dfrac{11}{2}, 4\sqrt{2}\right)$.



f) Es cóncava hacia arriba en $\left(1, \dfrac{11}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{11}{2}, +\infty\right)$.

Funciones exponenciales

12.48. (PAU)(TIC) Dada la función $f(x) = (1 - x)e^{-x}$, calcula:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Los intervalos de concavidad.

c) Los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función.

d) Con los datos anteriores, traza la gráfica de *f*.

$f'(x) = e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$, $f''(x) = e^{-x}(3-x) = 0 \Rightarrow x = 3$

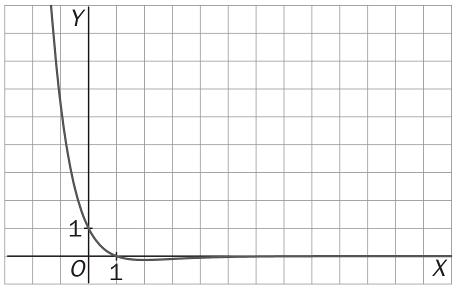
a) Decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$

b) Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3)$

Cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$.

c) Punto de inflexión en $(3, -2e^{-3})$. Mínimo $(2, -e^{-2})$

d)



12.49. (PAU)(TIC) Dada la función $f(x) = x^2e^x$, halla:

a) El dominio de *f*.

b) Los puntos de corte con los ejes.

c) Las asíntotas de la función.

d) Los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.

e) Con los datos anteriores, traza la gráfica de la función.

f) A la vista de la gráfica, indica cuántos puntos de inflexión posee.

a) Dominio: **R**

b) Punto de corte con los ejes: (0, 0)

c) No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

$y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

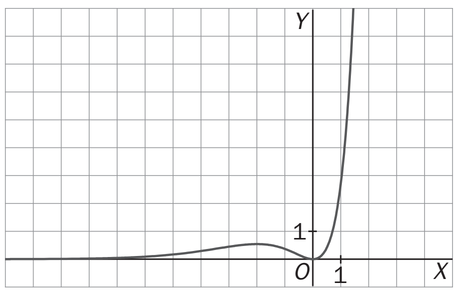
d) $f'(x) = (x^2+2x)e^x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = -2$

Crece en $(-\infty\ -2)\cup(0\ +\infty)$ y decrece en $(-2,\ 0)$.

Máximo: $(-2, 4e^{-2})$. Mínimo: (0, 0)

f) Tiene dos puntos de inflexión.

e)



www.yoquieroaprobar.es

12.50. Calcula el valor de *k* para que la función $f(x) = \frac{x^2 + k}{e^x}$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$.

Halla, para el valor obtenido:

a) El dominio de *f*.

b) Los puntos de corte con los ejes.

c) Las asíntotas de la función.

d) Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

e) Con los datos anteriores, traza la gráfica de la función.

f) A la vista de la gráfica, indica cuántos máximos y mínimos relativos tiene *f*.

g) A la vista de la gráfica, indica, si es que existe, el valor del máximo y mínimo absoluto en todo el dominio.

$f'(x) = -\frac{x^2 - 2x + k}{e^x}$ $\quad f''(x) = \frac{x^2 - 4x + k + 2}{e^x}$ $\quad f''(0) = 0 \Rightarrow k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^x}$

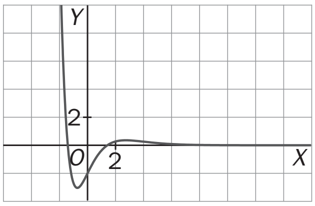
a) Dominio: **R**

b) Puntos de corte con los ejes (0, −2) $(-\sqrt{2}, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$

c) Asíntota horizontal: $y = 0$ en $x = +\infty$

d) Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$. Cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$. Puntos de inflexión: (0, −2) , $\left(4, \frac{14}{e^4}\right)$.

e)



f) Máximo relativo: $(1+\sqrt{3}$; 0,36). Mínimo relativo: (−0,73; −3,04).

g) No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto vale −3,04.

Funciones logarítmicas

12.51. Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$:

a) Halla el dominio de *f*.

b) Estudia las posibles simetrías de la función.

c) Calcula los puntos de corte con los ejes.

d) Determina las asíntotas de la función.

e) Estudia el crecimiento y los extremos relativos de *f*.

f) Estudia la concavidad y los puntos de inflexión.

g) Traza la gráfica de la función.

a) Dominio: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Simétrica respecto del eje *Y* (función par)

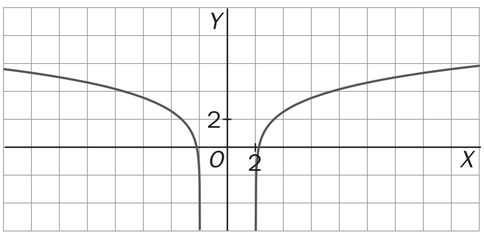
c) Puntos de corte con los ejes $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$

d) $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

e) Decrece en $(-\infty, -2)$. Crece en $(2, +\infty)$. No tiene extremos relativos.

f) Cóncava hacia abajo en todo su dominio. No tiene puntos de inflexión.

g)



12.52. Dada la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$:

a) Halla el dominio de *f*.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

c) Determina las asíntotas de la función.

d) Estudia el crecimiento y los extremos relativos de *f*.

e) Estudia la concavidad y los puntos de inflexión.

f) Traza la gráfica de la función.

a) Dominio: $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

b) No tiene puntos de corte con los ejes.

c) Asíntotas verticales $x = -2$, $x = 1$

Asíntota horizontal, $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$

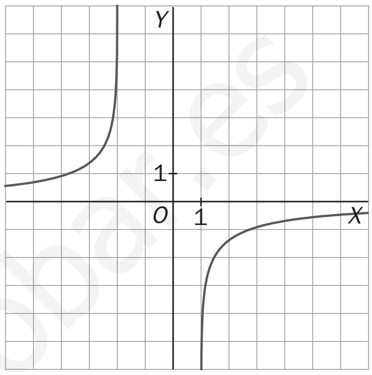
$f'(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$, $f''(x) = -\dfrac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}$

d) Es creciente en todo el dominio.

No tiene extremos relativos.

e) Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$.

Es cóncava hacia abajo en $(1, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.



12.53. Halla el valor de *k* para que la función $f(x) = \dfrac{x^2+k}{\ln x}$ tenga un extremo relativo en $x = \sqrt{e}$.

Para este valor:

a) Estudia el dominio de la función.

b) Halla los puntos de corte con los ejes.

c) Calcula e interpreta el valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x}$.

d) Determina las asíntotas de la función.

e) Estudia el crecimiento y los extremos relativos de *f*.

f) Demuestra que la gráfica no tiene puntos de inflexión.

g) Traza la gráfica de la función.

$$f'(x) = \frac{2x^2 \ln x - x^2 - k}{x(\ln x)^2}, \quad f'(\sqrt{e}) = \frac{2e \cdot \frac{1}{2} - e - k}{\frac{\sqrt{e}}{4}} = 0 \Rightarrow k = 0$$

a) Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

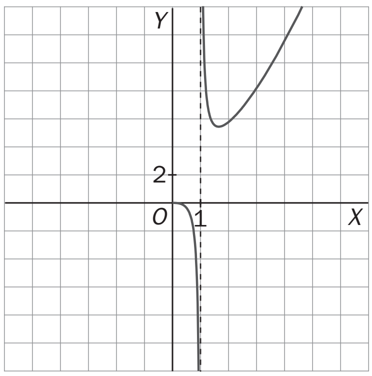
b) No tiene puntos de corte con los ejes.

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \xrightarrow{L'H} l = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x^2 = 0$

d) Asíntota vertical: $x = 1$

e) Decrece $(0, 1) \cup (1, \sqrt{e})$. Crece $(\sqrt{e}, +\infty)$. Mínimo $(\sqrt{e}, 2e)$

f) $f''(x) = \dfrac{2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2}{(\ln x)^3}$ .No tiene solución real $\Rightarrow$ no hay puntos de inflexión.



www.yoquieroaprobar.es

Funciones trigonométricas

12.54. (TIC) Dada la función $f(x)$ = 2sen$x$ + sen(2x):

a) Estudia las simetrías y la periodicidad de *f*.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

c) Halla los extremos relativos.

d) Traza la gráfica de la función.

a) Es una función impar (simétrica respecto de *O*). Es una función periódica de período $T = 2\pi$.

b) $2\text{sen}x + \text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2\text{ sen}x + 2\text{ sen}x\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0,\ \ x = \pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

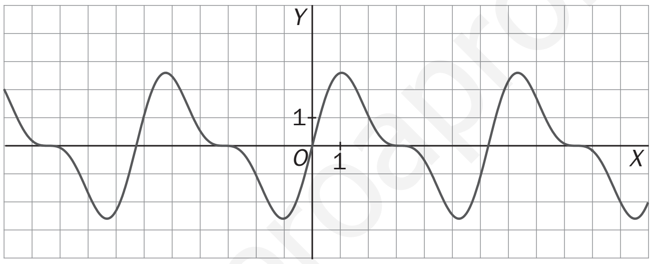
Los puntos de corte son (0, 0) y (π , 0).

c) $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

Crece en $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$. Máximo $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y mínimo $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

d)



12.55. (TIC) Dada la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x}$:

a) Estudia su periodicidad.

b) Halla las asíntotas verticales de *f*.

c) Calcula los puntos de corte con los ejes.

d) Halla los extremos relativos de *f*.

e) Traza la gráfica de la función.

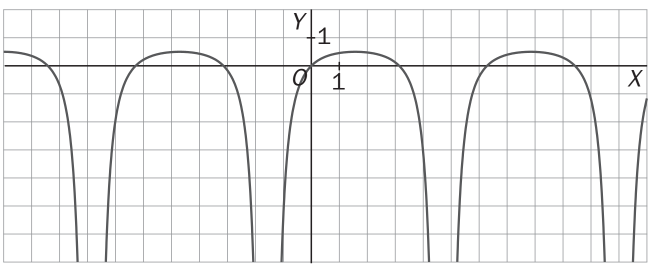
a) Función periódica de período 2π.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi^+}{2}} \dfrac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi^-}{2}} \dfrac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x} = -\infty$. $x = \dfrac{3\pi}{2}$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

c) $\dfrac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x} = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = \pi$. Los puntos de corte en [0, 2π) son (0, 0) y (π , 0).

d) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{(1+\text{sen}x)^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ Crece en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Máximo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$

e)



12.56. (TIC) Dada la función $f(x) = |x| + |x+1|$:

a) Exprésala mediante una función definida a trozos.

b) Representa gráficamente la función.

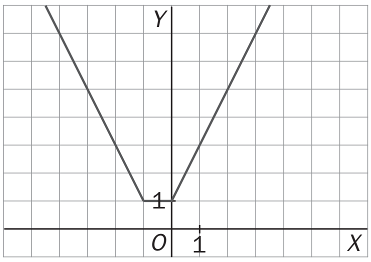
c) ¿Dónde se encuentran los puntos críticos de *f*?

d) Halla los extremos relativos de la función.

e) Halla el máximo y el mínimo absoluto de *f*.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \le -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

b)



c) Los puntos críticos son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ más aquellos puntos del dominio donde no existe la derivada. Por tanto, todos los valores de *x* pertenecientes al intervalo [–1, 0] son puntos críticos.

d) Todos los valores de *x* pertenecientes al intervalo [–1, 0] son puntos donde la función alcanza un mínimo relativo ya que en sus cercanías, a la derecha y a la izquierda, la función no toma valores menores.

e) La función no posee máximo absoluto. El mínimo absoluto de la función es 1 y se alcanza en cualquiera de los puntos del intervalo [–1, 0].

12.57. (TIC) Dada la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$

a) Estudia el dominio de *f*.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

c) Comprueba que no tiene ninguna asíntota.

d) Indica los puntos críticos, estudia el crecimiento y calcula los extremos relativos.

e) Traza la gráfica de la función.

$f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \\ x+\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

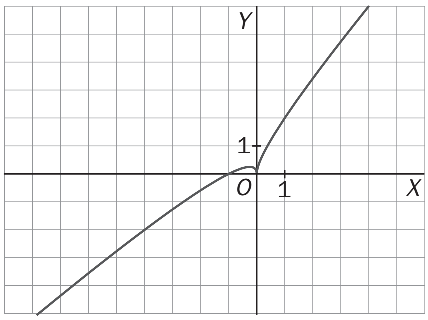
a) Dominio: **R**

b) Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (−1,0)

c) No tiene asíntotas.

d) $f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$

e)



Los puntos críticos son $x = -\dfrac{1}{4}$ y $x = 0$ (ya que no existe $f'(0)$).

Crece $\left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$ y decrece $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

Máximo: $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

www.yoquieroaprobar.es

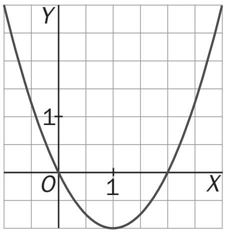
PROBLEMAS

12.58. Las siguientes figuras representan las gráficas de las funciones:

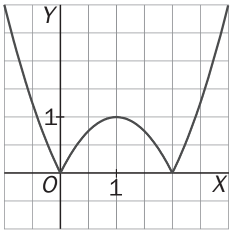
$f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $h(x) = |x^2 - 1|$ $\quad$ $g(x) = (x - 1)^2 - 1$ $\quad$ $j(x) = (x-1)^2$

Indica cuál es la gráfica que corresponde a cada una de ellas.

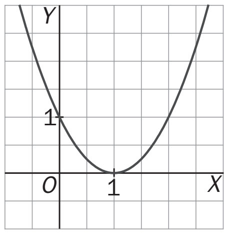
a)



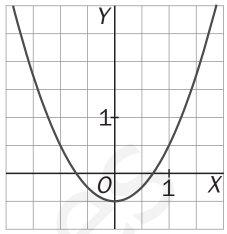
b)



c)



d)



a) $h(x) = (x - 1)^2 - 1$ $\quad$ b) $g(x) = |x^2 - 1|$ $\quad$ c) $j(x) = (x - 1)^2$ $\quad$ d) $f(x) = x^2 - 1$

12.59. Construye la gráfica de una función que cumpla todos y cada uno de los siguientes requisitos:

I. **Dominio: $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$**

II. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

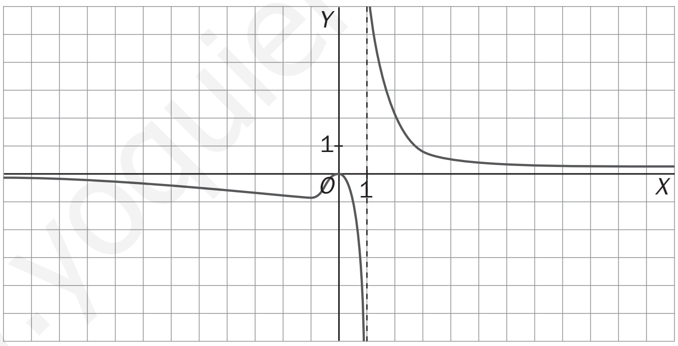
III. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

IV. **Tiene un máximo relativo en (0, 0).**

V. **Tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{-2}$.**

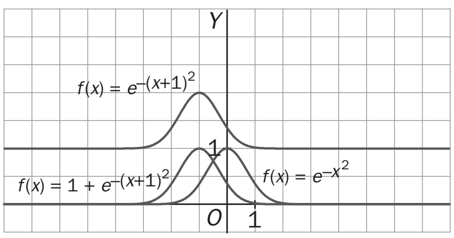
VI. **Es creciente en el intervalo ($\sqrt[3]{-2}$, 0).**

VII. **Es decreciente en: $(-\infty, \sqrt[3]{-2}\,) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.**



12.60. (TIC) Dibuja la función $f(x) = e^{-x^2}$ obteniendo sus asíntotas y extremos relativos. Con la ayuda de dicha gráfica, dibuja las funciones $g(x) = e^{-(x+1)^2}$ y $h(x) = 1 + e^{-(x+1)^2}$.

Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.
Máximo relativo: (0, 1).



www.yoquieroaprobar.es

12.61. Partiendo de la gráfica de $y = \cos x$, construye las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x + \pi)$

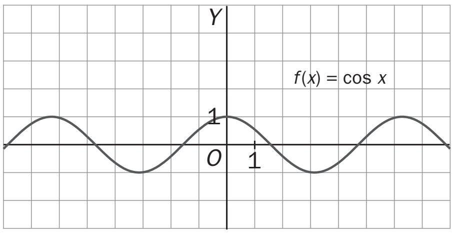
b) $y = 2\cos x$

c) $y = \cos 2x$

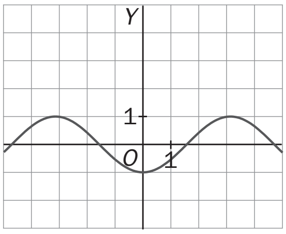
d) $y = \dfrac{1}{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $y = |\cos x|$

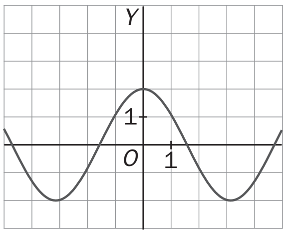
f) $y = \cos |x|$



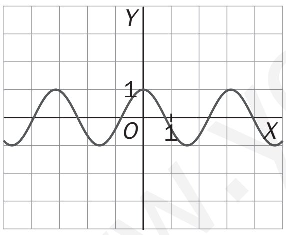
a)



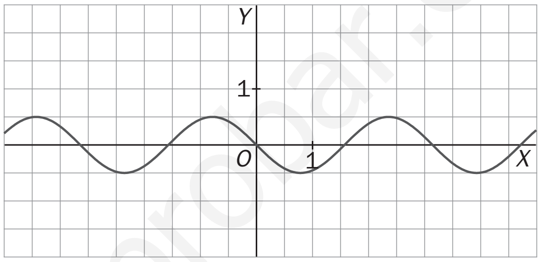
b)



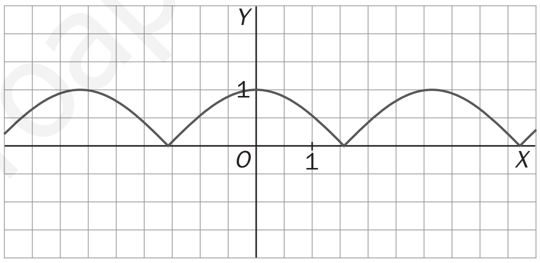
c)



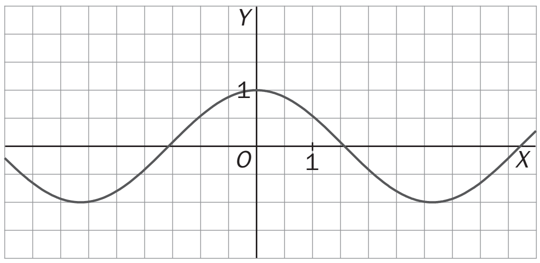
d)



e)

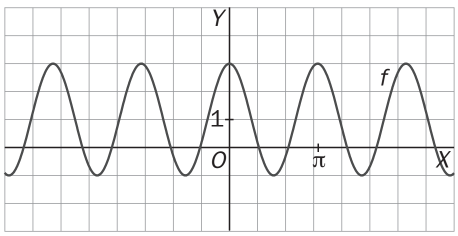


f)



www.yoquieroaprobar.es

12.62. La función que aparece en la gráfica es del tipo $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$. Indica los valores de a, b, c y d.



Se considera la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}x$. Si se comprime horizontalmente a la mitad, se traslada $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, se dilata verticalmente al doble y, finalmente, se desplaza una unidad hacia arriba, se obtiene la gráfica dada.

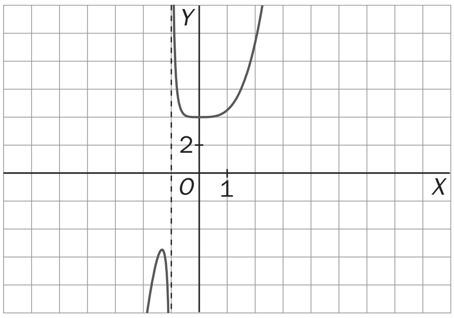
Por tanto, $f(x) = 1 + 2\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ y los valores buscados son $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = \dfrac{\pi}{2}$.

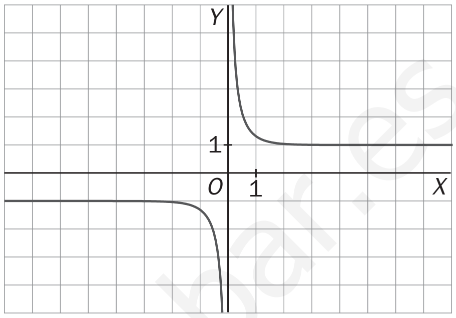
PARA PROFUNDIZAR

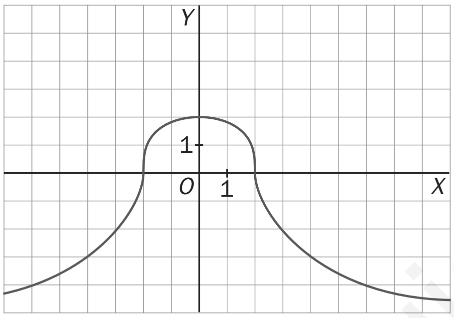
12.63. Dibuja la gráfica de las funciones:

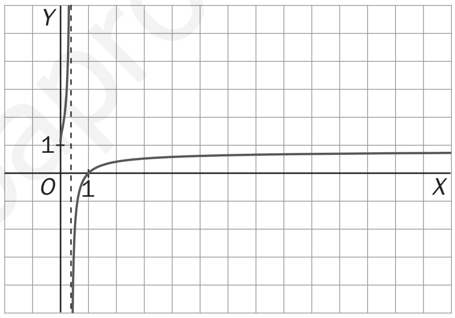
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{8}{4 + e^{-x}}$ e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

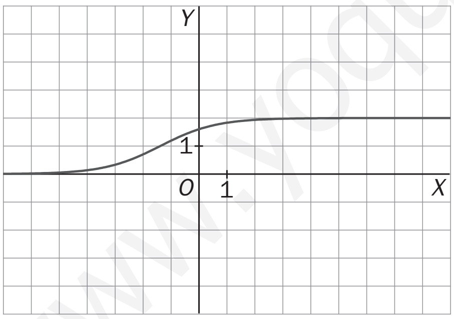
b) $f(x) = \sqrt[3]{8 - 2x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ f) $f(x) = \operatorname{sen} x \sqrt{\cos x}$

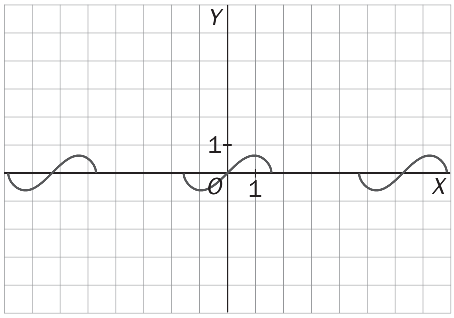
a)


d)


b)


e)


c)


f)


www.yoquieroaprobar.es

12.64. Demuestra la igualdad algebraica: $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$

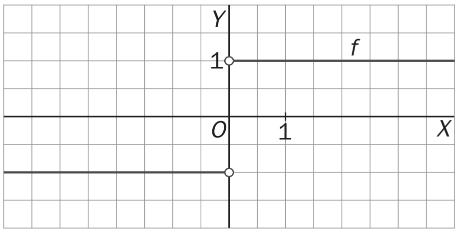
Apoyándote en la igualdad anterior, demuestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}$.

a) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{b^3} = a - b$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right) = \infty - \infty = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right)\left(\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^6 - 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^6 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1 - \left(x^3 - 1\right)}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^6 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^6 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} = 0$

12.65. De una función *f*(*x*) continua en todo R se conoce la gráfica de su derivada (figura adjunta). Se sabe, además, que *f*(0) = 1. Dibuja la gráfica de *f*(*x*) y encuentra su expresión analítica.



$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ -x+b & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en 0 $\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x+1 & \text{si } x<0 \end{cases} = |x|+1$

12.66. Se consideran la funciones *f*, periódica con período *T*, y *g* otra función cualquiera:

a) Demuestra que $(g\circ f)(x)$ es una función periódica.

b) ¿Es $(f\circ g)(x)$ periódica?

c) Aplicando la propiedad indicada en el apartado a, demuestra que $f(x)=e^{\text{sen}x}$ es periódica.

d) ¿Se puede aplicar la propiedad anterior a la función *f*(*x*) = sen(ln*x*)?

a) $(g\circ f)(x+T)=g(f(x+T))=g(f(x))=(g\circ f)(x) \Rightarrow g\circ f$ es periódica de período *T*.

b) En general no.

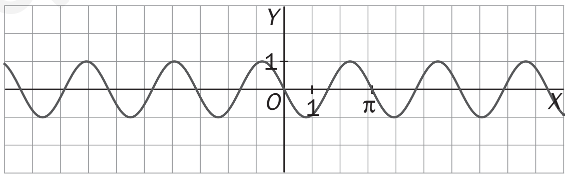
c) *f*(*x*) = sen*x* es periódica de período 2π. Por el apartado a $(g\circ f)(x)=e^{\text{sen}\,x}$ es periódica de período 2π.

d) No. Para poder aplicarla, a la *x* debe afectarle directamente una función periódica.

RELACIONA Y CONTESTA

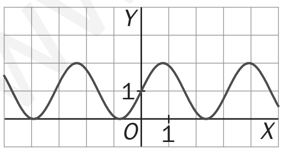
Elige la única respuesta correcta en cada caso:

12.1. Se conoce la gráfica de *y* = *f*(*x*):

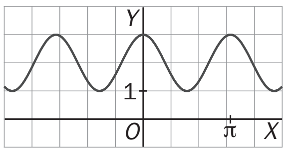


La gráfica de *y* = *f*(x + π) + 2 es:

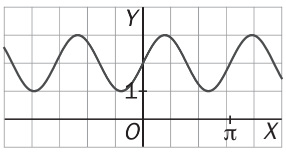
A)



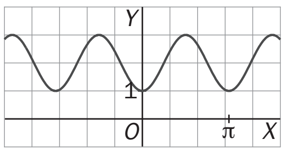
C)



B)



D)



E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

Se debe desplazar f(x) 2 unidades hacia arriba y π unidades a la izquierda. La respuesta correcta es la E.

www.yoquieroaprobar.es

12.2. La función f(x)= $\dfrac{x^2}{x^3+1}$

A) Es par.

B) Es impar.

C) Presenta una simetría respecto del eje *Y*

D) Presenta una simetría respecto del eje *X*.

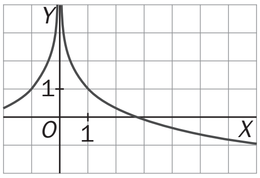
E) Ninguna de las anteriores respuestas es cierta.

La respuesta correcta es la E.

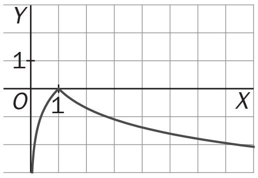
$f(-x)=\dfrac{x^2}{-x^3+1}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}$. Por lo tanto no es par ni impar y, en consecuencia, no presenta simetrías.

12.3. La representación gráfica de la función *f*(*x*) = 1 − |ln(*x*)| es:

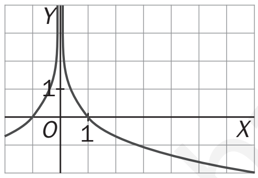
A)



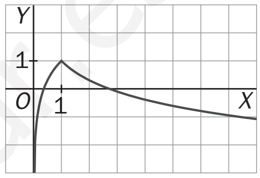
B)



C)



D)



E) Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es la D. $f(x)=\begin{cases}1-\ln x & \text{si } \ln x\geq 0\\ 1+\ln x & \text{si } \ln x<0\end{cases}=\begin{cases}1-\ln x & \text{si } x\geq 1\\ 1+\ln x & \text{si } x<1\end{cases}$

12.4. La relación entre los valores de *m* y *n* para que la función polinómica *f*(*x*)=*mx*^{3} + *nx*^{2} + *mx* – *n* tenga un punto de inflexión en *x* = $\dfrac{1}{3}$ es:

A) *m* + *n* = 0

B) *m* − *n* = 0

C) *m* + 2*n* = 0

D) *m* − 2*n* = 0

E) *m* = *n* = 0

La respuesta correcta es la A.

$f'(x)=3mx^2+2nx+m$, $f''(x)=6mx+2n=0\Rightarrow 6m\cdot\dfrac{1}{3}+2n=0\Rightarrow 2m+2n=0\Rightarrow m+n=0$

12.5. El número de puntos de corte con los ejes de coordenadas de la gráfica de f(x)=ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e puede ser:

A) Uno con el eje *Y* e infinitos con el eje *X*.

B) Uno con el eje *Y* y cinco con el eje *X*.

C) Ninguno con el eje *Y* y cuatro con el eje *X*.

D) Ninguno con el eje *Y* y dos con el eje *X*.

E) Uno con el eje *Y* y dos con el eje *X*.

Al ser una función polinómica debe tener un punto con el eje *Y* y al ser una función polinómica de cuarto grado puede tener cero, dos o cuatro puntos de corte con el eje *X* La respuesta correcta es la E.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

12.6. Dada la función *f*(*x*) = *xe*$^{-x}$

A) Tiene un máximo relativo en *x* = 1.

B) Es discontinua en *x* = 0.

C) Tiene una asíntota vertical en *x* = −2.

D) Es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

E) Tiene una asíntota horizontal a la derecha en *y* = 0.

Las respuestas correctas son la A y la E.

La función es continua en todo **R** ya que $e^x>0$ para cualquier *x*; por tanto, no tiene asíntotas verticales.

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=1$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$, $f''(1)<0$. Por tanto tiene un máximo en *x* = 1.

y = 0 es asíntota horizontal a la derecha ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

La función cambia de concavidad en x = 2.

www.yoquieroaprobar.es

12.7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

A) Tiene un mínimo relativo en $x = e$.

B) Su dominio es $(0\ \ +\infty)$.

C) Tiene una asíntota vertical.

D) Es decreciente en todo su dominio.

E) Cuando los valores de x se acercan a $+\infty$ los valores de la función se acercan cada vez más a una recta oblicua

Las respuestas correctas son A y C.

El dominio de la función es (0, 1) ∪ $(1\ +\infty)$. En x = 1 tiene una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e\ ,\ f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x : (\ln x)^3} \Rightarrow f''(e) = \frac{2-1}{e} = \frac{1}{e} > 0\ .$$

Tiene un mínimo en $x = e$.La función es creciente en $(e,\ +\infty)$

No tiene asíntota oblicua ya que $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

12.8. La función $y = f(x)$ verifica que:

a) $f'(0)=0$ y $f''(0)>0$.

b) Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

A) a es equivalente a b

B) a implica b pero b no implica a.

C) b implica a pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

Una función puede tener un mínimo en x = 0 y no ser derivable en x = 0. La respuesta correcta es la B.

Señala el dato innecesario para contestar:

12.9. Se verifica que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. Como parte de la información para dibujar la gráfica de la función $g(x) = f(x + 4)$ se aportan, entre otros, los siguientes datos:

a) La función f tiene una máximo relativo en $x = 5$

b) La función g tiene un máximo relativo en $x = -2$

c) La función es cóncava hacia abajo en todos los puntos de su dominio

d) La función g tiene una asíntota vertical en $x = -1$

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

g tiene una asíntota vertical en x = –1: $\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x+4) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$. La respuesta correcta es la D.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

12.10. Se considera una función continua en todo R y se pretende asegurar su concavidad hacia abajo en el intervalo (−4, −1).

a) La función es cóncava hacia arriba en el intervalo (1, 4).

b) La función es impar. Es decir, presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

Si la función es impar, la concavidad en x es la contraria de la concavidad en $-x$. La respuesta correcta es la D.

www.yoquieroaprobar.es