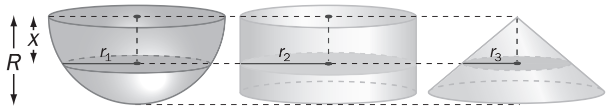
11 Funciones derivables

ACTIVIDADES INICIALES

11.I. Cuenta la tradición que sobre la tumba de Arquímedes había esculpido un cilindro con una esfera inscrita. Arquímedes halló la relación entre sus volúmenes y el volumen del cono de igual radio y altura que el cilindro. Para ello, utilizó planos paralelos a las bases y comparó las áreas de los círculos obtenidos (ver figura). ¿Qué relación se obtiene? Hállala.



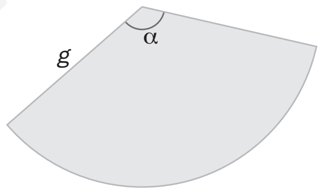
Radio de la esfera (r_1): $R^2 = r_1^2 + x^2 \Rightarrow r_1^2 = R^2 - x^2$

Radio del cilindro (r_2): $r_2 = R$

Radio del cono (r_3): $\frac{R}{R} = \frac{r_3}{x} \Rightarrow r_3 = x$

Se tiene, pues, que $r_1^2 = r_2^2 - r_3^2$. Por tanto, el área del círculo de la esfera es igual al área del círculo del cilindro menos la del cono.

11.II. Halla el área total y el volumen de un cono formado con un sector circular de radio *g* y ángulo α radianes.



El arco que abarca un ángulo de α radianes mide αg.

El radio *r* de la circunferencia que mide αg es:

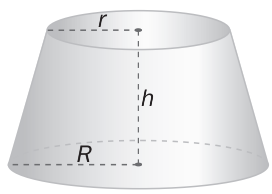
$2\pi r = \alpha g \Rightarrow r = \frac{\alpha g}{2\pi}$, que es el radio del cono. Se calcula su altura *h*.

La altura es el otro cateto del triángulo de hipotenusa *g* y cateto $\frac{\alpha g}{2\pi}$:

$h^2 = g^2 - \left(\frac{\alpha g}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$.

El área total del cono es $\pi\left(\frac{\alpha g}{2\pi}\right)^2 + \frac{\alpha g \cdot g}{2}$. El volumen del cono es $\frac{\pi\left(\frac{\alpha g}{2\pi}\right)^2 \frac{g}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{3}$.

11.III. Utilizando la semejanza de triángulos, halla la expresión del área lateral y del volumen de un tronco de cono.



Se calcula primero la altura *x* correspondiente al cono pequeñito que se le ha quitado al cono primigenio para formar el tronco de cono.

Por semejanza: $\frac{R}{h+x} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{rh}{R-r}$. Así pues, la altura *H* del cono inicial era $H = x + h = \frac{rh}{R-r} + h = \frac{Rh}{R-r}$.

Tanto el volumen del tronco como su área lateral se calcularán restando las respectivas medidas del cono inicial y del cono pequeñito suprimido.

Volumen del tronco de cono: $V = \frac{\pi}{3}R^2\frac{Rh}{R-r} - \frac{\pi}{3}r^2\frac{rh}{R-r} = \frac{\pi}{3}\frac{h(R^3 - r^3)}{R-r}$

Para calcular el área lateral, se deben conocer las generatrices *G* del cono inicia y *g* del cono suprimido.

$G = \sqrt{R^2 + \left(\frac{Rh}{R-r}\right)^2}$, $g = \sqrt{r^2 + \left(\frac{rh}{R-r}\right)^2}$

Área lateral del tronco de cono: $A = \pi R\sqrt{R^2 + \left(\frac{Rh}{R-r}\right)^2} - \pi r\sqrt{r^2 + \left(\frac{rh}{R-r}\right)^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Sea $f(x) = \begin{cases} ax + b\ln x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Calcula *a* y *b* para que *f* sea derivable en $x = 1$.

Primero se impondrá la condición de que sea continua en *x* = 1. Para eso se estudia sus límites laterales y el valor de la función en dicho punto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax + b\ln x) = a\cdot 1 + b\ln 1 = a, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2) = 1^2 = 1, \quad f(1) = a$$

Se igualan las expresiones anteriores y se tiene que el valor de *a* debe ser *a* = 1.

Abordando la derivabilidad en *x* = 1. La función derivada para $x \ne 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} a + \dfrac{b}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{b}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como ya se tiene seguridad de que *f* es continua en *x* = 1, se sabe que para que *f* sea derivable en *x* = 1 basta con que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \frac{b}{x}\right) = 1 + \frac{b}{1} = 1 + b, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2\cdot 1 = 2$$

Por tanto, 1+*b* = 2, es decir, *b* = 1. Así pues, para que *f* sea derivable en *x* = 1 debe ser *a* = 1 y *b* = 1.

11.2 ¿Es continua en *x* = 0 la siguiente función? $f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{sen } x & \text{si } x \le 0 \\ e^{2x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$? ¿Y derivable?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2 + \text{sen } x) = 0^2 + \text{sen } 0 = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(e^{2x} - 1) = e^{2\cdot 0} - 1 = 0, \quad f(0) = 0$$

Así pues, *f* es continua en *x* = 0, ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

La función derivada para $x \ne 0$ es: $f'(x) = \begin{cases} 2x + \cos x & \text{si } x < 0 \\ 2e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como ya se tiene seguridad de que *f* es continua en *x* = 0, se sabe que para que *f* sea derivable en *x* = 1 basta con que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x + \cos x) = 2\cdot 0 + \cos 0 = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2e^{2x} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = 2$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, la función no es derivable en *x* = 0, aunque sí que es continua en dicho punto.

11.3 Sea $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2 + 3$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo [–1, 2].

La función *f* es continua y derivable ya que es polinómica. Además, *f*(–1) = *f*(2), por tanto, puede aplicarse el teorema de Rolle que nos asegura que *f*´(*x*) = 0 tiene una solución en el intervalo [–1, 2].

11.4 Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

La función *f* es continua ya que es polinómica. Además *f*(–2) = –109 y *f*(0) = 1, así pues, el teorema de Bolzano nos asegura que *f* corta al menos una vez al eje horizontal en un punto *c* perteneciente al intervalo (–2, 0). Si cortara al eje horizontal en otro punto *d*, se tendría que *f*(*c*) = 0 y *f*(*d*) = 0 y, por tanto, se podría aplicar el teorema de Rolle en el intervalo cerrado de extremos *c* y *d* y resultaría que la derivada de *f* se anularía al menos una vez. Sin embargo, la derivada de *f* es $f'(x) = 15x^4 + 7$ que no se anula nunca porque siempre es positiva. Así pues, la suposición que se hizo de que cortaba más veces al eje horizontal es falsa.

11.5 **Demuestra que la ecuación $2x^5 - 30x + c = 0$ no puede tener más de una solución en el intervalo [–1, 1], sea cual fuere el número *c*.**

Llamando $f(x) = 2x^5 - 30x + c$, como $f'(x) = 10x^4 - 30$ presupone que $f'(x)$ nunca se transforma en cero en (–1, 1), entonces $f(x)$ no puede cortar más de una vez al eje *X* en el intervalo [–1, 1].

11.6 **Sea $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$. Comprueba que *f* es continua en R, $f(-8) = f(8)$ y, en cambio, $f'(x)$ no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?**

Trabajando en el intervalo cerrado [–8, 8], se ve que:

$$f(-8) = 2 + \sqrt[3]{(-8)^2} = 2 + \sqrt[3]{64} = 2 + 4 = 6\ ,\quad f(8) = 2 + \sqrt[3]{8^2} = 2 + \sqrt[3]{64} = 2 + 4 = 6$$

Se calcula su derivada: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. La derivada no está definida para $x = 0$ y, por tanto, *f* no es derivable en el intervalo abierto (–8, 8) y no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

11.7 **Dada la función, $f(x) = x^3$. ¿Hay algún punto de su gráfica en el que la tangente sea paralela a la recta que une los puntos *A*(–1,–1) y *B*(2, 8)? Hállalo. Calcula la ecuación de la tangente mencionada.**

La función $f(x) = x^3$ es continua en el intervalo cerrado [–1, 2] y derivable en el abierto (–1, 2) por ser una función polinómica. Así que el teorema del valor medio indica que existe un número *c* de (–1, 2) que cumple que $f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$. Se halla ahora ese número *c*: $f'(x) = 3x^2$, entonces: $3 = 3x^2 \Rightarrow x = 1$, $x = -1 \notin (-1, 2)$. Se obtiene, pues, el punto *P*(1, 1), cuya tangente es paralela al segmento *AB*.

Observa que, aunque el teorema del valor medio no lo asegure, el punto *Q*(–1, –1) también cumple que la tangente que pasa por él es paralela a la recta que une los puntos *A* y *B*. En este caso el segmento *AB* pertenece a la recta tangente.

La tangente en *P*(1, 1) es $y = 3x - 2$ y la tangente en *Q*(–1, –1) es $y = 3x + 2$.

11.8 **Sea $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$ Comprueba que:**

a) *f* es continua en [1, 3] y derivable en (1, 3).

b) Encuentra el número $c \in (1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema del valor medio.

a) Como $x = 0$ no pertenece al dominio, es claro que el único punto conflictivo es el de abscisa $x = 2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = \frac{1}{4}\cdot 2 - 1 = -\frac{1}{2}$, $f(2) = -\frac{1}{2}$ Así pues, *f* es continua.

En el intervalo abierto (1, 3) la función derivada para $x \ne 2$ es: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Como $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{4}$, la función es derivable en $x = 2$ y es $f'(2) = \frac{1}{4}$. Por tanto, la función es derivable en (1, 3) y su expresión es: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$

b) Se sabe entonces que existe un número *c* del intervalo abierto (1, 3) que cumple: $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3}{8}$.

Ahora se busca ese número *c*, que debe pertenecer al intervalo (1, 2] ya que en el otro tramo la derivada vale siempre $\frac{1}{4}$. Así pues, $\frac{1}{c^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow c = +\sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}63$ (la solución negativa no pertenece al intervalo (1, 2]).

11.9 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

a) Como $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}3x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}2x=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}=\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\frac{3}{2}.$$

b) Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left(e^x+e^{-x}\right)=2.$$

c) Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=0.$$

d)Para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ hay que transformar esa resta en un cociente: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$. Como $\lim\limits_{x\to 1}(x-1-\ln x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1}((x-1)\ln x)=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\right)$$ y de nuevo se puede aplicar

L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x+1+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

11.10 Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

Este límite da lugar a una indeterminación del tipo 0^0, por tanto, se debe manipular un poco para poder aplicar L'Hôpital. Si $y=x^{\operatorname{sen}x}$, entonces $\ln y=\ln x^{\operatorname{sen}x}=\operatorname{sen}x\cdot\ln x$. Se calcula el límite de esta última expresión: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}}$, y ya se está en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x-x\operatorname{sen}x}=\frac{0}{1}=0$$

Se ha obtenido que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=0$ siendo $y=x^{\operatorname{sen}x}$, así pues $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^{\operatorname{sen}x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\operatorname{sen}x}=1$.

11.11 Demuestra que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$, para cualquier $k>0$.

Para calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$, se puede aplicar L'Hôpital ya que numerador y denominador tienden a más infinito (recuérdese que $k>0$), y se repite el proceso hasta que el numerador sea un número (el denominador no se altera porque la derivada de $y=e^x$ es ella misma):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x}=0$$

11.12 Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{(e^x + x)}$.

Se puede escribir el límite buscado como $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{(e^x + x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ que da lugar a una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Se denomina y a la expresión última se ve que:

$y = (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(e^x + x) = \frac{\ln(e^x + x)}{x}$, y ya se puede calcular el límite de esta última expresión aplicando L´Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$$

Así pues, se ha obtenido que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y = 1$, por tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \sqrt[x]{(e^x + x)} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{(e^x + x)} = e$.

11.13 Demuestra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$, para cualquier número positivo k.

El límite da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ y aplicando L´Hôpital se obtiene que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{kx^k} = 0$$, ya que k es positivo.

11.14 Sea f derivable en $x = x_0$. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $f'(x^0) \geq 0$, entonces f es creciente en x^0.

b) Si f es decreciente en x^0, entonces $f'(x^0) < 0$.

c) Si $f'(x^0) = 0$, entonces f presenta un extremo relativo en x^0.

a) Es falsa ya que si $f'(x_0) = 0$, hay casos en los que la función puede presentar un extremo relativo en x^0 y, entonces, ni crece ni decrece. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ cumple que $f'(0) = 0$ y no es creciente en $x = 0$ ya que es un mínimo. Si la desigualdad fuera estricta sí sería cierta la afirmación.

b) Es falsa ya que x^0 podría ser un punto de inflexión con tangente horizontal y la función ser decreciente en él. Por ejemplo, la función $f(x) = -x^3$ es siempre decreciente, y en $x = 0$ su derivada vale cero.

c) Es falsa; $f'(x_0) = 0$ solo demuestra que en dicho punto la tangente es horizontal. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ cumple que $f'(0) = 0$ y en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo relativo ya que se trata de un punto de inflexión, eso sí, con tangente horizontal.

11.15 Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ presente extremos relativos.

Las abscisas de los posibles extremos relativos son los valores de x que anulan la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$. Se resuelve ahora la ecuación $f'(x) = 0$:

$15x^2(x^2 - 1) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$, ó $x = -1$, que son las abscisas de los posibles extremos relativos.

11.16 Sea f una función tal que $f'(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$. Obtén las abscisas de los extremos relativos de f, decidiendo qué son.

La derivada se anula para $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores:

x	$(-\infty,1)$	1	(1, 3)	3	(3, 5)	5	$(5,+\infty)$
Signo de f'	–	0	+	0	–	0	+
f	Decreciente	Mín. relativo	Creciente	Máx. relativo	Decreciente	Mín. relativo	Creciente

11.17 Obtén los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+|x-1|} + \dfrac{1}{1+|x-4|}$.

Como intervienen valores absolutos, se debe definir la función a trozos, limitados por los valores que anulan los valores absolutos: $x = 1$ y $x = 4$. Además, la función es continua pues es suma de cocientes de funciones continuas y los denominadores nunca se hacen cero.

La función es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5-x} & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Su derivada, salvo en los puntos $x = 1$ y $x = 4$, es: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} + \dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } 1 < x < 4 \\ -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-3)^2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

La derivada no se anula ni en el primer tramo (siempre es positiva) ni en el tercer tramo (siempre es negativa). Así que, los extremos relativos se deben buscar en el tramo intermedio:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(5-x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-(5-x)^2 + x^2}{x^2(5-x)^2} = 0 \Rightarrow -25 + 10x - x^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

x	$\left(1, \frac{5}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{5}{2}, 4\right)$
Signo de f'	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función presenta un mínimo relativo en el punto $A\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{4}{5}\right)$ y no es derivable ni en $x = 1$ ni en $x = 4$.

11.18 Encuentra 3 números no negativos que sumen 14, tales que uno sea doble que otro y que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima

b) Mínima

Es un problema de optimización.

1. Se nombran las variables, que son los tres números: $x, 2x, y$.

2. Se relacionan las variables: $x + 2x + y = 14$, es decir, $y = 14 - 3x$.

3. La función que se quiere maximizar y minimizar es $S = x^2 + (2x)^2 + y^2$, es decir,

$S(x) = x^2 + (2x)^2 + (14-3x)^2 = 14x^2 - 84x + 196$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. Como x e $y = 14 - 3x$ son no negativos, x debe estar en el intervalo $\left[0, \dfrac{14}{3}\right]$.

5. Se busca el máximo y el mínimo de $S(x) = 14x^2 - 84x + 196$ en $\left[0, \dfrac{14}{3}\right]$.

$S'(x) = 28x - 84 = 0, x = 3$. Se compara: $S(3) = 70$, $S(0) = 196$ y $S\left(\dfrac{14}{3}\right) = \dfrac{980}{9}$.

Así pues, el máximo se alcanza para $x = 0$, con lo que los números serían 0, 0 y 14 y el mínimo se alcanza para $x = 3$ y los números serían 3, 6 y 9.

11.19 Se quiere escribir un texto de 96 cm^2 tal, que deje 2 cm en cada margen lateral de la hoja en la que está escrito así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.

1. Se determinan las variables, que son los dimensiones de la hoja: x los cm que mide la base e y los cm que mide la altura.

2. Se relacionan las variables: el texto escrito debe ser 96 cm^2, así pues $(x-4)(y-6)=96$, y operando se obtiene: $(x-4)(y-6)=96 \Rightarrow xy-6x-4y+24=96 \Rightarrow y(x-4)=72+6x \Rightarrow y=\dfrac{72+6x}{x-4}$.

3. La función que se quiere minimizar es la superficie de la hoja: $S = xy \Rightarrow S(x)=x\dfrac{72+6x}{x-4}=\dfrac{72x+6x^2}{x-4}$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, x debe estar en el intervalo abierto $(4,+\infty)$.

5. Se busca el mínimo de $S(x)=\dfrac{72x+6x^2}{x-4}$ en $(4,+\infty)$.

La derivada $S'(x)=\dfrac{(72+12x)(x-4)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2}=\dfrac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2}=\dfrac{6(x-12)(x+4)}{(x-4)^2}$ se anula si x = 12.

La solución negativa no aporta nada. Si 0 < x < 12, la derivada es negativa y la función decrece; si x > 12, la derivada es positiva y la función crece, así pues, en x = 2 está el mínimo.

La altura, y, mide $y=\dfrac{72+6\cdot 12}{12-4}=18$ cm.

Las dimensiones de la hoja más pequeña posible son: 12 cm de base y 18 cm de altura.

11.20 ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de $f(x) = x^2 + \text{sen}\, x - 1$?

Para hallar los puntos de inflexión se deben calcular los valores de x que anulan la derivada segunda de la función y después estudiar si, en ellos, cambia la curvatura:

$f'(x)=2x+\cos x \Rightarrow f''(x)=2-\text{sen}\, x$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2-\text{sen}\, x=0 \Rightarrow \text{sen}\, x=2$, que no tiene solución.

Por tanto, la función f no tiene puntos de inflexión. La derivada segunda es siempre positiva y la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

11.21 Halla los puntos de inflexión de $f(x) = xe^x$.

La primera derivada es $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

La segunda derivada es $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$. Se anula solo si x = –2. Se estudia la curvatura para saber si en dicho valor hay o no punto de inflexión:

x	$(-\infty,-2)$	–2	$(-2,+\infty)$
Signo de f''	–	0	+
f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

Así pues, el punto $\left(-2,-2e^{-2}\right)$ es un punto de inflexión.

11.22 Explica por qué todas las cúbicas (gráficas de polinomios de tercer grado) tienen un punto de inflexión.

Las funciones cúbicas tienen una expresión del tipo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$, cuya primer derivada es $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ y la segunda derivada es $f''(x)=6ax+2b$.

La segunda derivada se anula si $f''(x)=0 \Rightarrow 6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$ y aquí hay siempre un punto de inflexión ya que $f''(x)=6ax+2b$ es una recta no horizontal $(a\neq 0)$, y, por tanto, cambia de signo a izquierda y derecha de $x=-\dfrac{b}{3a}$, que es donde corta al eje X.

11.23 Encuentra una relación entre *a*, *b* y *c* para que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ no tenga puntos de inflexión.

La primera derivada es $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$, y la segunda es $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$. Para que no tenga puntos de inflexión, la derivada segunda no debe anularse nunca:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \Rightarrow 6ax^2 + 3bx + c = 0$ y para que esta ecuación de segundo grado no tenga soluciones debe tener su discriminante negativo, es decir: $(3b)^2 - 4 \cdot 6a \cdot c < 0 \Rightarrow 9b^2 - 24ac < 0$.

11.24 Para anestesiar a una persona hacen falta 20 mg de anestésico por cada kg de peso. El anestésico se elimina de la circulación sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si tarda 2 horas en reducirse a la mitad, calcula aproximadamente la dosis necesaria para mantener anestesiada a una persona de 60 kg durante 1 hora.

Sea $A(t)$ la función que da los mg de anestésico que hay en la sangre en cada instante de t horas. Al ser proporcional, se sabe que $A'(t) = k \cdot A(t)$, es decir, $k = \dfrac{A'(t)}{A(t)}$, de donde, $A(t) = M \cdot e^{kt}$.

Se calcula ahora los valores de los parámetros M y k ayudándonos de los datos del problema.

Nos aseguran que a las dos horas se reduce a la mitad, es decir: $A(t+2) = \dfrac{A(t)}{2}$.

Operando se obtiene que: $M \cdot e^{k(t+2)} = \dfrac{M \cdot e^{kt}}{2} \Rightarrow e^{kt}e^{2k} = \dfrac{e^{kt}}{2} \Rightarrow e^{2k} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k \approx -0,34657$

Así pues, se puede asignar el valor k = – 0,35. La función buscada es $A(t) = M \cdot e^{-0,35t}$

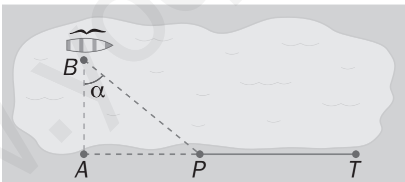
Para mantener anestesiada a una persona de 60 kg se necesitan 1200 mg de anestésico y se requiere que esta sea la cantidad que haya en su sangre al cabo de una hora: $A(1) = 1200$.

Por tanto, $A(1) = M \cdot e^{-0,35} = 1200 \Rightarrow M \approx 1702,8811$.

Se puede asignar M = 1702,88 y la función ya queda definida: $A(t) = 1702,88 \cdot e^{-0,35t}$.

La cantidad de anestésico la dará el valor de $A(t)$ para t = 0: $A(0) = 1702,88$ mg

11.25 En el punto *B* de la superficie de un lago se deja un bote con una gaviota que quiere ir volando hasta el punto *T* de la orilla. Si al volar sobre agua fría gasta el doble de energía que volando sobre tierra, calcula la dirección del vuelo que debe elegir la gaviota para consumir la mínima energía en llegar de *B* a *T*.



Datos: $AT = 2000$ m, $AB = 500$ m

La gaviota consume y unidades de energía por km volando sobre tierra y $2y$ unidades sobre agua fría.

Consumo = $2y\sqrt{x^2 + 500^2} + y(2000 - x) = f(x)$

$f'(x) = y\left[\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - 1\right]$. $f'(x)$ = 0 si $x = \pm\dfrac{500}{\sqrt{3}}$

$f(0)$ = 3000 u, $f(2000) = 1000\sqrt{17}$ u, $f\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{1500}{\sqrt{3}} + 2000\right)$ u

Así pues, el menor consumo de energía corresponde a $x = \dfrac{500}{\sqrt{3}}$ que equivale a una dirección de vuelo de α grados con $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, es decir, α = 30º respecto de la recta AB.

11.26 La función que nos da la posición, en metros, de un móvil con trayectoria rectilínea es

$$e(t) = 2 + 30t - 3t^2$$

siendo t el tiempo medido en segundos.

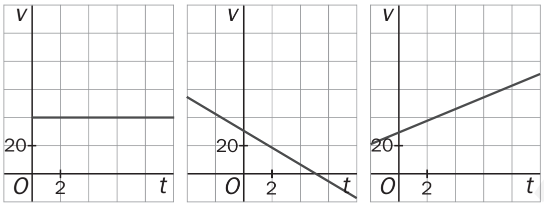
a) Calcula su velocidad a los 6 s.

b) Calcula su aceleración. ¿Qué tipo de movimiento es?

c) ¿En qué momento cambia de sentido su trayectoria?

d) ¿Cuándo t vuelve a pasar por el punto de partida?

e) De las siguientes gráficas, indica cuál representa la velocidad del móvil en función del tiempo.



a) La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo, $v(t) = e'(t) = 30 - 12t$, así pues, a los 6 segundos la velocidad es $v(6) = 30 - 12 \cdot 6 = -42$ m/s.

b) La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, $a(t) = v'(t) = -12$ m/s^2. Es un movimiento uniformemente acelerado (la aceleración es negativa).

c) Como la trayectoria es rectilínea, el punto de retroceso será aquel en el que su velocidad se hace cero y, por tanto, pasa de positiva a negativa: $v(t) = 0 \Rightarrow 30 - 12t = 0 \Rightarrow t = 2{,}5$ s.

d) Pasará por el origen cuando $e(t) = 0$, es decir, para $t = 10{,}07$ s.

e) La segunda gráfica.

EJERCICIOS

Derivadas laterales y los límites laterales de f'

11.27 Para la función $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x \le 1 \\ x + k - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$:

a) Demuestra que es continua sea cual fuere el valor de k.

b) Calcula el valor de k para que la función sea derivable en todo su dominio.

a) $g(x) = kx^2$ y $h(x) = x + k - 1$ son continuas, por tanto, hay que estudiar la continuidad en en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(X) = \lim\limits_{x \to 1^-} (kx^2) = k$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(X) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + k - 1) = k$, $f(1) = k$

Así pues, f es continua en $x = 1$ ya que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, independientemente del valor que tome k.

b) Las funciones $g(x) = kx^2$ y $h(x) = x + k + 1$ son derivables, por tanto, solo falta imponer la condición de que también sea derivable en $x = 1$. La derivada de la función para $x \ne 1$ es: $f'(x) = \begin{cases} 2kx & si\ \ x < 1 \\ 1 & si\ \ x > 1 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x = 1$ (ya se sabe que es continua) debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2kx = 2k$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$ Así pues, para que f sea derivable, debe ser $2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

11.28 Halla los valores de *a* y *b* para que $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \text{sen}(2x)+\cos x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ sea continua y derivable en *x* = 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{sen}(2x)+\cos x)=1$, $f(0)=1$

Para que *f* sea continua en *x* = 0 debe ser *b* = 0.

$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0 \\ 2\cos(2x)-\text{sen}\, x & \text{si } x>0\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2\cos(2x)-\text{sen}\, x)=2$

Para que *f* sea derivable en *x* = 0 debe ser *a* = 2 y *b* = 0.

11.29 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x+3|+|x-3|$.

Como aparecen valores absolutos se debe definir la función a trozos. Veamos cómo:

$|x+3|=\begin{cases} -(x+3)=-x-3 & \text{si } x<-3 \\ x+3 & \text{si } x\geq -3\end{cases}$, $|x-3|=\begin{cases} -(x-3)=-x+3 & \text{si } x<3 \\ x-3 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

Sumando ambos valores absolutos, se obtiene una función definida en tres trozos, a saber:

$f(x)=\begin{cases} -x-3+(-x+3) & \text{si } x<-3 \\ x+3+(-x+3) & \text{si } -3\leq x<3 \\ x+3+x-3 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$, es decir $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x<-3 \\ 6 & \text{si } -3\leq x<3 \\ 2x & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

Solo es necesario estudiar la continuidad en los puntos de solapamiento *x* = –3 y *x* = 3 ya que las funciones del interior de los intervalos de definición son continuas y derivables por tratarse de rectas.

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}(-2x)=6$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} 6=6$, $f(-3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 6=6$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x=6$, $f(3)=6$

Así pues, tanto en *x* = –3 como en *x* = 3, la función es continua y, por tanto, es continua en todo su dominio.

La derivada de la función, salvo para *x* = –3 y *x* = 3, es: $f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<-3 \\ 0 & \text{si } -3<x<3 \\ 2 & \text{si } x>3\end{cases}$

La función no es derivable ni en *x* = –3 ni *x* = 3, ya que: $\lim\limits_{x\to -3^-} f'(x)\neq \lim\limits_{x\to -3^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)$.

11.30 Encuentra la derivada de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ 2x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

Primero se debe estudiar la continuidad. En el interior de los intervalos de definición, la función es continua ya que en un caso se trata de una parábola y en el otro de una recta. ¿Y en *x* = 1?

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$, $f(1)=2$

Es decir, *f* es continua en *x* = 1 y, por tanto, *f* es continua en todo **R**.

Para *x* distinto de 1, la derivada de la función es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$. Se estudia si en *x* = 1 existe la derivada: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$.

Por tanto, $f'(1)=2$ y la función derivada de *f* es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

11.31 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si } 0<x\le e\\ 2-\dfrac{e}{x} & \text{si } x>e\end{cases}$.

En el interior de los intervalos de definición, la función es continua ya que en un caso se trata de un logaritmo con $x > 0$ y en el otro de una racional cuyo denominador no se anula. Se debe estudiar qué ocurre en el punto donde cambia la definición, es decir, en $x = e$:

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^-}\ln x=1,\quad \lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}\left(2-\frac{e}{x}\right)=1,\quad f(e)=1.$$

Es decir, f es continua en $x = e$ y, por tanto, f es continua en todo su dominio $(0,+\infty)$.

Para x distinto de e, la derivada de la función es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x<e\\ \dfrac{e}{x^2} & \text{si } x>e\end{cases}$.

Se estudia si en $x = e$ existe la derivada: $\lim\limits_{x\to e^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{e}$ y $\lim\limits_{x\to e^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\left(\dfrac{e}{x^2}\right)=\dfrac{1}{e}$.

Por tanto, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$ y la función derivada de f es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x\le e\\ \dfrac{e}{x^2} & \text{si } x>e\end{cases}$.

La función f es continua y derivable en todo su dominio de definición.

11.32 (PAU) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } x\le 0\\ bx+x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$**, con $b\in\mathbb{R}$.**

Calcula el valor de b para que f sea derivable en $x = 0$.

Como siempre, se impone primero la continuidad y luego, si es el caso, la derivabilidad.

Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen} x=0,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(bx+x^2)=0,\quad f(0)=0$$

Así pues, f es continua independientemente del valor que tome b.

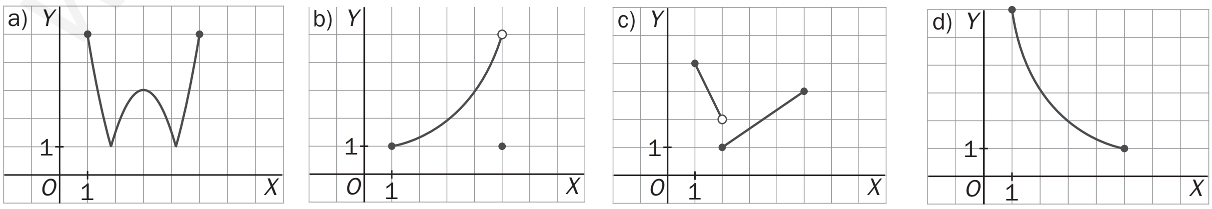
Derivabilidad en $x = 0$: $f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ b+2x & \text{si } x>0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(b+2x)=b$$

Por consiguiente, para que f sea derivable en $x = 0$ debe cumplirse que $b = 1$.

Teorema de Rolle

11.33 Explica claramente por qué las siguientes funciones no cumplen las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos que se muestran.



a) Aunque la función es continua y $f(1) = f(5)$, tiene dos puntos angulosos en los que no existe la derivada.

b) La función no es continua en el intervalo cerrado. Aunque sí derivable en el abierto.

c) La función es discontinua.

d) Aunque es continua y derivable no cumple que la función valga lo mismo en los extremos del intervalo cerrado.

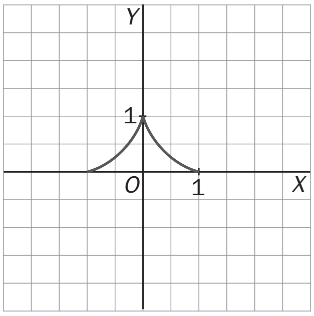
11.34 Ilustra el hecho de que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias con ejemplos de gráficas de funciones que solo cumplan dos de las tres hipótesis, y que no cumplan la tesis del teorema.

a) La función es continua en [–1, 1] y $f(1) = f(-1)$, sin embargo, no es derivable en $x = 0$. No hay ningún punto con tangente horizontal.

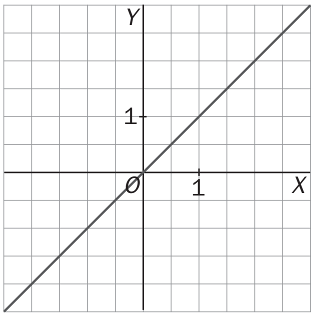
b) La función es continua y derivable pero $f(-1) \neq f(1)$. No hay ningún punto con tangente horizontal.

c) La función es derivable en (–1, 1) y $f(1) = f(-1)$, sin embargo, no es continua en [–1, 1]. No hay ningún punto con tangente horizontal.

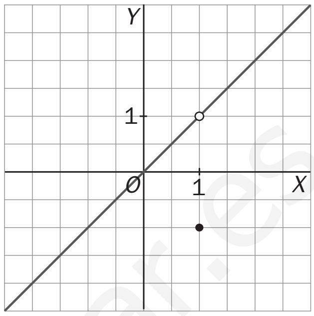
a)



b)



c)



11.35 Comprueba que $f(x) = x^3 - 3x + 5$ cumple las condiciones de Rolle en el intervalo $[-2, 1]$. Determina el valor de *c* del teorema de Rolle. ¿Hay más de uno?

La función es continua y derivable ya que es una función polinómica. Por otra parte, $f(-2) = 3$ y $f(1) = 3$, así que f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado [–2, 1]. Se halla ahora el valor $c \in (-2, 1)$ en el que se anula la derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = 1$.

Así pues, $c = -1$. El otro valor en el que se anula derivada es $x = 1$, que no pertenece al intervalo (–2, 1).

11.36 Determina si es aplicable el teorema de Rolle a la función *f* en el intervalo que se especifica. En caso afirmativo, encuentra todos los valores *c* del intervalo en los que $f'(c) = 0$.

a) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ **en** $[1, 3]$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 4}{4x^2 - 4x + 1}$ **en** $[-1, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 - x + 1}$ **en** $[-1, 2]$

d) $f(x) = |x| + 1$ **en** $[-2, 2]$

e) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x + 1}$ **en** $[0, 2]$

f) $f(x) = |x^2 + x| + 5 - 4x$ **en** $[1, 2]$

a) La función es continua y derivable por ser polinómica y $f(1) = 0$ y $f(3) = 0$. Sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1, 3].

La derivada de $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ es $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, que se anula para $c_1 = \dfrac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1{,}42$ y para $c_2 = \dfrac{6 + \sqrt{3}}{3} \approx 2{,}58$, ambos valores pertenecientes al intervalo abierto (1, 3).

b) La función no es continua en $x = \dfrac{1}{2} \in [-1, 2]$ porque anula el denominador.

Así que no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado [–1, 2].

c) El denominador de $f(x)$ no se anula nunca, así que la función es continua.

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 4)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{-3(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$ El denominador de su derivada, tampoco se anula nunca, por lo que también es derivable. Se calculan ahora las imágenes en los extremos del intervalo [–1, 2]: $f(-1) = 2$ y $f(2) = 2$. Por tanto, sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

La derivada se anula si $-3(2x-1) = 0$, es decir si $x = \dfrac{1}{2}$. Así pues, $c = \dfrac{1}{2}$ cumple que $f'(c) = 0$.

d) Se define la función a trozos: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si} \quad x\le 0\\ x+1 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$

La función es continua ya que en x = 0 es continua porque sus límites laterales en x = 0 coinciden con $f(0)$ = 1.

La derivada, si $x\neq 0$, es $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$. Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-1$ no coincide con $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$, entonces $f'(0)$ no está definida y la función no es derivable en el intervalo cerrado [–2, 2] ya que no lo es en un punto del mismo, x = 0. Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

e) La función $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$ no es continua en x = –1 pero este valor no pertenece al intervalo [0, 2]. Así que f sí es continua en [0, 2]. La derivada $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-(e^x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x\cdot e^x-1}{(x+1)^2}$ también está definida en el intervalo abierto (0, 2). Se estudian las imágenes en los extremos del intervalo: $f(0)$ = 0 y $f(2)=\dfrac{e^2-1}{3}$, que como no coinciden, no se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0, 2].

11.37 Determina a para que la función $f(x)=\dfrac{x^2+ax+6}{x^2-2x-12a}$ cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,\ 3]$.Halla los puntos de la gráfica en el intervalo en el que la tangente es horizontal.

En primer lugar se impone la condición de que la función valga igual en los extremos del intervalo: $f(-3)=f(3)$:

$f(-3)=f(3)\Rightarrow \dfrac{(-3)^2-3a+6}{(-3)^2+6-12a}=\dfrac{3^2+3a+6}{3^2-6-12a}\Rightarrow \dfrac{15-3a}{15-12a}=\dfrac{15+3a}{3-12a}$ y resolviendo esta última ecuación, se obtiene que $a=\dfrac{5}{4}$ ó $a=-\dfrac{1}{2}$. Ahora se debe estudiar si para estos valores la función es continua.

Si $a=\dfrac{5}{4}$, $x^2-2x-12a=x^2-2x-15=(x+5)(x-3)$ se anula para x = –5 y x = 3. Por tanto, no es continua en x = 3 y no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

Si $a=-\dfrac{1}{2}$, $x^2-2x-12a=x^2-2x+6$ no se anula nunca y, por tanto, f es continua y sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

Para $a=-\dfrac{1}{2}$, la función es $f(x)=\dfrac{x^2-\frac{1}{2}x+6}{x^2-2x+6}$, y su derivada es:

$$f'(x)=\frac{\left(2x-\frac{1}{2}\right)(x^2-2x+6)-\left(x^2-\frac{1}{2}x+6\right)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2}.$$

La derivada es cero si se anula el numerador. Al resolver dicha ecuación se obtienen los valores con tangente horizontal, que son, $x=\sqrt{6}$ y $x=-\sqrt{6}$, ambos pertenecientes al intervalo $(-3, 3)$.

11.38 Comprueba que ni $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ni $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ cumplen las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2] y, sin embargo, la gráfica de una de ellas sí tiene una tangente horizontal en ese intervalo. ¿Cuál de ellas?

La función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ no es continua en [–2, 2] porque no está definida para x = 0.

La función $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ no es continua en [–2, 2] porque no está definida para x = –1 ni para x = 1. Así pues, ninguna de las dos funciones cumplen las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2].

La derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, que no se anula nunca.

La derivada de $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ es $g'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, que se anula para x = 0, perteneciente al intervalo [–2, 2].

Teorema del valor medio

11.39 Comprueba que la función $f(x)=\frac{3}{x}$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [1, 3] y, a continuación, encuentra el número *c* cuya existencia asegura dicho teorema.

La función $f(x)=\frac{3}{x}$ es continua y derivable en el intervalo [1, 3]. Nótese que *x* = 0 no pertenece a dicho intervalo.

Así pues, existe un número *c* tal que $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=-1$. Por otra parte, $f'(c)=-\frac{3}{c^2}$. Ya se puede calcular *c*: $-1=-\frac{3}{c^2}\Rightarrow c=\sqrt{3}$. (La solución negativa no es del intervalo [1, 3]).

11.40 Demuestra que si α y β son ángulos del primer cuadrante con $\alpha<\beta$, entonces, sen β – sen $\alpha<\beta-\alpha$. Utiliza el teorema del valor medio y la función seno.

A la función *f*(*x*) = sen *x* se le puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo cerrado [α, β]. Así pues, existe un número *c* comprendido entre α y β tal que $f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)$, es decir, $\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c(\beta-\alpha)$, y como el coseno de un ángulo del interior del primer cuadrante es siempre menor que 1, se concluye que:

$\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c\cdot(\beta-\alpha)<1\cdot(\beta-\alpha)<\beta-\alpha$

11.41 (PAU) Sea *f* la siguiente función: $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si } x<2\\ 2x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$.

¿Existen valores de *a* y *b* para los cuales *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]? Razona la contestación y, en caso afirmativo, calcula dichos valores.

En primer lugar, la función debe ser continua en *x* = 2:

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2x=4$, $f(2)=4$

Por tanto, $4+2a+b=4\Rightarrow 2a+b=0$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en *x* = 2:

La derivada, si *x* es distinto de 2, es $f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<2\\ 2 & \text{si } x>2\end{cases}$.

Para que *f* sea derivable en *x* = 2 debe cumplirse que: $\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^+} f'(x)\Rightarrow 4+a=2\Rightarrow a=-2\Rightarrow$ $b=4$

Si *a* = –2 y *b* = 4, la función *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4].

11.42 (PAU) Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demuestra que para *x* > 0 se verifica:

$$\operatorname{arctg}(2x)-\operatorname{arctg}(x)<\frac{x}{1+x^2}$$

El teorema del valor medio también se conoce como el teorema de Lagrange de los incrementos finitos. La función *f*(*x*) = arctg(*x*) es continua y derivable y se puede aplicar, pues, el teorema del valor medio en cualquier intervalo [*a*, 2*a*] con 0 < *a*, es decir, existe un número *c*, *a* < *c* < 2*a*, con $f(2a)-f(a)=f'(c)(2a-a)$, esto es, $\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(a)=\frac{1}{1+c^2}\cdot a=\frac{a}{1+c^2}$. Como 0 < *a* < *c*, entonces $\frac{a}{1+c^2}<\frac{a}{1+a^2}$ y se concluye que: $\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(a)=\frac{1}{1+c^2}\cdot a=\frac{a}{1+c^2}<\frac{a}{1+a^2}$ para cualquier *a* > 0.

11.43 PAU Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si } x<-2 \\ x^3+mx^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$.

a) Determina *m* y *n* para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–4, 2].

b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

a) En primer lugar, la función debe ser continua en $x = -2$:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2+nx)=4-2n$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x^3+mx^2)=-8+4m$, $f(-2)=-8+4m$

Por tanto, $4-2n=-8+4m \Rightarrow n+2m=6$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en $x = -2$:

La derivada, si x es distinto de 2, es $f'(x)=\begin{cases} 2x+n & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+2mx & \text{si } x>-2 \end{cases}$.

Para que f sea derivable en $x = -2$ debe cumplirse: $\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) \Rightarrow -4+n=12-4m \Rightarrow n+4m=16$.

Así pues debe cumplirse a la vez que $n + 2m = 6$ y que $n + 4m = 16$, es decir $n = -4$ y $m = 5$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{si } x<-2 \\ x^3+5x^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$ y su derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+10x & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$.

$\dfrac{f(2)-f(-4)}{6}=\dfrac{28-32}{6}=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow 2x-4=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}>-2$, no vale.

$3x^2+10x=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-30\pm\sqrt{828}}{18}$, solo es mayor que –2 la solución $x=\dfrac{-30+\sqrt{828}}{18}$.

11.44 Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, prueba que en el intervalo [1, 4] no existe ningún número *c* tal que $f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$. ¿Contradice esto el teorema del valor medio? ¿Por qué?

La derivada de la función es $f(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$, que es siempre negativa.

Por otra parte $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}$ es positivo.

La conclusión es que no existe ningún número c con $f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$.

La función $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ no es continua en el intervalo [1, 4], ya que en $x = 2$ no está definida. Así pues, no se contradice el teorema del valor medio ya que este exige que la función sea continua en el intervalo en cuestión.

En cualquier otro intervalo que no contuviera a $x = 2$ sí se cumpliría el teorema.

11.45 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\,\text{sen}x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x^2-x-2)}{2x^2-8x+8}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}$, $a>0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)\,\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\dfrac{x}{\text{sen}\,x}}$ i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(e^{x+h}-e^{-(x+h)}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2h}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\,\text{sen}\,x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x+(1-\cos x)\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2x+\cos x-\cos^2 x}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{sen}\,x\cos x-\text{sen}\,x-2\cos x\cdot(-\text{sen}\,x)}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\text{sen}\,x\cos x-\text{sen}\,x}{2}=0$

b) Se puede escribir $(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}$ como $(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}=e^{\ln(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}}=e^{\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+}\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{tg}\,x)}{\dfrac{1}{\text{tg}\,x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\text{tg}\,x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{-1}{\text{tg}^2\,x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}(-\text{tg}\,x)=0$$

Así pues: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)}=e^0=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1+2x}{-3x}}\right)^{\frac{1+2x}{-3x}\cdot\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^0=1$$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}\ln x=1$, por tanto: $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)}=e$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(x^3-2x+3\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}}{1}}=e^0=1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\dfrac{x}{\text{sen}\,x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\,\text{sen}\,x+x^2\cos x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\text{sen}\,x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\text{sen}\,x}{-\text{sen}\,x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-x^2)\text{sen}\,x+4x\cos x}{-\text{sen}\,x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^2\text{sen}\,x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\text{sen}\,x}{-\cos x}=\dfrac{6}{-1}=-6$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x^2-x-2)}{2x^2-8x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x^2-x-2)+e^x(2x-1)}{4x-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x^2+x-3)}{4x-8}=\infty$

Al estudiar los límites laterales, por la izquierda vale $-\infty$ y por la derecha $+\infty$. Así pues, el límite no existe.

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)\,\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2-1)\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}+(x^2-1)\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}}{-\dfrac{\pi}{2}\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{-\dfrac{\pi}{2}}=-\dfrac{4}{\pi}$

i) La expresión de este límite nos recuerda mucho a la definición de derivada. En efecto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{x+h}-e^{-(x+h)}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2h}=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{2}=\frac{e^x-e^{-x}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\ln\left(a^x-ax\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\frac{a^x\ln a-a}{a^x-ax}}{1}}=e^{a(\ln a-a)}=\dfrac{e^a\cdot e^{\ln a}}{e^a}=e^{\ln a}=a$

11.46 (PAU) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\dfrac{2\ln(x)}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)+x\cdot\cos(x-1)}{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{-2\operatorname{sen} x}{1+2\cos x}}{-\operatorname{sen} x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{1+2\cos x}=2$

Así pues: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}=e^2$

11.47 En cada uno de los casos, calcula el valor de *a* para que se cumpla la igualdad:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=3$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=4$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos 2x)}=4$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=e^2$

a) $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{a}{1+ax}}{2\cos 2x}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=6$

b) $4=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\dfrac{ae^{ax}}{e^{ax}-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{ax}-2}{ae^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2e^{ax}}{e^{ax}}-\dfrac{2}{e^{ax}}}{\dfrac{ae^{ax}}{e^{ax}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{e^{ax}}}{a}=\dfrac{2}{a}\Rightarrow\dfrac{2}{a}=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

c) $4=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(2x))}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{-a\operatorname{sen}(ax)}{\cos(ax)}}{\dfrac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\operatorname{sen}(ax)\cos(2x)}{2\operatorname{sen}(2x)\cos(ax)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(2x)}{\cos(ax)}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=$

$=\dfrac{a}{2}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cos(ax)}{2\cos(2x)}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{4}$. Así pues, $4=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow a=4$ ó $a=-4$

d) $e^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3(ax+5)}{x}}=e^{3a}$, por tanto, $a=\dfrac{2}{3}$

11.48 Determina, en cada caso, el valor de *a* que hace que la función sea continua en todo R:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{3x}}{x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$ **b)** $g(t)=\begin{cases}at^2 & \text{si } t\leq 1\\ (t^2-1)\ln(t-1) & \text{si } t>1\end{cases}$

a) Debe cumplirse $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3e^{3x}}{1}=-3$, si $a=-3$, la función es continua.

b) Debe cumplirse $\lim\limits_{t\to 1}g(t)=g(1)=a$. Para que exista este límite hay que asegurarse de que sus límites laterales coinciden. $\lim\limits_{t\to 1^-}g(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}(at^2)=a$

$\lim\limits_{t\to 1^+}g(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}(t^2-1)\ln(t-1)=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{\ln(t-1)}{\dfrac{1}{t^2-1}}=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1}{t-1}}{\dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}}=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{(t^2-1)^2}{-2t(t-1)}=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{(t+1)^2(t-1)^2}{-2t(t-1)}=$

$=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{(t+1)^2(t-1)}{-2t}=0$. Si $a=0$, la función es continua.

11.49 (PAU) Sea $f:(-\pi,\pi)\to \mathbf{R}$ la función derivable que para $x\neq 0$ verifica que $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen}x}$.

a) ¿Cuánto vale $f(0)$? **b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?**

a) Al ser continua, *f*(0) debe ser igual al límite de *f* en dicho punto.

Aplicando L´Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{(1+x^2)\cos x}=0$. Así pues, *f*(0) = 0.

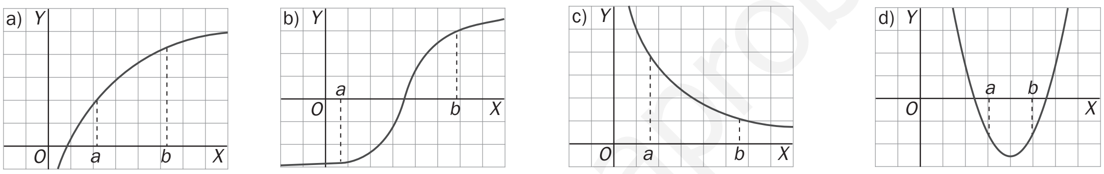
b) Se calcula *f´*(0) aplicando la definición de derivada, y la regla de L´Hôpital dos veces:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+h^2\right)}{\operatorname{sen}h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+h^2\right)}{h\cdot\operatorname{sen}h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h}{1+h^2}}{\operatorname{sen}h+h\cosh}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2\cdot(1+h^2)-2h\cdot 2h}{(1+h^2)^2}}{\cos h+\cos h+h(-\operatorname{sen}h)}=\frac{2}{2}=1.$$ Así pues, *f´*(0) = 1.

Extremos relativos. Crecimiento y decrecimiento

11.50 Las cuatro gráficas que se muestran son las de las derivadas de otras tantas funciones. En cada caso, razona si la función correspondiente alcanza un valor mayor para *x* = *a* o para *x* = *b*.



a) La derivada es positiva en el intervalo [*a*, *b*], por tanto, la función es creciente en este intervalo: *f*(*a*) < *f*(*b*).

b) La derivada es positiva en el intervalo [*a*, *b*], por tanto, la función es creciente en este intervalo: *f*(*a*) < *f*(*b*).

c) La derivada es negativa en [*a*, x_0] y positiva en [x_0, *b*] Además *f'*(*a*) = *f'*(*b*), luego *f*(*a*) = *f*(*b*).

d) La derivada es negativa en [*a*, *b*], por tanto, la función es decreciente en este intervalo. Luego *f*(*a*) > *f*(*b*).

11.51 (PAU) Considera la función *f*(*x*) = *xg*(*x*). Sabiendo que:

I. La función *g*(*x*) es continua, derivable y tiene un máximo en *x* = 1.

II. *f*(1)*g*(1) = 4

a) ¿Tiene la función *f* un máximo en *x* = 1? Justifica tu respuesta.

b) Si, además, se sabe que $g(x)=ax^2+bx+c$ calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que *f* tenga un mínimo en *x* = 0

a) La derivada de *f*(*x*) es $f'(x)=g(x)+xg'(x)$. Se sabe que *g'*(1) = 0 ya que *g* tiene un máximo en *x* = 1. Así pues $f'(1)=g(1)+1\cdot g'(1)=g(1)+0$. Para que *f* tenga un máximo en *x* = 1, su derivada en dicho punto debe valer cero, pero *f´*(1) no puede valer cero ya que entonces *g*(1) también valdría cero y esto no puede ser porque nos dicen que *f*(1)·*g*(1) = 4. Por tanto, *f* no puede tener un máximo en *x* = 1 porque $f'(1)\neq 0$.

b) La derivada de $g(x)=ax^2+bx+c$ es $g'(x)=2ax+b$.

Como *g* tiene un máximo en *x* = 1, *g'*(1) = 0, es decir, 2*a* + *b* = 0 y *b* = –2*a*.

Como *f* tiene un máximo en *x* = 0, *f'*(0) = 0. La expresión de la derivada de *f* era $f'(x)=g(x)+xg'(x)$, entonces $f'(0)=g(0)+0\cdot g'(0)=g(0)=c\Rightarrow c=0$. Así pues, *g* es de la forma $g(x)=ax^2-2ax$.

Por otra parte, se sabe que *f*(1)·*g*(1) = 4, es decir, 1 · *g*(1) · *g*(1) = 4 $\Rightarrow [g(1)]^2=4$, por tanto, *g*(1) = 2 ó *g*(1) = –2. Si *g*(1) = –2, se tendría que $g(1)=a\cdot 1^2-2a\cdot 1=-2\Rightarrow a=2$, y la función sería $g(x)=2x^2-4x$, que se debe descartar porque esta función es una parábola cóncava hacia arriba, que no presenta un máximo.

Si *g*(1) = 2, se tiene que $g(1)=a\cdot 1^2-2a\cdot 1=2\Rightarrow a=-2$, y la función sería $g(x)=-2x^2+4x$, que sí tiene un máximo en su vértice.

Así pues, *a* = –2, *b* = 4 y *c* = 0.

Las funciones en cuestión son $g(x)=-2x^2+4x$ y $f(x)=-2x^3+4x^2$.

11.52 (PAU) Determina un punto de la curva de ecuación $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

La pendiente de las rectas tangentes nos la da el valor de la derivada:

$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$

La pendiente máxima será el máximo de esta derivada, por tanto se debe estudiar la derivada de la derivada:

$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
Signo de f''	–	0	+	0	–	0	+
f'	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Por consiguiente, las pendientes de las rectas tangentes tienen un máximo relativo en el punto (0, 0). Falta, pues, asegurarnos de que ese máximo es absoluto. Para ello se estudian los límites en el infinito de dichas pendientes:

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-2x^2)e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0$. Análogamente, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Por tanto, el punto (0, 0) es el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima y dicha pendiente vale $f'(0) = (1 - 2\cdot 0^2)e^{-0^2} = 1$.

11.53 Demuestra que para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P) > \frac{P}{1+P}$. Para ello sigue estos pasos:

I. Demuestra que la función $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ es continua y derivable en el intervalo $(0, +\infty)$.

II. Demuestra que *f* (*x*) es estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

III. Calcula $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

IV. Concluye tu demostración.

I. La función es continua y derivable para valores positivos de *x* ya que es suma de funciones derivables.

II. La derivada de *f*(*x*) es $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, que es siempre positiva si *x* > 0, por tanto, la función *f*(*x*) es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

III. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right] = 0 - 0 = 0$

IV. Como se ha visto que si *x* es positivo, entonces, $f(x) > 0 \Rightarrow \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$; es decir, para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P) > \frac{P}{1+P}$.

11.54 (TIC)(PAU) Sea la función: $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

a) Calcula *c* sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa *x* = 0 es horizontal.

b) Para el valor de *c* encontrado en el apartado anterior, calcula *a* y *b* sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x* = –2 y que corta al eje *X* en *x* = 1.

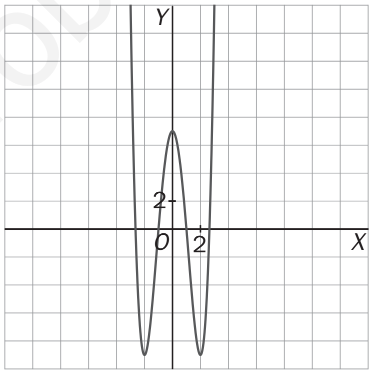
c) Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

a) $f'(0) = 0 \Rightarrow 4\cdot 0^3 + 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

b) $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ Como tiene un extremo relativo en *x* = –2, se sabe que *f*´(–2) = 0, es decir: –32 + 12*a* – 4*b* = 0, o lo que es lo mismo: 3*a* – *b* = 8. Como corta al eje *X* en *x* = 1, *f*(1) = 0 ⇒1 + *a* + *b* + 7 = 0, *a* + *b* = –8. Resolviendo el sistema se obtiene *a* = 0 y *b* = –8. La función es $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

c) La derivada de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ es $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\cdot(x^2 - 4)$ y se anula para *x* = 0, *x* = –2 y *x* = 2. Además se sabe que la función es continua. Estudiemos su monotonía:

x	$(-\infty, -2)$	–2	(–2, 0)	0	(0, 2)	2	$(2, +\infty)$
Signo de *f*´	–	0	+	0	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente



Así pues, *f* decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y crece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

Tiene mínimos relativos (que también son absolutos) en los puntos: *A*(–2, –9) y *B*(2, –9).

Tiene un máximo relativo en el punto *C*(0, 7).

La gráfica de la función es la que se muestra.

11.55 (PAU) Para cada *h* se considera la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$.

a) Halla los puntos en los que *f* alcanza sus valores máximos y mínimos.

b) Encuentra *h* para que el valor de *f* en el mínimo local hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, que se anula si *x* = 0 ó si *x* = 1. Se estudia si son máximos o mínimos con el criterio de la derivada segunda, $f''(x) = 12x - 6$:

$f''(0) = -6 < 0$, por tanto, el punto *A*(0, *h*) es un máximo.

$f''(1) = 6 > 0$, por tanto, el punto *B*(1, –1+*h*) es un mínimo.

b) Para que el mínimo sea cero debe cumplirse que –1 + *h* = 0, es decir, *h* = 1.

11.56 Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)e^{-x}$.

La derivada es $f'(x) = (-2x^3 + 10x^2 - 8x)e^{-x} = -2x(x-1)(x-4)e^{-x}$, y se anula si *x* = 0, *x* = 1, *x* = 4. Se estudia el signo de la derivada:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	(1, 4)	4	$(4, +\infty)$
Signo de f´	+	0	–	0	+	0	–
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función tiene máximos relativos en los puntos (0, 0) y (4, 64*e* – 4). Este último es absoluto.

La función tiene un mínimo relativo en el punto (1, –2*e* – 1).

11.57 Demuestra que la ecuación $e^x = x$ no tiene solución. Para ello sigue estos pasos:

I. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^x - x - 1$.

II. Halla el mínimo absoluto de la función *f*.

III. Demuestra que $f(x) \geq 0$ para todo *x*.

IV. Demuestra que $e^x - x > 0$ para todo *x* y concluye tu demostración.

I. La derivada de la función continua $f(x) = e^x - x - 1$ es $f'(x) = e^x - 1$, que se anula si x = 0. Se estudia su monotonía:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
Signo de f'	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

II. El mínimo absoluto es el punto (0, 0) ya que la función es continua y es siempre decreciente a la izquierda de cero y siempre creciente a la derecha de cero. Así pues, el valor mínimo que toma la función es $f(0) = 0$.

III. Por tanto, $f(x) \geq 0$ para todo *x*.

IV. Como $f(x) \geq 0$, entonces $e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x$ para todo *x* y, por tanto, nunca puede ser que $e^x = x$.

11.58 ¿Bajo qué condiciones sobre *a*, *b*, *c* y *d* se puede asegurar que la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

con $a \neq 0$ es estrictamente creciente o decreciente en R?

En primer lugar, se observa que los límites en más infinito y en menos infinito no pueden coincidir nunca porque el grado del polinomio es 3. Como la derivada es un polinomio de segundo grado, la ecuación $f'(x) = 0$ tendrá una, dos o ninguna solución (que nos darían los posibles extremos relativos).

Para que sea estrictamente creciente o decreciente no debe tener ni máximos ni mínimos relativos, es decir, la ecuación $f'(x) = 0$ no puede tener dos soluciones. Si tuviera una única solución, sería porque ahí tendría un punto de tangente horizontal que no es extremo relativo, es decir, sería un punto de inflexión.

La derivada es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, que tendrá una única solución si su discriminante es cero: $(2b)^2 - 4 \cdot 3ac = 0 \Rightarrow 4b^2 - 12ac = 0$. Y no tendrá solución si $4b^2 - 12ac < 0$.

Así pues, resumiendo:

La función será creciente si $a > 0$ y $4b^2 - 12ac \leq 0$.

La función será decreciente si $a < 0$ y $4b^2 - 12ac \leq 0$.

En el caso que falta, $4b^2 - 12ac > 0$, la función tendría un máximo y un mínimo relativo y, por tanto, sería creciente en algunos tramos y decreciente en otros.

11.59 Localiza los extremos absolutos, si existen, de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **en [–3, 0), en (–3, 0], en [0, 3], en (0, 3) y en (–1, 3].**

b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ **en [–3, –1), en [–3, 1], en [–3, 3], en [–3, 1), en [–4, 1] y en [–1, 2).**

a) El mínimo de la función se encuentra en el vértice de la parábola $f(x)$. La 1.ª coordenada es $v_1 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$.

Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en $x = -1$ (valor que anula derivada) y en los extremos de los intervalos:

$f(-1) = -2$, $f(-3) = 2$, $f(0) = -1$, $f(3) = 14$.

i) En el intervalo [–3, 0), el mínimo absoluto es $A(-1,-2)$ y el máximo absoluto es $B(-3, 2)$.

ii) En el intervalo (–3, 0], el mínimo absoluto es $A(-1,-2)$ y el máximo absoluto es $C(0, -1)$.

iii) En el intervalo [0, 3], el mínimo absoluto es $C(0, -1)$ y el máximo absoluto es $D(3, 14)$.

iv) En el intervalo (0, 3), no tiene ni mínimo absoluto ni máximo absoluto.

v) En el intervalo (–1, 3], no tiene mínimo absoluto y el máximo absoluto es $D(3, 14)$.

b) La función es continua en $x = -2$ ya que sus límites laterales coinciden.

La derivada de $p(x) = -x^2 - 2x + 5$ es $p'(x) = -2x - 2$, y se anula si $x = -1$, que no pertenece a su dominio de definición. Así pues, el valor $x = -1$ no nos aporta nada a la hora de calcular los extremos absolutos.

La derivada de $q(x) = x^2 + 1$ es $q'(x) = 2x$, y se anula si $x = 0$. Este valor sí hay que tenerlo en cuenta.

Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en

$X = 0$ (valor que anula derivada), en los extremos de los intervalos y en $x = -2$ (en este punto, la función no es derivable y por eso se le debe incluir en el estudio).

$g(0) = 1$, $g(-3) = 2$, $g(-1) = 2$, $g(3) = 10$, $g(-4) = -3$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(-2) = 5$.

i) En el intervalo [–3, –1), hay dos mínimos absolutos: (–3, 2) y (–1, 2); y el máximo absoluto es (–2, 5).

ii) En el intervalo [–3, 1], el mínimo absoluto es $A(0, 1)$ y el máximo absoluto es $B(-2, 5)$.

iii) En el intervalo [–3, 3], el mínimo absoluto es $A(0, 1)$ y el máximo absoluto es $C(3, 10)$.

iv) En el intervalo [–3, 1), el mínimo absoluto es $A(0, 1)$ y el máximo absoluto es $B(-2, 5)$.

v) En el intervalo [–4, 1], el mínimo absoluto es $D(-4, -3)$ y el máximo absoluto es $B(-2, 5)$.

vi) En [–1, 2), el mínimo absoluto es $A(0, 1)$ y no hay máximo absoluto.

Problemas de optimización

11.60 Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Se dispone de 192 m² de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

Se trata de un problema de optimización.

1. Se nombran las variables: longitud en metros de la base (x) cuadrada y profundidad (y) en metros.

2. Se relacionan las variables: el área total debe ser 192 m², por tanto: $x^2 + 4xy = 192$, $y = \frac{192 - x^2}{4x}$.

3. La función que se quiere maximizar es el volumen $V = x \cdot x \cdot y$, es decir: $V(x) = x^2 \frac{192 - x^2}{4x} = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

5. Se busca el máximo de $V(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$ en $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

$V'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 48 \quad \Rightarrow \quad x = 8 \in \left(0, \sqrt{192}\right)$. La solución negativa no es realista.

Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el máximo absoluto de la función (es una parábola cóncava hacia abajo) se alcanza en su vértice, $x = 8$, por tanto, $y = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4$.

Las dimensiones de la piscina que maximizan el volumen son 8 metros de lado para la base cuadrada y 4 metros de profundidad. El volumen máximo es $V(8)$, esto es, 256 cm^3.

11.61 Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de tal manera que uno de ellos tenga doble longitud que otro y que, al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encuentra la longitud de cada trozo.

Se trata de un problema de optimización.

1. Se nombran las variables: cada uno de los trozos *(x*, 2*x* e *y*).

2. Se relacionan las variables: la suma de los trozos es 14 dam: *x* + 2*x* + *y* = 14; es decir, *y* = 14 – 3*x*.

3. La función que se quiere maximizar es la suma de las áreas: $A=\left(\frac{3x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2$.

Sustituyendo y operando:

$$A=\frac{9x^2}{16}+\frac{196+9x^2-84x}{16}=\frac{18x^2-84x+196}{16}$$

4. Se busca el máximo:

$$A'(x)=\frac{36x-84}{16}=\frac{9x^2-21}{4}=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{21}{9}}=\frac{\sqrt{21}}{3}\Rightarrow y=14-\sqrt{21}$$

Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el mínimo absoluto de la función (es una parábola cóncava hacia arriba) se alcanza en su vértice: $x=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

11.62 Se parte un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos, haciendo con uno un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea:

a) Máxima.

b) Mínima.

Se trata de un problema de optimización.

1. Se nombran las variables, que son las longitudes de los dos trozos: *x* (para hacer el círculo), e *y* (para hacer el cuadrado).

2. Se relacionan las variables: $x+y=1$, es decir, $y=1-x$.

3. La función que se quiere maximizar y minimizar es la suma de las áreas. El lado del cuadrado es $\frac{1-x}{4}$ y su área: $\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$. La longitud del círculo es $x=2\pi r\Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}$, así pues, su área es $\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}$.

La función suma de áreas es $A(x)=\left(\frac{1-x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{4\pi}$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*: (0, 1).

5. Se busca el máximo y el mínimo de $A(x)=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{4\pi}$ en (0, 1).

$A'(x)=\frac{2(\pi+4)x-2\pi}{4\pi}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{\pi+4}$. Este valor corresponde al mínimo ya que la función es una parábola cóncava hacia arriba.

Así pues, el mínimo se alcanza si el trozo destinado a formar el círculo mide $x=\frac{\pi}{\pi+4}$ m.

No se puede calcular el valor de la función en los extremos, por tanto, se calculan sus límites: $\lim_{x\to 0}A(x)=\frac{1}{4}$ y $\lim_{x\to 1}A(x)=\frac{1}{\pi}$. Si solo se formara un círculo con todo el hilo, se obtendría el área máxima. Pero esta posibilidad no la contempla el problema.

Para responder se podría decir que cuanto más largo sea el trozo para formar el círculo, mayor será la suma de las áreas.

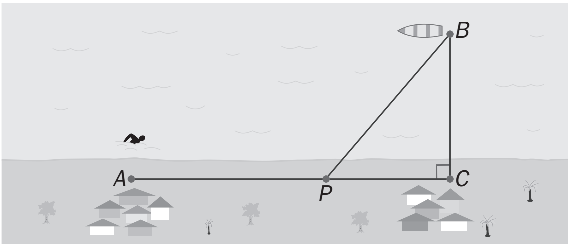
11.63 De entre todos los números reales positivos *x*, e *y*, tales que $x + y = 10$, encuentra aquellos para los que el producto $p = x^2y$ es máximo.

1. Se nombran las variables, que son los números: *x* e *y*.
2. Se relacionan las variables: $x + y = 10$, es decir, $y = 10 - x$.
3. La función que se quiere maximizar y minimizar es el producto $p = x^2y = x^2(10 - x) = 10x^2 - x^3 = x^2(10 - x)$.
4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. Debe estar en el intervalo abierto (0, 10).
5. Se busca el máximo y el mínimo de $A(x) = \dfrac{(\pi + 4)x^2 - 2\pi x + \pi}{4\pi}$ en (0, 1).

$p'(x) = 20x - 3x^2 = x(20 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$. Este valor corresponde al máximo ya que la función es una parábola cóncava hacia abajo.

Así pues, el máximo se alcanza si $x = \dfrac{20}{3}$ e $y = 10 - x = \dfrac{10}{3}$.

11.64 Un barco *B* y dos ciudades *A* y *C* de la costa forman un triángulo rectángulo en *C*, de acuerdo a lo reflejado en la figura.



Un hombre situado en *A* desea llegar hasta el barco *B*. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h, ¿a qué distancia de *A* debe abandonar la costa para nadar hasta *B* si quiere llegar lo antes posible?

Primero, con ayuda del teorema de Pitágoras, se observa que la distancia entre las dos ciudades es de 12 km.
1. Se nombra la variable: *x* es la distancia *PC*.
2. La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer *AP* (a 5 km/h) y *PB* (a 3 km/h). Se estudia cuánto miden estos segmentos: *AP* = 12 – *x*; para calcular *PB* se trabaja en el triángulo *PBC* y se obtiene que $PB = \sqrt{5^2 + x^2}$.

El tiempo empleado es la función $t(x) = \dfrac{12 - x}{5} + \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{3} = \dfrac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$.

3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*: [0, 12].
4. Se busca el mínimo de $t(x) = \dfrac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$ en [0, 12].

$t'(x) = \dfrac{1}{15}\cdot\left(-3 + \dfrac{5x}{\sqrt{25 + x^2}}\right) = \dfrac{-3\sqrt{25 + x^2} + 5x}{15\sqrt{25 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\sqrt{25 + x^2} + 5x = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{25 + x^2} \Rightarrow 25x^2 = 225 + 9x^2 \Rightarrow 16x^2 = 225 \Rightarrow x = 3{,}75$.

Se compara: $t(0) = \dfrac{12}{5} + \dfrac{5}{3} \approx 4{,}07$, $t(12) = \dfrac{13}{3} = 4{,}\widehat{3}$, $t(3{,}75) = 3{,}7\widehat{3}$.

Así pues, el mínimo se alcanza si camina durante $12 - 3{,}75 = 8{,}25$ km y luego se pone a nadar.

11.65 Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

1. Se nombra la variable: *x* es la longitud de los lados iguales.
2. La función que se quiere maximizar es el área del triángulo. La base mide *b* = 8 – 2*x* y la altura se puede hallar con Pitágoras y se obtiene $a = \sqrt{8x - 16}$. El área es $A(x) = \dfrac{ba}{2} = (4 - x)\sqrt{8x - 16} = 2(4 - x)\sqrt{2x - 4}$.
3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. La suma de dos lados debe ser siempre mayor que el tercero, así pues: $x + x > 8 - 2x \Rightarrow x > 2$ y $x + 8 - 2x > x \Rightarrow x < 4$: 2 < x < 4, suponiendo que *x* se mueve en el intervalo cerrado [2, 4].
4. $A'(x) = 2\left[-\sqrt{2x - 4} + (4 - x)\dfrac{2}{2\sqrt{2x - 4}}\right] = 2\left[\dfrac{8 - 3x}{\sqrt{2x - 4}}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$.

Se compara: $A(2) = 0$, $A(4) = 0$, $A\left(\dfrac{8}{3}\right) = 3{,}\widehat{5}$.

Así pues, el triángulo de área máxima es el triángulo equilátero de lado $\dfrac{8}{3}$.

11.66 En un rectángulo de 4 m de perímetro, se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores, ¿entre qué valores está comprendida el área de la figura resultante? Calcúlala.

1. Se nombra la variable: x es la longitud de la altura e y la longitud de la base.
2. Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.
3. La función que se quiere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más dos círculos).

$$A(x) = x(2-x)+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{2-x}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(2x^2-4x+4)+2x-x^2=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)x^2+(2-\pi)x+\pi$$

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.
5. El mínimo absoluto de la parábola (cóncava hacia arriba) $A(x)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)x^2+(2-\pi)x+\pi$ se encuentra en su vértice, es decir, si $x=\frac{\pi-2}{\pi-2}=1$. Se compara: $A(1)=1+\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0} A(x)=\pi$, $\lim_{x\to 2} A(x)=\pi$.

Así que se podría contestar que el área de la figura estará comprendida entre $1+\frac{\pi}{2}$ y π.

El área π se conseguiría si la figura fuera un círculo.

11.67 En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen dos lados opuestos por semicircunferencias exteriores. Calcula las dimensiones del rectángulo original para que la figura formada tenga máxima área.

1. Se nombra la variable: x es la longitud del lado sustituido por semicircunferencias, e y la longitud de los otros dos lados.
2. Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.
3. La función que se qiuere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más un círculo).

La función área es $A(x)=x(2-x)+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\pi-4}{4}\right)x^2+2x$.

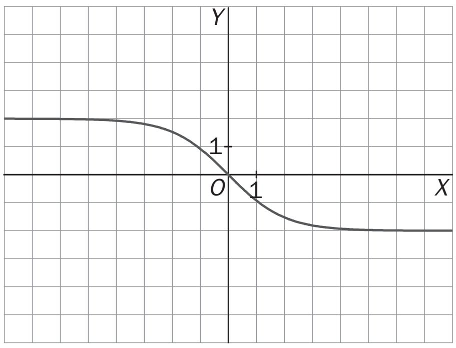
4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.
5. El máximo de la parábola (cóncava hacia abajo) se encuentra en su vértice, es decir, si $x=\frac{4}{4-\pi}\approx 4{,}66$.

Pero este valor no pertenece al intervalo de definición de x: $0 < x < 2$.

Por otra parte, $A(0) = 0$ y $A(2) = \pi$. Así que se podría decir que el área máxima se conseguiría si la figura degenerara en un solo círculo de 2 m de diámetro.

Curvatura y puntos de inflexión

11.68 (TIC) Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\frac{2\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$. Para ello, calcula sus asíntotas, demuestra que es simétrica respecto al origen, demuestra que es siempre decreciente, estudia su curvatura y halla su punto de inflexión.



El dominio es todo **R**, por lo que no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(1-e^x\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2e^x}{e^x}=-2$$

La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal en más infinito.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot\left(1-e^x\right)}{1+e^x}=\frac{2}{1}=2$$

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal en menos infinito.

La función es impar.

La derivada es siempre negativa. Así pues, la función es siempre decreciente. No tiene extremos relativos.

La derivada segunda es $f''(x)=\frac{-4e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ y solo se anula si $x = 0$. La función es cóncava hacia abajo si $x < 0$; cóncava hacia arriba si $x > 0$; y tiene un punto de inflexión en el punto (0, 0).

11.69 (TIC)(PAU) Calcula, para la función $f(x)=(x+1)e^{-x}$: intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión e intervalos de curvatura.

La función es continua y derivable porque es producto de funciones continuas y derivables en todo **R**: $D(f)=\mathbf{R}$.

Su derivada es $f'(x)=-xe^{-x}$, que se anula si x = 0. Así pues, la función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en el punto (0, 0).

La derivada segunda es $f''(x)=(x-1)e^{-x}$, que se anula si x = 1. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$. El punto (1, $2e^{-2}$) es un punto de inflexión porque la gráfica cambia de curvatura.

11.70 (TIC)(PAU) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$:

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.

c) Estudia su curvatura y sus posibles puntos de inflexión.

d) Esboza su gráfica.

a) $D(f)=\mathbf{R}-\{0\}$ ya que x = 0 anula el denominador. Así pues, no corta al eje *Y*. Tampoco corta al eje *X* ya que la función no se anula nunca porque el numerador es siempre positivo.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^4+3}{x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+3}{x}=+\infty$, así pues, la recta x = 0 es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+3}{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4+3}{x}=-\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^4+3}{x^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^4+3}{x^2}=+\infty$.

b) La derivada de la función es $f'(x)=\dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$ y se anula para x=–1 y x = 1.

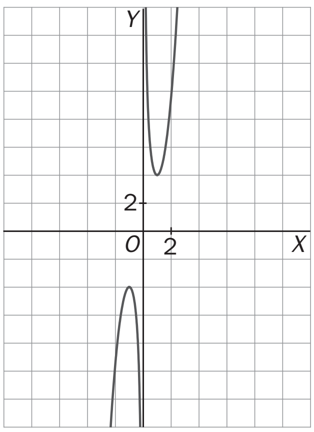
x	$(-\infty,-1)$	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de *f'*	+	0	–		–	0	+
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	No existe f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función crece en $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)\cup(0, 1)$.

Tiene un máximo relativo en el punto (–1, *f*(–1)) = (–1, –4) y un mínimo relativo en el punto (1, *f*(1)) = (1, 4).

c) La derivada segunda es $f''(x)=\dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$. Es negativa para valores negativos de x y positiva para valores positivos. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$

d) La gráfica es:



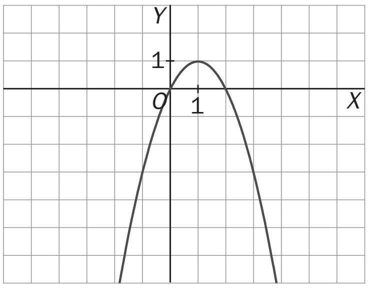
11.71 Halla los valores de *m* para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava hacia arriba.

Para que la función sea siempre cóncava hacia arriba su derivada segunda debe ser siempre positiva. Se impone esta condición:

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3$ y $f''(x) = 12x^2 + 2m$

Para que $f''(x) = 12x^2 + 2m$ sea siempre positiva debe cumplirse que $m > 0$.

11.72 La gráfica que se muestra es la de la derivada segunda de cierta función *f*. A partir de ella, deduce la curvatura de *f* y sus puntos de inflexión. ¿Qué se puede afirmar con seguridad de la gráfica de *f*?

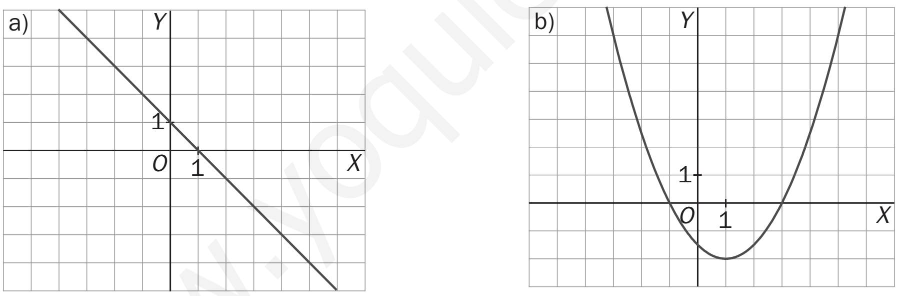


La función es cóncava hacia abajo si: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

La función es cóncava hacia arriba si: $(0, 2)$.

Los puntos (0, *f*(0)) y (2, *f*(2)) son puntos de inflexión.

11.73 Las gráficas que se muestran en la figura representan la derivada de ciertas funciones *f*(*x*) y *g*(*x*), respectivamente. A partir de ellas, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) y *g*(*x*), así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.



a) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty, 1)$. Decrece si la derivada es negativa: $(1, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto (1, *f*(1)) porque la derivada vale cero y *f* pasa de creciente a decreciente.

Las pendientes de las tangentes a *f´* son siempre negativas, así que la función es siempre cóncava hacia abajo.

Como la función no cambia de curvatura, no tiene puntos de inflexión.

b) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Decrece si la derivada es negativa: $(-1, 3)$.

Tiene un máximo relativo en el punto (–1, *g*(–1)) porque la derivada vale cero y *g* pasa de creciente a decreciente.

Tiene un mínimo relativo en el punto (3, *g*(3)) porque la derivada vale cero y *g* pasa de decreciente a creciente.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ ya que las pendientes de las tangentes a *g*' (es decir, la derivada segunda) son negativas, y es cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$ ya que las pendientes de las tangentes a *g'* (es decir, la derivada segunda) son positivas. El punto (1, *g*(1)) es un punto de inflexión porque es un punto de cambio de curvatura.

11.74 Sea la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, se pide:

a) Su dominio.

b) Demuestra que es siempre positiva.

c) Demuestra que es simétrica respecto al eje *Y*.

d) Haz un estudio completo de sus posibles asíntotas.

e) Encuentra su máximo y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Encuentra sus puntos de inflexión y estudia su curvatura.

g) Dibuja su gráfica.

h) ¿Qué nombre recibe esta función? ¿Y su gráfica?

a) Dom(f) = **R**

b) La función es siempre positiva porque se trata de una exponencial.

c) La función es par porque $f(-x) = f(x)$, por tanto, es simétrica respecto al eje *Y*.

d) No tiene asíntotas verticales ni oblicuas pero sí horizontales ya que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, es decir, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en más infinito como en menos infinito, ya que es simétrica respecto al eje *Y*.

e) Su derivada es $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = 0$.

Para valores negativos de x es positiva y para valores positivos es negativa. Así pues, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo (que es también absoluto) en el punto $(0, f(0)) = (0, 1)$.

f) Su derivada segunda es $f''(x) = \frac{(x^2 - 1)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = -1$ y $x = 1$.

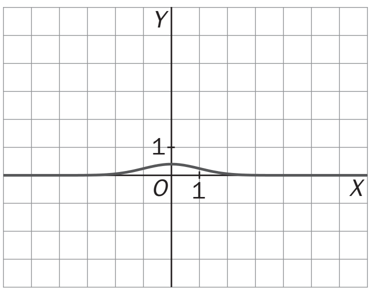
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	+	0	–	0	+
f	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$.

Tiene dos puntos de inflexión en $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.

g) La gráfica de la función es la que se muestra.

h) Esta función es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1, $N(0, 1)$, también llamada normal estándar. Su gráfica se conoce con el nombre de campana de Gauss.



11.75 (PAU) De la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que:

- Tiene un máximo en $x = -1$.

- Su gráfica corta al eje *X* en el punto de abscisa $x = -2$.

- Tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.

Calcula *a*, *b*, *c* y *d* sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Las dos primeras derivadas de *f* son: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

Hay un máximo en $x = -1$ implica que $f'(-1) = 0$, es decir: $f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$

Corta al eje *X* en $x = -2$ implica que $f(-2) = 0$, es decir:

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$

Hay un punto de inflexión en $x = 0$ implica que $f''(0) = 0$, es decir: $f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

La tangente a *f* en $x = 2$ tiene pendiente 9, por lo que $f'(2) = 9$: $f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 9$

Resolviendo el sistema formado por esas cuatro ecuaciones, se obtiene la solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + b - 2c + d = 0 \\ b = 0 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = -3,\ d = 2$$

11.76 PAU Demuestra que la curva de la ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

Halla la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto (x_0, y_0), siendo x_0 el valor de *x* que hace mínima *y*''.

Se calcula la segunda derivada: $y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $y'' = 12x^2 - 6x + 2$, que es una parábola cóncava hacia arriba que no corta al eje *X* (la ecuación $12x^2 - 6x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales). La derivada segunda es siempre positiva y la curva es siempre cóncava hacia arriba, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

El mínimo de $y'' = 12x^2 - 6x + 2$ se encuentra en su vértice $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \cdot 12} = \dfrac{1}{4}$.

11.77 PAU Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina *a* y *b* sabiendo que la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Halla primero el punto de inflexión y para eso necesitas calcular la derivada segunda:

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$ y $f''(x) = 12x + 24$. La derivada segunda se anula si $x = -2$, y como a su izquierda es negativa y a su derecha positiva, entonces, el punto $(-2, f(-2))$ es el punto de inflexión.

La pendiente de la recta tangente $y = 2x + 3$ es 2 y coincide con el valor de $f'(-2)$. Así pues:

$f'(-2) = 2 \Rightarrow 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \Rightarrow a = 26$.

El punto de tangencia $(-2, f(-2))$ pertenece también a la recta tangente, por tanto, $f(-2) = 2\cdot(-2) + 3 = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -1 \Rightarrow b = 19$. La respuesta es $a = 26$ y $b = 19$.

11.78 (PAU) Calcula los valores del parámetro *a*, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Primero se calculan sus puntos de inflexión: $y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$, $y'' = 12ax^2 + 12ax = 12ax(x + 1)$.

La derivada segunda se anula si $x = 0$ ó si $x = -1$, que son las abscisas de sus puntos de inflexión.

La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $y'(0) = -a$.

La pendiente de la tangente en $x = -1$ es $y'(-1) = -4a + 6a - a = a$.

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1. Imponiendo esta condición: $-a \cdot a = -1 \Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$.

11.79 Un móvil se desplaza con un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración de 0,25 m/s². Si en el instante t = 8 s lleva una velocidad de 7 m/s, calcula la velocidad que lleva en t = 20 s. Si en los primeros 4 segundos ha recorrido 30 m, calcula la función de posición del móvil.

Para que la aceleración sea constante, la función que nos da la posición debe ser un polinomio de segundo grado, $e(t) = at^2 + bt + c$. Su velocidad será $v(t) = e'(t) = 2at + b$ y su aceleración $a(t) = v'(t) = 2a$.

Así pues, $2a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$ y la velocidad será $v(t) = 2 \cdot \frac{1}{8}t + b = \frac{1}{4}t + b$.

Como en t = 8 la velocidad es 7, se tiene que $v(8) = \frac{1}{4} \cdot 8 + b = 7 \Rightarrow b = 5$ y la ecuación de la velocidad es $v(t) = \frac{1}{4}t + 5$. En t = 20, la velocidad es $v(20) = \frac{1}{4} \cdot 20 + 5 = 10$ m/s.

Como a los 4 segundos ha recorrido 30 metros, se tiene que $e(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + c = 30 \Rightarrow c = 8$.

Así pues, la ecuación de la posición del móvil es $e(t) = \frac{1}{8}t^2 + 5t + 8$.

11.80 Se aparta del fuego agua hirviendo (a 100 ºC) en una habitación con temperatura ambiente de 20 ºC. Si en 10 minutos se ha enfriado hasta 60 ºC, ¿en cuánto tiempo llegará a 25 ºC?

Sea $T(t)$ la función que da la temperatura del agua en cada instante t .

La ley de Newton dice que $T'(t) = k(T(t) - 20)$, es decir, $k = \frac{T'(t)}{T(t) - 20}$. Así pues, $\ln(T(t) - 20) = kt + C$ y, por tanto, $T(t) - 20 = e^{kt} \cdot e^{C}$. Llamando $e^{C} = M$, ya se puede escribir la expresión de la función temperatura, $T(t) = 20 + Me^{kt}$, en la que solo falta averiguar los valores de los parámetros M y k.

Como $T(0) = 100 \Rightarrow 20 + Me^{k \cdot 0} = 20 + M = 100 \Rightarrow M = 80$. La función es $T(t) = 20 + 80e^{kt}$.

También se sabe que $T(10)$ = 60, es decir,

$$60 = 20 + 80e^{10k} \Rightarrow e^{10k} = \frac{1}{2}, \text{ luego } e^{kt} = e^{\frac{10kt}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

Ya se tiene la función temperatura: $T(t) = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$.

Si la temperatura del agua es de 25 ºC: $T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 25$, de donde $2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-4}$, es decir, t = 40 minutos.

Así pues, el agua llegará a los 25 ºC a los 40 minutos.

PROBLEMAS

11.81 Considera la función definida en $(0,+\infty)$ por la expresión $f(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$:

a) Encuentra un intervalo donde puedas asegurar que existe una solución de la ecuación *f* (x) = 0.

b) Demuestra que la ecuación *f* (*x*) = 0 tiene una única solución, *c*, en $(0, +\infty)$

c) Encuentra un entero *p* para el que se verifique que $\frac{p}{100} \le c \le \frac{p+1}{100}$.

a) Como la función es continua en su dominio (*x* > 0), bastará encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo en sus extremos. El extremo inferior debe ser un número cercano a cero para estar seguros de que la función será negativa. Se prueba con 0,5: $f(0,5) \approx -0,1931$.

El extremo superior puede ser 1: *f*(1) = 3. Así pues, aplicando el teorema de Bolzano a la función *f* en el intervalo cerrado [0,5; 1], se sabe que *f*(*c*) = 0 para algún *c* del intervalo (0,5; 1).

b) La función es siempre creciente ya que su derivada $f'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x}$ es siempre positiva en para *x*>0.

Por tanto, ya no puede existir otro *c* (distinto del anterior) con *f*(*c*) = 0.

c) Se pide que la longitud del intervalo sea como poco $\frac{p+1}{100} - \frac{p}{100} = \frac{1}{100} = 0,01$. Se aplica el método de la bisección a un intervalo más pequeño que [0,5; 1] para acortar los cálculos.
Se empieza con el intervalo [0,5; 0,6], que también vale porque $f(0,6) \approx 0,2812 > 0$.

$f\left(\frac{0,5+0,6}{2}\right) = f(0,55) \approx 0,0374 > 0$, es decir, el extremo superior podría ser 0,55.

Como la longitud del intervalo debe ser 0,01, se prueba ahora con [0,54; 0,55]: $f(0,54) \approx -0,0097 < 0$ y ya se ha acabado: 0,54 < *c* < 0,55, por tanto: $\frac{54}{100} \le c \le \frac{54+1}{100}$.

11.82 Demuestra que la gráfica de cualquier polinomio de tercer grado es simétrica respecto de su punto de inflexión.

La función tiene la expresión $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y su derivada segunda es $f'''(x) = 6ax + 2b$, se anula en $x = -\frac{b}{3a}$, que es la abscisa del punto de inflexión (cambia de curvatura a derecha e izquierda de dicho valor).

Se estudia primero el caso en el que el punto de inflexión sea el origen de coordenadas (0, 0):

$-\frac{b}{3a} = 0 \Rightarrow b = 0$. Como *f* (0) = 0, entonces *d* = 0. La función sería $f(x) = ax^3 + cx$. Esta función es impar y, por tanto, es simétrica respecto al (0, 0), que es lo que se quería demostrar.
Para observar que la gráfica de cualquier polinomio de tercer grado es simétrica respecto de su punto de inflexión bastaría con realizar una traslación, llevando su punto de inflexión al origen.

11.83 El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que si partimos un diamante en dos trozos, la depreciación es máxima si lo partimos por la mitad.

Se supone que el peso es 1 y *p* la constante de proporcionalidad del precio-cuadrado del peso.

1. Se nombra la variable: *x* es el peso de uno de los trozos e *y* el del otro.

2. Se relacionan las variables: *x* + *y* =.1, por tanto *y* = 1 – *x*.

3. La función que se quiere maximizar es la depreciación del diamante al cortarlo. $D(x) = p \cdot 1 - (px^2 + p \cdot (1-x)^2) = p - 2px^2 + 2px - p = -2px^2 + 2px$.

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. Evidentemente, $0 \le x \le 1$, es decir, *x* se mueve en el intervalo cerrado [0, 1].

5. Se busca el máximo de $D(x) = -2px^2 + 2px$ en [0, 1]. Su derivada, $D'(x) = -4px + 2p$, se anula si $x = \frac{1}{2}$ Se compara: *D*(0) = 0, *D*(1) = 0, $D\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p}{2}$. En este caso, en dos trozos de peso $\frac{1}{2}$.

11.84 Si *f* y *g* son funciones derivables con *f*(*a*) = *g*(*a*) y *f*(*b*) = *g*(*b*), demuestra que existe un punto x_0 en (*a, b*) en el que las tangentes a *f* y *g* son paralelas. Convéncete previamente con una gráfica.

Si se define la función *F*(*x*) = *f*(*x*) – *g*(*x*), se observa que también es derivable y además *F*(*a*) = *F*(*b*) = 0, por tanto, cumple el teorema de Rolle y se sabe que existe al menos un punto x_0 en (*a*, *b*) con $F'(x_0) = 0$.
Por otra parte, $F'(x) = f'(x) - g'(x)$, y entonces: $0 = F'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$, de donde se deduce que $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Es decir, en el punto x_0 del intervalo (*a, b*) las tangentes a *f* y *g* son paralelas.

11.85 Si $f'(x) \le 2$ para todos los números del intervalo [0, 3] y *f*(0) = –1, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar *f*(3)? En general, si $f'(x) \le a$ en todo R y *f*(0) = *b*, dado un número positivo *c*, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar *f*(*c*)?

La función *f* es continua en el intervalo cerrado [0, 3] y derivable en el abierto (0, 3), por tanto, el teorema del valor medio nos asegura que existe un *c* de (0, 3) que cumple:

$f'(c) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{f(3)+1}{3}$, y como la derivada es $f'(x) \le 2$, entonces $f'(c) \le 2$: $f'(c) = \dfrac{f(3)+1}{3} \le 2 \Rightarrow f(3) \le 5$.

En el caso general se tiene que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(0)}{c-0} = \dfrac{f(c)-b}{c} \le a \Rightarrow f(c) \le ac + b$.

11.86 Dada la función $f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$, se pide:

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

b) Utiliza el apartado a para decidir si 1000^2 es mayor o menor que $998^2 + 2^2$.

c) Generaliza lo que hayas descubierto en el apartado a para la función $f(x) = (c - x)^n + x^n$, siendo *c* un número positivo y *n* un entero positivo par.

a) La derivada de la función es $f'(x) = 4x - 2000$, que se anula para *x* = 500. La función es decreciente en $(-\infty, 500)$; es creciente en $(500, +\infty)$; y tiene un mínimo en el punto de abscisa *x* = 500.

b) Como la función es decreciente en $(-\infty, 500)$, entonces, *f*(0) > *f*(2), y como $f(0) = 1000^2$ y $f(2) = 998^2 + 2^2$, se concluye que $1000^2 > 998^2 + 2^2$.

c) La derivada de la función $f(x) = (c - x)^n + x^n$ es $f'(x) = -n(c-x)^{n-1} + nx^{n-1}$.

Una solución de la ecuación $f'(x) = 0$ es $x = \dfrac{c}{2}$, que, corresponde a un mínimo absoluto pues

$f''(x) = n(n-1)(c-x)^{n-2} + n(n-1)x^{n-2} > 0$. Por otra parte, la gráfica de *f* es simétrica respecto de la recta $x = \dfrac{c}{2}$. Así pues, dados dos números *p* y *q* que sumen *c*, $p^n + q^n$ es mayor cuanto más disten *p* y *q*.

Por ejemplo $20^6 + 30^6 > 28^6 + 22^6$ pues la función $f(x) = (50 - x)^6 + x^6$, alcanza un mínimo en *x* = 25 y es simétrica respecto de la recta *x* = 25, por lo que *f*(30) > *f*(22).

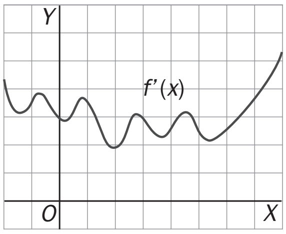
11.87 Demuestra que la ecuación

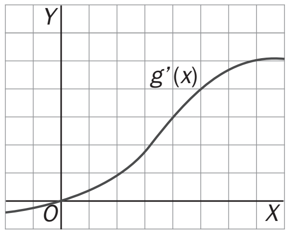
$$x^{2009} + x^{1005} + x - 1 = 0$$

tiene exactamente una solución real.

La función $f(x) = x^{2009} + x^{1005} + x - 1$ es continua y creciente en todo **R** ya que su derivada $f'(x) = 2009x^{2008} + 1005x^{1004} + 1$ es siempre positiva. Además $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$, es decir, pasa de negativa a positiva y, por tanto, debe cortar al eje *X* alguna vez.
Como *f* es siempre creciente, solo podrá cortar una sola vez al eje *X*.
Es decir, existe un único *c* real con $f(c) = 0 \Rightarrow c^{2009} + c^{1005} + c - 1 = 0$.

11.88 gráficas de las derivadas de las funciones *f* y *g* son las que se muestran a continuación:





a) ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $f(x) = 0$? Justifícalo.

b) ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $g(x) = 0$? Justifícalo.

c) Si la ecuación $g(x) = 0$ tuviera dos soluciones, ¿qué podrías decir sobre el signo de las mismas?

a) Como $f'(x)>0$ en **R**, $f(x)$ es creciente y, por tanto, cortará una vez como máximo al eje, luego la ecuación $f(x) = 0$ tiene como mucho una solución.

b) $g'(x)$ se anula una sola vez, en $x = 0$, así pues la ecuación $g(x) = 0$ tiene como mucho dos soluciones.

c) En este caso g' se anularía entre estas dos soluciones, por lo que al anularse en $x = 0$, significa que de haber dos soluciones deben ser de signo contrario.

11.89 Supón que *f* es una función para la que $f'(x) > 0$ para todo *x*, y sea $g(x) = f(f(x))$. ¿Qué puedes decir acerca del crecimiento o decrecimiento de la función *g*?

La derivada de $g(x)$ se calcula con la regla de la cadena: $g'(x) = f'(f(x))\cdot f'(x)$ que será siempre positiva por ser producto de dos números positivos. Así pues, $g'(x)>0$ para todo x, lo que nos asegura que g es siempre creciente.

11.90 Supón que *f* es una función para la que $f'(x) < 0$ para todo *x*, y sea $g(x) = f(f(x))$. ¿Qué puedes decir sobre el crecimiento o decrecimiento de *g*?

La derivada de $g(x)$ se calcula con la regla de la cadena: $g'(x) = f'(f(x))\cdot f'(x)$ que será siempre positiva por ser producto de dos números negativos. Así pues, $g'(x)>0$, lo que nos asegura que g es siempre creciente.

11.91 a) Demuestra que $f(x) = e^x$ es mayor que $g(x) = 2x$ para todo $x \geq 1$.

b) Demuestra que $f(x) = e^x$ es mayor que $g(x) = x^2$ para todo $x \geq 0$.

Trata separadamente los casos $0 \leq x < 1$ y $x \geq 1$.

a) Su derivada es $F'(x) = e^x - 2$, que para valores mayores o iguales que 1 es positiva y, por tanto, $F(x)$ es creciente si $x \geq 1$. Así pues $F(x) \geq F(1)$ y, por tanto : $e^x - 2x \geq e - 2 > 0$, es decir,

$e^x - 2x > 0$, y ya concluimos: $e^x > 2x$ para todo $x \geq 1$.

b) Se trabaja ahora con la función $G(x) = e^x - x^2$. Su derivada es $G'(x) = e^x - 2x$.

Si $0 \leq x < 1$: $e^x > x + 1$ siempre y en $[0, 1)$ se cumple que $x + 1 > x^2$, luego en dicho intervalo $e^x > x^2$.

Si $x \geq 1$, ya hemos visto en el apartado a que $e^x - 2x$ es positivo y por tanto $G(x)$ es creciente: $G(x) \geq G(1)$, es decir, $e^x - x^2 \geq e - 1 > 0$. Por tanto, $e^x > x^2$.

11.92 Calcula el área del triángulo de máxima área que puede formarse en el primer cuadrante con los ejes de coordenadas y la tangente a la gráfica $y = e^{-x}$.

Sea $A(a, e^{-a})$ el punto de tangencia. Se halla la ecuación de la recta tangente en A:

La derivada es $y = -e^{-x}$. Por tanto, la recta tangente es $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$, es decir: $y = -e^{-a}x + (a + 1)e^{-a}$.

Sus puntos de corte con los ejes son $B(0; (a + 1)e^{-a})$ y $C(a + 1; 0)$. Así pues el área del triángulo es

$$f(a) = \frac{(a+1)(a+1)e^{-a}}{2} = \frac{(a+1)^2 e^{-a}}{2}. \quad f'(a) = \frac{2(a+1)e^{-a} - (a+1)^2 e^{-a}}{4} = \frac{(a+1)(1-a)e^{-a}}{4}$$

El máximo se alcanza si $a = 1$ y esta área es $f(1) = \frac{(1+1)^2 e^{-a}}{2} = 2e^{-a} = \frac{2}{e^a}$.

11.93 (TIC)(PAU) Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

i) $P(x)$ es una función par. ii) Dos de sus raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = -\sqrt{5}$ iii) $P(0) = 5$

Se pide:

a) Halla sus puntos de inflexión.

b) Dibuja su gráfica.

a) Como el polinomio es par solo tiene monomios de grado par, esto es, $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Si $x_1 = 1$ es una raíz, entonces $P(1) = 0$, es decir $a + b + c = 0$.

Si $x_2 = -\sqrt{5}$, entonces $P(-\sqrt{5}) = 0$, es decir $25a + 5b + c = 0$.

$P(0) = 5$ indica que $c = 5$.

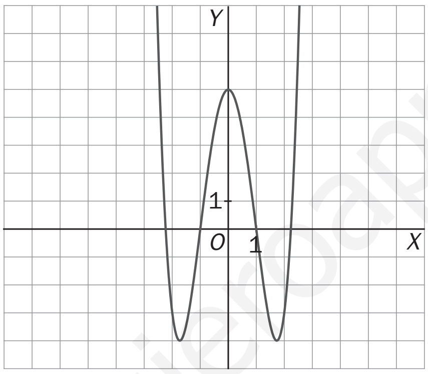
Con estas tres ecuaciones ya se puede encontrar los valores buscados: $a = 1$, $b = –6$, $c = 5$.

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.

Su derivada segunda es $P''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$ y se anula para $x = –1$ y para $x = 1$. Como en dichos valores cambia la curvatura, ambos son puntos de inflexión.

Así pues, los puntos de inflexión son $A(–1, 0)$ y $B(1, 0)$.

b) La gráfica es:



11.94 (PAU) Sea f una función real de variable real, derivable, con derivada continua en todos los puntos y tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 4$.

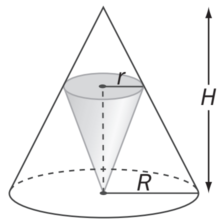
a) Calcula $g'(0)$ sabiendo que $g(x) = f(x + f(0))$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

a) Se calcula primero la derivada de $g(x)$ aplicando la regla de la cadena: $g'(x) = f'(x + f(0))$ y por tanto: $g'(0) = f'(0 + f(0)) = f'(0+1) = f'(1) = 4$.

b) Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, se usará la regla de L´Hôpital para calcularlo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4f(x)f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = \dfrac{4f(0)f'(0) - f'(0+1)}{e^0} = \dfrac{4\cdot 1\cdot 3 - 4}{1} = 8$

11.95 En un cono de radio R y altura H se inscribe un cono invertido con el vértice en el centro de la base. Calcula las dimensiones del cono pequeño para que su volumen sea máximo.



1. Se nombra la variable: r es el radio del cono pequeño y h su altura.
2. Se relacionan las variables: por semejanza de triángulos se observa que:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h} \Leftarrow rH = RH - Rh \Rightarrow h = \frac{H(R-r)}{R}$$

3. La función que se quiere minimizar es el volumen del cono pequeño:

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, es decir, $V(r) = \dfrac{\pi}{3} r^2 \dfrac{H(R-r)}{R} = \dfrac{\pi H}{3R}(Rr^2 - r^3)$

4. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable r. Evidentemente $0 < r < R$, es decir, r se mueve en el intervalo abierto $(0, R)$.

5. Se busca el mínimo de $V(r) = \dfrac{\pi H}{3R}(Rr^2 - r^3)$ en $(0, R)$.

$V'(r) = \dfrac{\pi H}{3R}(2Rr - 3r^2) = 0 \Leftrightarrow 2Rr - 3r^2 = 0 \Rightarrow r(2R - 3r) = 0$, es decir, si $r = \dfrac{2}{3}R$ o si $r = 0$ (no pertenece al dominio).

Como la función $V(r)$ es un trozo de parábola cóncava hacia abajo, se sabe con seguridad que el valor hallado nos da el máximo absoluto ya que es su vértice.

Las dimensiones del cono inscrito de área máxima son $r = \dfrac{2}{3}R$ y $h = \dfrac{H(R-r)}{R} = \dfrac{H\left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} = \dfrac{1}{3}H$.

11.96 Dados los puntos $A(0, 3)$ y $B(4, 5)$, se señala un punto M en el eje X tal que la distancia $S = AM + MB$ sea mínima. Obtén el punto M.

1. Se nombra la variable: x es la primera coordenada del punto buscado $M(x, 0)$.
2. La función que se quiere minimizar es la suma de las distancias.

$S = AM + MB$. Para facilitar cálculos se maximiza el cuadrado de dicha distancia y así se evita trabajar con raíces cuadradas. Por tanto, se define $F = S^2$ y se tiene:

$F(x) = AM^2 + MB^2 = x^2 + 9 + 25 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 50$

3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $0 \le x \le 4$, x se mueve en el intervalo cerrado $[0, 4]$.
4. Se busca el mínimo de $F(x) = 2x^2 - 8x + 50$ en $[0, 4]$.

$F'(x) = 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Se compara: $F(0)$ 50, $F(4) = 50$, $F(2) = 42$.

Así pues, la distancia mínima se consigue desde el punto $M(2, 0)$ y dicha distancia mínima es $\sqrt{42}$.

11.97 Con un sector circular de ángulo α y radio R formamos un cono. Calcula α para que el volumen del cono sea máximo.

1. Se nombra la variable: α. El radio R no varía, es una constante.
2. La función que se quiere maximizar es el volumen del cono que se forma. El arco del sector circular mide αR y el radio r de la circunferencia que mide αR es: $2\pi r = \alpha R \Rightarrow r = \dfrac{\alpha R}{2\pi}$, que es el radio del cono.

Se calcula su altura h: $h^2 = R^2 - \left(\dfrac{\alpha R}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow h = \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

Por tanto, el volumen del cono en función del ángulo α es: $V(\alpha) = \dfrac{\pi\left(\dfrac{\alpha R}{2\pi}\right)^2 \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{3}$. Llamando K a todo lo que es constante, se puede escribir $V(\alpha) = K\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - \alpha^4}$.

3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable α. Evidentemente, $0 \le \alpha \le 2\pi$, es decir α se mueve en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$.

5. Se busca el máximo de $V(\alpha) = K\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - \alpha^4}$ en $[0, 2\pi]$. Su derivada es

$V'(\alpha) = \dfrac{K}{2}\dfrac{8\pi^2\alpha - 4\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - \alpha^4}} = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2\alpha - 4\alpha^3 = 0 \Rightarrow 4\alpha(2\pi^2 - \alpha^2) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = \sqrt{2}\pi$.

Se compara: $V(0) = 0$, $V(2\pi) = 0$, $V(\sqrt{2}\pi) > 0$. Así pues, el cono de volumen máximo se consigue si $\alpha = \sqrt{2}\pi$.

11.98 En un depósito que contenía 5 000 000 de litros de agua se ha vertido accidentalmente una sustancia toxica contaminando el agua. Si el agua se va renovando por agua limpia a razón de 2500 litros por hora, ¿cuánto tiempo tardará en reducirse el nivel de contaminación un 50%?

Sea $S(t)$ la función que da los litros de sustancia tóxica que hay en el agua en cada instante t horas.

$S'(t)$ = razón de entrada de sustancia tóxica – razón de salida de sustancia tóxica. Como lo que entra es agua limpia, la razón de entrada es 0. La razón de salida es $\frac{S(t)}{5000000}\cdot 2500$ L/h, pues salen los mismos litros que entran y $\frac{S(t)}{5000000}$ es la cantidad de sustancia tóxica por litro. Así pues, $S'(t)=\frac{-S(t)}{2000}$ por tanto, $\frac{S'(t)}{S(t)}=-\frac{1}{2000}$, luego, $\ln S(t)=-\frac{1}{2000}t+C$, por lo que $S(t)=ke^{\frac{-t}{2000}}$. Si t = 0, $S(t)$ = k y se pregunta cuándo $S(t)$ es $\frac{k}{2}$, se tiene que $\frac{k}{2}=ke^{\frac{-t}{2000}}$, luego t = 2000·ln2 horas, aproximadamente 1400 horas, es decir, 58 días.

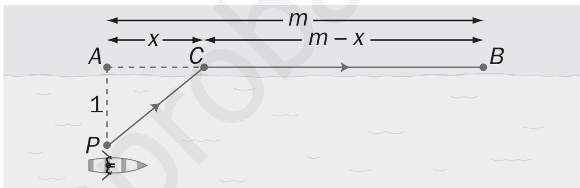
11.99 Un hombre está en un bote en un gran lago rectangular a 1 km del punto *A* de la orilla más próxima. Quiere llegar al punto *B* de la orilla situado a *m* kilómetros de *A*. Si en su bote va a *r* km/h y a pie a *v* km/h, ¿en qué punto *C* de la orilla debe dejar el bote para llegar a *B* lo más rápido posible en cada uno de los siguientes casos?

a) Si *m* = 5 km, *r* = 15 km/h y *v* = 13 km/h

b) Si *m* = 2 km, *r* = 12 km/h y *v* = 13 km/h

c) Si *m* = 5 km, *r* = 12 km/h y *v* = 13 km/h

d) Resuélvelo para cualquier valor de *m*, *r* y *v*.



Hay que considerar que la distancia PC que cubre a remo es igual a $PC=\sqrt{1+x^2}$.

Primero se resuelve el caso general:

1. Se nombra la variable: x es la distancia AC.

2. La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer PC (a r km/h) y CB (a v km/h). El tiempo empleado en realizar su trayecto es la función $t(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{r}+\frac{m-x}{v}=\frac{v\sqrt{1+x^2}+r(m-x)}{rv}$.

3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: [0, m].

5. Se busca el mínimo de $t(x)=\frac{v\sqrt{1+x^2}+r(m-x)}{rv}$ en [0, m].

$$t'(x)=\frac{v\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-r}{rv}=\frac{vx-r\sqrt{1+x^2}}{rv\sqrt{1+x^2}}=0 \Leftrightarrow vx-r\sqrt{1+x^2}=0\Rightarrow v^2x^2=r^2+r^2x^2\Rightarrow x=\sqrt{\frac{r^2}{v^2-r^2}}$$

Ahora se estudia cada caso:

a) Si m = 5, r = 15 y v = 13 $\Rightarrow x=\frac{r}{\sqrt{v^2-r^2}}=\frac{15}{\sqrt{13^2-15^2}}$, por tanto, $t'(x)$ nunca se anula y $t(x)$ alcanzará el mínimo en un extremo del intervalo: como $t(5) < t(0)$, el mínimo se alcanza en x = 5, debe remar todo el tiempo.

b) Si m = 2, r = 12 y v = 13 $\Rightarrow x=\frac{r}{\sqrt{v^2-r^2}}=\frac{12}{\sqrt{13^2-12^2}}=2{,}4$. Como 2,4 no pertenece al intervalo [0, 2] habrá que mirar en los extremos: $t(2)< t(0)$, el mínimo se alcanza en x = 2, debe remar todo el rato.

c) Si m = 5, r = 12 y v = 13 $\Rightarrow x=\frac{r}{\sqrt{v^2-r^2}}=\frac{12}{\sqrt{13^2-12^2}}=2{,}4$. Como $t(2{,}4) < t(5) < t(0)$, debe dejar el bote a 2,4 km de A.

PROFUNDIZACIÓN

11.100 Considera la función $g(x) = f(x)(x-a)^{\frac{p}{q}}$ donde *f* es derivable en *x* = *a*, *p* es par, *q* es impar y *p* < *q*. Demuestra que si *f*(*a*) ≠ 0, *g* tiene un punto anguloso en *x* = *a*.

La derivada de *g*(*x*) es: $g'(x) = f'(x)(x-a)^{\frac{p}{q}} + f(x)\dfrac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} = f'(x)(x-a)^{\frac{p}{q}} + f(x)\dfrac{p}{q}(x-a)^{\frac{p-q}{q}}$.

Como *p* < *q*, entonces $p-q<0$, por tanto, se puede escribir la derivada como:

$$g'(x) = f'(x)(x-a)^{\frac{p}{q}} + f(x)\frac{p}{q}\frac{1}{(x-a)^{\frac{q-p}{q}}} = f'(x)(x-a)^{\frac{p}{q}} + f(x)\frac{p}{q}\frac{1}{\left(\sqrt[q]{x-a}\right)^{q-p}}$$

Y esta derivada no está definida para *x* = *a*, ya que si *f(a)* ≠ 0, $\lim_{x\to a} g'(x)$ valdrá más infinito o menos infinito dependiendo del lado por el que nos acerquemos a *a*. (El valor de $\left(\sqrt[q]{x-a}\right)^{q-p}$ será positivo si *x* – *a* es positivo y negativo si *x* – *a* es negativo). Así pues, en *x* = *a* hay un punto anguloso.

11.101 Sea *f* una función polinómica con raíces dobles en *a* y en *b* (recuerda que el número *c* es raíz doble de *f*(*x*) si *f*(*x*) = $(x-c)^2$ *g*(*x*), con *g*(*c*) ≠ 0). Demuestra que *f´* se anula al menos tres veces en [*a, b*].

La función *f* cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado [a, b] ya que es polinómica y *f*(*a*) = *f*(*b*) = 0. Por tanto, existe al menos un número *c* de (*a*, *b*) con $f'(c) = 0$.

Por otra parte, la función *f* tiene una expresión del tipo $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 g(x)$ con *g*(*a*) y *g*(*b*) distintos de cero y su derivada es: $f'(x) = 2(x-a)(x-b)^2 g(x) + (x-a)^2\left(2(x-b)g(x) + (x-b)^2 g'(x)\right)$, que se anula para *x* = *a* y *x* = *b*. Así pues, la derivada se anula al menos tres veces en el intervalo [*a*, *b*]: *x* = *a*, *x* = *b*, *x* = *c*.

11.102 Si *a* es un número positivo, calcula el mínimo de $\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con *x* > 0. A partir del resultado obtenido, demuestra que la media aritmética de dos números positivos es siempre mayor o igual que la media geométrica.

Primero recuerda que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto.

Se considera la función $f(x) = \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con *x* > 0.

Su derivada, después de simplificarla, es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\dfrac{x-a}{x\sqrt{x}}$, que se anula si *x* = *a*.

Como para valores *x* menores que *a*, la función decrece (la derivada es negativa) y para valores *x* mayores que *a*, la función crece (la derivada es positiva), entonces, en *x* = *a* está su mínimo absoluto.

Así pues: $f(a) \le f(x) \Rightarrow \dfrac{a+a}{\sqrt{a\cdot a}} \le \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow \dfrac{2a}{a} \le \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow 2 \le \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow \sqrt{ax} \le \dfrac{a+x}{2}$ para todo *x* > 0

11.103 Sea *f* una función continua en [1, 4], derivable en (1, 4) y tal que *f*(1) = 3 y *f*(4) = 12. Demuestra que para algún x_0 en (1, 4), la recta tangente a *f* en x_0 pasa por el origen.

Indicación: considera la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

La función *g*(*x*), que también es derivable en [1, 4], cumple que *g*(1) = 3 y *g*(4) = 3, así pues, el teorema de Rolle asegura que existe un *c* del intervalo (1, 4) tal que *g′*(*c*) = 0.

La derivada de *g*(*x*) es: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$.

Por otra parte, *g´*(*c*) = 0 implica que $g'(c) = 0 = \dfrac{f'(c)c - f(c)}{c^2} \Rightarrow f'(c)c - f(c) = 0$, ya que *c* no puede ser cero.

Se calcula ahora la recta tangente en el punto de abscisa *x* = *c*:

$y - f(c) = f'(c)(x-c) \Rightarrow y = f'(c)x - (f'(c)c - f(c)) = f'(c)x$, es decir, esta tangente pasa por el origen. Así pues el valor *c* es el valor x_0 que buscábamos.

11.104 Dada la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Halla el valor de *k* para que *f* sea continua en R.

b) ¿Verifica *f* las hipótesis del teorema del valor medio en [0, π + 1]?

c) ¿Existe algún número *c* para el que *f′*(*c*) coincida con la pendiente de la recta que une los puntos de la curva de abscisas 0 y π + 1?

a) Se impone la continuidad en *x* = 1, que es el único valor en el que puede haber conflictos:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - x + k) = k$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cos(x-1)}{1} = 1$, $f(1) = k$.

Para que *f* sea continua en *x* = 1 debe ser *k* = 1. Por tanto, si *k* = 1 la función es continua en **R**.

b) Ya se ha visto que $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua en [0, π + 1].

Se ve ahora si es derivable en el abierto (0, π + 1).

La derivada, salvo para *x* = 1, es: $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{(x-1)\cos(x-1) - \text{sen}(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x-1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)\cos(x-1) - \text{sen}(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cos(x-1) + (x-1)(-\text{sen}(x-1)) - \cos(x-1)}{2(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-\text{sen}(x-1)}{2} = 0$. Así pues, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$ y, por tanto, *f* no es derivable en *x* = 1 y no se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

c) La recta que pasa por los puntos *A*(0, 1) y *B*(π + 1, 0) tiene pendiente $m = -\dfrac{1}{\pi + 1}$.

Si *x* < 1, $f'(x) = 2x - 1 = -\dfrac{1}{\pi+1} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2(\pi+1)}$, que es menor que 1. Por tanto, $c = \dfrac{\pi}{2(\pi+1)}$.

11.105 En la circunferencia de un lago de 1 km de radio se marcan dos puntos *A* y *B* diametralmente opuestos. Una persona quiere ir de *A* a *B* y puede ir nadando, andando por la semicircunferencia o combinando caminos. Si nada a 2 km/h y anda a 5 km/h, ¿cuánto tardará, como mínimo, en llegar?

1. Se nombra la variable: llamamos 2α radianes al ángulo que la persona recorre nadando, por tanto, π – α es el ángulo que recorre por el borde.
2. La función que se quiere minimizar es el tiempo que emplea en recorrer la distancia *D* = *AC* + *CB*.

El segmento *AC* cumple que: $\dfrac{AC}{\text{sen}(2\alpha)} = \dfrac{OC}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} \Rightarrow AC = \dfrac{\text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

Y recordando las fórmulas trigonométricas:

$AC = \dfrac{\text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\,\text{sen}\,\alpha$ km. El arco *CB* mide π – 2α km.

Así pues, la función tiempo es $T(\alpha) = \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha}{2} + \dfrac{\pi - 2\alpha}{5} = \text{sen}\,\alpha + \dfrac{\pi - 2\alpha}{5}$.

3. Se busca el intervalo en el que se mueve la variable α: $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, α se mueve en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4 Se busca el mínimo de $T(\alpha) = sen\,\alpha + \dfrac{\pi - 2\alpha}{5}$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. $T'(\alpha) = \cos\alpha - \dfrac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{5}$, es decir, si α = 1,16 rad = 66,42º.

Se compara: $T(0) = \dfrac{\pi}{5}$ = 0,63 horas, $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ = 1 hora, *T*(1,16) = 1,08 horas.

Así pues, el tiempo mínimo es 0,63 horas y se consigue si la persona va andando todo el tiempo por el borde del lago.

11.106 Sea *f* una función que admite derivada segunda en todo R y tal que las rectas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ con *a*, *b*, *c* y *d* no nulos son tangentes a la gráfica en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$, respectivamente.

Justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si *f* es par, entonces $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces *f* es impar.

c) Si *f* es par, entonces $b = d$.

d) Si $b = d$, entonces $f(1) = f(-1)$.

e) Si $ac < 0$, entonces existe x_0 en $[-1, 1]$ con $f'(x_0) = 0$.

Como la recta $y = ax + b$ es la tangente en $x = 1$, se tiene que $f(1) = a + b$.

Como la recta $y = cx + d$ es la tangente en $x = -1$, se tiene que $f(-1) = -c + d$.

a) Si *f* es par, se cumple que $f(1) = f(-1)$, es decir $a + b = -c + d$.

No necesariamente se cumple la igualdad $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces $f(-1) = -c + d = -a + d$, y para que fuese impar, este valor debería coincidir con $-f(1) = -a - b$.

c) Si *f* es par, ya se ha visto que $a + b = -c + d$. De aquí no puede deducirse que *b* y *d* sean iguales.

d) Si $b = d$, entonces $f(-1) = -c + d = -c + b$, que no coincide necesariamente con $f(1) = a + b$.

e) Si $a \cdot c < 0$, significa que las pendientes de las tangentes son de distinto signo en $x = -1$ y en $x = 1$. Como la función es derivable dos veces, se sabe por el teorema de Bolzano, que existe x_0 en $[-1, 1]$ con $f'(x_0) = 0$.

11.107 Sea *f* una función derivable en R. Demuestra que si f' nunca se anula, entonces $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ para todo número real.

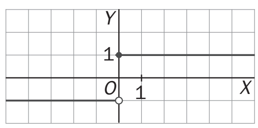
Indicación: Si f' nunca se anula, *f* es monótona, ¿por qué?

Supón, por ejemplo, que *f* es creciente. Sea $x \in$ R y considera $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para *h* positivo y para *h* negativo, y concluye.

Si la derivada nunca se anula no existen dos números reales *a* y *b* con $f(a) = f(b)$, pues si existieran el teorema de Rolle asegura que la derivada se anularía al menos una vez entre ellos. Así pues, la función es siempre creciente o siempre decreciente.

Si *f* es creciente, $f'(x) \geq 0$ siempre, y como la derivada no se anula, es $f'(x) > 0$ para todo *x* de R. Análogamente se justifica si *f* es decreciente.

11.108 Demuestra, utilizando el problema anterior, que la función dada por la gráfica no puede ser la derivada de ninguna función.



El problema anterior nos asegura que si la derivada de una función nunca se anula, entonces, dicha derivada debe ser siempre positiva o siempre negativa.

Lo que no puede ocurrir nunca es lo que le pasa a esta presunta derivada: que no se anule nunca y que es positiva para ciertos valores y negativa para otros.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

11.1 Sean f y g funciones derivables tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo x real. Indica qué condición de las siguientes debemos añadir para concluir que $f(x) = g(x)$ para todo x real.

A) $f''(x) = g''(x)$ para todo x real.

B) $f(0) = g(0)$

C) No hace falta ninguna condición adicional.

D) Ninguna condición adicional nos permite concluir que $f(x) = g(x)$.

E) f y g son funciones continuas.

La opción correcta es B. Al ser $f'(x) = g'(x)$, $f(x) = g(x) + c$, por lo que si $f(0) = g(0)$,entonces $c = 0$ y $f(x) = g(x)$.

11.2 Una recta que pasa por el punto $P(-1, 0)$ es tangente a la curva $y = x - x^3$ en otro punto Q distinto de P. La suma de las coordenadas de Q es:

A) 1 **C) $\frac{3}{4}$** **E) Ninguna es correcta.**

B) $\frac{7}{8}$ **D) $\frac{9}{8}$**

El punto Q tendrá de coordenadas $(a,\ a - a^3)$ con $a \neq -1$. Como la recta en cuestión pasa por P y Q, su pendiente es $\frac{a-a^3}{a+1}$ y, al ser tangente en Q, dicha pendiente es el valor de la derivada en a, es decir, $1 - 3a^2$.

Así pues, $\frac{a-a^3}{a+1} = 1 - 3a^2$, de donde $\frac{a(1-a^2)}{a+1} = 1 - 3a^2$, $2a^2 + a - 1 = 0$ y $a = \frac{1}{2}$, $a = -1$, de donde Q es el punto de abscisa $\frac{1}{2}$ y ordenada $\frac{3}{8}$, por lo que la suma de sus coordenadas es $\frac{7}{8}$ y la respuesta es B.

11.3 Sea la función definida en R, $f(x) = \frac{x}{e^x}$:

A) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ **D) La imagen de f es un conjunto acotado.**

B) f tiene un máximo absoluto en R. **E) f tiene un punto de inflexión para $x < 0$.**

C) f no es derivable en $x = 0$.

$f(x)$ es una función continua, con asíntota horizontal $y = 0$ pues $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, que pasa por el origen y su derivada $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ se anula sólo en $x = 1$, lo que nos lleva a afirmar que la única respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

11.4 Se tiene la función $f(x) = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$:

A) f está acotada inferiormente en R. **D) f tiene al menos un cero en R.**

B) f está acotada superiormente en R. **E) f tiene un único cero en R.**

C) f es decreciente en R.

Las afirmaciones A y B son falsas pues $\lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) = -\infty$.

Como $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x$, es $f'(x) > 0$ en todo $\mathbb{R}$ por lo que C es también falsa. Al tratarse de una función continua, las observaciones anteriores sobre los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ nos llevan a afirmar que D es verdadera y como la derivada no se anula nunca, sigue que E es también verdadera.

11.5 La función definida sobre R, $f(x) = xe^{2x} - 1$ satisface:

A) Para todo x de R, $f'(x) = (x + 1)e^{2x}$

B) f es creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

C) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

E) La ecuación $f(x) = 1$ tiene solución única.

$f'(x) = e^{2x} + 2x\, e^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$, por lo que A es falsa. Si $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$, por lo que B es verdadera.

Como $f(x) = xe^{2x} - 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y C es verdadera. $\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} - 1 = -1$ y D es falsa.

Finalmente, la ecuación $f(x) = 1$, es decir, $xe^{2x} = 2$ tiene una única solución pues la curva $y = xe^{2x}$ es negativa si $x < 0$, vale 0 en $x = 0$ es creciente en $x > 0$ y continua y $\lim_{x\to+\infty} xe^{2x} = +\infty$, con lo que E es verdadera.

11.6 Se tiene la ecuación sen$x = \sqrt{3}\cos 2x$.

A) Esta ecuación equivale a la ecuación $2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - \sqrt{3} = 0$

B) Admite cuatro soluciones en R.

C) Tiene dos soluciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

D) Admite dos soluciones en el intervalo $[-\pi, 0]$ cuyo producto vale $\frac{2\pi^2}{9}$.

$\text{sen}\, x = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \sqrt{3}\,(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \sqrt{3}\,(1 - 2\,\text{sen}^2 x) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - \sqrt{3} = 0$, por lo que A es verdadera.

Esta ecuación tiene por soluciones las dadas por sen$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm 5}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$, habiendo, pues, infinitos valores de x para los que sen$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ó sen$x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ de donde B es falsa.

C es falsa pues hay 4 valores de x en $[-\pi, \pi]$ solución de la ecuación: $\frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$, arcsen$\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pi -$ arcsen$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Las soluciones en el intervalo $[-\pi, 0]$ son $\frac{-\pi}{3}$ y $\frac{-2\pi}{3}$, por lo que su producto es $\frac{2\pi^2}{9}$ y D es verdadera.

11.7 Se considera la función f definida en R por $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

A) La ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución en R.

B) La ecuación $f(x) = 1$ admite dos soluciones en $[-1, +\infty)$.

C) Si $x \in [-1, 1]$, $f(x) \le 4$

D) Si $f(x) \le 4$, entonces $x \in [-1, 1]$

E) f presenta un punto de inflexión de tangente horizontal en $[-1, 1]$.

La función dada, $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$ la podemos escribir como $f(x) = (x^3 - 1)^2$. Así pues, A es verdadera, la única solución de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 1$.

B también es verdadera, pues si $(x^3 - 1)^2 = 1$, $x = \sqrt[3]{2}$ y $x = 0$.

C también lo es ya que si $x \in [-1, 1]$, $-1 \le x^3 \le 1$, $-2 \le x^3 - 1 \le 0$, por lo que $f(x) \le 4$.

D es falsa ya que el hecho de que $f(x) \le 4$, nos lleva a que $|x^3 - 1| \le 2$, por lo que $-2 \le x^3 - 1 \le 2$, es decir $-1 \le x^3 \le 3$, con lo que $x \in \left[-1, \sqrt[3]{3}\right]$, es decir, puede ocurrir que $x \notin [-1, 1]$.

Finalmente E es verdadera ya que $f'(x) = 6x^5 - 6x^2$, $f''(x) = 30x^4 - 12x = 6x\,(5x^3 - 2)$, por lo que f'' se anula dos veces en $[-1, 1]$, a saber en $x = 0$ y en $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$, siendo ambos punto de inflexión, ya que en ellos cambia el signo de $f''(x)$, pero en uno solo de ellos, $x = 0$, presenta tangente horizontal.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

11.8 Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales.

a) La gráfica de f corta 3 veces al eje horizontal.

b) $a^2 > 3b$

A) $a \Leftrightarrow b$

B) $a \Rightarrow b$ pero $b \not\Rightarrow a$

C) $b \Rightarrow a$ pero $a \not\Rightarrow b$

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Ninguna es correcta.

La derivada de f es $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
Si se verifica a su derivada se anula dos veces, por lo que el discriminante de la ecuación de 2º grado $f'(x) = 0$, es decir $4a^2 - 12b$ deberá ser positivo, así que $a^2 > 3b$ y se verifica b, por lo que a $\Rightarrow$ b.
Pero b $\not\Rightarrow$ a, pues b quiere decir que la derivada se anula 2 veces, pero eso no implica que la cúbica corte 3 veces al eje X, como indica, por ejemplo la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1000$. Así que la respuesta es B.

Señala el dato innecesario para contestar:

11.9 Para calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el intervalo $[0, k]$ se tienen los siguientes datos:

a) El valor de a

b) El valor de b

c) El valor de c

d) El valor de k

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

Para hallar la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x)$ en $[0, k]$ hay que hallar $f(x_0) - f(x_1)$ siendo x_0 la abscisa del máximo y x_1 la abscisa del mínimo. Así pues, habrá que hallar $ax_0^2 + bx_0 + c - ax_1^2 - bx_1 - c$, es decir, $a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1)$. Para hacer ese cálculo no tenemos que conocer el valor de c y como para hallar x_0 y x_1 que son, o valores que anulan la derivada, es decir, $\frac{-b}{2a}$ ó los extremos, 0 y k, del intervalo, tampoco influye el valor de c, tenemos que puede eliminarse el dato c y la respuesta es C.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

11.10 Para probar que la función polinómica $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión en $P(a, f(a))$ sabemos que:

a) $f''(a) = 0$

b) El polinomio $f''(x)$ es divisible por $(x - a)k$, siendo k un número impar.

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

En un punto de inflexión en el que existe 2.ª derivada, ésta debe anularse y además a la izquierda y a la derecha de él, la segunda derivada debe cambiar de signo.
Así pues, la afirmación dada por b es suficiente, pues si $f''(x) = (x - a)^k Q(x)$ con $Q(a) \neq 0$, $f''(a) = 0$, y $f''(a^-)$ y $f''(a^+)$ tienen diferente signo.

La información dada por a no es suficiente como prueba, por ejemplo, $f(x) = x^4$. Así que la respuesta es C.