10 Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

10.I. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$:

a) Calcula las rectas secantes que pasan por los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 11)$, y por A y $C(4, 5)$, respectivamente. ¿Cuáles son sus pendientes?

b) Calcula $\lim_{b \to 3} \dfrac{f(b) - f(3)}{b - 3}$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente en $A(3, 1)$.

a) La recta que pasa por esos puntos tiene pendiente $m = \dfrac{11-1}{5-3} = 5$, luego su ecuación es $y - 1 = 5(x - 3)$; $y = 5x - 14$. La recta que pasa por esos puntos tiene pendiente $m = \dfrac{5-1}{4-3} = 4$, luego su ecuación es $y - 1 = 4(x - 3)$; Es decir, $y = 4x - 11$.

b) $\lim_{b \to 3} \dfrac{f(b) - f(3)}{b - 3} = \lim_{b \to 3} \dfrac{b^2 - 3b + 1 - 1}{b - 3} = \lim_{b \to 3} \dfrac{b(b-3)}{b-3} = 3$.

c) La pendiente de dicha recta es 3 pues es $m = \lim_{b \to 3} \dfrac{f(b) - f(3)}{b - 3}$. Así pues, la ecuación de la recta tangente es $y - 1 = 3(x - 3)$. Esto es, $y = 3x - 8$.

10.II. La función $f(x) = x^5 - x + 1$ admite función inversa f^{-1}. Utiliza la calculadora para aproximar $f^{-1}(10)$.

Como $f(f^{-1}(10)) = 10$, se busca x con $x^5 - x + 1 = 10;\ x^5 - x = 9$. La solución está entre 1 y 2.
Haciendo una tabla de valores, se tiene:

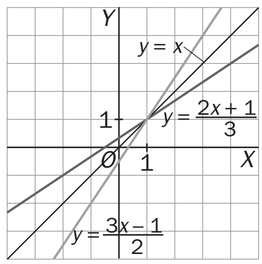
1,6	1,5	1,7	1,62	1,61
–0,11425	–2,90625	3,4985	0,5371	0,20756

Así pues, la solución buscada está entre 1,6 y 1,61, luego x = 1,60…

10.III. Calcula la inversa de $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ y dibuja las gráficas de f y f^{-1}. Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Para calcular la inversa se despeja $y = \dfrac{2x+1}{3}$ y se despeja x: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{2}$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x-1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{3x-1}{2}\right)+1}{3} = x\ ;\quad (f^{-1} \circ f)(x) = f\left(\frac{2x+1}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{2x+1}{3}\right)-1}{2} = x$$



10.IV. Dadas $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ y su dominio **b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio**

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$ y $D(g) = \mathbf{R} - \{3\}$, $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{2}{x-3}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{2}{x-3} - 2} = \dfrac{x-3}{8-2x} \Rightarrow D(f \circ g) = R - \{2, 4\}$

b) $(g \circ f)(x) = g\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = \dfrac{x-2}{7-3x}$, $g \circ f$ está definida si $x \neq \dfrac{7}{3}$ y si g lo está, $f(x) \neq 3 \Rightarrow D(g \circ f) = R - \left\{3, \dfrac{7}{3}\right\}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1. Aplicando la definición de derivada, decide si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados y calcula, si existe, la derivada.

a) $f(x) = x^3$, en $x = 1$

b) $f(x) = \text{sen } x$, en $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, en $x = 2$

d) $f(x) = x\,|x|$, en $x = 0$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3+3h^2+3h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h^2+3h+3)}{h} = 3$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{sen } h}{h} = 1$

c) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{h+4}+2}{\sqrt{h+4}+2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}$

d) Se expresa $f(x)$ como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x\,(-x) & \text{si } x \le 0 \\ x\,x & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = 0 \end{cases}$$

Luego $f'(0) = 0$

10.2. Estudia si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, en $a = 0$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \le 1 \\ x^3-x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $a = 1$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, en $a = 1$

En todos los casos se comienza estudiando si la función es continua en a, ya que si no lo es, no será derivable.

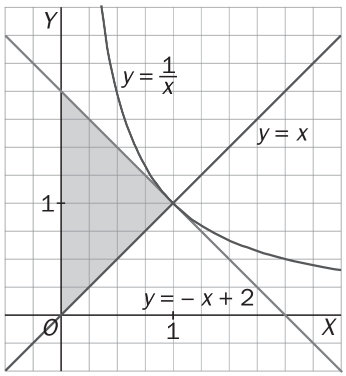
a) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3h}{h} = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego no existe el límite, por tanto, la función no es derivable en a = 0.

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(1+h)^2+2-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h(h+2)}{h} = 2 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(1+h)^3-(1+h)+3-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h(h^2+3h+2)}{h} = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $f'(1) = 2$.

c) En este caso la función no es derivable en a = 1 pues no es continua en a = 1.

10.3. Calcula el área del triángulo formado por el eje vertical y las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa 1, previa deducción del número $f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(1+h)} = -1$$



La recta tangente tiene pendiente m = –1 y pasa por el punto $A(1, f(1))$ = = $A(1, 1)$, luego su ecuación es $y = -x + 2$ y la recta normal en $A(1, 1)$ tiene pendiente m' = 1, luego su ecuación es $y = x$.

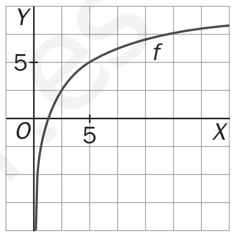
Hay que calcular el área del triángulo rectángulo de la figura cuyos vértices son $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $B(0, 2)$, por tanto, el área es 1 u^2.

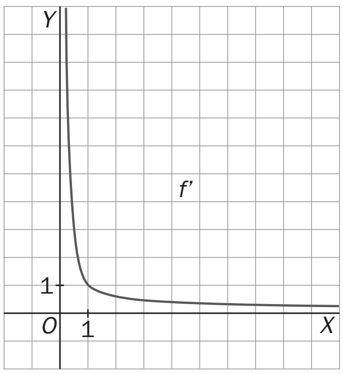
10.4. La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3, 0)$.

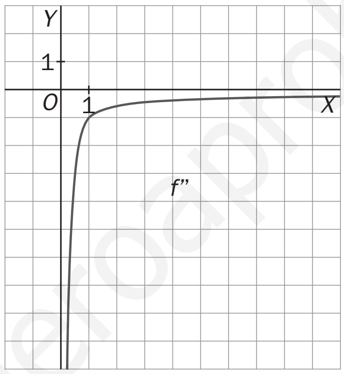
Sabiendo que $f'(2) = \frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.

La ecuación de la recta que pasa por Q con pendiente $\frac{1}{2}$ es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ y, como la recta pasa por el punto, $P\left(2, \frac{5}{2}\right)$, $f(2) = \left(\frac{5}{2}\right)$.

10.5. Esboza las gráficas de $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ para una función f: $(0, +\infty) \to$ R cuya gráfica es la de la figura.







10.6. Si $f'(x) = |x - 3|(x - 3)$, decide si existen los números $f''(0)$ y $f''(3)$.

Se expresa $f(x)$ como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} (-x+3)(x-3) & \text{si } x \le 3 \\ (x-3)(x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x-3)^2 & \text{si } x \le 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se estudia qué ocurre con $f'(3)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-3) & \text{si } x < 3 \\ 2 \cdot (x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0 \end{cases}.$$

Así pues $f'(x) = \begin{cases} -2(x-3) & \text{si } x \le 3 \\ 2(x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases} = 2|x-3|$ que, como ya se sabe, no es derivable en $x = 3$, pues

$$f''(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(3+h) - f'(3)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \end{cases}$$

Si $x \ne 3$, $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Luego $f''(0) = -2$.

10.7. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$**. Calcula, si existen, $f'(-2)$, $f''(2)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'(3)$ y $f''(3)$.**

Si $x<0$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2+2(x+h)-1-\left(x^2+2x-1\right)}{h}=2x+2$ y

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+2-(2x-2)}{h}=2$$

Se sabe que $f(-2)=-2$ y $f''(-2)=2$.

Si $x>0$ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}=2$ y, por tanto, $f'(x)=0$

Así pues, $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(3)=2$ y $f''(3)=0$.

Para calcular las derivadas en $x=0$ se observa primero si f y f' son continuas allí y se calculan los límites laterales:

$$f'(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+2h-1-(-1)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h-1-(-1)}{h}=2 \end{cases} \quad \text{así pues } f'(0)=2$$

$$f''(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2h+2-(2)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2-2}{h}=0 \end{cases} \quad \text{así pues no existe } f''(0)$$

10.8. ¿Existe alguna derivada lateral para f en $x=1$? $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 1 \\ x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{h}=3$$

$f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(1+h)+2-2}{h}$ por tanto, se deduce que no existe.

10.9. Calcula las derivadas laterales en $x=0$ de la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ ¿Es f derivable en $x=0$?

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+h}{h}=1$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^2}{2}+1-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2}{2h}=-\infty$$

Luego la función no es derivable en $x=0$.

10.10. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<-2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2\le x\le 0 \\ 3x^2-4 & \text{si } 0<x\le 2 \\ 12x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Calcula las derivadas laterales en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. ¿La función es derivable en dichos puntos?

En $x = 0$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+h}{h}=1$$

$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^2}{2}+1-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2}{2h}=-\infty$, luego la función no es derivable en $x = 0$.

En $x = -2$

$$f'(-2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h-2)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-4(h-2+1)-(-4(-2+1))}{h}=\frac{-4h}{h}=-4$$

$f'(-2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h-2)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(h-2)^2+4(-2+1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0^+}h-4=-4$, luego la función es derivable en $x = 2$ y $f'(-2) = -4$.

En $x = 2$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3(h+2)^2-4-8}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h^2+12h}{h}=12$$

$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{12(h+2)+1-8}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{12h+24+1-8}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{12h+17}{h}=+\infty$, luego la función no es derivable en $x = 2$.

10.11. Encuentra la abscisa de los puntos de la curva $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x+1$ en el que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Se buscan puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. Para ello se iguala la derivada a 1.

$f'(x)=3x^2-2x+1=1$ si $x = 0$ ó si $x=\frac{2}{3}$

10.12. ¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ con tangente horizontal?

Se buscan puntos en los que la pendiente de la tangente sea 0: $f'(x)=\frac{(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=0$, como $-x^2-1=0$ no tiene soluciones reales, no hay ningún punto con tangente horizontal.

10.13. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x-1)^3(3x^2-x+4)$ **b)** $f(x)=\frac{x^5}{x^4+x^2+1}$ **c)** $f(x)=(x^4+3x^3+2x-1)(2x+1)(x^2-3x+4)$

a) $f'(x)=3(x-1)^2(3x^2-x+4)+(x-1)^3(6x-1)$

b) $f'(x)=\frac{5x^4(x^4+x^2+1)-x^5(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2}$

c) $f'(x)=(4x^3+9x^2+2)(2x+1)(x^2-3x+4)+2(x^4+3x^3+2x-1)(x^2-3x+4)+(x^4+3x^3+2x-1)(2x+1)(2x-3)$

10.14. Copia y completa la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(f\circ g)'(x)$
0	**1**	**1**	**2**	**5**	4	0
1	**4**	**3**	**0**	**1**	2	4
2	**–1**	**2**	**–1**	**3**	–1	–3
3	**2**	**0**	**4**	**2**	1	4

10.15. Sean $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 3x$. Calcula:

a) $(g\circ f)'(1)$ b) $(g\circ f)'(0)$ c) $(f\circ g)'(1)$ d) $(f\circ g)'(10)$

Calculando las derivadas de ambas funciones: $f'(x) = 3x^2 - 1$ y $g'(x) = 3$

a) $(g\circ f)'(1) = g'(f(1))f'(1) = 3 \cdot 2 = 6$

b) $(g\circ f)'(0) = g'(f(0))f'(0) = 3 \cdot (-1) = -3$

c) $(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\, g'(1) = 26 \cdot 3 = 78$

d) $(f\circ g)'(10) = 2699 \cdot 3 = 8097$

10.16. Comprueba, utilizando la derivada de la función inversa, que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es la que ya conoces.

Como $f^{-1}(x) = x^2$ y $\left(f^{-1}\right)'(x) = 2x$, se tiene que $x = (f^{-1}\circ f)(x)$. Derivando, se obtiene:

$1 = (f^{-1}\circ f)'(x) = \left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{x}\right) f'(x) = 2\sqrt{x}\cdot f'(x)$, luego $1 = 2\sqrt{x}\cdot f'(x)$ por lo que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

10.17. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt[5]{x}$ en el punto de abscisa 32, previa deducción de la derivada de dicha función.

Como $f^{-1}(x) = x^5$ y $\left(f^{-1}\right)'(x) = 5x^4$, se tiene que $x = (f^{-1}\circ f)(x)$. Derivando se obtiene:

$1 = (f^{-1}\circ f)'(x) = \left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[5]{x}\right) f'(x) = 5\sqrt[5]{x^4}\cdot f'(x)$, luego $1 = 5\sqrt[5]{x^4}\cdot f'(x)$ por lo que $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es $y = f'(32)(x - 32) + f(32) = \dfrac{1}{80}x + \dfrac{8}{5}$.

10.18. Calcula en cada caso, el valor de *a*:

a) $f'(2) = 3$ $f^{-1}(0) = 2$ $(f^{-1})'(0) = a$

b) $f'(-1) = 4$ $f^{-1}(4) = -1$ $(f^{-1})'(4) = a$

c) $f'(5) = a$ $f^{-1}(3) = 5$ $(f^{-1})'(3) = 6$

a) $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{3}$

b) $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{4}$

c) $f'(5) = f'(f^{-1}(3)) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(3)} = \dfrac{1}{6}$

10.19. Calcula la derivada en $x = 11$ de la inversa de la función *f*(*x*) = x^3.

La función inversa de *f* es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Teniendo en cuenta que $f'(x) = 3x^2$, se obtiene:

$$(f^{-1})'(11) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(11)\right)} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{11}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{11}}{33}$$

10.20. Obtén la ecuación de la tangente a la curva *y* = e^{2x+1} en el punto de abscisa $-\frac{1}{2}$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = 2$, y $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ = 1; por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$, *y* = 2*x*+2.

10.21. ¿Existe algún punto en la curva *y* = e^{x^3+x+1} con tangente horizontal?

Se iguala la derivada a 0: $f'(x) = \left(3x^2+1\right)e^{x^3+x+1} = 0$ .Pero como la derivada no se anula nunca, tanto $3x^2+1$ como e^{x^3+x+1} son siempre positivas, por tanto, la curva no tiene tangentes horizontales.

10.22. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $y = e^{e^x-1}$ en el punto de abscisa 0.

$f'(x) = e^x \cdot e^{e^x-1}$, $f'(0) = 1$ y *f* (0) = 1, luego la recta tangente es *y* = *x* + 1.

10.23. Aproxima con la calculadora las abscisas de los puntos de corte de *y* = 3^x e *y* = *x* + 1.

$3^x = x+1 \Rightarrow 3^x - x - 1 = 0$. Una solución es *x* = 0, la otra está entre –1 y $\frac{1}{2}$.

Se hace una tabla de valores y se obtiene:

x	–1	0,5	–0,1	–0,2
3 – *x* – 1	0,333333	0,07735	–0,00404	0,00274

La solución está entre –0,2 y –0,1 así que es *x* = –1,1…
Con ayuda de la calculadora gráfica obtenemos *x* = – 0,17394.

10.24. Calcula la derivada de $f(x) = \ln[(x^2+1)]^3$.

$$f'(x) = 3\ln[(x^2+1)]^2 \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

10.25. Calcula la ecuación de la tangente a la curva *y* = ln *x* trazada desde el origen.

La ecuación de la recta tangente a la curva por el punto (*a*, *f*(*a*)) es $y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$.

Si pasa por el origen debe ser 0 = ln*a* – 1, entonces ln*a* = 1, *a* = *e* y la ecuación buscada es $y = \frac{x}{e}$.

10.26. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?

Como $D(f) = (-1, 1)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, no se anula en ese intervalo, por tanto, la gráfica no tiene tangentes horizontales.

10.27. Calcula, simplificando al máximo, la derivada de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$.

$$f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\left(\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}\right) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

10.28. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen.

$f'(0) = \cos 0 = 1$ y $f(0) = 0$, así pues la recta tangente es $y = x$.

10.29. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el que la tangente tenga menor pendiente que la bisectriz del primer cuadrante?

$f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} \geq 2$, luego las tangentes a la curva siempre tienen pendiente mayor que 2.

10.30. Obtén la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)$ **b)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x) = \cos\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)\left(2x + 2e^{2x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ b) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

10.31. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal.

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ si $\cos x = \operatorname{sen} x$, luego $x = \dfrac{\pi}{4}$ ó $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Los puntos buscados son $P\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $Q\left(\dfrac{5\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

10.32. Pon tu calculadora en grados y obtén, con ayuda de la misma, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. ¿Te convences de la ventaja de utilizar radianes en análisis?

x	0,1º	–0,1º	0,01º	0,001º
$f(x)$	0,017453283	0,017453283	0,017453292	0,017453292

El límite es $\dfrac{\pi}{180}$.

10.33. Halla las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 - x)$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3(3x^2 + 2x)}$

a) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2 - x)\cdot\cos(x^2 - x)\cdot(2x - 1)$ b) $f'(x) = \dfrac{3\cos^2(3x^2+2x)\operatorname{sen}(3x^2+2x)\cdot(6x+2)}{\cos^6(3x^2+2x)}$

10.34. Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(e^x\right)$

b) $f(x) = \text{arctg}\left(1 + x^2\right)$

c) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

d) $f(x) = \ln(\text{sen}\, x + \text{arcsen}\, x)$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{\arccos x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\, x + \text{arcsen}\, x} \cdot \left(\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

10.35. Calcula la derivada de y = arccotg$x$. (Recuerda que $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$)

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\text{tg}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

10.36. Deriva y simplifica todo lo que puedas la función: $f(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

10.37. Deriva las funciones:

a) $f(x) = \text{arctg}(\text{arctg}\, x)$

b) $f(x) = \text{arctg}(\text{tg}\, x \cdot \text{arctg}(x))$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \text{arctg}^2(x)} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x \cdot \text{arctg}^2(x)} \cdot \left(\dfrac{\text{arctg}\, x}{\cos^2 x} + \dfrac{\text{tg}\, x}{1 + x^2}\right)$

10.38. Calcula, mediante derivada logarítmica, las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$**, con** $x > 0$

b) $f(x) = x^{\text{sen}\, x}$**, con** $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln x^{\text{sen} x} = \text{sen} x \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \dfrac{\text{sen}\, x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{\text{sen}\, x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\text{sen} x}{x}\right)$

10.39. Si f y g son funciones positivas y derivables, deduce la derivada de fg y $\dfrac{f}{g}$ mediante derivación logarítmica.

$\ln(fg) = \ln f + \ln g$, derivando, se obtiene: $\dfrac{(fg)'}{fg} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g} \Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$

$\ln(\dfrac{f}{g}) = \ln f - \ln g$, derivando se obtiene: $\dfrac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g} \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

10.40. Obtén la ecuación de la tangente a la curva: $\pi^2 y^3 \cos x - x^2 y + 2\pi^2 = 0$ en el punto $P(\pi, 1)$.

Derivando la expresión, se obtiene: $-\pi^2 y^3 \text{sen}\, x + 3\pi^2 y^2 y' \cos x - 2xy - x^2 y' = 0$, si $x = \pi$, $y = 1$ y se obtiene:

$-3\pi^2 y' - 2\pi - \pi^2 y' = 0$, luego $y' = -\dfrac{1}{2\pi}$ y la ecuación de la recta tangente es: $y = -\dfrac{1}{2\pi}(x - \pi) + 1 = -\dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{3}{2}$.

10.41. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 13$ en $P(2, 3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita, y despejando *y*.

Derivación implícita: $2x + 2yy' = 0$ en $x = 2$, $y = 3$ se tiene $y' = -\dfrac{2}{3}$.

Despejando *y* (observa que se está cerca de $y = 3$, luego *y* es positivo):

$y = \sqrt{13 - x^2} \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{\sqrt{13 - x^2}}$, en $x = 2$ $y' = -\dfrac{2}{3}$. Así pues, la recta tangente es $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

10.42. Usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa *x*:

a) $x^2y^3 = 27$, si $x = 1$ **b) $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y$, si $x = 0$**

a) Se deriva: $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$. Si $x = 1$, entonces $y = 3$ y, por tanto, $y' = \dfrac{-2}{3}$. La tangente es $y = \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{11}{3}$.

b) Se deriva: $2xy + x^2y' - 2y^3 - 6xy^2y' = 2 + 2y'$. Si $x = 0$, entonces $y = 3$ y, por tanto, $y' = -28$. La ecuación de la tangente es $y = -28x + 3$.

10.43. Usa la derivación implícita para calcular $f''(x)$ si $3x^2 - 2(f(x))^2 = 12$.

$6x - 4f(x)f'(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{3x}{2f(x)} = \dfrac{3x}{\sqrt{2}\sqrt{3x^2 - 12}}$

10.44. Obtén con la calculadora sen (0,2) y hállalo también mediante la aproximación lineal de $y = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$.

Con calculadora: sen (0,2) = 0,19866933 y con la aproximación lineal $L(0{,}2) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0{,}2 = 0{,}2$.

10.45. Utiliza diferenciales para aproximar el valor de $2{,}001^7 + 3 \cdot 2{,}001^4 - 5 \cdot 2{,}001^2$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Se considera $f(x) = x^7 + 3x^4 - 5x^2$, $f'(x) = 7x^6 + 12x^3 - 5x$. Por tanto, $f(2) = 156$ y $f'(2) = 534$.

$L(2{,}001) = f(2) + f'(2)\,0{,}001 = 156 + 0{,}535 = 156{,}535$.

Con calculadora se obtiene 156,5247396.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto

10.46. Calcula la derivada, por definición, de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ en $x = 1$ **b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -1$** **c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $x = 4$**

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 4(1+h) + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2) = 2$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1/(h+2) - 1/2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(h+2)} = -1/4$

c) $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2h+9} - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{2h+9} - 3}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{2h+9} + 3}{\sqrt{2h+9} + 3}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h\left(\sqrt{2h+9} + 3\right)} = \dfrac{1}{3}$

10.47. Explica por qué no existen las derivadas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x) = |x-5|$ **en** $x = 5$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **en** $x = 2$ **c)** $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ **en** $x = 4$

a) $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$. Luego no existe la derivada pues no existe el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$.

b) La función no es continua en $x = 2$ (tiene una asíntota vertical) y, por tanto, no es derivable.

c) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \dfrac{|h^2+h|}{h} = \dfrac{|h|(h+1)}{h} = \begin{cases} h+1 & \text{si } h > 0 \\ -h-1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$.

Luego no existe la derivada pues no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

10.48. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 7-3x & \text{si } x < 2 \\ x^2-7x+11 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

a) Continuidad: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1} = -1$

Derivabilidad: $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{h}+1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h^2} = 1$

b) Continuidad: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (7-3x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-7x+11) = 1$ y $f(2) = 1$.La función es continua.

Derivabilidad: $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{7-3(2+h)-1}{h} = -3 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(2+h)^2-7(2+h)+11-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h(h-3)}{h} = -3 \end{cases}$

Interpretación geométrica: rectas tangente y normal

10.49. (TIC) Calcula la ecuación de la recta tangente a cada gráfica en el punto indicado. Comprueba a continuación tu respuesta representando, en la calculadora gráfica o en el ordenador, la gráfica de la función y la de la recta tangente:

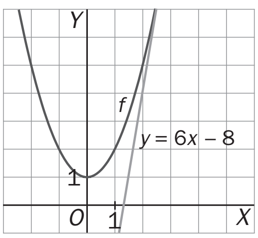
a) $f(x) = x^2 + 1$ **en** $A(3, f(3))$ **b)** $g(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $B(3, g(3))$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **en** $C(0, h(0))$

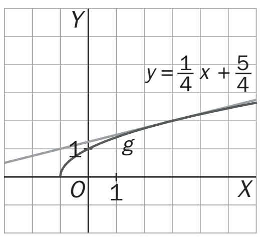
a) $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$ y $f(3) = 10$. La recta tangente es $y = 6x - 8$.

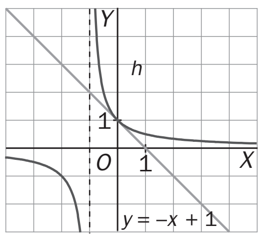
b) $g'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(3+h)-g(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}$ y $g(3) = 2$.

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

c) $h'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{t+1}-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-t}{t(t+1)} = -1$. $h(0) = 1$. La recta tangente es $y = -x + 1$.







10.50. Halla los puntos de intersección de las funciones $y = x$ e $y = \dfrac{1}{x}$. Comprueba que en dichos puntos la tangente a $y = \dfrac{1}{x}$ es perpendicular a $y = x$.

$x = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1;\ x = 1$ ó $x = -1$. Calculamos la pendiente de la tangente en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h-1} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(h-1)} = -1$$

Luego las rectas tangentes son $y = -x + 2$ e $y = -x - 2$, ambas perpendiculares a $y = x$.

10.51. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ trazadas desde el punto P (1, –2). Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

$f'(a) = a^2$, la ecuación de la recta tangente a la parábola por el punto $A(a, a^2)$ es $y = 2ax - a^2$.

Si se quiere que pase por el punto $P(1, -2)$ debe ser $-2 = 2a - a^2$ cuyas soluciones son $a = 1 + \sqrt{3}$ y $a = 1 - \sqrt{3}$ y las tangentes buscadas son $y = 2\left(1+\sqrt{3}\right)x - 2\left(2+\sqrt{3}\right)$ y $y = 2\left(1-\sqrt{3}\right)x - 2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

10.52. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Halla los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2, 4)$.

Como la parábola pasa por $P(2, 4)$ debe ser $4 + 2a + b = 0$.
Además, como la tangente en ese punto tiene pendiente 2, debe ser $f'(2) = 2 \cdot 2 + a = 2$, luego $a = -2$ y $b = 0$.

10.53. Halla todas las tangentes a la curva $y = x^4$ que pasen por $P(2, 0)$.

La tangente a la curva por el punto de abscisa $x = a$ tiene ecuación $y = 4a\ 3x - 3a4$. Para que pase por $P(2, 0)$ debe ser $0 = 8a3 - 3a4$ cuyas soluciones son $a = 0$ y $a = \dfrac{8}{3}$, luego las tangentes buscadas son $y = 0$ e $y = \left(\dfrac{8}{3}\right)^3 (4x - 8)$.

10.54. (TIC) Dibuja las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ y traza las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Halla las ecuaciones de dichas rectas.

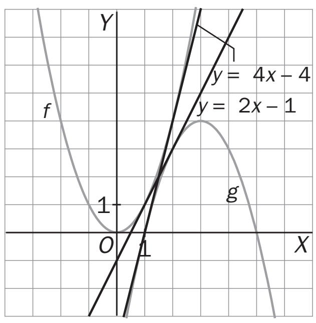
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$ es $y = 2ax - a^2$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 6x - 5$ en el punto de abscisa $x = b$ es $y = (-2b+6)x + b^2 - 5$.

Para que sean la misma recta debe ser $\begin{cases} 2a = -2b + 6 \\ -a^2 = b^2 - 5 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema se obtienen las soluciones: $a = 1$, $b = 2$ y $a = 2$, $b = 1$.

Las tangentes comunes son $y = 2x - 1$ e $y = 4x - 4$.



10.55. Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar a la curva esa tangente?

Se calculan los puntos de corte de ambas curvas: $-x = x^3 - 6x^2 + 8x$.

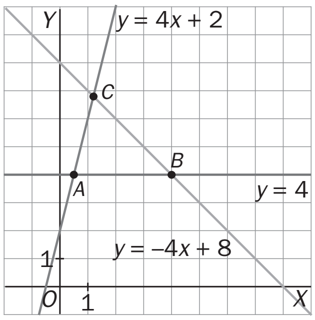
Las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = 3$.

Luego las curvas se cortan en dos puntos. La recta será tangente en el punto de abscisa $x = a$ si $f'(a) = -1$.

Como $f'(a) = 3a^2 - 12a + 8$, se tiene $f'(0) = 8$, luego allí la recta corta la curva pero no es tangente y $f'(3) = -1$. Así pues, la recta dada es tangente a la curva en el punto $P(3, -3)$.

10.56. Halla el área limitada por la recta $y = 4$, la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$ y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$, en el punto de abscisa $x = 1$.

Se representa gráficamente dicha área.



Para ello se halla la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$:

$f'(2) = 1 \quad y = -x + 8$

Y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en $x = 1$ es $y = 4x + 2$.

Se hallan lo puntos de intersección de las tres rectas:

$A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $B(4, 4)$ y $C\left(\frac{6}{5}, \frac{34}{5}\right)$.

El área es $A = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{34}{5} - 4\right) = 4{,}9$ u^2.

10.57. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$, comprueba que la recta tangente en el punto de corte con el eje *Y* es paralela a la asíntota de dicha función.

La función corta al eje Y en $A(0, f(0)) = A(0, \left(0, \frac{5}{3}\right))$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3) - 2x(x^3 - x^2 + 3x + 5)}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Como $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3} = x - 1 + \dfrac{8}{x^2 + 3}$, la asíntota es $y = x - 1$ que también tiene pendiente 1.

10.58. ¿Qué interpretación geométrica se puede dar al hecho de que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = +\infty$?

La función tiene tangente vertical en dicho punto.

10.59. Supón que g es continua en $x = 0$, pero no derivable, donde $g(0) = 3$. Sea $f(x) = xg(x)$.

¿Es f derivable en $x = 0$? Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en P (0, 0).

Se comprueba si existe $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\,g(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} g(h) = 3$ por ser g continua en $x = 3$.

La tangente a $y = f(x)$ en $P(0, 0)$ es $y = 3x$.

Función derivada. Derivadas sucesivas

10.60. Aplicando la definición, calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos en los que estén definidas:

a) $f(x) = x^3 - 5x$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{12-4x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

a) $f(x) = x^3 - 5x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - 5(x+h) - x^3 + 5x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-5)}{h} = 3x^2 - 5$$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, si $x \neq -2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{x+h+2} - \frac{3}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(x+h+2)(x+2)} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

c) $f(x) = \sqrt{12-4x}$, si $x < 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)} - \sqrt{12-4x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)} - \sqrt{12-4x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}}{\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}} = \lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h\left(\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{12-4x}}$$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, si $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x+h}}{x+h+1} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+1)^2 - 2x(x+1) + hx\right]}{h(x+h+1)(x+1)\left((x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

10.61. Demuestra que la segunda derivada de una función polinómica de segundo grado es siempre una función constante. ¿Cuánto vale esa constante?

$P(x) = ax^2 + bx + c$; entonces $P\,'(x) = 2ax + b$ y $P\,''(x) = 2a$ que es constante. La constante es el doble del coeficiente principal.

10.62. Encuentra un polinomio *f*(*x*) sabiendo que *f*(1) = 2; *f* '(1) = 4; *f* ''(1) = 10; *f* '''(1) = 12, y $f^{n)}$ (*x*) = 0 si *n* > 3.

Como las derivadas son cero a partir de la cuarta, el polinomio es de tercer grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y sus derivadas sucesivas son: $f'(x) = 3ax^2 + 2b + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ y $f'''(x) = 6a$.

Utilizando los valores de la función y las derivadas en $x = 1$ se plantea el sistema $\begin{cases} 6a = 12 \\ 6a + 2b = 10 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema se tiene que el polinomio buscado es $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

Derivadas laterales

10.63. (PAU) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

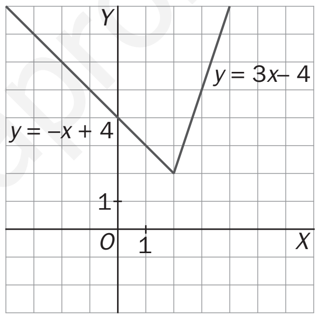
Calcula *a*, *b* y *c* para que la función sea derivable en *x* = 1, sabiendo que *f*(0) = *f*(4).

Para que la función sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que $1 + a + b = c$.
Para que sea derivable en $x = 1$ debe ser $a + 2 = c$ y, como $f(0) = f(4)$, debe ser $b = 4c$.

Resolviendo el sistema se tiene que $a = \frac{-7}{4}$, $b = 1$ y $c = \frac{1}{4}$.

10.64. (TIC) Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=|2x-4|+x$ en el punto *x* = 2. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.

Se escribe la función a trozos: $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<2 \\ 3x-4 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$



$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-2-h-2}{h}=-1$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{6+3h-4-2}{h}=3$$

La función no es derivable en $x = 2$.

10.65. Calcula las derivadas laterales en *x* = 1 (si existen) y decide si las funciones son derivables en dicho punto.

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x\leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ x & \text{si } x>1\end{cases}$

a) La función está definida en [–1, 1], luego no existe la derivada lateral a derecha.

$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h}=-\infty$. La función no es derivable en $x = 1$.

b) $f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^3}{h}=0$. $f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=0$. La función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 0$.

c) $f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+h^2}{h}=2$. $f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+2-1}{h}=+\infty$. La función no es derivable en $x = 1$.

d) $f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=2$. $f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+h-1}{h}=1$. La función no es derivable en $x = 1$.

10.66. Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$g(x) = -x^2 + 6x + 2$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 1 \\ g(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula:

a) $f'(1)$, $f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$ **b)** $g'(1)$, $g'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)$ **c)** $F'(1^-)$ y $F'(1^+)$

¿Es $F(x)$ derivable en $x = 1$? ¿Es $F(x)$ continua en $x = 1$?

a) $f'(x) = 2x+2$, $f'(1) = 4$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = 4$

b) $g'(x) = -2x+6$, $g'(1) = 4$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} g'(x) = 4$

c) Observa que $F(1) = g(1) = 7$

$$F'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+2(1+h)-1-7}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+4h-5}{h} = +\infty$$

$$F'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)^2+6(1+h)+2-7}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(-h+4)}{h} = 4$$

Como $F'(1^-)$ y $F'(1^+)$ no coinciden, la función $F(x)$ no es derivable $x = 1$ a pesar de que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)$. El problema es que $F(x)$ no es continua en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 7 = F(7)$.

Derivadas de las operaciones con funciones

10.67. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$, calcula:

a) $f'(x)$ y $g'(x)$

b) $(5f)'(x)$

c) $(f+g)'(x)$

d) $(2f-3g)'(x)$

a) $f'(x) = 2x+2$ y $g'(x) = 3$

b) $(5f)'(x) = 5f'(x) = 10x+10$

c) $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x) = 2x+5$

d) $(2f-3g)'(x) = 2f'(x)-3g'(x) = 2(2x+2)-9 = 4x-5$

e) $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x) = 2(x^2+2x+1)(2x+2)$

f) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = (2x+2)(3x-1)+3(x^2+2x+1)$

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x) = \dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \dfrac{3(x^2+2x+1)-(3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

h) $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x) = \dfrac{-10g'(x)}{(g(x))^3} = \dfrac{-30}{(3x-1)^3}$

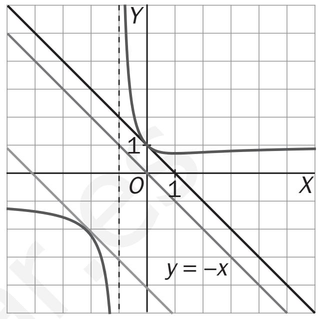
10.68. (TIC) Dada la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, represéntala con la calculadora gráfica o el ordenador, y aproxima los puntos en los que su gráfica admite una tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

En la gráfica hay dos puntos en los que la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. Como se quiere $f'(x) = -1$, se calcula $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}=-1$ si $(x+1)^2\sqrt{x^2+1}+x-1=0$.

La solución $x = 0$ es fácil de encontrar por tanteo. La segunda solución se aproxima con ayuda de la calculadora. En la gráfica se observa que está entre –3 y –2 más cerca del –2. Haciendo una pequeña tabla con los valores:

–2	–2,2	–2,1	–2,15	–2,16
0,34164	0,08044	–0,10148	–0,0045	0,01338

Se observa que $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}>0$ si $x < -2{,}16$ y $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}<0$ si $x > -2{,}15$ luego el segundo punto buscado tiene abscisa $x = -2{,}15\ldots$.



10.69. Demuestra esta sencilla fórmula que nos da la derivada segunda de un producto: $(fg)''=f''g+2f'g'+fg''$

$(fg)''=[(fg)']'=(f'g+fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''$

Derivada de la función compuesta

10.70. (TIC) Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}+x\right)^5$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3}}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^3$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{(3x-6)^4}$

a) $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^3}{2x+1}}\cdot\dfrac{-4x-32x}{x^4}$

c) $f'(x)=3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{-8}{(x-5)^2}=-\dfrac{8}{3}\dfrac{(x+3)^2}{(x-5)^4}$

d) $f'(x)=\dfrac{2x(3x-6)-12x^2}{(3x-6)^5}=\dfrac{-6x(x^2+2)}{(3x-6)^5}$

10.71. Sabiendo que $f(2) = 1$; $f'(2) = 3$; $g(2) = 2$; $g'(2) = 5$ y $g'(1) = 0$, calcula:

a) $(f\circ g)'(2)$

b) $(g\circ f)'(2)$

c) $(f^2\circ g)'(2)$

d) $\left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)'(2)$

e) $\left(\sqrt{g}\right)'(2)$

f) $\left(f^n\right)'(2)$

a) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)\cdot 5=15$

b) $(g\circ f)'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(1)\cdot 3=0$

c) $(f^2\circ g)'(2)=2f(g(2))f'(g(2))g'(2)=2f(2)f'(2)\cdot 5=10\cdot 1\cdot 3=30$

d) $\left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)'(2)=\left(\dfrac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2)=-\dfrac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2}g'(2)=-\dfrac{f'(2)}{(f(2))^2}\cdot 5=-15$

e) $\left(\sqrt{g}\right)'(2)=\dfrac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

f) $\left(f^n\right)'(2)=nf^{n-1}(2)f'(2)=3n$

10.72. Si $f(x) = x^2$, ¿es lo mismo $f'(x^2)$ que $g'(x)$, siendo $g(x) = f(x^2)$?

No, pues $f'(x) = 2x$, luego $f'(x^2) = 2x^2$ y $g'(x) = f'(x^2)\cdot(x^2)'=2x^2 \cdot 2x = 4x^3$

10.73. Obtén la derivada de $f(x) = \dfrac{1+x^3}{2-x}$ y, a partir del resultado obtenido, escribe la derivada de $g(x) = \dfrac{1-x^3}{2+x}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(2-x)+1+x^3}{(2-x)^2} = \frac{-2x^3+6x^2+1}{(2-x)^2}$$

Como $g(x) = f(-x)$, se tiene que $g'(x)= -f'(-x)= \dfrac{-2x^3-6x^2-1}{(2+x)^2}$.

10.74. Sea f una función derivable que cumple $f(x + 3) = 8x - 12$ cualquiera que sea el valor de x. Calcula $f(f'(1))$ y $f'(f(1))$.

Derivando la expresión $f(x + 3) = 8x - 12$ se tiene $(f(x+3))'= (8x - 12)'$, $f'(x + 3) \cdot 1= 8$ para todo x.
Así pues, $f'(1)= 8$ y $f(8) = f(5 + 3) = 8 \cdot 5 - 12 = 28$ y $f'(f(1)) = f'((f(1) - 3) + 3) = 8$

10.75. Si $f(x) = \text{máx}(x, x^2)$ y $g = f \circ f$, calcula $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Se escribe f como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0<x<1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 2x & \text{si } x>1 \text{ ó } x<0 \end{cases}$$

$$g'(-\frac{1}{2}) = f'(f(-\frac{1}{2}))\cdot f'(-\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{4})\cdot f'(-\frac{1}{2}) = 1\cdot(-1) = -1$$

Derivada de la función inversa

10.76. Encuentra una fórmula para calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ utilizando su función inversa. Aplica el resultado obtenido para calcular la derivada en $x = 5$ de la función f.

$f^{-1}(x) = x^n$ y $\left(f^{-1}(x)\right)' = nx^{n-1}$ $x = (f^{-1} \circ f)(x)$ Derivando, $1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} f'(x)$ luego

$$f'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} \text{ y } f'(5) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{5}\right)^{n-1}}$$

10.77. Comprueba que, en general, las derivadas de funciones inversas no son inversas entre sí. Utiliza para ello las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$f'(x) = 2x$ y $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Se calcula $(f' \circ g')(x) = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq x$.

10.78. Calcula en cada caso, el valor de b:

a) $f'(1) = -5$ $\quad f^{-1}(0) = 1$ $\quad (f^{-1})'(0) = b$

b) $f'(0) = 1$ $\quad f^{-1}(-5) = 0$ $\quad (f^{-1})'(-5) = b$

c) $f'(-1) = b$ $\quad f^{-1}(6) = -1$ $\quad (f^{-1})'(6) = 8$

a) $(f^{-1})'(0)= \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{5}$

c) $f'(-1)= f'(f^{-1}(6)) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(6)} = \dfrac{1}{8}$

b) $(f^{-1})'(-5)= \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-5))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$

Derivadas de las funciones elementales

10.79. (TIC) Calcula las derivadas de estas funciones:

a) $f(x)=3+x^2$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+x^2}{3}\right)$

d) $f(x)=e^{3+x^2}$

e) $f(x)=\left(3-x^2\right)^3$

f) $f(x)=\operatorname{sen}^3\left(x^2\right)$

g) $f(x)=3\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

h) $f(x)=\left(\operatorname{sen}(x^2)+\cos 3\right)^3$

a) $f'(x)=2x$

b) $f'(x)=\dfrac{-6}{x^3}$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{3+x^2}$

d) $f'(x)=2xe^{3+x^2}$

e) $f'(x)=-6x(3-x^2)^2$

f) $f'(x)=6x\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\cos(x^2)$

g) $f'(x)=\dfrac{-3}{x\sqrt{x^4-1}}$

h) $f'(x)=3\left(\operatorname{sen}(x^2)+\cos 3\right)^2\left(2x\cos(x^2)\right)$

10.80. (TIC) Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que existan:

a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{arctg}x}$

b) $f(x)=e^x\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{x^2-1}$

e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\left(\operatorname{sen}^3x^3+1\right)^3\right)$

f) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

a) $f'(x)=\dfrac{\cos x\cdot\operatorname{arctg}x-\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg}x)^2}$

b) $f'(x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+e^{-x}(-\operatorname{sen}x+\cos x)=(\cos x-\operatorname{sen}x)(e^x+e^{-x})$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2}-\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^4}$

d) $f'(x)=\dfrac{(2x\ln x+x)(x^2-1)-2x^3\ln x}{(x^2-1)^2}$

e) $f'(x)=\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3x^3+1\right)^3\right)3\left(\operatorname{sen}^3x^3+1\right)^2 3\operatorname{sen}^2x^3\cos x^3\cdot 3x^2=$

$$=27\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^3\right)\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^2\operatorname{sen}^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)x^2$$

f) Antes de derivar conviene escribir la función de forma más sencilla utilizando las propiedades de las razones trigonométricas:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}+1\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\cos(2x)}{(\operatorname{sen}(2x))^2}$$

10.81. (TIC) Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2+1)\cdot \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+4}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{2\pi^2 \ln\left(x^3+x\right)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{x2}}{\sqrt{x-1}}$

e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(3^x)}{x\cos^3\left(e^x\right)}$

f) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t\,e^t}}{\sqrt[4]{t^3-t^2}}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos^2 x}$

b) $f'(x) = \dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2\pi^2\left(3x^2+1\right)\operatorname{tg}(\pi x)}{x^3+x} - \dfrac{2\pi^3\ln\left(x^3+x\right)}{\cos^2(\pi x)}}{\left(\operatorname{tg}(\pi x)\right)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}\left(2x\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{x-1} = \dfrac{e^{x^2}(4x(x-1)-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

e) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{\ln 3\cdot\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}} - \operatorname{arcsen}(3^x)\left(\cos^3\left(e^x\right) - 3xe^x\cos^2(e^x)\operatorname{sen}(e^x)\right)}{\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)^2}$

f) $f'(t) = \dfrac{\dfrac{e^t(1+t)\sqrt[4]{t^3-t^2}}{2\sqrt{t\,e^t}} - \dfrac{\sqrt{t\,e^t}\left(3t^2-2t\right)}{\left(\sqrt[4]{t^3-t^2}\right)^3}}{\sqrt{t^3-t^2}}$

10.82. (TIC) Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de la derivada enésima.

a) $f(x) = x^n$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = e^{7x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \ln(x)$

f) $f(x) = \cos(3x)$

a) $f^{k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ si $k \ge n+1$ $f^{k)}(x) = 0$

b) $f^{4n)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{4n+1)}(x) = \cos x$, $f^{4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f^{4n+3)}(x) = -\cos x$

c) $f^{n)}(x) = 7^n e^{7x}$

d) $f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

e) $f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

f) $f^{4n)}(x) = 3^{4n}\cos(3x)$, $f^{4n+1)}(x) = -3^{4n+1}\operatorname{sen}(3x)$, $f^{4n+2)}(x) = -3^{4n+2}\cos(3x)$ y $f^{4n+3)}(x) = 3^{4n+3}\operatorname{sen}(3x)$

10.83. (PAU) Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = 2xe^x + \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

$f'(x) = 2e^x(1+x) + \dfrac{3x^2(x^2+4) - 2x(x^3-2)}{(x^2+4)^2}$ $\quad f'(0) = 2$ y $f(0) = \dfrac{-1}{2}$

La tangente es $y = 2x - \dfrac{1}{2}$ y la normal $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

10.84. La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$ y la función $g(x) = \text{sen}x$, sí. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x) = \sqrt{x}$ sen x?

Como $D(p) = [0, +\infty)$, solo se puede calcular la derivada lateral a derecha. Dicha derivada, sí existe,y para calcularla observa que existen los límites $\lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\text{sen}h}{h} = 1$, luego

$p'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h}\,\text{sen}\,h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,h}{h} = 0 \cdot 1 = 0$.

10.85. ¿Para qué valores de x se anulan las derivadas de las funciones siguientes?:

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x^2}$

b) $f(x) = e^{2x} - 4e^x$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\,x}$

f) $f(x) = x\ln x - x$

g) $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}}$

h) $f(x) = \dfrac{\text{tg}\,x}{1 + \text{sen}\,x}$

a) $f'(x) = \dfrac{6x - 4(3x+1)}{4x^3} = \dfrac{-6x-4}{4x^3} = 0 \iff -6x - 4 = 0 \iff x = \dfrac{-2}{3}$

b) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = e^x(2e^x - 4) = 0 \iff 2e^x - 4 = 0 \iff x = \ln 2$

c) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$ no se anula nunca.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\text{sen}\,x} - \dfrac{\cos x}{1-\text{sen}\,x}\right) = \dfrac{-\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x} = -\text{tg}\,x = 0 \iff x = k\pi$

e) $f'(x) = \dfrac{-\text{sen}\,x(1-\text{sen}\,x) + \cos^2 x}{(1-\text{sen}\,x)^2} = \dfrac{1}{1-\text{sen}\,x}$ no se anula nunca.

f) $f'(x) = \ln x = 0 \iff x=1$

g) $f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}} \cdot \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0 \iff x^2 - 6x = 0 \iff x = 0$ y $x = 6$.

h) $f'(x) = \dfrac{1 + \text{sen}\,x - \text{sen}\,x\cos^2 x}{\cos^2 x(1+\text{sen}\,x)^2} = \dfrac{\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x + 1}{\cos^2 x(1+\text{sen}\,x)}$ que no se aula nunca.

10.86. Sea la función: $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } \frac{3\pi}{2}\le x<3\pi \\ x-3\pi & \text{si } 3\pi\le x\le 12 \end{cases}$ **Estudia su continuidad y su derivabilidad en** $x=3\pi$ **.**

$\lim_{x\to 3\pi^-} f(x)=\operatorname{sen}(3\pi)=0=\lim_{x\to 3\pi^+} f(x)=f(3\pi)$. Luego la función es continua en $x=3\pi$

$f'(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } \frac{3\pi}{2}\le x<3\pi \\ 1 & \text{si } 3\pi<x<12 \end{cases}$ y $\lim_{x\to 3\pi^-} f'(x)=\cos(3\pi)=1=\lim_{x\to 3\pi^+} f'(x)$.

La función es derivable en $x=3\pi$ y $f'(3\pi)=1$

10.87. Estudia en qué puntos es derivable la función: $f(x)=\begin{cases} (x-\pi)+\cos(x-\pi) & \text{si } x\le\pi \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi} & \text{si } x>\pi \end{cases}$

Si $x\ne\pi$, la función es continua por ser composición, suma y cociente de funciones continuas y derivables con denominadores no nulos.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\operatorname{sen}(x-\pi) & \text{si } x<\pi \\ \dfrac{(x-\pi)\cos(x-\pi)-\operatorname{sen}(x-\pi)}{(x-\pi)} & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

Continuidad: $\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}((x-\pi)+\cos(x-\pi))=1=f(\pi)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}=1$

Luego la función es continua en todo **R**.

Derivabilidad: $\lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi^-}(1+\operatorname{sen}(x-\pi))=1\ne\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\dfrac{(x-\pi)\cos(x-\pi)-\operatorname{sen}(x-\pi)}{(x-\pi)}=1-1=0$

Los límites no coinciden, luego la función no es derivable en $x=\pi$.

Derivación logarítmica e implícita

10.88. (TIC) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^{1-x}$

b) $f(x)=x^{e^x}$

c) $f(x)=(x+\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\operatorname{sen} x-\cos x}$

a) $f'(x)=x^{1-x}\left(-\ln x+\dfrac{1-x}{x}\right)$

b) $f'(x)=x^{e^x}e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x)=(x+\operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x+\operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}(1+\cos x)}{x+\operatorname{sen} x}\right)$

d) $f'(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\operatorname{sen} x-\cos x}\left((\cos x+\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x+\cos x)-\dfrac{(\cos x-\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x+\cos x}\right)$

10.89. Dada la curva 2*xy* + *y* – *x* – 6 = 0, se pide:

a) Calcula la segunda coordenada del punto *P*(5), que pertenece a dicha curva.

b) Calcula *y*'(5) utilizando la derivación implícita.

c) Calcula *y*'(5) despejando previamente la *y* y derivando, posteriormente, la función obtenida. (Los valores obtenidos deben coincidir).

a) Sustituyendo *x* por 5 se tiene 10*y* + *y* = 11 luego *y* = 1 $\Rightarrow$ *P* (5, 1)

b) Derivando se obtiene 2*y* + 2*xy*' + *y* '– 1= 0 y sustituyendo *x* por 5 e *y* por 1: 2 · 1 + 10*y*' + *y*' –1 = 0. luego *y*'(5) = $\frac{-1}{11}$

c) (2*x* + 1)*y* = *x* + 6 luego $y = \frac{x+6}{2x+1}$ e $y' = \frac{-11}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{11}$

Aproximación lineal de una función en un punto. Diferencial de una función

10.90. (TIC) Sabiendo que $\ln 2 \approx 0{,}69315$, obtén la aproximación lineal de la función $f(x) = \log_2 x$ en *x* = 2 y utilízala para obtener los valores aproximados de *f*(*x*) en *x* = 2,01; *x* = 1,9 y *x* = 2,9. Compara estos resultados con los obtenidos con la calculadora. ¿Qué ocurre a medida que nos alejamos del 2?

L(*x*) = ln 2 + $\frac{x-2}{2}$

L(2,01) = ln 2 + $\frac{0{,}01}{2}$ = 0,69315 + 0,005=0,69815. Con la calculadora se obtiene ln(2,01) = 0,698134722.

L(1,9) = ln 2 – $\frac{0{,}1}{2}$ = 0,69315-0,05 = 0,64315. Con la calculadora se obtiene ln(1,9) = 0,641853886

L(2,9) = ln 2 + $\frac{0{,}9}{2}$ = 0,69315 + 0,45 = 1,14315. Con la calculadora se obtiene ln(2,9) = 1,064710737

A medida que nos alejamos del 2 la aproximación lineal va empeorando.

10.91. Realiza una estimación lineal de la variación de la función $f(x) = 1 + \frac{x^2}{x+1}$ al incrementar la *x* de 2 a 2,1.

f(2)= $\frac{5}{3}$, *f* '(2) = $\frac{4}{9}$ y *L*(2, 1) = $\frac{5}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2{,}1-2}{2}$ = $\frac{76}{45} = 1{,}\widehat{6}$

PROBLEMAS

10.92. Se dice que dos curvas son tangentes en un punto si comparten recta tangente en el mismo. Encuentra una parábola del tipo $y = x^2 + bx + c$ que sea tangente a la curva $y = (x-3)^3$ en el punto de abscisa *x* = 3.

Como la tangente a $y = (x-3)^3$ en *x* = 3 tiene ecuación *y* = 0, se quiere que la parábola pase por *P*(3, 0) y que su derivada en *x* = 3 valga 0.

Se plantea el sistema: 9 + 3*b* + *c* = 0 y 6 + *b* = 0. Resolviendo, se tiene *b* = –6 y *c* = 9.

Por tanto, la parábola buscada tiene ecuación *y* = x^2 – 6*x* + 9.

10.93. Dadas las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x^2 - 16x + 63$, calcula el área del triángulo formado por el eje *X* y las rectas tangentes a dichas parábolas en el punto de corte entre ellas.

Se comienza calculando el punto de corte: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 16x + 63 \Rightarrow x = 5$. El punto de corte es *A*(5, 8).

En *A*(5, 8) la recta tangente a $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es *y* – 8 = 6 (*x* – 5). Operando se obtiene *y* = 6*x* – 22.

En *A*(5, 8) la recta tangente a $g(x) = x^2 - 16x + 63$ es *y* – 8 = – 6 (x – 5). Operando se obtiene *y* = –6*x* + 38.

El área del triángulo de vértices *A*(5, 8), $B\left(\frac{11}{3}, 0\right)$ y $C\left(\frac{-19}{3}, 0\right)$ es *A* = $\left(\frac{11}{3} + \frac{19}{3}\right)\frac{8}{2}$ = 14 u^2.

10.94. (PAU) Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, para $x > 1$.

En el punto $P\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje *X*.

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto *P*.

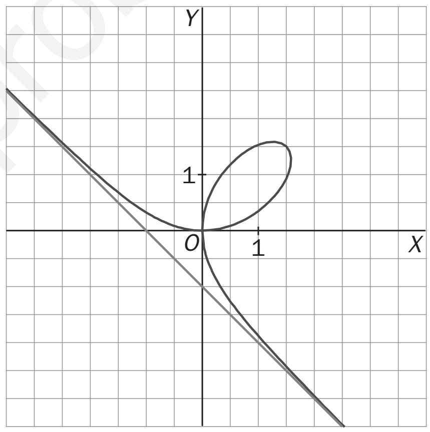
a) $y' = \dfrac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, $y'(2) = \dfrac{10}{9}$. La ecuación de la tangente es $y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$.

b) Como la partícula no corta al eje en (1, 2) cuando sigue la trayectoria $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, debe ser $\dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} = 0$.

La partícula encuentra el eje X en el punto A(3, 2; 0).

c) La asíntota más próxima a P es $x = 1$. Luego la partícula se encuentra con esa asíntota en B(1, 0).

10.95. La *hoja de Descartes* es la curva que corresponde a la gráfica de la ecuación: $x^3 + y^3 = 3xy$ y tiene esta forma tan singular:



a) Explica por qué la hoja de Descartes no es una función.

b) Comprueba que el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ pertenece a la hoja de Descartes.

c) Mediante la derivación implícita comprueba que la tangente a la curva en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ es paralela a la asíntota de la hoja de Descartes.

a) La hoja de Descartes no es una función porque corta a algunas rectas verticales más de una vez (por ejemplo, a la recta $x = 1$).

b) Sustituyendo x e y por $\dfrac{3}{2}$ se observa que se verifica la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$.

c) $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$. Si $x = y = \dfrac{3}{2}$ se tiene $\dfrac{27}{4} + \dfrac{27}{4}y' = \dfrac{9}{2} + \dfrac{9}{2}y'$, luego la pendiente de la tangente en dicho punto es $y' = -1$ que es paralela a la asíntota.

10.96. Dadas las dos curvas $y^3 + 5xy + 3x - 2y = 0$ y $xy^2 + 7xy + 2x + 3y = 0$, se pide:

a) Demuestra que ambas pasan por el origen de coordenadas.

b) Demuestra que las rectas tangentes a dichas curvas en el origen son perpendiculares entre sí.

a) Al sustituir en ambas ecuaciones $x = y = 0$, se observa que se cumplen ambas igualdades.

b) Se calcula las derivadas implícitas de ambas curvas y se sustituye x e y por 0 para obtener $y'(0)$.

$3y2y' + 5y + 5xy' + 3 - 2y' = 0$. Por tanto, $y'(0) = \dfrac{3}{2}$ $\qquad y^2 + 2xyy' + 7y + 7xy' + 2 + 3y' = 0$. Por tanto, $y'(0) = \dfrac{-2}{3}$.

Luego las tangentes tienen pendientes $\dfrac{3}{2}$ y $\dfrac{-2}{3}$ y, por tanto, son perpendiculares.

10.97. (PAU) Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Las rectas tangente y normal tienen ecuaciones $y = -e^{x}$ e $y = \dfrac{x}{e} + \dfrac{1}{e} + e$ respectivamente.

Que cortan al eje X en los puntos $B(0, 0)$ y $C(-e^2 - 1, 0)$.

El triángulo de vértices $A(-1, e)$, $B(0, 0)$ y $C(-e^2 - 1, 0)$ tiene área $\dfrac{e^2 \cdot e}{2} = \dfrac{e^3}{2}$ u^2.

10.98. Sea f: [–2, 2] → R la función definida por:

$$f(x) = (1 - |x|)(1 - [x])$$

donde $[x]$ representa la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x.

Justifica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) f es derivable en (–2, 2).

b) Si x no es entero, $f^{4)}(x) = 0$.

a) Se escribe f como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1+x) & \text{si } x \in (-2,-1) \\ 2(1+x) & \text{si } x \in (-1,0) \\ x-1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \in (1,2) \end{cases}$$

. Además $f(-2) = -3$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

Se observa que la función no es continua en $x = 0$ porque los límites laterales no coinciden.
Derivando en los intervalos abiertos se tiene que

$$f'(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in (-2,-1) \\ 2x & \text{si } x \in (-1,0) \\ 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \in (1,2) \end{cases}$$

, luego la función es derivable si x no es entero.

b) $f''(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in (-2,-1) \\ 2 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \in (1, 2) \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-2,-1) \\ 0 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \in (1, 2) \end{cases}$

Por tanto, las derivadas sucesivas ya serán 0.

10.99. Sea f la función definida en (0, +∞) por $f(x) = x^2 \ln x - \dfrac{3}{2}x^2$. Demuestra que para todo entero $n \geq 3$, es $f^{n)}(x) = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$.

$f'(x) = 2x\ln x - 2x$, $f''(x) = 2\ln x$ … $f'''(x) = \dfrac{2}{x}$ y a partir de aquí se tiene las derivadas sucesivas de $\dfrac{1}{x}$ siempre multiplicadas por 2. Como si $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $g^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, y se obtiene el resultado buscado.

10.100. Determina todas las funciones f con $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$ y que verifican $f'(-1) = f'(1) = 0$.

¿Alguna de las funciones obtenidas anteriormente verifica $f(0) = f(1)$?

Derivando se obtiene $f(x) = 3ax^2 + 2bx + cy$. Se quiere que $3a - 2b + c = 3a + 2b + c = 0$. Luego $b = 0$ y $c = -3a$.

Las funciones que verifican esto son de la forma $f(x) = ax^3 - 3ax + d$.

Si además se impone la condición de que $f(0) = f(1)$ debe ser $d = a - 3a + d$, luego a debería ser 0. Así pues, ninguna de las anteriores verifica $f(0) = f(1)$.

10.101. Se quiere demostrar el hecho ya conocido de que la tangente a una circunferencia en un punto *P* es perpendicular al radio que va desde el centro de la misma al punto *P*. Para ello sigue estos pasos:

a) Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio *a*.

b) Quédate solo con la semicircunferencia superior para que así sea una función.

c) Calcula la pendiente de la tangente a dicha semicircunferencia en el punto $P(x_0, y_0)$ con $x_0>0$.

d) Calcula la pendiente del radio *OP*.

e) Comprueba que el producto de las dos pendientes calculadas es –1.

a) $x^2 + y^2 = a^2$

b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

c) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. La pendiente en $P(x_0, y_0)$ es $\dfrac{-x_0}{\sqrt{a^2 - {x_0}^2}} = \dfrac{-x_0}{y_0}$ si $y_0 \neq 0$.

d) La pendiente del radio *OP* es la pendiente de la recta que pasa por $O(0, 0)$ y $P(x_0, y_0)$, luego vale $\dfrac{y_0}{x_0}$.

e) $\dfrac{-x_0}{y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{-x_0 \cdot y_0}{y_0 \cdot x_0} = -1$

10.102. Demuestra que si *f* es periódica y derivable, entonces *f'* también es periódica.

Se supone *f* periódica de período *T*. Entonces $f(x) = f(x + kT)$ para *k* entero.

Derivando se tiene que $f'(x) = f'(x + kT)$ para cualquier *k* entero y, por tanto, *f'* también es periódica.

10.103. Encuentra una función *f* definida en (0, +∞) tal que $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 7 \\ 2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$ y que $f(7) = 3$.

$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } 0 < x < 7 \\ 2x + b & \text{si } x > 7 \end{cases}$ Si queremos $f(7) = 3$ debe ser $a = -4$ o $b = -11$.

Para que además sea continua en $x = 7$ deben cumplirse ambas condiciones.

10.104. Un profesor algo despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función *f* definida en (0, +∞) tal que $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \le 7 \\ 2 & \text{si } x > 7 \end{cases}$ y que $f(7) = 3$. Un estudiante intenta calcular *f* y se lleva una sorpresa. Explica qué ha ocurrido.

Si se intenta hallar una función con estas características se tendría $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } 0 < x \le 7 \\ 2x + b & \text{si } x > 7 \end{cases}$ que debería ser continua en $x = 7$ pues es derivable allí, luego $a = -4$ y $b = 11$ pero la función así obtenida no es derivable en $x = 7$ y,por tanto, su derivada no vale en 1 en $x = 7$ como debería.

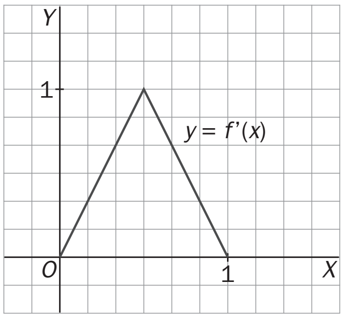
10.105. Supón que *f* es derivable en *x*. Demuestra que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$.

(Indicación: resta y suma *f*(*x*) en el numerador).

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\left(f(x-h)-f(x)\right)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + f'(x)\right) = f'(x)$$

10.106. En la figura adjunta se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.



a) Halla una expresión algebraica de *f* sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

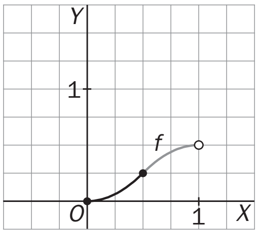
b) Representa gráficamente la función *f*(*x*).

c) ¿Se verifica $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$?

a) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ Luego $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2x + b & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

Como $f(0) = 0$ y, al ser *f* derivable, *f* es continua en $\frac{1}{2}$, se tiene que $a = 0$ y $\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + 1 + b$ luego $b = \frac{-1}{2}$.

b)



c) En la gráfica de $f'(x)$ se observa que no existe $f''\left(\frac{1}{2}\right)$. Se comprueba calculando:

$$f''\left(\frac{1}{2}^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\left(h+\frac{1}{2}\right)-1}{h} = 2 \ne f''\left(\frac{1}{2}^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\left(h+\frac{1}{2}\right)+2-1}{h} = -2$$

10.107. Se ha medido la arista de un cubo y el resultado ha sido 12 cm, luego el volumen de dicho cubo será de 1728 cm³. Se supone que el aparato de medida tiene un error máximo del 2%. Utiliza la aproximación lineal en $x = 12$ de la función que nos da su volumen, $V(x) = x^3$, para calcular el máximo error cometido al hallar el volumen.

$L(x) = 1728 + 432(x - 12)$, luego $L(12 \pm 0{,}28) = 1728 \pm 432 \cdot 0{,}28 = 1728 \pm 120{,}96$

Luego el error máximo es de 120,96 cm³.

10.108. Haz una estimación lineal de la variación del área y el volumen de una esfera al aumentar su radio, *R*, un 1%. ¿Cuál es la variación real?

$A(R) = 4\pi R^2$, $L(R \pm 0{,}01R) = 4\pi R^2 \pm 0{,}08\pi R^2$. La variación del área es de $\pm 0{,}08\pi R^2$.

Como $A(R \pm 0{,}01R) = 4\pi(R \pm 0{,}01R)^2 = 4\pi R^2 \pm 0{,}08\pi R^2 + 0{,}0004\pi R^2$, la variación real máxima es de $0{,}0804\pi R^2$

$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $L(R \pm 0{,}01R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \pm 0{,}04\pi R^3$. La variación del área es de $\pm 0{,}04\pi R^3$.

Como $V(R \pm 0{,}01R) = \frac{4}{3}\pi(R \pm 0{,}01R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \pm 0{,}04R^3 + 0{,}0004\pi R^3 \pm \frac{0{,}000004}{3}R^3$, la variación real máxima es de $0{,}0404013\pi R^3$.

10.109. El coste total de producción de q unidades de cierto producto viene dado, en €, por la expresión $C(q) = 2q^2 + 5q + 10$. Una empresa produce en la actualidad un total de 50 unidades y estudia la posibilidad de aumentar la producción a 50,5 unidades. Estima, utilizando la aproximación lineal, cuál será la diferencia de costes si se producen 50,5 unidades en lugar de 50.

$L(q + 0{,}5) = C(q) + 0{,}5\cdot C'(q)$. $L(50{,}5) = 2760 + 0{,}5\cdot 205 = 2760 + 102{,}5$.

Luego la diferencia de costes es de 102,5 €.

10.110. Halla la función f que cumple que $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 2$ para todo x, sabiendo que $f(0) = f'(0) = 0$.

Se sabe que $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$, luego $f(x) = 2\,\mathrm{artg}\,x + c$. Si $f'(0) = 0$, como $f'(0) = 2$ debe ser $c = 0$.

10.111. Sea $f(x)$ la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Prueba que f es derivable en R, pero que en cualquier entorno de 0 f' no está acotada.

Si $x \neq 0$ $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$. Además $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2} = 0$

pues $-h < h\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2} < h$ y $h \to 0$. Por tanto, $f'(x)$ es también derivable para $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

10.112. Los siguientes límites se pueden escribir como el valor de la derivada de una cierta función en un punto. Aplicando esta idea, calcúlalos.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$

a) Tomando $f(x) = x^{20}$, $f'(1) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x} = 20$

b) Sea $f(x) = \cos x - \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+\frac{\pi}{2})-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

c) Llamando $f(x) = \operatorname{tg}x$ y $h = x - \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2$

d) Llamando $f(x) = \cos x$ y $h = x - \pi$ $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(h+\pi)-\cos\pi}{h} = f'(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0$

10.113. a) Encuentra dos números reales a y b para los que: $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$

b) Sea $f: \mathrm{R} - \{-1, 1\} \to \mathrm{R}$ definida mediante la fórmula $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$. Obtén una expresión para la derivada n-ésima de f.

a) Debe ser $2x = ax + a + bx - b$ para todo x. En particular, si $x = 0$ se tiene $2 = -a - b$ y si x = 1, $2 = 2a$, luego los números buscados son $a = 1$ y $b = -3$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - 3\dfrac{1}{x+1}$. Como si $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $g^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, se tiene $f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - 3\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

10.114. Sea *f* una función definida en R que pasa por el origen, que admite segunda derivada y que verifica $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2$. Calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de *f* en el punto (3, 1).

Se sabe que $2 = [f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = (f(x)\cdot f'(x))'$.

Luego $2 = (f(x)\cdot f'(x))'$ y una función cuya derivada es 2 tiene la forma 2*x* + *a*, así pues $f(x)f'(x) = 2x + a$. Como *f* (0) = 0, debe ser *a* = 0 y se tiene $f(3)f'(3) = 6 \Rightarrow 1\cdot f'(3) = 6 \Rightarrow f'(3) = 6$. Así pues, la ecuación de la recta tangente en (3, 1) es *y* = 6x – 17.

10.115. a) Demuestra que la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dada por $f(x) = e^x + x$ tiene inversa.

b) Prueba que existe una función $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ derivable y tal que $g(x) + e^{g(x)} = x$ para cualquier número real *x*.

c) Calcula *g*'(1).

a) La función es continua y su derivada $f'(x) = e^x + 1$ es siempre positiva, luego la función es estrictamente creciente.
Una función continua estrictamente creciente admite inversa.
b) La función que se busca es $g(x) = f^{-1}(x)$.

Se sabe que $x = (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = e^{f^{-1}(x)} + f^{-1}(x)$.

Y también que si $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ siempre que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ y como es positiva, se tiene que $f^{-1}(x)$ es derivable.
Luego $g(x) = f^{-1}(x)$ cumple ambas condiciones.

c) Se comienza calculando *g*(1). Como $g(x) = f^{-1}(x)$, se tiene que $1 = f(g(1)) = e^{g(1)} + 1 \Rightarrow e^{g(1)} = 0 \Rightarrow g(1) = 1$

Por tanto, $(g)'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{e+1}$.

10.116. Una partícula que se mueve en el plano *XY* baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{x^2 + 9}$. En el punto *P* (4, 5) abandona la curva y sigue por la recta tangente a dicha curva.

a) Calcula el punto *R* del eje *Y* por el que pasará la partícula.

b)¿Existe algún otro punto *Q* de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto *Q* corte al eje *Y* en el mismo punto *R* anterior?

a) Como $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; $f'(4) = \dfrac{4}{5}$. La recta tangente en *P*(4, 5) es $y - 5 = \dfrac{4}{5}(x - 4)$. Operando se obtiene que la recta tangente es $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{9}{5}$, que corta al eje *Y* en $R\left(0, \dfrac{9}{5}\right)$.

b) La recta tangente a $f(x)$ en el punto *Q*(*a*, *f*(*a*)) tiene ecuación $y - f(a) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+9}}\right)(x - a)$. Operando se obtiene que la recta tangente es $y = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+9}} + \dfrac{9}{\sqrt{a^2+9}}$.

Si queremos que pase por $R\left(0, \dfrac{9}{5}\right)$ debe ser $\dfrac{9}{\sqrt{a^2+9}} = \dfrac{9}{5} \Rightarrow a = 4$ ó $a = -4$.

Por consiguiente, la recta tangente a la curva en el punto *Q*(–4, 5) también corta al *Y* en $R\left(0, \dfrac{9}{5}\right)$.

10.117. Sea g una función definida positiva y continua en R, y f una función continua en x = 1 tal que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=0$.

Demuestra que $\frac{f}{g}$ es derivable en x = 1 y calcula $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$.

Como $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=0$ y f es continua, se deduce que $f(1) = 0$.

Además, por ser g continua y positiva: $\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(1+h)}=\frac{1}{g(1)}$. Por otro lado,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2 f(x)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=0\cdot 0=0$ pues ambos límites existen.

Así pues:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(1+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(1+h)}{g(1+h)}-\frac{f(1)}{g(1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{hg(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(1+h)}=0\cdot\frac{1}{g(1)}=0$$

10.118. Define a trozos la función $f(x)=\min\left(\frac{x^2}{2},\frac{1}{1+x^2}\right)$ y calcula $(f\circ f')(2)$.

Resolvemos la inecuación $\frac{x^2}{2}\le\frac{1}{1+x^2}$, como 1 + x^2 es siempre positiva, se obtiene la inecuación equivalente: $x^2(1+x^2)\le 2 \Rightarrow x^4+x^2-2\le 0$, resolviendo la ecuación bicuadrada $x^4+x^2-2=0$ se obtiene las soluciones x = –1 y x = 1. Observando qué ocurre en los intervalos $(-\infty,-1), [-1, 1]$ y $(1,+\infty)$ se tiene que:

$\frac{x^2}{2}\le\frac{1}{1+x^2}$ si $x\in[-1, 1]$ y $\frac{x^2}{2}>\frac{1}{1+x^2}$ si $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

La función es: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & \text{si } x\in[-1,1]\\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x\notin[-1,1]\end{cases}$

$f'(2)=\frac{-2\cdot 2}{(1+2^2)^2}=-\frac{4}{25}$, luego $(f\circ f')(2)=f(f'(2))=f\left(-\frac{4}{25}\right)=\frac{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}{2}=\frac{8}{625}$.

10.119. Demuestra que si la función $f(x)$ está acotada en un entorno de 0, entonces la función $g(x)=x^2f(x)$ es derivable en x = 0.

Como f está acotada en un entorno del 0: $\lim_{h\to 0}h\cdot f(h)=0$, $g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}hf(h)=0$.

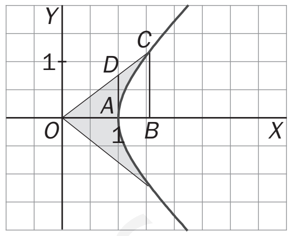
PROFUNDIZACIÓN

10.120. (TIC) Las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente, están asociadas a la llamada circunferencia goniométrica. De manera análoga, la hipérbola también tiene asociadas sus razones trigonométricas:

Seno hiperbólico (BC): $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico (*OB*): $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangente hiperbólica (*AD*): $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$



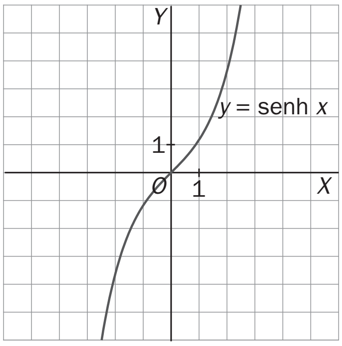
(Siendo *x* e área coloreada en la figura).

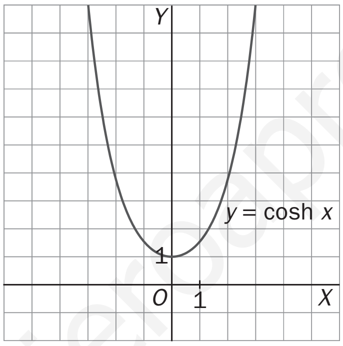
a) Representa dichas funciones en tu calculadora gráfica.

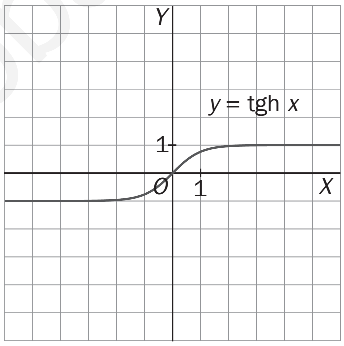
b) Comprueba que cosh2(*x*) – senh2(*x*) = 1.

c) Calcula las derivadas de las funciones trigonométricas hiperbólicas.

a)







b) $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$

c) $(\operatorname{senh})'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$; $(\cosh)'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$

10.121. Considera una función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$ para cualesquiera x_1, x_2.

ii) $f(0) \neq 0$

iii) $f'(0) = 1$

a) Demuestra que $f(0) = 1$. Indicación: Toma $x_1 = x_2 = 0$ en i.

b) Demuestra que $f(x) \neq 0$ para todo *x*. Indicación: Toma $x_2 = -x_1$ en i.

c) Utiliza la definición de derivada para probar que $f'(x) = f(x)$ para todo número real *x*.

d)Sea *g* otra función que satisface las condiciones i, ii, iii y considera $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Demuestra que *k* es derivable en todo R, y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación hay entre *f* y *g*?

e)¿Conoces alguna función *f* que satisfaga las condiciones i, ii, iii? ¿Puede haber más de una?

a) Llamando $a = f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = a^2$. Por tanto, $a = a^2$ luego $a = 0$ ó $a = 1$ y como $f(0) \neq 0$ se concluye que $f(0) = 1$.

b) Como $f(0) = f(x + (-x)) = f(x)f(-x) = 1$, entonces $f(x)$ no puede ser cero.

c) Utiliza la definición de derivada para probar que $f'(x) = f(x)$ para todo número real *x*.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x)f'(0) = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

d) $k'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)f(h)}{g(x)g(h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)g(h)}{g(x)g(h)h}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-g(h)}{g(h)h}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot 0=0$

Luego $k(x)$ es una función constante ya que su derivada se anula para todo $\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\Rightarrow f(x)=a\cdot g(x)$

Pero como $f(0)=1$ y $g(0)=1$ entonces $a=1$ y $f(x)=g(x)$.

e) La función $f(x)=e^x$ satisface las tres condiciones y por d es la única.

10.122. Sea $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, donde f y g son funciones derivables.

a)Encuentra fórmulas para $h^{II}(x)$, $h^{III}(x)$ y $h^{IV}(x)$ en términos de f, g y sus derivadas.

b)¿Te sugieren estos cálculos alguna expresión para $h^{n)}(x)$?

a) $h'(x)=f(x)'g(x)+f(x)g'(x)$, luego

$$h''(x)=f(x)''g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=f(x)''g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$
$$h'''(x)=f(x)'''g(x)+f''(x)g'(x)+2f''(x)g'(x)+2f'(x)g''(x)+f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)=$$
$$=f(x)'''g(x)+3f''(x)g'(x)\cdot 32f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)$$

$$h^{4)}(x)=f(x)^{4)}g(x)+4f^{3)}(x)g'(x)+6f''(x)g''(x)+4f'(x)g^{3)}(x)+f(x)g^{4)}(x)$$

b) $h^{n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{n-k)}(x)\cdot g^{k)}$ con $f^{0)}(x)=f(x)$

10.123. Supón que f y g son funciones derivables en todo R y tales que:

i) $f(0)=1$; $g(0)=0$ ii) $f'(x)=-g(x)$; $g'(x)=f(x)$

a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x)+g^2(x) = 1$ para todo x.

b) Supón que F y G son otro par de funciones derivables que verifican i, ii y considera la función $k(x) = [f(x)-F(x)]^2 + [g(x)-G(x)]^2$. Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para decidir qué relación existe entre f y F y entre g y G.

c)¿Conoces algún par de funciones f y g que verifiquen i, ii? ¿Puede haber otras?

a) $h'(x)=\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=2f'(x)f(x)+2g'(x)g(x)=-2g(x)f(x)+2f(x)g(x)=0$

Luego $h(x)$ es constante y como $h(0)=f(0)+g(0)=1+0=1$, entonces $h(x)=1$ para todo x y, por tanto, $f^2(x)+g^2(x)=1$ para todo x.

b) $k'(x)=\left([f(x)-F(x)]^2+[g(x)-G(x)]^2\right)'=2(f'(x)-F'(x))(f(x)-F(x))+2(g'(x)-G'(x))(g(x)-G(x))=$
$2(-g(x)+G(x))(f(x)-F(x))+2(f(x)-F(x))(g(x)-G(x))=0$

Luego k es constante y como $k(0)=(f(0)-F(0))+(g(0)-G(0))=0$, entonces $k(x)=0$ para todo x, y como k es la suma de dos cuadrados, deben ser $f(x)-F(x)=0$ y $g(x)-G(x)=0$, luego $f(x)=F(x)$ y $g(x)=G(x)$ para todo x.

c)Sí, $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$ satisfacen las condiciones, y por b) son las únicas.

10.124. Para cada número real x, se considera el número complejo e^{ix} que, naturalmente, dependerá de x, es decir, será de la forma $e^{ix}=f(x)+ig(x)$, donde f y g son funciones reales de variable real.

Se supone que las reglas de derivación para estas funciones son las mismas que para funciones reales, es decir, $(e^{ix})'=i\,e^{ix}=f'(x)+ig'(x)$.

a)Toma $x=0$ y calcula $f(0)$ y $g(0)$.

b) A partir de la igualdad $e^{ix}=f(x)+ig(x)$, demuestra que $i\,e^{ix}=-g(x)+if(x)$.

c)Prueba que $f'(x)=-g(x)$ y $g'(x)=f(x)$.

d) Utiliza el problema anterior y decide quiénes tienen que ser $f(x)$ y $g(x)$.

e)Demuestra que $e^{i\pi}+1=0$.

a) $e^{i0}=e^0=1=1+0i=f(0)+ig(0)$ entonces $f(0)=1$ y $g(0)=0$.

b) Como $i^2=-1$ se obtiene la igualdad.

c) Por un lado se tiene que $(e^{ix})' = ie^{ix} = f'(x) + ig'(x)$, y por otro $ie^{ix} = -g(x) + if(x)$, luego

$f'(x) + ig'(x) = -g(x) + if(x)$ y, como para que dos números complejos sean iguales deben tener iguales la parte real y la parte imaginaria, se obtiene $f'(x) = -g(x)$ y $g'(x) = f(x)$.

d)Se sabe que i) $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$; ii) $f'(x) = -g(x)$ y $g'(x) = f(x)$ por el problema anterior deben ser $f(x) = \cos x$ y $g(x)= \text{sen}\,x$.

$e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\pi + 1 = -1 + 0i + 1 = 0$

10.125. Sea f la función definida en [–1, 2] por $f(x) = [x]\ \text{sen}(\pi x)$.

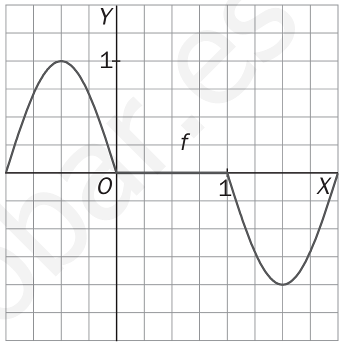
a) Escribe la fórmula para f en [–1,0]; [0, 1] y [1, 2].

b) Estudia la derivabilidad de f en 0 y en 1 e interpreta gráficamente los resultados obtenidos.

a) $[x] = -1$ en $[-1, 0)$ luego $f(x) = [x]\ \text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(\pi x)$ en $[-1, 0]$ (pues $f(0) = [0]\ \text{sen}(0) = 0 = \text{sen}(\pi\cdot 0)$.

$[x] = 0$ en $[0, 1)$ luego $f(x) = [x]\ \text{sen}(\pi x) = 0$ en $[0,1]$ (pues $f(1) = [1]\ \text{sen}(\pi) = 1 \cdot 0 = 0$.

$[x] = 1$ en $[1, 2)$ luego $f(x) = [x]\ \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[1, 2]$ (pues $f(2) = [2]\ \text{sen}(2\pi) = 0 = \text{sen}(2\pi\cdot)$.



$$f(x) = \begin{cases} -\text{sen}(\pi x) & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \\ \text{sen}(\pi x) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} -\cos(\pi x) & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \\ \cos(\pi x) & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Como la función es continua en 0 y en 1, para ver si es derivable basta estudiar los límites:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-\cos(\pi x)) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$ luego no es derivable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 0 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \cos(\pi x) = 1$ y tampoco lo es en $x = 1$.

10.126. Sea $f(x) = x^2\ \text{sen}\ \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Se supone que h y k son dos funciones tales que $h'(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(x+1))$, $k'(x) = f(x + 1)$, $h(0) = 3$ y $k(0) = 0$.

Halla:

a) $(f\circ h)'(0)$

b) $(k\circ f)'(0)$

c) $\alpha'(x^2)$, siendo $\alpha(x) = h(x^2)$.

a) $(f\circ h)'(0) = f'(h(0))h'(0) = f'(3)\text{sen}^2(\text{sen}1) = 6\text{sen}\left(\dfrac{1}{3}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\text{sen}^2(\text{sen}1)$

b) Se comienza calculando la derivada de f en $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\text{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \text{ pues sen}\left(\frac{1}{h}\right) \text{ está acotada.}$$

Entonces:

$(k\circ f)'(0) = k'(f(0))\cdot f'(0) = k'(0)\cdot f'(0) = k'(0)\cdot 0 = 0$

c) $\alpha'(x) = 2xh'(x^2)$ Luego, $\alpha'(x^2) = 2x^2h'(x^4) = 2x^2(\text{sen}^2(\text{sen}(x^2+1)))$.

10.127. Se dice que un número *a* es raíz múltiple del polinomio $p(x)$, de multiplicidad *n*, con $n = 1, 2, 3, \dots$ si $p(x) = (x - a)^n q(x)$, con $q(a) \neq 0$.

a) ¿Es $a = 3$, raíz de multiplicidad 2 del polinomio $P(x) = (x - 3)^2 (x^2 - 4x + 3)$?

b) Prueba que si *a* es raíz múltiple de $p(x)$, de multiplicidad *n*, entonces es raíz múltiple de $p'(x)$, de multiplicidad $n - 1$.

a) $(x^2 - 4x + 3) = (x - 3)(x - 1)$ por tanto, $P(x) = (x - 3)^2(x^2 - 4x + 3) = (x - 3)^2(x - 3)(x - 1) = (x - 3)^3(x - 1)$
Luego $a = 3$ es raíz de multiplicidad 3 del polinomio $P(x)$.
b) Sea a raíz múltiple de $p(x)$ de multiplicidad *n*. Por definición de raíz múltiple de un polinomio se tiene que $p(x) = (x - a)^n q(x)$ con $q(a) \neq 0$.

Derivando: $p'(x) = n(x-a)^{n-1}q(x) + (x-a)^n q'(x) = (x-a)^{n-1}\left[nq(x) + (x-a)q'(x)\right]$

Se comprueba si $Q(x)= nq(x) + (x-a)q'(x)$ se anula en $x= a$:

$Q(a)= nq(a) + (a-a)q'(a) = nq(a) \neq 0$ puesto que se tenía que $q(a) \neq 0$.

Como $p'(x) = (x-a)^{n-1}\left[nq(x) + (x-a)q'(x)\right]$ y además $nq(a) + (a-a)q'(a) \neq 0$, se tiene que *a* es raíz múltiple de $p'(x)$ de multiplicidad $n - 1$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

10.1. Sea *f* una función definida en R, que admite segunda derivada en todo R.

A) Si $f(0) > f(1)$, entonces $f'(0) \geq f'(1)$

B) Si $g(x) = f(\text{sen } x)$, entonces $g'(0) > f'(0)$

C) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, se verifica que $(f \cdot f')'(x) - f(x) f''(x) \geq 0$

D) Si $f'(2) = 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$

E) Existen números *a* para los que $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$.

C es verdadera pues $\left(f \cdot f'\right)'(x) = f'(x)\, f'(x) + f(x)\, f''(x)$, por lo que $\left(f \cdot f'\right)'(x) - f(x)\, f''(x) = \left(f'(x)\right)^2 \geq 0$.

10.2. Sea $g(x) = 2x - 6$ y *f* una función tal que $f'(x) = e^{x^2}$. La tangente a la curva $y = (f \circ g)(x)$ en el punto de abscisa 3 verifica:

A) Es horizontal.

B) Tiene pendiente negativa.

C) Su pendiente es mayor que $f'(1)$.

D) Es paralela a la gráfica de $y = g(x)$.

E) Nada de lo anterior.

D es verdadera y todas las demás falsas:

$\left(f \circ g\right)'(x) = f'\left(g(3)\right) \cdot g'(3)$. Como $g(3) = 0$ y $g'(3) = 2$, es $\left(f \circ g\right)'(3) = f'(0) \cdot 2 = 2$

10.3. Considera la función $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$.

A)Está definida en $x = \dfrac{3\pi}{2}$;

B) Presenta un punto con tangente horizontal.

C)Su derivada siempre es positiva;

D) No es derivable en los puntos de corte con el eje horizontal.

E) $|f'(x)| \geq 1$ en los puntos en los que es derivable.

E es verdadera ya que $|\cos x| \leq 1$ sea cual fuere *x*, por lo que $\left|f'(x)\right| = \dfrac{1}{|\cos x|} \geq 1$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

10.4. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y tal que su gráfica es simétrica respecto de la recta $x = 2$.

A) Para todo x, $f(2 + x) = f(2 - x)$

B) Para todo x, $f(x) = f(4 - x)$

C) Para todo x, $f'(2 + x) = f'(2x)$

D) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, entonces, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

E) Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -1$

Es verdadera la A, D y E. Si la gráfica es simétrica respecto de la recta $x = 2$, debe ocurrir que $f(2 + x) = f(2 - x)$ sea cual fuere x.

Observando ahora que los números x y $4 - x$ equidistan de 2 pues $|2 - x| = |4 - x - 2|$ concluimos que B también es verdadera.

La afirmación C es falsa como lo prueba la función $f(x) = (x - 2)^2$ y $x = 0$, por ejemplo.

10.5. Para todo x mayor que 1 se verifica:

A) Si $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f''(x) = e^{x^2}$

B) Si $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f''(x) = 2x e^{x^2}$

C) Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, entonces $f''(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

D) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f''(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$

E) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f''(x) = \cos(x + \pi)$

D es verdadera ya que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$.

E también es verdadera ya que $f(x) = \cos x$ nos lleva a $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$ y $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

A es falsa pues si $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$. B también, ya que $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = (2 + 4x^2)\, e^{x^2}$.

C es falsa, pues si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ y $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

10.6. Sea $f: [-2, 2] \to [-2, 2]$ la función definida por $f(x) = (1 - |x|)\,(1 - [x])$.

A) f es continua en el intervalo $(-2, 2)$.

B) f es derivable en el intervalo $(-2, 2)$.

C) f es impar.

D) Si $x \notin \mathbb{Z}$, $f^{4)}(x) = 0$.

E) $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0^-)$

A es verdadera pues $f'(1)$ mide la pendiente de la tangente a C en $x = 1$ y la pendiente de T, es 1.

B es falsa, ya que la pendiente de T_2 no es 1 sino -1.

C es verdadera ya que nos dicen que $f'(1) = 1$ y $f'(3) = -1$ por lo que al ser f' una función continua (ya que existe $f''(x)$), el teorema de Bolzano nos asegura que tomará alguna vez el valor 0 en $(1, 3)$.

Análogamente D también es verdadera pues el teorema de los valores intermedios aplicado a la función continua f' asegura que tomará alguna vez el valor $-\dfrac{1}{2}$ en $(1, 3)$.

10.7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que admite derivada segunda en cada punto, C su gráfica, T_1 la recta $y = x + 1$ y T_2 la recta $y = -x + 1$.

A) Si T_1 es tangente a C en $x = 1$, entonces $f'(1) = 1$.

B) Si T_2 es tangente a C en $x = 0$, entonces $f'(0) = 1$.

C) Si T_1 es tangente a C en $x = 1$ y T_2 es tangente a C en $x = 3$, existe $a \in (1, 3)$ con $f'(a) = 0$.

D) Si T_1 es tangente a C en $x = 1$ y T_2 es tangente a C en $x = 3$, existe $a \in (1, 3)$ en el que la tangente es horizontal.

D es verdadera ya que si $x > 0$, $x \notin \mathbb{Z}$, $f'(x) = (-1)\,(1 - [x]) + (1 - |x|) \cdot 0 = [x] - 1$, por lo que $f''(x) = 0$, con lo que $f^{4)}(x) = 0$ y si $x < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$, $f'(x) = 1 \cdot (1 - [x]) + (1 - |x|) \cdot 0 = 1 - [x]$, con lo que $f''(x) = 0$ y $f^{4)}(x)$ también será 0.

La afirmación A es falsa ya que f no es continua en $x = 0$. B es obviamente falsa al no ser f continua en $(-2, 2)$.

C también es falsa pues, por ejemplo, $f(1{,}5) = 0{,}5 \cdot 0 = 0$ y $f(-1{,}5) = -0{,}5 \cdot 2 = -1$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

10.8. Sea $f: R \to R$ derivable

a: La tangente a la curva $y = f^2(x)$ en el punto de abscisa 3 es horizontal.

b: La curva $y = f(x)$ corta al eje de abscisas en el punto de abscisa 3.

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La relación correcta es la C.

$y' = 2f(x)\,f'(x)$ por lo que si se da b, es $f(3) = 0$, con lo que $y'(3) = 0$ y se da a. Así que b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b como prueba, por ejemplo, $y = \left((x-3)^2+1\right)^2$, con lo que $f(x) = (x-3)^2 + 1$ verifica a pues $y' = 2\left((x-3)^2+1\right)2(x-3)$, es decir, $y'(3) = 0$ pero $f(x) = (x-3)^2 + 1$ no corta al eje horizontal, es decir, no se verifica b.

Señala el dato innecesario para contestar:

10.9. Sea $f(x) = xg(x) + a$ sen $x + be^x$ donde $g: R \to R$ es una función derivable. Para calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa 0, nos dan los siguientes datos.

a) La curva $y = g(x)$ corta al eje vertical en el punto (0, 4).

b) Las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ se cortan en el punto de abscisa 1.

c) $y = g(x)$ tiene tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante en (0, 4).

d) El punto $(0, a + b)$ es el máximo de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse en el dato b.

C) Puede eliminarse en el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La ecuación de la tangente pedida es $y - f(0) = f'(0)x$, $f(0) = b$.
$f'(x) = g(x) + g'(x) + a\cos x + be^x$, por lo que $f'(0) = g(0) + a + b$ con el dato a), obtenemos $g(0) = 4$.
El dato b nos dice que $f(1) = g(1)$, o sea, $g(1) + a$sen $1 + be = g(1)$, así que a sen $1 + be = 0$, que junto al dato d) nos permite calcular a y b ya que el máximo de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ se alcanza en $x = 0$ y vale 1, por lo que según d, $a + b = 1$, que junto a la igualdad anterior, dada por el dato b, nos permite calcular a y b y hemos obtenido la ecuación de la tangente a $y = f(x)$ sin tener que utilizar el dato c, así que la respuesta es C.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

10.10. Calcular la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2g(x)$ en el punto de abscisa 0.

a: La curva $y = g(x)$ es continua en $x = 0$.

b: La función $y = g(x)$ no es continua en $x = 0$, pero está acotada en un entorno de 0.

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola. D) Son necesarias las dos juntas.

B) a es suficiente por sí sola, pero b, no. E) Hacen falta más datos

C) b es suficiente por sí sola, pero a, no.

Cada afirmación, a y b es suficiente por sí sola y la respuesta es A.

Damos por hecho que existe $f(0)$. La ecuación de la tangente a dicha curva en $x = 0$ es $y = f'(0)x$

Si se verifica a $\lim\limits_{h\to 0} h\,g(h) = \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \lim\limits_{h\to 0} g(h) = 0 \cdot g(0) = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2g(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\,g(h)$.

Si se verifica b $\lim\limits_{h\to 0} h\,g(h) = 0$ por que $f(h) = h$ tiende a 0 en 0 y $g(h)$ es acotada en un entorno de 0.