8 Límites de sucesiones y de funciones

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Calcula el término general, el término que ocupa el octavo lugar y la suma de los ocho primeros términos para las sucesiones siguientes.

a) 2, 6, 10, 14, ... **b) 2, 6, 18, 54, ...** **c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots$**

a) Progresión aritmética: $a_1 = 2$, $d = 4 \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 2$, $a_8 = 30$, $S_8 = \frac{(2+30)\cdot 8}{2} = 128$

b) Progresión geométrica: $a_1 = 2$, $r = 3 \Rightarrow a_n = 2\cdot 3^{n-1}$, $a_8 = 2\cdot 3^7 = 4374$, $S_8 = \frac{2\cdot 3^8 - 2}{2-1} = 13\,120$

c) Progresión aritmética: $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} + (n-1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{n}{3}$, $a_8 = \frac{8}{3}$, $S_8 = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)\cdot 8}{2} = 12$

8.II. En una región, la población crece anualmente en un 2%.
a) Escribe la sucesión del número de habitantes según el número de años transcurridos desde 2008, sabiendo que en ese año eran 3 500 000.

b) Calcula en qué año se alcanzará una población de 4 000 000 de habitantes.

c) Calcula en qué año se doblará la población inicial.

a) $a_{2008} = 3\,500\,000$, $a_{2009} = 3\,500\,000\cdot 1{,}02 = 3\,570\,000$, ... , $a_n = 3\,500\,000\cdot 1{,}02^{n-2008}$

b) $a_n = 4\,000\,000 = 3\,500\,000\cdot 1{,}02^{n-2008} \Rightarrow 1{,}02^{n-2008} = 1{,}142857 \Rightarrow n - 2008 = \frac{\log 1{,}142857}{\log 1{,}02} = 6{,}75$ años

c) $1{,}02^{n-2008} = \frac{2\cdot 3\,500\,000}{3\,500\,000} = 2 \Rightarrow n - 2008 = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} = 35$. Cuando pasen 35 años.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1. Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{n-1}{n+1}$:

a) Calcula sus tres primeros términos.

b) Halla el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{15}{17}$.

c) Demuestra que es creciente.

d) Halla, si es que existen, una cota superior y una cota inferior.

a) $a_1 = \frac{0}{2} = 0 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $a_s = \frac{15}{17} = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow 15\cdot(s+1) = 17\cdot(s-1) \Rightarrow s = 16$. Es el término que ocupa el lugar 16.°.

c) $a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n^2+3n+2} > 0$. Por tanto, $a_{n+1} > a_n$ y la sucesión es creciente.

d) $a_n = 1 - \frac{2}{n+1}$. Una cota superior es 1 y una cota inferior es 0.

8.2. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n$.

a) Calcula sus cuatro primeros términos y di de qué tipo es.

b) Halla su término general.

c) Demuestra que es monótona creciente.

d) Demuestra que no está acotada superiormente.

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 24$. Es una progresión geométrica.

b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

c) $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot \left(2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1}\right) = 3 \cdot 2^{n-1} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ Es creciente.

d) Dado el número real M, se puede encontrar un término mayor que él:

$$3 \cdot 2^{n-1} > M \Rightarrow 2^{n-1} > \frac{M}{3} \Rightarrow \ln(2^{n-1}) > \ln\left(\frac{M}{3}\right) \Rightarrow (n-1)\ln 2 > \ln\left(\frac{M}{3}\right) \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{M}{3}\right)}{\ln 2} + 1$$

8.3. Demuestra que los términos de la siguiente sucesión tienden a 2.

$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2n+1}{n+10}}$

$|a_n - 2| = \dfrac{19}{n+10} < \varepsilon$ para $n > \dfrac{19}{\varepsilon} - 10$

8.4. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (7 - n^2)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^3 + 2n + 1}{2n^2 + n + 10}$

a) $-\infty$ b) $-\infty$

8.5. (TIC) Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3 - 8n}{\sqrt{3}}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2 + 3n + 5)(3n^2 + 5n - 6)}{n(5n^3 - n)}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3 - 8n}{\sqrt{3}}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2 + 3n + 5)(3n^2 + 5n - 6)}{n(5n^3 - n)} = \dfrac{2 \cdot 3}{5} = \dfrac{6}{5}$

8.6. (TIC) Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^3 + 3n^2 - 2)(2n^2 - 3n + 2)}{6n^6 + 1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^5 - 3n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 6n - 4}{6n^6 + 1} = 0$

b) $\left[1^\infty\right] \to l = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2+n)\left(\frac{2n+3}{2n-3} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2+n)\left(\frac{6}{2n-3}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

8.7. (PAU)(TIC) Estudia el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+6}{8}$ c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\ln x}}$ e) $f(x)=\log\left(x^2+3x-4\right)$

b) $f(x)=2x+\sqrt{3x-\dfrac{6}{5}}$ d) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^3-3x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

a) $D(f)$ = **R** ya que se trata de una función polinómica.

b) $3x-\dfrac{6}{5}\geq 0\Rightarrow x\geq\dfrac{2}{5}\Rightarrow D(f)=\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right)$

c) $\ln x>0\Rightarrow x>1\Rightarrow$ $D(f)=(1,\ +\infty)$

d) $x^3-3x^2=0\Rightarrow x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0, x=3\Rightarrow D(f)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,\ 3)\cup(3\ ,+\infty)$

e) $x^2+3x-4>0\Rightarrow(x-1)(x+4)>0\Rightarrow$ $D(f)=(-\infty\ ,\ 4)\cup(1,+\infty)$

f) $1-e^x=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0\Rightarrow$ $D(f)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,+\infty)$

8.8. (TIC) Estudia el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x)=x\cdot|x+1|-3x^2$ c) $f(x)=x+2\cos x$

b) $f(x)=\dfrac{|x+1|+x}{|x-1|-x}$ d) $f(x)=\dfrac{2x}{1+\text{sen}x}$

a) $D(f)$ = **R**

b) $|x-1|-x=0\Rightarrow\begin{cases}x-1-x=0 & \text{si } x\geq 1\\ -x+1-x=0 & \text{si } x<1\end{cases}$ con solución en $x=\dfrac{1}{2}$; $D(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

c) $D(f)$ = **R**

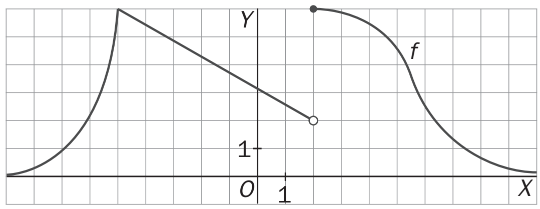
d) 1 + sen$x$ = 0 $\Rightarrow$ sen$x$ = −1 $\Rightarrow$ La función existe en todo **R** excepto en $x=\dfrac{3\pi}{2}\pm 2k\pi$, con $k\in$ **Z**.

8.9. (TIC) Encuentra el dominio y el recorrido de las funciones:

a) $f(x)=x^2+3$ b) $f(x)=2+\sqrt{x+1}$

a) $D(f)$ =**R**; $R(f)=[3,+\infty)$ b) $D(f)=[-1,+\infty)$; $R(f)=[2,+\infty)$

8.10. Dada la gráfica de $f(x)$:

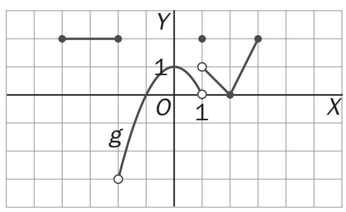


Calcula: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -5^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -5^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -5}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=2$, no existe $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$,

$\lim\limits_{x\to -5^+}f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to -5^-}f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to -5}f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$

8.11. Dada la gráfica de $g(x)$:



Calcula: $\lim\limits_{x\to -2^+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to -2}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$

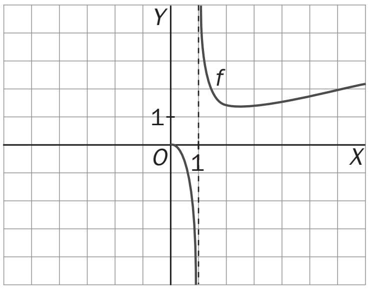
$\lim\limits_{x\to -2^+}g(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to -2^-}g(x)=2$, no existe $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=0$, no existe $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=0$

8.12. Dada la grafica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

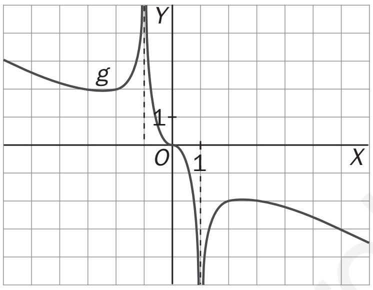


a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. No existe. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. No existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, ni $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

8.13. Dada la grafica de $g(x)$, calcula:

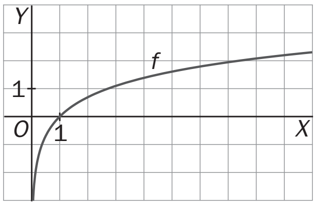
a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$



a) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$

8.14. Dibuja la función $f(x) = \ln x$ y calcula sus límites en el infinito.



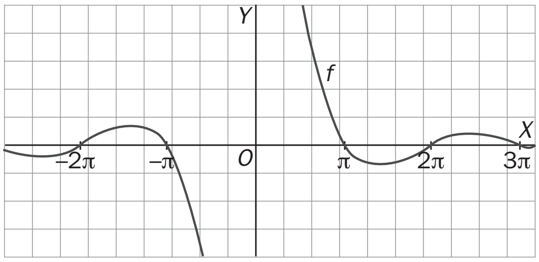
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ no existe, porque el logaritmo no está definido en $(-\infty, 0]$.

8.15. Dada la grafica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

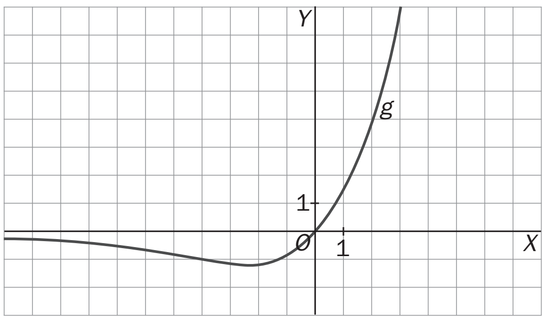


8.16. Dada la grafica de $g(x)$, halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$



8.17. (TIC) Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-9x^2+6}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{5}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-e^x+e^{-x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-9x^2+6}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\left[\dfrac{2}{0^+}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\left[\dfrac{2}{0^-}\right]=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{5}{x}\right)=\left[0-\dfrac{5}{0}\right]=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{5}{x}\right)=\left[0^+-\dfrac{5}{0^+}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{5}{x}\right)=\left[0^--\dfrac{5}{0^-}\right]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)=[+\infty+\infty]=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-e^x+e^{-x}\right)=[+\infty-0+\infty]=+\infty$

8.18. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to a}h(x)=2$, calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to a}(2f(x)-2g(x)+h(x))$ c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{12}{f(x)+g(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to a}(2f(x)-2g(x)+h(x))=2\cdot(-2)-2\cdot 2+2=-6$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{12}{f(x)+g(x)}=\left[\dfrac{12}{-2+2}\right]=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}\right)=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right)=\dfrac{-2}{2}-\dfrac{-2+2}{2}=-1-0=-1$

8.19. (PAU)(TIC) Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x}{x^2+x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}-4x^2=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+1}{3x^2+2x+5}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\to l=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^3}{3x^2}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\to l=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^4}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)=[\infty-\infty]\to l=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)\left(2x^2+\sqrt{4x^4-1}\right)}{2x^2+\sqrt{4x^4-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2+\sqrt{4x^4-1}}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x}{x^2+x-2}=\dfrac{0}{-2}=0$

f) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{6}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{1}{0^+}\right]}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]\to l=0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left[\frac{1}{0^-}\right]}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty}\right]=+\infty$, $\nexists\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\left[1^\infty\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x-1}{2x-3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{(2x-3)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{2x-3}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

8.20. (TIC) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^3-8\right)}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^3-8\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=12$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$

EJERCICIOS

Sucesiones. Límites de sucesiones

8.21. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

a) 10, 7, 4, 1, –2, ...

b) $\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{5},\dfrac{6}{7},\dfrac{8}{9},\dfrac{10}{11},\ldots$

c) $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},\ldots$

d) 1, 8, 27, 64, 125, ...

e) 0, 7, 26, 63, 124, ...

a) $a_n=10+(n-1)\cdot(-3)=-3n+13$

b) $a_n=\dfrac{2n}{2n+1}$

c) $a_n=\dfrac{2+n-1}{3+n-1}=\dfrac{n+1}{n+2}$

d) $a_n=n^3$

e) $a_n=n^3-1$

8.22. Halla el lugar que ocupa el término que vale $\dfrac{401}{400}$ **en la sucesión** $\dfrac{2}{1},\dfrac{5}{4},\dfrac{10}{9},\dfrac{17}{16},\dfrac{26}{25},\ldots$

El término general de la sucesión es $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2}$. Por tanto:

$a_s=\dfrac{401}{400}=\dfrac{s^2+1}{s^2}\Rightarrow 401s^2=400s^2+400\Rightarrow s^2=400\Rightarrow\ s=\sqrt{400}=20$

Se trata del vigésimo término.

8.23. (PAU) Estudia la monotonía y la acotación de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2},\ b_n = \frac{2n^2-3}{n^2},\ c_n = \frac{2n+3}{2^n}$$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n+3}{n^2} = -\dfrac{2n^2+8n+3}{n^2(n+1)^2} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$a_n = \dfrac{2n+3}{n^2} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $a_1 = 5$ e inferiormente por 0.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2(n+1)^2-3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{2n^2+4n-1}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

$b_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2} = 2 - \dfrac{3}{n^2} < 2 \Rightarrow$ Acotada superiormente por 2 e inferiormente por $b_1 = -1$.

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} - \dfrac{2n+3}{2^n} = \dfrac{2n+5-4n-6}{2^{n+1}} = -\dfrac{2n+1}{2^{n+1}} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$c_n = \dfrac{2n+3}{2^n} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $c_1 = \dfrac{5}{2}$ e inferiormente por 0.

8.24. Dada la sucesión $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$:

a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente.

b) Calcula su límite.

c) Averigua a partir de qué término los siguientes se aproximan a 3, con un error menor de ε = 0,001.

a) $a_{n+1} - a_n = 3 + \dfrac{1}{n+1} - 3 - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n^2+n} < 0$. La sucesión es decreciente. Una cota inferior de la sucesión es 3.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = \left[3 + \dfrac{1}{+\infty}\right] \to l = 3 + 0 = 3$

c) $|a_n - 3| < 0{,}001 \Rightarrow \left|3 + \dfrac{1}{n} - 3\right| < 0{,}001 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < 0{,}001 \Rightarrow n \geq 1001$. A partir del término 1001.

8.25. Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{3n^2-3n+5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)(-3n+2)+3}{2n^2-n+7}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2-1} \cdot \dfrac{n+1}{5}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{(8n+3)(-n+3)}{n^2-3n+6}}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\frac{3n^2+3}{n^2}}$

a) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = +\infty$

f) $\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]} \to l = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

g) $\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-8n^2+3n+9}{n^2-3n+6}} = \sqrt[3]{\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]} \to l = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{3-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-6n^2-5n+9}{2n^2-n+7} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \to l = \dfrac{-6}{2} = -3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+5n+3}{5n^2-5n} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{5-\dfrac{5}{n}} = \dfrac{2}{5}$

h) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

8.26. Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+n^2+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right) = [\infty-\infty] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{2n^2+1}+n\right)}{\sqrt{2n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1-n^2}{\sqrt{2n^2+1}+n} = \left[\dfrac{1}{0+0}\right] = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = [\infty-\infty]_{ind} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = \left[\dfrac{1}{0+0}\right] = \infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+n^2+1}\right) = [\infty-\infty] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2-\sqrt{n^4+n^2+1}\right)\left(n^2+\sqrt{n^4+n^2+1}\right)}{\left(n^2+\sqrt{n^4+n^2+1}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^2-1}{n^2+\sqrt{n^4-n^2+1}} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] \to l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\sqrt{\dfrac{n^4}{n^4}-\dfrac{n^2}{n^4}+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

8.27. Halla los límites de las sucesiones siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = [1^\infty] \to l = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{2n-3}{2n+3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{-6}{2n+3}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-12n-6}{2n+3}} = e^{-6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}} = [1^\infty] \to l = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n}{2n^2-n-3}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+\frac{2}{3}n}{2n^2-n+3}} = e^3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1} = [1^\infty] \to l = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{-n-1}{n^2+1}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^3-3n^2-3n-1\ldots}{n^2+1}} = \left[e^{-\infty}\right] = 0$

8.28. a) Escribe una sucesión monótona creciente, acotada superiormente, con todos sus términos negativos.

b) Escribe una sucesión que no sea creciente ni decreciente, y que sea acotada superiormente y acotada inferiormente.

c) Escribe una sucesión que sea creciente y decreciente a la vez.

d) Escribe una sucesión acotada superiormente, decreciente y no convergente.

a) $a_n = -\dfrac{1}{n} \;\to\; -1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots$

b) $a_n = (-1)^n \;\to\; -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ Es oscilante. Además solo toma dos valores, por lo que está acotada.

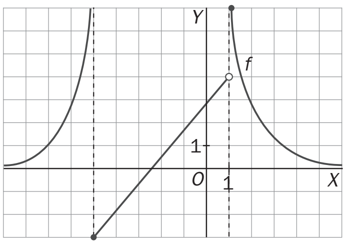
c) $a_n = 1 \;\to\; 1, 1, 1, 1, \ldots$ Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez.

d) $a_n = -n \;\to\; -1, -2, -3, \ldots$

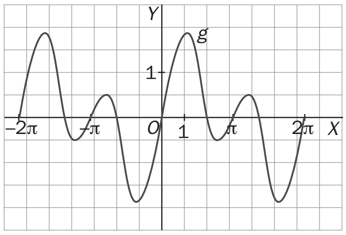
Dominio y recorrido de una función

8.29. Halla el dominio y recorrido de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación.

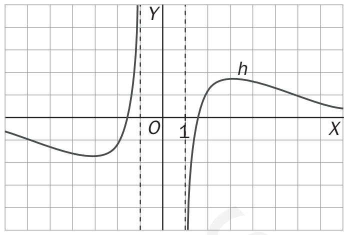
a)



b)



c)



a) Dominio: **R**. Recorrido: $[-3, +\infty)$

b) Dominio: $[-2\pi, 2\pi]$. Recorrido: $[-1{,}75;\ 1{,}75]$

c) Dominio: $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. Recorrido: **R**

8.30. (PAU)(TIC) Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x - 1}{2x^3 + x^2 - 20}$

b) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c) $f(x) = \dfrac{1 + \log\sqrt{x}}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{2x-1} + 3}$

e) $f(x) = 1 - \ln(x - |x|)$

f) $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}x}{\cos x}$

g) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

a) $2x^3 + x^2 - 20 = 0 \Rightarrow (x-2)(2x^2 + 5x + 10) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$

b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = (1, +\infty)$

c) $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow D(f) = (0, 2)\cup(2, +\infty)$

d) $x \geq 0 \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

e) La función no existe ni para los x positivos ni para los negativos. $D(f) = \varnothing$

f) $\cos x = 0 \Rightarrow$ la función existe en todo **R** excepto en los $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in$ **Z**.

g) La función existe en todo **R** excepto en los $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in$ **Z**.

8.31. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) $D(f) = (-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$; $R(f) = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$

b) $D(f) = (0, +\infty)$; $R(f) = (0, +\infty)$

8.32. (TIC) Halla el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\dfrac{1}{-1+\sqrt{x+1}}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$ **c)** $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

a) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ -1+\sqrt{x+1}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

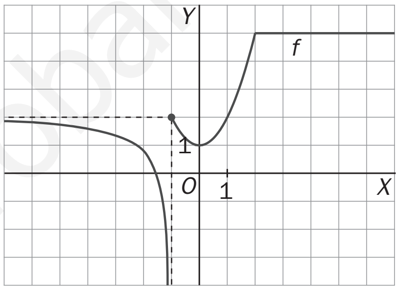
b) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,\ +\infty)$

c) Todos los valores del radicando son positivos. Por tanto, el dominio de la función es todo **R**.

d) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-\sqrt{x-1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x-1<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow D(f) = [1,\ 2)$

Límites de funciones

8.33. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.



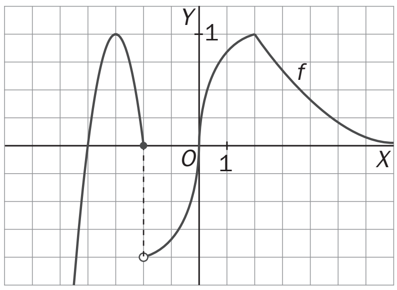
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

a) 2 c) 5 d) 5

b) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ No existe e) 1

8.34. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.



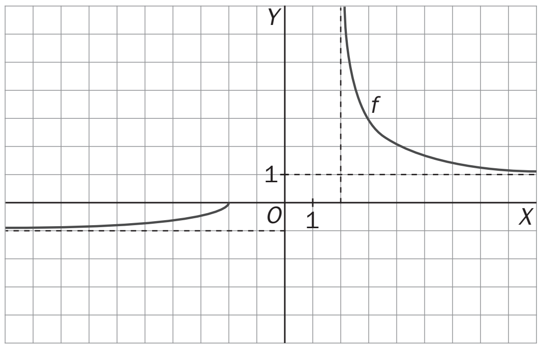
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) $-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-1 \Rightarrow$ No existe.

c) 0 d)0 e) 1

8.35. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) –1 b) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ = 0; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ no existe.

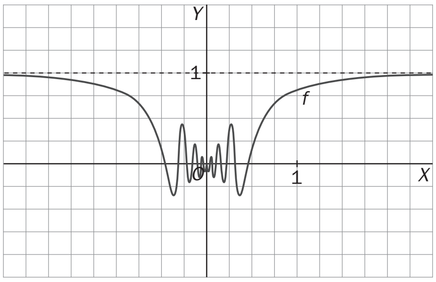
c) 1 d) No existe; no existen los laterales.

e) No existe; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ no existe.

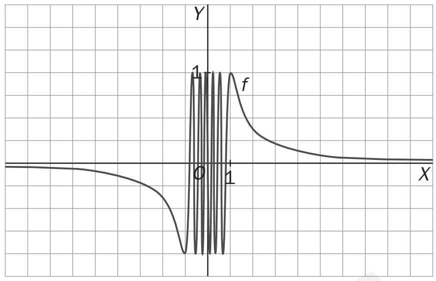
8.36. Dada la gráfica de las siguientes funciones halla, si existen, los valores de los límites que se indican a continuación. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a)



b)



a) 1, 1 y 0, respectivamente

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

8.37. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}$ $\quad$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x^2}=\left[\dfrac{-1}{0^+}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x^2}=\left[\dfrac{-1}{0^+}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{x^3}=\left[\dfrac{-1}{0^+}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x^3}=\left[\dfrac{-1}{0^-}\right]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^3}=\infty$

8.38. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ no existe, ya que no están definidas las raíces de índice par de los números negativos.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ no existe al no existir $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$.

8.39. (TIC) Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\ln x}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}$ $\quad$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$ $\quad$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln x}{x}$ $\quad$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}$

a) 0 $\quad$ b) No existe. $\quad$ c) No existe. $\quad$ d) $\left[\dfrac{-\infty}{0^+}\right]=-\infty$ $\quad$ e) No existe. $\quad$ f) No existe.

8.40. (TIC) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\text{tg}x}{\cos x}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1+\text{tg}x}{\cos x}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\text{tg}x}{\cos x}$

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1+\text{tg}\,x}{\cos x}=\left[\dfrac{-\infty}{0^-}\right]=+\infty$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1+\text{tg}\,x}{\cos x}=\left[\dfrac{+\infty}{0^+}\right]=+\infty$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\text{tg}\,x}{\cos x}=+\infty$

8.41. (TIC) Halla los límites que se indican a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x-3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{3x^2+5x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^{-x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x-3}{4}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)=\left[+\infty+\infty\right]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=\left[2^{+\infty}\right]=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]=0$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{3x^2+5x-3}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}}=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^{-x}\right)=\left[-\infty-\infty\right]=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=\left[2^{-\infty}\right]=0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{x}=+\infty$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty}\right]=+\infty$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=0$

8.42. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^3-5x^2-3\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^5+5x-6\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+x-1\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{3}x^2\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+x^2-2x+1)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{2}{3}x^6+x^5-2)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2-2x+5\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^4-\dfrac{1}{3}x\right)$

a) $+\infty$
b) $-\infty$
c) $-\infty$
d) $+\infty$
e) $+\infty$
f) $-\infty$
g) $+\infty$
h) $-\infty$

8.43. Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{-x^3+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2x+3}{-x^2+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3+3}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^4+x^2}{3+x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+3}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^4+1}{-3x^4+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{-3x^2+3}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{-3x+5}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^5+1}{5-x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+3}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+1}{x^3+x}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6+x}{3x^2+3}$

a) -2

b) $-\infty$

c) $+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^4}{-x^3}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+3}{x^2}=0$

f) $\dfrac{2}{3}$

g) $-\dfrac{2}{3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^3}{3x}=-\infty$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5}{-x^2}=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x}=-\infty$

k) 0

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6}{3x^2}=+\infty$

8.44. (TIC) Determina los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+2x+3}}{2x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{\sqrt[3]{4x^6+x^2-1}}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x-1}{\sqrt{-x^3+2x}}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{2x-3}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^3+3x-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{-2x^2+5}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^6-2x^2}}{-x^2+2x-4}$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3-x+3}}{2x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^6+2x^2}}{-2x^2+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x+3}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+2x+3}}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2}}{2x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 1

e) No existe.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2}}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2}}{-3x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) 0

h) $-\infty$

i) $+\infty$

j) 0

8.45. (PAU)(TIC) Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x-2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1} - \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3} - \dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)$

a) $[\infty-\infty] \to l = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x^2}{x^2-3x+2}\right) = -1$

b) $[\infty-\infty] \to l = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-4x^4+2x^3}{x^4-1}\right) = -4$

c) $\left[\dfrac{2}{+\infty} - \dfrac{2}{+\infty}\right] = 0 - 0 = 0$

d) $[-\infty+\infty] \to l = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{8x^2+4x+10}{x^2+x-6}\right) = 8$

8.46. (PAU)(TIC) Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x-3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+5} - \sqrt{x^2+x+5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2-3x+5} - \sqrt{2x^2+x+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-\dfrac{1}{2}x+3} - \dfrac{x}{3}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}{2x+\sqrt{x^2+x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}} = -\dfrac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+3}-\frac{x}{3}\right)\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+3}+\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+3}+\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\frac{1}{2}x+3-\frac{x^2}{9}}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+3}+\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{8x^2}{9}-\frac{1}{2}x+3}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+3}+\frac{x}{3}} = +\infty$

8.47. (TIC) Calcula los siguientes límites de funciones distinguiendo, si es necesario, los dos límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+1}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+1}{x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+1}{3-x} = \left[\dfrac{7}{0}\right]; \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x+1}{3-x} = \left[\dfrac{7}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x+1}{3-x} = \left[\dfrac{7}{0^+}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+1}{3-x}$ no existe

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24} = \left[\dfrac{60}{0}\right]; \begin{cases} \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24} = \left[\dfrac{60}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24} = \left[\dfrac{60}{0^+}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}$ no existe

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125} = \left[\dfrac{74}{0}\right]; \begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125} = \left[\dfrac{74}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125} = \left[\dfrac{74}{0^+}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = \dfrac{0}{2a^2} = 0$ si $a \neq 0$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ si $a = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \left[\dfrac{2}{0}\right]; \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$ no existe

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+1}{x+3} = \left[\dfrac{-5}{0}\right]; \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x+1}{x+3} = \left[\dfrac{-5}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x+1}{x+3} = \left[\dfrac{-5}{0^-}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+1}{x+3}$ no existe

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-4} = \dfrac{0}{5} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2} = \left[\dfrac{2a^2}{0}\right]$ no existe

8.48. (PAU)(TIC) Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to 1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}$ h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)}{(x+7)}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)^2(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\left[\dfrac{7}{0}\right];$

$$l=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\left[\dfrac{7}{0^+}\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\left[\dfrac{7}{0^-}\right]=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}\text{ no existe}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^3(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to 1^+\\ -\infty & \text{si } x\to 1^-\end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^3-1)}{(x+2)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{-8-1}{4-1}=-3$

f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)^2(x-5)}{(x+4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-5)}{x-3}=\dfrac{0}{-7}=0$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(3x+2)}{x^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x^2}=-1$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)=[0\cdot\infty]\to l=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{(x+1)(3x+2)}{x^3+x^2}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{(x+1)(3x+2)}{x^2(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3x+2}{x^2}\right)=\dfrac{-1}{1}=-1$

8.49. (TIC) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}$, $a>0$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)=-24$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x+5}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4-x)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3+\sqrt{x+5}}{2+\sqrt{x}}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{4-x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{1-x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\ -\left(2+\sqrt{x+3}\right)=-4$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{\left(4-\sqrt{x+13}\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{-(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4+\sqrt{x+13}}{-\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\dfrac{8}{-6}=-\dfrac{4}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3a^2}-2a\right)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+3a^2}+2a}=\dfrac{2a}{4a}=\dfrac{1}{2}$

8.50. (TIC) Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}=\left[\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{\frac{4}{0^+}}\right]=\left[+\infty^{+\infty}\right]=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}=\left[0^{+\infty}\right]=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\left(\dfrac{1}{0^+}\right)^{\frac{1}{0^+}}\right]=\left[+\infty^{+\infty}\right]=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}=\left[\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{2}\right]=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=\dfrac{1}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=\left[0^{+\infty}\right]=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}=1$

8.51. (PAU)(TIC) Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{x+4}{x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)\left(\frac{2x^2+5x}{2x^2+3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)\left(\frac{2x}{2x^2+3x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+3}{-2x-3}\right)^{x^2+3}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\left(\frac{-2x+3}{-2x-3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\left(\frac{6}{-2x-3}\right)}=e^{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{x^3+4x}{x^3+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{4x-2}{x^3+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-20x+8}{x^3+2}}=e^0=1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x})\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{x-\sqrt{x}}}=e^4$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=\left[1^{\infty}\right]\to l=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})\left(\frac{+1}{\sqrt{x}}\right)}=e^1=e$

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}=1^0=1$

8.52. (TIC) Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}^2 x}{2x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\ln(1+x)}$ e) $\lim\limits_{x\to0}(1+\text{sen}x)^{\frac{1}{x}}$ g) $\lim\limits_{x\to0}2x^2\cdot\text{cotg}^2\,x$ i) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}^2 2x}{x^2+2x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1+\text{sen}x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2}{(\ln(1+x))^2}$ j) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}^2 x}{2x^2-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}^2\,2x}{x^2+2x+5}=\dfrac{0}{5}=0$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\ln(1+x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{x}=4$

d) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1+\text{sen}\,x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty}\right]=\left[2^{+\infty}\right]=+\infty$

e) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}} = [1^{\infty}] \to l = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+\operatorname{sen}x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = e^1 = e$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \to l = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}(1+\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2} = \frac{2}{2} = 1$

g) $\lim_{x\to 0} 2x^2\cdot\operatorname{cotg}^2 x = [0\cdot\infty] \to l = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = 2$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{(\ln(1+x))^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$

i) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = 0$

j) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^{\infty}] \to l = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

PROBLEMAS

8.53. Dada la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$:

a) Comprueba que su límite es 1.

b) Encuentra un término a partir del cual todos los siguientes pertenezcan al intervalo de centro 1 y radio ε = 0,01.

c) Encuentra un término a partir del cual todos los siguientes pertenezcan al intervalo de centro 1 y radio ε = 0,0015.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \to l = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

b) $|a_n - 1| < 0{,}01 \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < 0{,}01 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{1}{0{,}01} = 100 \Rightarrow$ El término buscado es n = 101.

c) $|a_n - 1| < 0{,}0015 \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < 0{,}0015 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}0015 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}0015 \Rightarrow n > \frac{1}{0{,}0015} = 666{,}67$

El término buscado es el n = 667.

8.54. (PAU) Calcula el valor de *a* para que el límite de la sucesión de término general $a_n = \left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n$ sea 2.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n = [1^{+\infty}] \to l = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right)}$

Calculamos el límite del exponente: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(a-1)n}{n^2+n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2}{n^2+n+2} = a-1$

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{a-1} = 2 \Rightarrow a-1 = \ln 2 \Rightarrow a = 1+\ln 2$

8.55. En el año 2008, y en una cierta zona de bosque mediterráneo, hay 1000 unidades de árboles de una determinada especie. Si se supone que cada año la cantidad de árboles crece en un 4%:

a) Escribe los primeros términos de la sucesión que indica el número de árboles que habrá según los años transcurridos.

b) Escribe el término general de dicha sucesión.

c) ¿Cuántos árboles habría en el año 2016 si se siguieran dando estas mismas condiciones?

d) A partir del año 2016, y debido a un plan de regeneración, se espera que el crecimiento se modifique según el modelo $b_n = \dfrac{1369 \cdot (n-7)}{\dfrac{n-6}{2}}$, donde n es el número de años transcurridos desde 2008.

¿En qué porcentaje crecerá el número de unidades en 2017 respecto de 2016?

e) Realiza un gráfico que represente el número de árboles entre los años 2008 y 2020.

f) ¿Se estabilizará el número de árboles? ¿En qué cantidad?

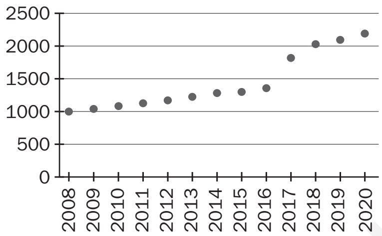
a) 1000, 1040, 1082, 1125, ...

b) $a_n = 1000 \cdot 1{,}04^n$, siendo n el número de años transcurridos desde 2008.

c) $a_8 = 1000 \cdot 1{,}04^8 = 1369$ árboles

d) $b_9 = \dfrac{1369 \cdot 2}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{5476}{3} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{5476}{3}}{1369} = 1{,}\widehat{3} \Rightarrow$ un $33{,}\widehat{3}$ %

e)



f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1369(n-7)}{\dfrac{n-6}{2}} = 2 \cdot 1369 = 2738$ árboles

8.56. (PAU) Calcula los valores de a y b para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1} + an + b\right) = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{2n+1} + an + b\right) = 0$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1} + an + b\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1+an^2+bn+an+b}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(1+a)n^2+(a+b)n+1+b}{n+1}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1+a=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=1$

b $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{2n+1} + an + b\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3+2an^2+2bn+an+b}{2n+1}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(1+2a)n^2+(a+2b+2)n+3+b}{2n+1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2a=0 \\ a+2b+2=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{4}$

8.57. Se forma un cubo de lado n con cubos de lado 1 unidad, y se pintan las caras del cubo grande. Después, se cuentan los cubos pequeños que tienen tres caras pintadas, los que tienen dos y los que tienen una.

a) Forma la sucesión del número de cubos con tres caras pintadas, según que el lado del cubo grande sea 1, 2, 3, etc., unidades. Escribe el término general.

b) Forma la sucesión del número de cubos con dos caras pintadas, según que el lado del cubo grande sea 1, 2, 3, etc., unidades. Escribe el término general.

c) Forma la sucesión del número de cubos con una cara pintada, según que el lado del cubo grande sea 1, 2, 3, etc., unidades. Escribe el término general.

Si la medida es 1, solo tiene un cubo con las seis caras pintadas, por lo que el primer término de las tres sucesiones es 0. Consideremos, por tanto, $n > 1$.

a) Tres caras pintadas: 8, 8, 8, 8, ..., $a_n = 8$

b) Dos caras pintadas: 0, 12, 24, 36, ..., $a_n = 12(n-2)$

c) Una cara pintada: 0, 6, 24, 54, ..., $a_n = 6(n-2)^2$

8.58. Un cuadrado tiene 20 cm de lado. En él se inscribe una circunferencia, dentro de ella otro cuadrado, después otra circunferencia, y así sucesivamente.

a) Halla los primeros términos correspondientes a las sucesiones de los perímetros y de las áreas de los cuadrados, por un lado, y de las circunferencias, por otro.

b) Calcula los términos generales de las sucesiones anteriores.

c) Calcula el límite, si es que existe, de las sucesiones anteriores.

a) Cuadrados: Perímetros: 80, $40\sqrt{2}$, 40, $20\sqrt{2}$, ...; Áreas: 400, 200, 100, 50, ...

Círculos: Perímetros: 20π, $10\sqrt{2}\,\pi$, 10π, $5\sqrt{2}\,\pi$, ...; Áreas: 100π, 50π, 25π, $\frac{25}{2}\pi$, ...

b) Cuadrados: Perímetros: $80\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$; Áreas: $\frac{400}{2^{n-1}}$

Círculos: Perímetros: $20\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$; Áreas: $\frac{100\pi}{2^{n-1}}$

c) Todas las sucesiones tienen límite 0.

8.59. (PAU) Calcula el valor de k para que se verifique que:

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\frac{5}{2}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+3)x-8}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=\frac{k+3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{k+3}{3}=\frac{5}{2}\Rightarrow k=2$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\frac{5+k}{0}\right]$. Para que el límite pueda valer 2, es necesario que 5 + k = 0 $\Rightarrow$ k = –5.

Efectivamente, en este caso: $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]\to l=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{4}{2}=2$

8.60. Una empresa presta servicios de asesoramiento informático para corregir errores habituales en los PC mediante consultas telefónicas. La siguiente función expresa el coste total anual, en euros, de prestar *x* consultas telefónicas, teniendo en cuenta los gastos de salarios, local, conexiones y equipos:

$$f(x) = 7{,}5x + 6500$$

a) Escribe la expresión de la función que facilita el coste unitario de cada asesoramiento cuando se han contestado *x* consultas telefónicas.

b) Suponiendo que la ley se verifica indefinidamente, halla el coste aproximado de cada servicio telefónico cuando se presta una gran cantidad de ellos.

c) Si se decide cobrar por cada servicio prestado un 25% más del coste hallado en el apartado anterior, ¿cuál es el beneficio obtenido al resolver 8000 consultas?

a) Costes por unidad: $C(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{7{,}5x + 6500}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7{,}5x + 6500}{x} = 7{,}5$ €

c) Se cobrará 7,5 · 1,25 = 9,375 € por servicio. Luego el beneficio es de 1,875 €.

Al resolver 8000 consultas el beneficio obtenido será de 15 000 €.

8.61. La población de insectos en una laguna centroamericana evoluciona con el paso de *x* días según la siguiente función:

$$f(x) = \frac{15\,000x + \sqrt{\dfrac{20\,000x + 8\,000}{3}}}{x+1}$$

a) Indica la población que existe al comienzo del período considerado.

b) Indica la población cuando han pasado 5, 7 y 10 días.

c) Si la población siguiese la ley indicada de forma indefinida, ¿en qué valor aproximado se estabilizaría?

a) $f(0) = 51{,}6 \approx 52$ insectos

b) A los 5 días: $f(5)$ = 12 532 insectos; a los 7 días: $f(7)$ = 13 153 insectos; a los 10 días: $f(10)$ = 13 660 insectos

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15000x + \sqrt{\dfrac{20.000x + 8000}{3}}}{x+1} = \dfrac{15000}{1} = 15\,000$ insectos

8.62. Una empresa que fabrica discos duros externos para ordenadores personales se plantea fabricar un mínimo de 200 unidades en un determinado período de tiempo y estima que:

- **Si fabrica esas 200 unidades mínimas, los costes totales de producción ascienden a 4000 €.**
- **Por cada 20 unidades que fabrique que superen esas 200 y siempre que no pasen de 900, los costes disminuyen en 25 céntimos por unidad fabricada.**
- **A partir de esas 900 unidades, los costes por unidad producida vienen dados por la expresión:**

$$f(x) = 11 + e^{-0{,}00154x}$$

a) Escribe las expresiones de las funciones que determinan los costes totales y por unidad, según el número de unidades vendidas.

b) Indica el dominio de las anteriores funciones.

c) Estudia la tendencia de las anteriores funciones cuando el número de unidades producidas es muy grande.

a)

Costes por unidad:

$$C_u(x) = \begin{cases} 4000 - \dfrac{0{,}25(x-200)}{20} & \text{si } 200 \le x \le 900 \\ 11 + e^{-0{,}00154x} & \text{si } x > 900 \end{cases}$$

Costes totales:

$$C_T(x) = \begin{cases} 4000x - \dfrac{0{,}25x(x-200)}{20} & \text{si } 200 \le x \le 900 \\ 11x + xe^{-0{,}00154x} & \text{si } x > 900 \end{cases}$$

b) El dominio de ambas es $[200, +\infty)$.

c) Cuando se fabrica un número *x* muy grande de unidades, los costes por unidad tienden a estabilizarse en 11 € y los totales, obviamente, crecen indefinidamente.

8.63. El tiempo, en segundos, que tarda un atleta en correr 100 metros lisos viene dado por la función: $f(x) = 9 + e^{-x}$ donde x es el número de días que ha entrenado previamente. Calcula el tiempo que tardará en realizar la carrera tras un largo período de entrenamiento.

$\lim_{x\to+\infty}\left(9 + e^{-x}\right) = 9$ s

PROFUNDIZACIÓN

8.64. Da una explicación de por qué no existen los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \cos x$

d) $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$

f) $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\frac{1}{x}$

sen$x$, cos$x$ y tg$x$ oscilan indefinidamente (entre –1 y 1 o entre $-\infty$ y $+\infty$), de forma que nunca se acercan a ningún número ni se hacen muy grandes o muy pequeñas cuando x se hace muy grande (apartados a, c y e).

De igual forma, no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y$, haciendo $y = \frac{1}{x}$. Análogamente los apartados b, d y f.

8.65. Pon un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que exista $\lim_{x\to 0}\left(f(x) + g(x)\right)$, pero que no exista $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$; $g(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x) + g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ y se verifica el enunciado.

8.66. (TIC) Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

d) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} (x + 1) = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} == \lim_{x\to-\infty} -(x + 1) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$

d) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x + 1) = -2$

8.67. (TIC) Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$ c) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$ e) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$ f) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-1}{x+1}=\left[\dfrac{-2}{0^+}\right]=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{-1}=3$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$

e) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{-(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1-x}{x+1}=\left[\dfrac{2}{0^-}\right]=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+x-2}{|x^2+3x+2|}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{|(x+1)(x+2)|}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{-(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1-x}{x+1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

8.68. (TIC) Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x}+\dfrac{e^{-x}}{e^x}}{\dfrac{e^x}{e^x}-\dfrac{e^{-x}}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}=\dfrac{1}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^{-x}}{e^x}+\dfrac{e^x}{e^x}}{\dfrac{e^{-x}}{e^x}-\dfrac{e^x}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}{\dfrac{1}{e^{2x}}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

8.69. (TIC) Calcula el siguiente límite, estudiando previamente los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}{1-\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}=\dfrac{1}{1}=1$; $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}+1}{\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}-1}}=\dfrac{1}{-1}=-1$

Como los límites laterales no coinciden, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ no existe.

8.70. Se considera la sucesión 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, ...

a) Cuando una sucesión verifica que la sucesión formada por los números que se obtienen al restar a cada término el anterior, empezando por el segundo, es una progresión aritmética, se dice que la sucesión inicial es una progresión aritmética de segundo grado. Comprueba que la sucesión dada es de este tipo.

b) Las progresiones aritméticas de segundo grado tienen por término general un polinomio en *n* de segundo grado. Halla el término general de la sucesión dada.

a) La sucesión que se forma al restar a cada término el anterior, empezando por el segundo, es:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Efectivamente, es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 1$ y de razón $d = 1$.

b) $a_n = an^2 + bn + c$

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow a+b+c=a_1=5 \\ n=2 \Rightarrow 4a+2b+c=a_2=6 \\ n=3 \Rightarrow 9a+3b+c=a_3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=1 \\ 5a+b=2 \end{cases} \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=5$$

. Por tanto, $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 5$

8.71. Se considera la sucesión 1, 3, 6, 12, 23, 41, ...

a) ¿Cómo definirías qué es una progresión aritmética de tercer grado?

Comprueba que la sucesión dada es de este tipo.

b) ¿Qué forma tienen los términos generales de las progresiones aritméticas de tercer grado?

Halla el término general de la sucesión dada.

a) Una sucesión es una progresión aritmética de tercer grado cuando la sucesión formada por la diferencia de cada término con el anterior es una progresión aritmética de segundo grado.

Partiendo de la sucesión dada, la sucesión formada por cada término menos el anterior es 2, 3, 6, 11, 18, ... , que es una progresión aritmética de segundo grado ya que si se vuelve a restar a cada término el anterior, se obtiene 1, 3, 5, 7, ... , que es una progresión aritmética.

b) $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$: $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=6 \\ 64a+16b+4c+d=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a+3b+c=2 \\ 19a+5b+c=3 \\ 37a+7b+c=6 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a+2b=1 \\ 18a+2b=3 \end{cases} \Rightarrow 6a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{3}, b=-\frac{3}{2}, c=\frac{25}{6}, d=-2 \Rightarrow a_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{25}{6}n-2$$

8.72. Dada la sucesión definida por recurrencia:

$$\mathbf{a_1 = 1, \; a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}}$$

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

b) Como se sabe que la sucesión es convergente: $\lim a_n = \lim a_{n-1} = L$

Por tanto: $L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(La solución $L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido ya que es una sucesión de términos positivos).

8.73. Dada la sucesión definida por recurrencia:

$$\boldsymbol{a_1 = \sqrt{2},\ a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}}$$

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

$$\text{a)}\ \begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} \\ a_3 = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{128} \\ a_4 = \sqrt{2\sqrt[8]{128}} = \sqrt[16]{32\,768} \end{cases}$$

b) Como se sabe que la sucesión es convergente: $\lim a_n = \lim a_{n-1} = L$

Por tanto: $L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow L^2 - 2L = 0 \Rightarrow L \cdot (L-2) = 0 \Rightarrow L = 2$

(La solución $L = 0$ no tiene sentido ya que todos los términos son mayores que 1).

8.74. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{2n^2}$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2+4+6+8+...+2n}{n^2+1}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)+...+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{2n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+n)n}{2\cdot 2n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{n^2+n}{4n^2} = \frac{1}{4}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2+4+6+8+...+2n}{n^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+2n)n}{2n^2+2} = \frac{2}{2} = 1$

c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)+...+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}+1+\frac{n}{n}\right)n}{2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2n+1+n}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}$

8.75. Halla los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 12\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(16\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)$

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 12\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right) = \lim \frac{12\,\frac{(1+n)n}{2}}{n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6n^2+6n}{n^2} = \lim\left(6+\frac{6}{n}\right) = 6$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(16\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{16(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)....(n-1)(n+1)}{2^2 3^2 4^2...n^2}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{16\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 7...(n-1)(n+1)}{2^2 3^2 4^2...n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{16\cdot 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^2...(n-1)^2 n(n+1)}{2^2 3^2 4^2...n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{16(n+1)}{2n} = 8$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

8.1. El valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)$ vale:

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) 1

D) 0

E) El límite no existe.

D) Calculando el límite:

$$\lim_{x\to-\infty} \log_2\left(\frac{2-2^x}{2}\right) = \log_2\left(\frac{2-0}{2}\right) = \log_2 1 = 0$$

8.2. El valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a}\right)$ es:

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) 0

D) a

E) $-a$

C) Calculando el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+a}\right)\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x+\sqrt{x^2+a}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-a}{x+\sqrt{x^2+a}} = \left[-\frac{a}{\infty}\right] = 0$$

8.3. Los valores de $A = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt[4]{16x^4+1}}$ y $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{-2x-1}\right)^{x+2}$ son:

A) $A = \frac{1}{2}$ y $B = 0$

B) $A = \frac{1}{2}$ y $B = +\infty$

C) $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\infty$

D) $A = -\frac{1}{2}$ y $B = -\infty$

E) $A = -\frac{1}{2}$ y $B = 0$

E) Calculando ambos límites:

$$A = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt[4]{16x^4+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt[4]{16x^4+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt[4]{\dfrac{16x^4}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt[4]{16}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+1}{-2x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x-1}\right)^{-x+2} = \left[+\infty^{-\infty}\right] = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

8.4. La función $y = f(x)$ verifica que:

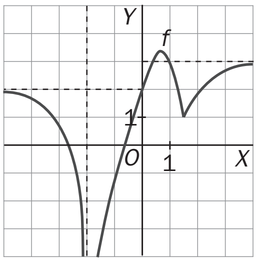
$\lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

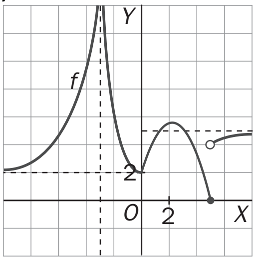
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$ $\quad$ $\lim_{x\to 5} f(x) = 1$

En estas condiciones, su gráfica puede ser:

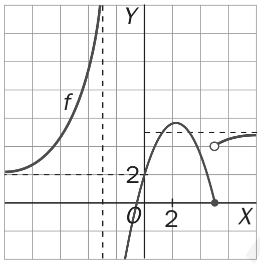
A)



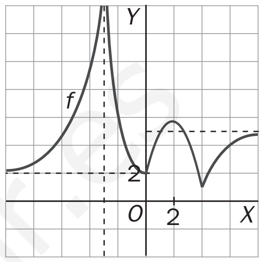
B)



C)



D)



E) Ninguna de las gráficas anteriores puede representar a la función $y = f(x)$.

D) Porque en la opción A, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$. En la opción B, $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe. En la opción C, $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$.

8.5. Los valores de a y b que hacen que: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 + ax + b}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = -5$ son:

A) $a = 8$, $b = -12$ $\quad$ **C) $a = -8$, $b = 12$** $\quad$ **E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.**

B) $a = 8$, $b = 12$ $\quad$ **D) $a = -8$, $b = -12$**

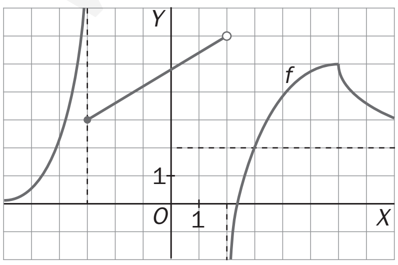
C) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 + ax + b}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \dfrac{8 - 4 + 2a + b}{0}$. Para que este límite sea finito, es necesario que $4 + 2a + b = 0$.

En este caso, $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 + ax + b}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + x + a + 2)}{(x-2)(x^2 - 5x + 6)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x + a + 2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{8 + a}{0} \Rightarrow a = -8$, $b = 12$.

Se comprueba que para estos valores el límite vale: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \lim_{x\to 2} \dfrac{6x - 2}{6x - 14} = \dfrac{10}{-2} = -5$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

8.6. Dada la grafica de $f(x)$:



A) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$ $\quad$ **D)** $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

B) $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$ $\quad$ **E)** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

C) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 3$

A, C, D y E. Observando la gráfica se aprecia que la respuesta no cierta es la B, ya que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

8.7. La sucesión a_n es convergente y verifica que: $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$

A) Si $a_1 = 2$ entonces la sucesión es monótona decreciente.

B) Si $a_1 = 1$ entonces la sucesión es monótona creciente.

C) El límite de la sucesión es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D) El límite de la sucesión es 1.

E) El límite de la sucesión es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si $a_1 > 1$ y 1 si $a_1 < 1$.

C) Si $\lim_{x \to +\infty} a_n = L \Rightarrow L = \sqrt{1+L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; A, B) se comprueban con calculadora.

Elige la relación entre las dos afirmaciones dadas:

8.8. Dadas las sucesiones de términos generales respectivos a_n y b_n:

a) Las dos son convergentes.

b) La sucesión de término general $c_n = a_n + b_n$ es convergente.

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

B) Si $a_n = (-1)^n$ y $b_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow a_n + b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 0$, pero los límites de a_n y b_n no existen.

Señala el dato innecesario para contestar:

8.9. Se quiere obtener el límite $\lim_{x \to -2} \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Se dan los siguientes datos:

a) $P(0) = Q(0) = 0$

b) El resto de dividir $P(x)$ entre $x + 2$ es 3.

c) El resto de dividir $Q(x)$ entre $x + 2$ es 0.

d) El resto de dividir $Q(x)$ entre $(x + 2)^2$ es 2.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) Los datos no son suficientes para poder calcular el límite.

D) $\lim_{x \to -2} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \to l = \lim_{x \to -2} \frac{P_1(x)(x+2)+3}{Q_1(x)(x+2)+0} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

8.10. Se quiere obtener el límite en el origen de coordenadas de la función $f(x)$ continua en R. Se sabe que:

a) La función verifica que $f(-x) = f(x)$ para cualquier x.

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$

A) Cada dato es suficiente por sí solo para hallar el límite.

B) a es suficiente por sí solo, pero b no.

C) b es suficiente por sí solo, pero a no.

D) Son necesarios los dos datos juntos.

E) Hacen falta más datos.

C) Por ser continua en todo **R**, también lo es en $x = 0$. Por tanto: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 3$