4 Sistemas lineales con parámetros

1. Teorema de Rouché

■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$$

● Aplica la teoría

1. Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

3. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el R(C) = 3 y se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 4 \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{7 \cdot 3^a - 2^a} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

R(C) = 2 < R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

4. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + y \quad\;\; = 1 \\ -x \quad + z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + \;\; z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + \;\; y + 2z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el R(C) = 3 y se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

2. Regla de Cramer y forma matricial

■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

● Aplica la teoría

5. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + \;\; y \qquad = \;\; 5 \\ x \qquad + 3z = 16 \\ 5y - \;\; z = 10 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + \;\; y - 2z = \;\; 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + \;\; z = 16 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Resuelve por Cramer en función del parámetro **a:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2-2a}{-2} = a - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a-2}{-2} = 1 - a$$

7. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 4y + 5z + 5t = 0 \\ 2x + 3z - t = 10 \\ x + y - 5z = -10 \\ 3y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2, y = -1, z = 1$

9. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107}\begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, y = 2, z = 1$

10. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 1, z = -2$

3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se elimina la 3ª ecuación porque es: 1ª + 2ª

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \end{matrix} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

● Aplica la teoría

11. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}+2z} + 2t &= 3 \\ 3x - y + z - t &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t &= -1 \\ 2x + y + z + t &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2 \cdot 2^a \\ \\ \end{matrix} = 0$$

El sistema no es de Cramer porque $|C| = 0$. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 3^a \\ 2 \cdot 1^a - 4^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & -2 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot 2^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a - 4 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 3 = R(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}-z} + 2t &= 3 \\ 4y - z + 7t &= 8 \\ 3z - 5t &= -8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}-z} &= 3 - 2t \\ 4y - z &= 8 - 7t \\ 3z &= -8 + 5t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - 2t \\ 4y - \frac{5t - 8}{3} &= 8 - 7t \\ z &= \frac{5t - 8}{3} \end{aligned}\right\} y = \frac{4 - 4t}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{4 - 4t}{3} &= 3 - 2t \\ y &= \frac{4 - 4t}{3} \\ z &= \frac{5t - 8}{3} \end{aligned}\right\} x = \frac{5 - 2t}{3}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{5 - 2\lambda}{3} \\ y &= \frac{4 + 4\lambda}{3} \\ z &= \frac{-8 + 5\lambda}{3} \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

12. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z + t &= 1 \\ y + z - t &= 1 \\ y + z - 2t &= 2 \\ z - t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

El sistema es de Cramer porque $|C| \neq 0$. Se puede resolver por Cramer, pero es más sencillo por Gauss.

La solución es: $x = 3; y = 1; z = -1; t = -1$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 1 \\ 3y - 1 = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} x = 1$$

La solución es: $x = 1, y = 1, z = 1$

13. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 6 \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}_{= 1^a + 2^a + 3^a} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot 2^a - 3 \cdot 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 10 \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

El sistema es equivalente a:

14. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 5 \\ 2x + y - 4z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Se resuelve por Gauss.

$$R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a : 3 \\ \\ 4^a : (-1) \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ \\ \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ 4^a - 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 3 < R(A) = 4 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

4. Discusión de sistemas con parámetros

Piensa y calcula

Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 0 = k - 6 \end{array}\right\}$$

Para todo valor $k \neq 6$ el sistema es incompatible.

Para $k = 6$ el sistema se reduce a $x + y = 3 \Rightarrow$ Compatible indeterminado.

Aplica la teoría

15. Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} (a+1)x + y + z &= 0 \\ x + (a+1)y + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$

$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –2 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 2\cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para a = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a$

$a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a^2(a + 3) = 0 \Rightarrow a = -3, a = 0$

Para todo valor de $a \neq -3$ y $a \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –3 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 2\cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ = 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para a = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

16. Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} kx + y + z &= 4 \\ x + y + z &= k \\ x - y + kz &= 2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ kx \quad + 2z &= 0 \\ 2x - y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$

Para todo valor de $k \neq -1$ y $k \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para k = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para k = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$

Para todo valor de $k \neq -3$ y $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –3 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para k = 2 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

17. Discute, según los valores del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 10y &= -4 \\ ax + y &= 1 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay más ecuaciones que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

Se calcula $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$

$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

18. Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ mx + z &= 0 \\ x + (1 + m)y + mz &= m + 1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} (2m + 2)x + my + 2z &= 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y &= 0 \\ (m + 1)x + (m + 1)z &= m - 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1 + m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$

$m^2 + m = m(m + 1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$

Para todo valor de $m \neq -1$ y $m \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula el $|C| = \begin{vmatrix} 2m + 2 & m & 2 \\ 2 & 2 - m & 0 \\ m + 1 & 0 & m + 1 \end{vmatrix} =$

$$= -2m(m + 1)(m - 1)$$

$m(m + 1)(m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -1$ y $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $m = 0$ se tiene:

$$R\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} = 2 \cdot 3^a \\ 2^a : 2 \\ \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $m = -1$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $m = 1$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 2 \end{array} = R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ = 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C, matriz de los coeficientes, y A, matriz ampliada con los términos independientes):

☐ R(C) < R(A)
☒ R(C) = R(A) = Nº de incógnitas
☐ R(C) > R(A)
☐ R(C) ≠ R(A)

2 Si tenemos el sistema lineal matricial CX = B tal que existe C^{-1}, la solución es:

☐ X = BC ☐ $X = BC^{-1}$
☐ X = CB ☒ $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

☒ siempre es compatible.
☐ siempre es incompatible.
☐ unas veces es compatible y otras incompatible.
☐ ninguna de las anteriores es cierta.

4 Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

☒ si R(C) = R(A) = 2, es compatible.
☐ si R(A) = 3, es compatible.
☐ si R(C) = 3, es compatible.
☐ si R(C) = R(A) = 3, es compatible.

5 Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

☐ si R(C) = R(A) = 2, es compatible determinado.
☐ si R(C) ≠ R(A), es compatible determinado.
☒ si R(C) = R(A) = 3, es compatible determinado.
☐ si R(C) < R(A), es compatible determinado.

6 Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **k**

$$\left\{\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right.$$

☒ Es siempre incompatible.
☐ Para k ≠ 0, compatible determinado.
☐ Para k = 0, compatible determinado.
☐ Para k = 0, compatible indeterminado.

7 Se considera el sistema: $\left.\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{array}\right\}$

donde **a** es un parámetro real.

Discutir el sistema en función del valor de **a**

☐ Para a = 0 no tiene solución, y para a = 1, compatible indeterminado.
☐ Si a ≠ 0 incompatible, y si a = 0, compatible indeterminado.
☐ Si a = 0 incompatible, y si a ≠ 0, compatible indeterminado.
☒ Si a ≠ 1 incompatible, y si a = 1, compatible indeterminado.

8 Se considera el sistema: $\left.\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{array}\right\}$

donde **a** es un parámetro real.

Resuelve el sistema para a = 0

Resuelve el sistema para a = 1

☒ Para a = 0 no tiene solución; para a = 1, x = –2z + 1, y = –z + 2
☐ Para a = 0, x = y = z = 0; para a = 1 no tiene solución.
☐ Para a = 0, x = 2, y = –3, z = 5; para a = 1, x = 1, y = 2, z = 3
☐ Para a = 0, x = –1, y = –2, z = –3; para a = 1, x = 3, y = 2, z = 0

9 Dado el sistema: $\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

estudia su compatibilidad según los valores de **a**

☐ Si a ≠ 0, a ≠ 2, compatible determinado; si a = 1, incompatible; si a = 2 incompatible.
☒ Si a ≠ 1, compatible determinado; si a = 1, compatible indeterminado.
☐ Si a ≠ 0, compatible determinado; si a = 0, compatible indeterminado.
☐ Si a ≠ –1, a ≠ 3, compatible determinado; si a = –1, incompatible; si a = 3, incompatible.

10 Dado el sistema: $\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

resuélvelo cuando sea posible.

☐ Si a ≠ 1, x = 1, y = 1, z = 1 – a
☐ Si a = 1, x = 1/2, y = 1/2, z = (1 – a)/2
☒ x = 1/2, y = 1/2, z = (1 – a)/2 para a ≠ 1 y x = λ, y = 1 – λ, z = 0; λ ∈ ℝ para a = 1
☐ No se puede resolver porque R(C) ≠ R(A)

Ejercicios y problemas

1. Teorema de Rouché

19. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 9 \\ x - 2y = 1 \\ 5x + 3y + 5z = 5 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Como $|C| = -10$, el $R(C) = R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

20. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

21. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

22. Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y - z + 2t = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 5x - 2y - 4z - t = -12 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se pasa **t** al 2º miembro y se resuelve por Gauss, obteniéndose la solución:

$$x = \frac{3t - 2}{13}, y = \frac{9 - 7t}{13}, z = \frac{4t + 32}{13}$$

La solución en ecuaciones parámetricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3\lambda - 2}{13} \\ y = \dfrac{9 - 7\lambda}{13} \\ z = \dfrac{4\lambda + 32}{13} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Regla de Cramer y forma matricial

23. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = -36$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

b) Como $|C| = 5$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0, z = \frac{2}{5}$$

24. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Como $|C| = 46$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = \frac{27}{23}, y = -\frac{17}{46}, z = \frac{9}{46}$$

b) Como $|C| = -2$, el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 4, y = -2, z = 0$$

25. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = -5$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 0, z = 2$

26. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = 2$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = 0, y = -2, z = 2$

3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

27. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 2z + 2t &= 2 \\ 2x - y + z - 4t &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + z - 2t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, el sistema no es de Cramer.

Se resuelve por Gauss:

La solución es: $x = 1 + t, y = 1 - t, z = t$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= \lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

28. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = 1, y = 2, z = -1$$

29. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z &= -1 \\ x + 5y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ 3x + 7y + 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = \frac{1 - z}{2}, y = \frac{1 - z}{2}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-\lambda}{2} \\ y &= \frac{1-\lambda}{2} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

30. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z + t &= 1 \\ 2x - y - z - 3t &= 2 \\ 7x - y - 6z - 8t &= 7 \\ 4x + 3y - 7z - t &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, no se puede resolver por Cramer.

Se resuelve por Gauss:

$$x = z + t + 1, y = z - t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + \mu + 1 \\ y &= \lambda - \mu \\ z &= \lambda \\ t &= \mu \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

4. Discusión de sistemas con parámetros

31. Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} mx + my &= 6 \\ x + (m-1)y &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}(m+1)x + \ \ y + \ \ z &= 3\\ x + 2y + mz &= 4\\ x + my + 2z &= 2\end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$

Para todo valor de $m \neq 2$ y $m \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = 2 se tiene:

R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = 0 se tiene:

R(C) = 1 < R(A) = 2 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) $|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$

$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3, m = 2$

Para todo valor de $m \neq 0$, $m \neq -3$ y $m \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = 0 se tiene:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = −3 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para m = 2 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

32. Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

b) $\left.\begin{aligned}x + y + 2z &= 3\\ 2x - y + az &= 9\\ x - y - 6z &= 5\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}x + y + 2z &= 2\\ 2x - y + 3z &= 2\\ 5x - y + az &= 6\end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$

Para todo valor de $a \neq -8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = −8 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

Para todo valor de $a \neq 8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C| = 0

• Para a = 8 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

33. Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned}3x - 5y &= 6\\ x + y &= k\\ x + 2y &= 2\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}x + y \qquad &= 1\\ 3x + 2y - z &= 3\\ kx + 3y - 2z &= 0\\ -x \qquad - 4z &= 3\end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$11k - 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

Para todo valor de $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

• Para k = 2 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Como hay una ecuación más que incógnitas se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$

Para todo valor de $k \neq -20$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

• Para k = −20 se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Para ampliar

34. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - 3z = -1 \\ 4x + 5z = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z + 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se resuelve por Gauss y se obtiene que el sistema es incompatible.

b) Se resuelve por Gauss y se obtiene:

$$x = y + 13t, z = -9t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 13\mu \\ y = \lambda \\ z = -9\mu \\ t = \mu \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

35. Para cada valor del parámetro real **k,** se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) discutir el sistema según los valores de **k**

b) resolverlo en los casos en que sea compatible.

Solución:

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -k^2 + 4k - 3$

$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3$

Para todo valor de $k \neq 1$ y $k \neq 3$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $k = 1$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

- Para $k = 3$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Para $k = 1$ la solución es:

$$x = 7, y = 4$$

Para $k = 3$ la solución es:

$$x = 3, y = 0$$

36. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro **m:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de **m**

b) Resuelve el sistema para $m = 3$

Solución:

a) $|C| = m - 1$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $m = 1$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

37. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real **a:**

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para $a = -1$

c) Resuelve el sistema para $a = 2$

Solución:

a) $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = -1$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $a = 0$ se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = -1$ la solución del sistema es:

$$x = 2 + y, z = 1$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para a = 2 la solución es:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

38. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ

b) Resuelve cuando sea indeterminado.

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$

Para todo valor de $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para $\lambda = -2$ se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 1$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = -2z, y = z + 1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

39. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay \quad = 2 \\ -x \quad + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a - 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –1 se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para a = 2 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

40. Sea el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{array}\right\}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro **k**

b) Resuelve el sistema para k = –1

c) Resuelve el sistema para k = 2

Solución:

a) $|C| = -3k^2 - 6k - 3$

$3k^2 + 6k + 3 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

Para todo valor de $k \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para k = –1 se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para k = –1 la solución del sistema es:

$$x = z + 1, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para k = 2 la solución del sistema es:

$$x = 2/3, y = 2/3, z = 2/3$$

41. Siendo **a** un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax \quad + z = a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del valor de **a**

b) Encuentra todas sus soluciones para a = 1

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = 1 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 1 la solución del sistema es:

$$x = 1 - z, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

42. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + \quad y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array}\right\}$$

donde λ es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$

c) Resuelve el sistema para $\lambda = 3$

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 - \lambda$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

Para todo valor de $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = 0$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $\lambda = 1$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 1$$

43. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y \qquad = 0 \\ x - \quad y + \quad z = 0 \end{array}\right\}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuélvelo.

Solución:

a) $|C| = 4\lambda - 12$

$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Para todo valor de $\lambda \neq 3$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = 3$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3z , y = -2z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda \neq 3$ la solución del sistema es la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

44. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \qquad z = -2 \\ -\lambda x + 3y + \qquad z = -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z = -5 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $|C| = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = -1$

Para todo valor de $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = -2$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $\lambda = -1$ se tiene:

R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = -2$, la solución del sistema es:

$$x = -2z + 1, y = z - 3$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = \quad\quad t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

45. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro **a**

b) Resuélvelo para a = 2

Solución:

a) $|C| = 2a^2 - 8$

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- Para a = 2 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = 3 - y, z = -1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

46. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + \quad\quad z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + \quad\quad 2z = 11 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuélvelo para a = 4

Solución:

a) $|C| = -2a + 4$

$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Para todo valor de $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = 2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = 4 la solución del sistema es:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

47. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \quad y \quad\quad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

Solución:

a) $|C| = a + 1$

$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para a = –1 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -1$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

48. Se considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + my \quad\quad = 0 \\ x \quad\quad + mz = m \\ x + \quad y + \; 3z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 6

Solución:

a) $|C| = m^2 - 5m$

$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$

Para todo valor de $m \neq 0$ y $m \neq 5$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 0 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Para m = 5 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para m = 6 la solución del sistema es:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

49. Sea el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x \quad\quad + \quad\quad\quad z = 0 \\ x + my + \quad\quad 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Calcula el valor de **m** para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

b) Halla las soluciones.

Solución:

a) $|C| = 2m$

$2m = 0 \Rightarrow m = 0$

Para todo valor de $m \neq 0$, la solución es la trivial.

b) Para $m = 0$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es: $x = 0, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problemas

50. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}$$

a) estudia su compatibilidad.

b) añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.

c) añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

c) Se añade una ecuación contradictoria con las otras dos; por ejemplo, sumando y cambiando el término independiente:

$$3x + 2z = 0$$

51. Se considera el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z = 2a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema para $a = 3$

Solución:

a) $|C| = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Para todo valor de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 0$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $a = 1$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 3$ la solución del sistema es:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

52. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Encuentra los valores de **k** para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2

b) Resuelve el sistema anterior para $k = 0$

Solución:

a) Estudiando la matriz de los coeficientes por Gauss se obtiene que si $k = 3/2$, el $R(C) = 2$

b) Para $k = 0$, la solución es:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

53. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ

Solución:

a) $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$

$2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7,\ \lambda = 1$

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $\lambda = -7$ se tiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- Para $\lambda = 1$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 + 2z\ ,\ y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para todo valor de $\lambda \neq -7$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

54. Discute el sistema, según el valor del parámetro **m,** y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + 3y + z = & 4 \\ 3x + y + mz = & 6 \\ -2x - 10y - 2z = & m - 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) $|C| = 14m - 14$

$14m - 14 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $m = 1$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $m \neq 1$ la solución del sistema es:

$$x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m - 1)},\ y = \frac{-m(2m - 3)}{14(m - 1)},\ z = \frac{-m}{2(m - 1)}$$

55. Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} x + z = & 1 \\ y + (a - 1)z = & 0 \\ x + (a - 1)y + az = & a \end{array}\right\}$$

a) discute el sistema según el valor del parámetro **a**

b) resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$

$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 1$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Para $a = 2$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ la solución es:

$x = 1 - z, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la solución es:

$$x = \frac{a - 1}{a - 2},\ y = \frac{a - 1}{a - 2},\ z = -\frac{1}{a - 2}$$

56. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 2y - z = & k \\ 3x - 2z = & 11 \\ y + z = & 6 \\ 2x + y - 4z = & k \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = 2k - 12$

$2k - 12 = 0 \Rightarrow k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

Para todo valor de $k \neq 6$ se verifica que: $R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $k = 6$ se tiene: $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

57. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y - z = & 2 \\ kx + y + z = & 1 \\ x - y + 3z = & -3 \\ 4x + 2y = & k \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -2k^2 + 12k - 18$

$2k^2 - 12k + 18 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3$

Para todo valor de $k \neq 3$ se verifica que: $R(C) < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $k = 3$ se tiene: $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

58. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2kz = k \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = 0$ para cualquier valor de k

Se estudia el sistema por Gauss y se obtiene que para $k = 7/2$, el $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Para $k \neq 7/2$, el $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

59. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **m** y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z - 3 = 0 \\ 3x + y + z + 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \\ x - y + mz + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$|A| = -18m - 36$

$18m + 36 = 0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

Para todo valor de $m \neq -2$ se verifica que:

$R(C) < R(A) = 4$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de $|A|$

- Para $m = -2$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

60. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **a:**

$$\left.\begin{array}{r} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = a^3$

$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$

Para todo valor de $a \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 4 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 0$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Para profundizar

61. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros **a** y **b:**

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow a = 1$

Para $a \neq 1$, $|C| \neq 0$ y se cumple que $R(A) = R(C) = 3 =$ nº de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

- Estudio para a = 1

  Permutando la columna de las **y** con la de las **x** y pasando la 2ª ecuación a la 3ª

$$R(A) = R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 5 \cdot 1^a - 2^a \\ 4 \cdot 1^a + 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 13 & 9 & 4+b \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

Cuando $b \neq 3$ $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Cuando $b = 3$ $R(C) = R(A) = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

La solución es:

$$x = (7 - 9z)/13 \text{ , } y = (8 - z)/13$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7 - 9\lambda}{13} \\ y = \dfrac{8 - \lambda}{13} \\ z = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Para los valores de a ≠ 1, la solución es:

$$x = \frac{27 - 9b}{13(a - 1)} + \frac{b + 4}{13}$$

$$y = \frac{3 - b}{13(a - 1)} + \frac{3b - 1}{13}$$

$$z = \frac{b - 3}{a - 1}$$

62. Discute, según los valores de los parámetros λ y μ, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + z = \mu \\ x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = \mu \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = \lambda - 1 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Para $\lambda \neq 1$, $|C| \neq 0 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ nº de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de μ

• Estudio para $\lambda = 1$

Permutando la columna de las **z** con la de las **x**

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 2 \end{pmatrix}$$

Cuando $\mu \neq 2$, $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Cuando $\mu = 2$, $R(C) = R(A) <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

63. Discute, según los valores de los parámetros **a** y **b,** el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + az = -2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Para $a \neq 1$, $|C| \neq 0$, $R(C) = R(A) =$ nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si $a = 1$ y $b = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$ y $b \neq 3 \Rightarrow R(C) = 2 < R(A) \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

64. Calcula el valor de **a** y **b** para que el sistema siguiente sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Para $a = -1$ el $R(C) = 2$

Se estudia por Gauss la matriz ampliada y se obtiene:

Para $b = 4$ el $R(A) = 2$

Por lo tanto, para $a = -1$ y $b = 4$, $R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

65. Estudia, según los diferentes valores de **a** y **b,** la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - 2z = b \\ x + y + z = 5 \\ 4x - 5y + az = -10 \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = 3a + 24 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -8$

Para $a \neq -8$, $|C| \neq 0$, $R(C) = R(A) =$ nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si $a = -8$ y $b = 0 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

66. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) discute el sistema en función de **a** y **b**

b) resuelve el sistema para **a** = **b** = –2

Solución:

$|C| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -2$

Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $|C| \neq 0$, R(C) = R(A) = nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si a = 1 y b = 1, R(C) = R(A) = 1 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = 1 y $b \neq 1$, R(C) = 1 < R(A) = 2 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Si a = –2 y b = –2, R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = –2 y $b \neq -2$, R(C) = 2 < R(A) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

67. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{array}\right\}$$

a) halla los valores de **a** y **b** para los que el sistema sea compatible indeterminado y su solución sea una recta.

b) halla la solución para los valores obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) $|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Para $a \neq 1$ $|C| \neq 0$, R(C) = R(A) = nº incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si a = –1 y b = 4, R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

Si a = –1 y $b \neq 4$, R(C) = 2 < R(A) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.

b) La solución para el caso a = –1 y b = 4 es:

$$x = 1, y - z = -1$$

en paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Paso a paso

68. Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)x + y + z &= 0 \\ x + (1-k)y + z &= k \\ x + y + (1-k)z &= k^2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

69. Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de **a,** y clasifícalo.

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \\ x + y + z &= a \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

70. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

71. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 71

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rango}(C) \rightarrow 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\text{rango}(A) \rightarrow 2$

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

Sistema heterogéneo compatible indeterminado.

72. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 72

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-3, y=4, z=2\}\}$$

Solución : $x = -3$, $y = 4$, $z = 2$

73. Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 73

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución : $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$

74. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 2z - 4t &= 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 74

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} x + 2y + z - 3t = 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t = 4 \\ x + 2y + 2z - 4t = 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t = 8 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{t=z-1, x=3, y=z-2, z=z\}\}$$

Solución : $x = 3$, $y = z - 2$, $t = z - 1$

75. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

Solución:

Ejercicio 75

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

$|C(a)| \rightarrow -a^2+1$

resolver$(-a^2+1=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$

$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \rightarrow 2$

$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \rightarrow 2$

Para $a = -1$, $R(C) = R(A) = 2 < 3$ = número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 3$

Para $a = 1$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$

Sistema incompatible.

Es compatible indeterminado para $a = -1$

Lo resolvemos para $a = -1$

resolver$\begin{bmatrix} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{3}{2}, y=-z+\frac{5}{2}, z=z\right\}\right\}$

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

resolver$\begin{bmatrix} 2x+y+z=4 \\ x-2y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=0, y=1, z=3\}\}$

Solución, $x = 0$, $y = 1$, $z = 3$

76. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad\;\; = \;\;1 \\ y + z = \;\;2 \\ x \quad\; - z = -1 \\ 3x - y + z = 10 \end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 76

resolver$\begin{bmatrix} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x-z=-1 \\ 3x-y+z=10 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=2, y=-1, z=3\}\}$

Solución : $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$

77. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} kx + \qquad\;\; y = 1 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + \qquad ky = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 77

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

$|A(k)| \rightarrow k-1$

resolver$(k-1=0) \rightarrow \{\{k=1\}\}$

Para $k \neq 1$, $R(C) < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $k = 1$

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 2$

Si $k = 1$, $R(C) = R(A) = 2$ = nº de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

78. Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0 \\ -x - y + kz &= 1 \\ x + y + z &= k \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Problema 78

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

$|C(k)| \rightarrow -k^2+1$

resolver$(-k^2+1=0) \rightarrow \{\{k=-1\}, \{k=1\}\}$

Para $k \neq -1$, $k \neq 1$, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas.
Sistema heterogéneo compatible determinado.

$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \rightarrow 2$

$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \rightarrow 2$

R(C) = R(A) = 2 < 3 = número de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 3$

R(C) $\neq$ R(A), sistema incompatible.

79. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - y + z &= 0 \\ (k+1)x + y \quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tienen soluciones distintas de x = y = z = 0. Resuélvelo en tales casos.

Solución:

Problema 79

$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow k^2-k-2$

resolver$(k^2-k-2=0) \rightarrow \{\{k=-1\}, \{k=2\}\}$

Tiene soluciones distintas de x = y = z para $k \neq -1$, $k \neq 2$

Para k = −1

resolver$\begin{bmatrix} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=z, y=0, z=z\}\}$

Solución x = z, y = 0

Para k = 2

resolver$\begin{bmatrix} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y=0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\left[x=-\frac{1}{5}\cdot z, y=\frac{3}{5}\cdot z, z=z\right]\right]$

Solución x = −z/5, y = 3z/5

80. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - y &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

determina para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que y = 2

Solución:

Problema 80

Resolvemos el sistema cuando y = 2

resolver$\begin{bmatrix} x-2a=2 \\ a\cdot x-2=a+1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\{a=1, x=4\}, \left\{a=-\frac{3}{2}, x=-1\right\}\right\}$

Tiene la solución y = 2 cuando a = 1 o a = −3/2

Problemas propuestos

1. Sea A una matriz 3×3 de columnas C_1, C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcula el determinante de B en función del de A

Solución:

$|C_1 + C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$

Si una columna está formada por dos sumandos, el determinante se descompone en la suma de dos determinantes, cada uno con uno de los sumandos y el resto de columnas iguales.

$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| + |C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$

La 1ª y 3ª columna son iguales. El determinante vale cero.

$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$

$|C_1 \quad 2C_1 \quad C_2| + |C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| =$

$|C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| = 3|C_1 \quad C_3 \quad C_2| = -3|C_1 \quad C_2 \quad C_3| = -3|A|$

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}\right.$$

a) Discútelo según los valores del parámetro **a**

b) Resuélvelo en el caso a = 2

Solución:

a) Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|C| = -a^2 + 3a - 2 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor $a \neq 1, a \neq 2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**

Para a = 1

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para a = 2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 = R(A) = 2 \Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

b) Para a = 2, pasamos de la última matriz en la que hemos calculado el rango a forma de sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1 - z, y = 0$$

En paramétricas: $x = 1 - \lambda; y = 0; z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x + (k+1)y + 2z &= -1 \\ kx + y + z &= k \\ (k-1)x - 2y - z &= k + 1 \end{aligned}\right\}$$

a) discútelo según los valores del parámetro **k**

b) resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a) Sean las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$|C| = 2k^2 - 5k + 2 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = 1/2$

Para todo valor $k \neq 2, k \neq 1/2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**

Para k = 2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado.**

Para k = 1/2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 2^a - 1^a \\ 1^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

b) Nos queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ 5y + 3z &= -4 \end{aligned}\right\} y = \frac{-4 - 3z}{5} \Rightarrow x = \frac{7 - z}{5}$$

En paramétricas: $x = \dfrac{7 - \lambda}{5}, y = \dfrac{-4 - 3\lambda}{5}, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

4. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro **m** para los que el rango de A es menor que 3

b) Estudia si el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de **m** obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) El rango de A será menor que 3 cuando $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 2m^3 + m^2$$

$$m^4 - 2m^3 + m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 2m + 1) =$$
$$= m^2(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

El rango de A será menor que 3 para: m = 0 y m = 1

b) Para m = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Para m = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + y + z = 1$

Sistema **compatible indeterminado,** con solución:

$\mathbf{x = 1 - \lambda - \mu;\ y = \lambda;\ z = \mu}$

5. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde λ es un número real.

a) Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) Dados **a** y **b** números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

compatible determinado con A, la matriz del enunciado?

Solución:

a) Se calcula el producto AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista inversa, $|AB| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2; \lambda = \frac{1}{2}$$

La matriz AB tiene inversa para todos los valores $\lambda \neq -2; \lambda \neq \dfrac{1}{2}$

b) Se escribe el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \lambda z = a \\ x - y - z = b \end{array}\right\}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al de la ampliada y al número de incógnitas. Como el R(A) < 3 = nº de incógnita, se sigue que el sistema no puede ser compatible determinado.

$$R\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{pmatrix}_{1^a - 2^a} = R\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 0 & 3 & \lambda + 1 & a - b \end{pmatrix} = 2$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, igual a 2. Luego **el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b**

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) resolver la ecuación matricial AX + X = B, donde X es una matriz 2×2

b) resolver el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2

Solución:

a) $AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow (A + I)^{-1}(A + I)X =$
$= (A + I)^{-1} B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} B$ [1]

Se calcula la matriz inversa de A + I

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A + I| = 1$

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la igualdad [1]

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $\left.\begin{aligned} 2X + 2Y &= A \\ 4X + 3Y &= B \end{aligned}\right\}$

Multiplicando por 2 la 1ª ecuación y restando la 1ª menos la 2ª:

$Y = 2A - B$

$$Y = 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la 1ª por 3, la 2ª por 2 y restando la 2ª menos la 1ª:

$2X = 2B - 3A$

$$X = \frac{1}{2}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) determina el rango de M según los valores del parámetro **a**

b) determina para qué valores de **a** existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para a = 2

Solución:

a) $|M| = -2a^3 + 2a \Rightarrow -2a^3 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0$ y $a = 1$

Para todo valor $a \neq -1, a \neq 0$ y $a \neq 1$, el rango de M es 3

Para $a = -1$

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2$$

Para $a = 0$

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} = 2$$

Para $a = 1$

$$R\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 2^a - 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

b) Para que exista inversa, $|M| \neq 0$. Luego existe inversa para $a \neq -1, a \neq 0$ y $a \neq 1$

Para $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ |M| = -12$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 2)x - y + z &= 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z &= 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) calcular para qué valores de λ el sistema solo admite la solución

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

b) para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.

c) explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$

Solución:

a) Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|C| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -3$

Para todo valor $\lambda \neq 0, \lambda \neq -3$, R(C) = R(A) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema es homogéneo compatible determinado con la solución (x, y, z) = (0, 0, 0)

b) Se estudian las dos valores de λ

Para $\lambda = 0$, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 2 \cdot 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-15} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 2$$

R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}z;\ y = \frac{3}{5}z$$

La solución en paramétricas es:

$x = -\frac{1}{5}\mu;\ y = \frac{3}{5}\mu;\ z = \mu;\ \mu \in \mathbb{R}$

Para $\lambda = -3$, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{-5} & \cancel{0} \end{pmatrix} = 1$$

R(C) = R(A) = 1 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Queda la ecuación: $-x - y + z = 0 \Rightarrow x = -y + z$

La solución: $x = -\beta, + \mu;\ y = \beta;\ z = \mu;\ \beta, \mu \in \mathbb{R}$

c) Para $\lambda = -3$, las tres ecuaciones son equivalentes. Corresponden a un solo plano.

9. A es una matriz 3×3 tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3

b) calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$, que es solución de la ecuación matricial $X A^3 = B A^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$

c) calcular la matriz inversa de A

Solución:

a) $|A^3| = -1$

Los adjuntos de los términos de la matriz A^3 son:

$A^3_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A^3_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4$

$A^3_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$A^3_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \qquad A^3_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$

$A^3_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$A^3_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A^3_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A^3_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$$(A^3)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X A^3 = BA^2 \Rightarrow X A^3(A^3)^{-1} = BA^2(A^3)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow X = BA^2(A^3)^{-1}$

$$X = (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (5\ \ 6\ \ 2)$$

c) $A^3 = A^2A \Rightarrow (A^3)^{-1}A^3 = (A^3)^{-1}A^2 A \Rightarrow$
$\Rightarrow I = (A^3)^{-1}A^2A \Rightarrow A^{-1} = (A^3)^{-1}A^2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$